

# **MECANICA Y TERMODINAMICA DE SISTEMAS MATERIALES CONTINUOS**



**Andrés L. Granados M.**





# UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

DIVISION DE FISICA Y MATEMATICAS

Departamento de Mecánica

Valle de Sartenejas.  
Caracas. VENEZUELA.

Trabajo de Ascenso en el Escalafón Presentado como Requisito Parcial  
para Optar a la Categoría de “Profesor Asociado”  
(Versión Ampliada y Corregida. Abril, 2015)

## MECANICA Y TERMODINAMICA DE SISTEMAS MATERIALES CONTINUOS

\*\*\*

ANDRES L. GRANADOS M.

\*\*

Marzo, 1999.





**MECANICA Y TERMODINAMICA DE  
SISTEMAS MATERIALES CONTINUOS**

**Andrés L. Granados M.**

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

Departamento de Mecánica

Sartenejas, Baruta, Edo. Miranda

Apdo.89000, Caracas 1080-A

Caracas, Venezuela.

**E-mail:** agrana@usb.ve

DERECHOS RESERVADOS ©1999 Andrés L. Granados M.

**ISBN 980-07-2428-1**

**Mecánica y Termodinámica de Sistemas Materiales Continuos**

Granados M., Andrés L.

**Todos los derechos reservados.**

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,  
por cualquier medio, sin la autorización escrita del autor.

Esta obra se terminó de imprimir  
el 30 de Marzo de 1999 en:

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

Departamento de Producción de Impresos

Sartenejas, Baruta, Edo. Miranda

Caracas, VENEZUELA.

**Tiraje:** 15 ejemplares

Ilustración de la portada: Método Newton-Raphson aplicado al problema complejo  $f(z) = z^4 - 1 = 0$ .

# MECANICA Y TERMODINAMICA DE SISTEMAS MATERIALES CONTINUOS

## Fundamentos, Aplicaciones y Fenómenos

ANDRES L. GRANADOS M.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR. Departamento de Mecánica.

Valle de Sartenejas. Caracas.

Estado Miranda. Venezuela.

### RESUMEN

En esta monografía se han desarrollado modelos matemáticos simplificados para el estudio de los sistemas materiales continuos deformables, tanto para un observador inercial, como desde un observador sobre un sistema se coordenadas no inercial giratorio [3,5]. Se ha establecido la interrelación entre la Mecánica y la Termodinámica de estos sistemas, adoptando una óptica de un modelo unificado, con un léxico y notación igualmente integradores. La notación empleada con frecuencia ha sido la notación simbólica de Gibbs, pero de igual manera en determinados desarrollos ha sido conveniente emplear también, cuando así se haya requerido, la notación matricial y la notación indicial. También se han adoptado algunas simbologías propias de la geometría diferencial moderna.

En una primera parte de *fundamentos* se ha desarrollado la cinemática de los sistemas materiales continuos, los principios de conservación [2] y variacionales [4], luego se abarca el análisis de la dinámica y la termodinámica integradas bajo un modelo unificado, para finalmente establecer un sinúmero de posibilidades en las relaciones constitutivas encontradas para los materiales más conocidos. Desde un inicio se han planteado las ecuaciones de la conservación de masa, de la cantidad de movimiento lineal y angular para sistemas generales pasando a través de volúmenes de control también generales. Estas mismas ecuaciones se han simplificado substancialmente para sistemas abiertos con entrada y salida uniformes aplicando el teorema generalizado de Pappus a las integrales de volumen.

Se han planteado las ecuaciones de la conservación de la energía tanto de manera total como en sus partes mecánica y térmica y la ecuación de conservación de la entropía. Estas mismas ecuaciones y las anteriormente nombradas se han obtenido tanto para un enfoque diferencial como un enfoque integral, y en este último caso se han identificado la primera y segunda ley de la termodinámica, tales como las conocemos clásicamente con las características fundamentales de los sistemas cerrados y abiertos a los que se aplica. Sin embargo, con una descripción más profunda y moderna que en los modelos clásicos.

En una segunda parte de *aplicaciones* se ha tratado de hacer una introducción a los distintos comportamientos que presentan los materiales más conocidos. Entre ellos están los sólidos rígidos, los fluidos perfectos, los fluidos viscosos, los sólidos elásticos, los materiales viscoelásticos, los sólidos plásticos y los sistemas multicomponentes. En esta parte se ha pretendido mostrar como se reducen los modelos generales de la primera parte aplicados a materiales específicos. El planteamiento que se hace sigue una lógica deductiva, recorriendo el desarrollo de los modelos en el sentido de lo general a lo particular. En un futuro se espera incluir un capítulo dedicado a Sistemas Multifásicos.

En una tercera parte de *fenómenos* se han introducido diferentes fenómenos dentro de los sistemas materiales continuos. Se ha comenzado con un capítulo dedicado a La Turbulencia y otro dedicado a La Relatividad, y se espera en un futuro incluir: Transporte, Ondas, Estabilidad, Radiación y Electromagnetismo.

Un capítulo adicional de métodos numéricos seleccionados enfocados a resolver problemas específicos podría en el futuro completar esta parte.

En los *Apéndices* se incluye todo aquello que se pensó necesario para hacer esta monografía autocontenida. Se incluyeron los temas de Vectores y Tensores Cartesianos y Absolutos, Álgebra Lineal, Topología y Análisis Funcional y Métodos Matemáticos. En los dos primeros de estos apéndices de este trabajo se ha realizado, siguiendo el enfoque de la geometría diferencial moderna, la deducción generalizada de La Regla de Leibniz [1,2] de transformación de la derivada de una integral con límites dependientes del parámetro de derivación. Esta regla se ha considerado como la herramienta central para la demostración de los teoremas del transporte de Reynolds, y a partir de este deducir todos los principios de conservación. En el Apéndice de Topología y Análisis Funcional se desarrolló toda una sección de Análisis Variacional, bastante completa y original, para el rápido desenvolvimiento y desarrollo del Capítulo de Principios Variacionales [3,4]. No de menor interés es la Sección de Transformada de Legendre de este apéndice, tan necesaria para la justificación de las Relaciones Termodinámicas del Capítulo de Termodinámica de los Sistemas Materiales. En el transcurrir de la lectura se hace metódicamente mención a resultados que en los apéndices se encuentran descritos en toda su extensión. Se han incluido adicionalmente un capítulo de Métodos Matemáticos, con métodos de uso frecuente dentro del temario, como por ejemplo, resolución de ecuaciones algebraicas y diferenciales, Teorema Pi, y las herramientas necesarias para el estudio de la turbulencia (análisis de Fourier y Probabilidad-Estadística) [6]. Se espera en un futuro incluir algunos fundamentos de Análisis Numérico que complementarían al capítulo de Métodos Numéricos arriba mencionado.

Las siguientes referencias producidas en la década de finales del siglo pasado y principios del actual, constituyen la inspiración inicial de esta obra que se ha extendido en su contenido y habrá de extenderse todavía más.

## Referencias

- [1] Granados M., A. L. "Reynolds Transport Theorems as a Special Application of Leibniz Rule". **Proceedings of The Third Caribbean Congress on Fluid Dynamics and The Third Latin-American Symposium on Fluid Mechanics**. Universidad Simón Bolívar. Sartenejas, del 5 al 9 de Febrero de 1995.
- [2] Granados M., A. L. "Aplicaciones de la Regla de Leibniz: Teoremas del Transporte de Reynolds y Principios de Conservación". **Boletín Técnico IMME** (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales - Universidad Central de Venezuela), Vol.**34**, No.3, pp.1-31, Octubre de (1996).
- [3] Granados M., A. L. "Mechanics of Continuous Material Systems". **Applied Mechanics in the Americas**. Vol.**5**: "Mechanics of Fluids, Thermal Problems, Optimization and Control, Experimental and Numerical Methods, Biomechanics, Applications". Edited by M. Rysz, L. A. Godoy, L. E. Suárez, College of Engineering, University of Puerto Rico at Mayagüez, pp.87-90, August 1996. *Proceedings of the Fifth Pan-American Congress of Applied Mechanics, PACAM V*. Hotel San Juan Marriott, San Juan of Puerto Rico, January 2-4, 1997.
- [4] Granados M., A. L. *Principios Variacionales en la Mecánica del Continuo*. **Boletín Técnico IMME** (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales - Universidad Central de Venezuela), Vol.**36**, No.1, pp.19-42, Marzo de (1998).
- [5] Granados, A. "Mecánica de Sistemas Materiales Continuos Desde Marcos de Referencia No Inerciales". Revista **Boletn Técnico IMME** (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales - Universidad Central de Venezuela), Vol.**40**, No.1, pp.59-94, Marzo de (2002).
- [6] Granados, A. L. **Flujo Turbulento Cargado con Partículas Sólidas en una Tubería Circular**, Tesis Doctoral, Univ. Politécnica de Madrid, E. T. S. Ing. Industriales, 2003.



## **DEDICATORIA**

Dedico este trabajo a mi querida esposa Magaly y a mis adoradas hijas Andreína y Andrea, con todo el amor del mundo.

También deseo manifestar la satisfacción que siento al ofrecer este legado como un acto de reverencia a ...

## **LA NATURALEZA**

La Naturaleza es una sola, pero es amplia en variedad y extensa en dimensión. Las herramientas para estudiarla son vastas en cantidad, y, aquellos sedientos de conocimiento, siempre pueden encontrar un espacio de incertidumbres donde investigar, siendo esto posible dentro de un interminable transcurrir de descubrimientos. Estos hallazgos, dependientes de los diferentes campos del saber, muchas veces parecen estar desligados unos de otros, produciendo la sensación de carencia de un orden racional o divino que los unifica. Sin embargo, es reconfortante saber, aunque al mismo tiempo desconcierta, que este orden existe, y, la única justificación tangible de ello, es que la Naturaleza es una sola.

**Andrés L. Granados M.**



## PREFACIO

Dos razones importantes motivaron a la elaboración de este trabajo. La primera de estas razones fue la necesidad de contar con un compendio de información que normalmente se consigue en diferentes textos con diversidad de enfoques, y al mismo tiempo desarrollar en su lugar un enfoque unificador con una notación consistentemente integrada. La segunda razón obedeció a la necesidad de desarrollar una monografía sobre mecánica y termodinámica de los sistemas materiales continuos que pudiera eventualmente servir para los cursos de post-grado en Ingeniería Mecánica, que contuviera simultáneamente los conocimientos impartidos en cursos aparentemente disímiles como mecánica racional, mecánica de fluidos, mecánica de sólidos, mecánica de materiales mecánica de los medios continuos, reología, sistemas multicomponentes, fenómenos de transporte, termodinámica, etc., y adicionalmente que hiciera una breve introducción al análisis tensorial, cartesianos y absolutos, al álgebra, lineal y superior, a la topología y al análisis funcional, tan necesarios para el entendimiento matemáticamente formal de los temas mencionados.

En esta monografía se han desarrollado modelos matemáticos simplificados para el estudio de los sistemas materiales continuos deformables, tanto para un observador inercial, como desde un observador sobre un sistema se coordenadas no inercial giratorio. Se ha establecido la interrelación entre la mecánica y la termodinámica de estos sistemas, adoptando una óptica de un modelo unificado, con un léxico y notación igualmente integradores. La notación empleada con frecuencia ha sido la notación simbólica de Gibbs, pero de igual manera en determinados desarrollos ha sido conveniente emplear también, cuando así se haya requerido, la notación indicial y la notación matricial. También se han adoptado algunas simbologías propias de la geometría diferencial moderna.

En una primera parte de *fundamentos* se ha desarrollado la cinemática de los sistemas materiales continuos, los principios de conservación y variacionales, luego se abarcar el análisis de la dinámica y la termodinámica integradas bajo un modelo unificado, para finalmente establecer un sinúmero de posibilidades en las relaciones constitutivas encontradas para los materiales más conocidos. Desde un inicio se han planteado las ecuaciones de la conservación de masa, de la cantidad de movimiento lineal y angular de la energía y la entropía para sistemas materiales generales pasando a través de volúmenes de control también generales. Estas mismas ecuaciones se han simplificado substancialmente para sistemas abiertos con entrada y salida uniformes aplicando el teorema generalizado de Pappus a las integrales de volumen.

Aunque la presentación de los diferentes títulos de los temas involucrados pueda sonar como que esta monografía repite lo que ya está escrito en publicaciones especializadas, se ha hecho un esfuerzo grande en desarrollos teóricos para enlazar de una forma holística los diferentes enfoques encontrados. De suma importancia ha resultado el desarrollo general de la Regla de Leibniz y la formulaciones variacionales de los medios continuos, presentados en toda su extensión en los apéndices, para los capítulos de la parte de fundamentos.

No de menos importancia ha sido también la presentación de la Mecánica Racional Clásica, tradicionalmente aplicada a partículas, sistemas de partículas, o sólidos rígidos, aplicada en esta oportunidad a medios continuos o colección de medios continuos con interfases de discontinuidad (lo que esta monografía denominamos, usando una terminología original, *Sistemas Materiales Continuos*). Aquí, esta Mecánica Racional se ha entrelazado con la Termodinámica Racional (usamos este término para distinguirla de la Termodinámica Clásica basada fundamentalmente en las idealizaciones de las máquinas térmicas), mostrando la interrelaciones que existen entre estas dos áreas del conocimiento, aparentemente disímiles. Todo esto se hace siguiendo simultáneamente un enfoque integral y otro diferencial que se compagan en todo momento.

En una segunda parte de *aplicaciones* se ha tratado de hacer una introducción a los distintos comportamientos que presentan los materiales más conocidos. Entre ellos están los sólidos rígidos, los fluidos perfectos, los fluidos viscosos y los sólidos elásticos, los materiales viscoelásticos, los sólidos plásticos y los sistemas multicomponentes. En esta parte se ha pretendido mostrar como se reducen los modelos generales de la primera parte aplicados a materiales específicos. El planteamiento que se hace sigue una lógica deductiva, recorriendo el desarrollo de los modelos en el sentido de lo general a lo particular.

Se han planteado las ecuaciones de la conservación de la energía tanto de manera total como en sus partes mecánica y térmica y la ecuación de conservación de la entropía. Estas mismas ecuaciones y las

anteriormente nombradas se han obtenido tanto para un enfoque diferencial como un enfoque integral, y en este último caso se han identificado la primera y segunda ley de la termodinámica, tales como las conocemos clásicamente con las características fundamentales de los sistemas cerrados y abiertos a los que se aplica. Sin embargo, con una descripción más profunda y moderna que en los modelos clásicos.

En un futuro se espera incluir un capítulo adicional dedicado a Sistemas Multifásicos y sus casos particulares.

En una tercera parte de *fenómenos*, se han iniciado las labores de introducir los diferentes fenómenos dentro de los sistemas materiales continuos. Se ha comenzado con un capítulo dedicado a La turbulencia y se espera en un futuro incluir adicionalmente: Transporte, Ondas, Estabilidad, Radiación, Electromagnetismo y Relatividad, por ejemplo. Un capítulo adicional de métodos numéricos seleccionados, enfocados a resolver problemas específicos, podría en el futuro completar esta parte.

En los *apéndices* se incluye todo aquello que se pensó necesario para hacer esta monografía autocontenida. Se incluyeron los temas de vectores y tensores cartesianos y absolutos, álgebra lineal, topología y análisis funcional. En los dos primeros de estos apéndices de este trabajo se ha realizado, siguiendo el enfoque de la geometría diferencial moderna, la deducción generalizada de La Regla de Leibniz de transformación de la derivada de una integral con límites dependientes del parámetro de derivación. Esta regla se ha considerado en esta obra como la herramienta central para la demostración de los Teoremas del Transporte de Reynolds, y a partir de este deducir todos los principios de conservación. En el Apéndice D de Topología y Análisis Funcional se desarrolló toda una Sección de Análisis Variacional, bastante completa y original, para el rápido desenvolvimiento y desarrollo de las ideas expuestas en el Capítulo de Principios Variacionales. No de menor interés es la Sección de Transformada de Legendre de este apéndice, tan necesaria para la justificación de las Relaciones Termodinámicas del Capítulo de Termodinámica de los Sistemas Materiales. En el transcurrir de la lectura se hace metódicamente mención a resultados que en algunos o varios de los apéndices se encuentran descritos en toda su extensión.

Se han incluido adicionalmente un capítulo de métodos matemáticos, con métodos y conceptos de uso frecuente dentro del temario, como por ejemplo, ecuaciones algebraicas y diferenciales, teorema Pi, y las herramientas necesarias para el estudio de la turbulencia (análisis de Fourier y Probabilidad-Estadística). Se espera en un futuro incluir algunos fundamentos de Análisis Numérico que complementarían al capítulo de métodos numéricos arriba mencionado.

Todo el temario de este texto se ha estructurado en quince (15) capítulos y cinco (5) apéndices:

#### **Fundamentos**

- Cinemática de los Sistemas Materiales.
- Análisis de Esfuerzos.
- Principios de Conservación.
- Principios Variacionales.
- Dinámica de los Sistemas Materiales.
- Termodinámica de los Sistemas Materiales.
- Relaciones Constitutivas.

#### **Aplicaciones**

- Sólidos Rígidos.
- Fluidos Perfectos.
- Fluidos Viscosos.
- Sólidos Elásticos.
- Materiales Viscoelásticos.
- Sólidos Plásticos.
- Sistemas Multicomponentes.

## Fenómenos

- Turbulencia.
- Relatividad.

## Apéndices

- Vectores y Tensores Cartesianos.
- Análisis Tensorial Absoluto.
- Algebra Lineal y superior.
- Topología y Análisis Funcional.
- Métodos Matemáticos.

numerados con números romanos para los capítulos y letras latinas mayúsculas para los apéndices.

Todos los temas tratados en este texto se han enfocado desde el punto de vista del estudio de los fundamentos y muy poca atención o casi ninguna se le ha dado a aquellos resultados reportados mediante correlaciones experimentales o que no tengan una sólida base teórica. Estos resultados se pueden obtener con lujo de detalle en textos especializados en cada tema en particular con aplicaciones en ingeniería o en publicaciones periódicas referenciadas en los mismos. En este contexto se ha tratado de conservar el rigor matemático y la formalidad que se desea en este trabajo. Sin embargo, muchas de las deducciones con un trasfondo puramente matemático se han dejado resumidas en los apéndices o se ha remitido a una referencia más especializada. Tampoco se ha tratado de hacer un desarrollo puramente axiomático de la Mecánica y la Termodinámica, tal como fue propuesto por Hilbert a principios de siglo [Hilbert,1901].

Los Capítulos del I al VII en su globalidad de **Fundamentos** de la mecánica y termodinámica de los sistemas materiales continuos, sin hacer referencia explícita del material. El sistema muy bien puede ser un medio continuo rígido o deformable y en la mayoría de los casos los resultados pueden extrapolarse a sistemas materiales discretos o de partículas. Se incluye en el Capítulo VII un tratamiento formal de la teoría de las relaciones constitutivas desde un punto de vista general, aplicada a una gran diversidad de materiales fluidos o sólidos.

Los Capítulos del VIII al XIV tratan de las **Aplicaciones** a los materiales. Allí se presenta la descripción de ciertos sistemas ya más específicos como los son los fluidos y los sólidos, haciendo sobre todo énfasis en las relaciones constitutivas del tipo lineal. Con este enfoque se describen los comportamientos de los sólidos rígidos, elásticos y plásticos, y los fluidos (gases y líquidos) perfectos y viscosos, y los materiales (líquidos y sólidos) viscoelásticos. En esta parte se incluyen también los sistemas multicomponente.

En la parte de los **Fenómenos**, el capítulo XV incorpora una introducción a la turbulencia con algunos modelos clásicos como turbulencia isótropa, longitud de mezcla,  $k - \varepsilon$  en su versión de altos números de Reynolds. Sin embargo, se introducen métodos relativamente nuevos como  $k - \varepsilon$  en su versión de bajos números de Reynolds y modelos de grandes escalas (LES - Large Eddy Simulation) en su versión dinámica. En esta misma parte se ha incluido el capítulo XVI donde se ha hecho una introducción al fenómeno de La Relatividad tanto Especial como General, aunque realmente los sistemas materiales se tratan en la Teoría de la Relatividad General. En esta sección se tratan los temas de ecuaciones del campo gravitacional, agujeros negros y órbitas planetarias, para finalizar con cuerpos másicos en el espacio y un aspecto cosmológico.

En los **Anexos** existen en total cinco (5) apéndices, identificados con las letras de de la A hasta la E, que han sido colocados para hacer consultas rápidas acerca de cuestiones de contenido matemático, que de otra manera recargarían el texto en su parte principal. Los dos primeros apéndices A y B hacen una breve introducción al análisis vectorial y tensorial en coordenadas cartesianas y coordenadas curvilíneas, respectivamente, como un instrumento necesario para tratar los temas que se presentan en el texto. En estos capítulos el tratamiento de los temas es formal tratando de ser lo más general posible, sin embargo, se han omitido demostraciones y fundamentos que son importantes mas no imprescindibles, puesto que no son el objetivo primordial de este texto. Para aquellas personas no interesadas en la parte matemática de este trabajo, el apéndice de los vectores y tensores cartesianos es suficiente para comprender a nivel introductorio la mayoría de los temas expuestos. Sin embargo, para aquellas personas que sí estén interesadas en una formalidad matemática mayor, los apéndices subsiguientes, C de algebra lineal y superior, y D de topología

y análisis funcional, pueden llenar ese vacío de conocimientos de manera rápida, y que de otra forma llevaría mucho tiempo de estudio.

El apéndice E de Métodos Matemáticos se ha anexado para recordarle al lector algunas técnicas analíticas para resolver ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Se ha incluido también una deducción original del teorema II de Buckingham y todas aquellas herramientas necesarias para el estudio de la turbulencia, como el análisis de Fourier y la teoría de las probabilidades y la estadística matemática. Se incluyen dentro de los anexos la notación y la bibliografía generales.

Los capítulos han sido numerados con números romanos, como ya se habrá visto, las secciones con números consecutivos y las sub-secciones y subsub-secciones con números de apartados de los números de las secciones y sub-secciones respectivamente. Es decir, por ejemplo, el Capítulo VII tiene una Sección 2., una Sub-sección 2.1. y una Subsub-sección 2.1.3. Cuando se hace dentro del texto una referencia a una sección o sub-sección en particular se menciona de la siguiente manera: ... ver la Sección VII.2. ... o ... ver la Sección VII.2.1.3. En caso de que se esté referenciando una parte del texto perteneciente al mismo capítulo o a la misma sección, esta información se omite. Los apéndices han sido ordenados según las letras del alfabeto latino en mayúscula, por ejemplo, Apéndice A, Apéndice B, etc. La organización interna de cada Apéndice es la misma que para los capítulos. Existe una tabla de contenido general al principio del texto, sin embargo, al principio de cada capítulo o apéndice se ha colocado una tabla de contenido más detallada para facilitar la búsqueda de los temas de interés para el lector. Por ejemplo, el tema “Vigas de Grandes Deflecciones”, donde se presenta el modelo del látigo para modelar la respuesta transitoria bajo todos los efectos simultáneos (tracción, flexión, corte y torsión), se explica en la Sección XI.3. El tema “Teorema de Bernoulli”, con un nuevo triple enfoque para líneas de corriente y tubos de corriente (energía y potencia) incluyendo el efecto de los esfuerzos viscosos, se encuentra en la Sección IX.1.4. El tema “Aplicaciones de la Regla de Leibniz: Teoremas del Transporte de Reynolds y Principios de Conservación”, con una presentación novedosa (de lo matemático a lo físico), se haya distribuido en las Secciones I.1.4, I.2.3, III.2.1, III.2.2, III.3.1. El tema “Mecánica de Sistemas Materiales Continuos Desde Marcos de Referencia No Inerciales”, mostrando la derivación intrínseca corrotacional y la influencia de la velocidad y aceleración angulares, se haya distribuido en las Secciones I.2.1, I.2.2, A.2.3, A.2.5, B.2.4. La identificación de cada capítulo o apéndice y su correspondiente sección se haya en el pie de página correspondiente de manera alternada.

Las ecuaciones han sido numeradas de forma consecutiva por sub-secciones. Para referenciar las ecuaciones se hace de la siguiente forma: ... basado en la ecuación VII.2.1.(12) ..., cuyo significado es obvio. Para las ecuaciones también es válida la observación hecha antes con respecto a la información superflua. Así que si estoy dentro del mismo capítulo se diría ... ecuación 2.1.(12) ... , o si se está en la misma sub-sección simplemente se habla de la ecuación (12). En alguna ocasiones un grupo de ecuaciones se numera con un sólo número. En estos casos debe entenderse que las ecuaciones internas están ordenadas con letra de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Por ejemplo, ... ver ecuación (10.c) ... Aunque el grupo de ecuaciones esté numerado con el número (10) solamente, se entenderá que la ecuación a la que se hizo referencia es la tercera dentro del grupo.

Los axiomas, definiciones, proposiciones, lemas, teoremas y corolarios han sido numerados de forma consecutiva por sub-secciones, al igual que las ecuaciones, con la particularidad de que cuando se referencia el número, en lugar de aparecer entre paréntesis, se presentará en negrillas. Por ejemplo, ... Teorema A.3.2.1. Una consideración adicional es que cuando en una sub-sección exista un sólo teorema, axioma, etc., este no se numerará, sin embargo se sobreentenderá que es el teorema, axioma, etc. número 1 de esa sub-sección. Las tablas y figuras siguen también esta misma filosofía de numeración y referencia.

En las definiciones de conceptos (diferentes a las definiciones rigurosas y sistemáticas del párrafo anterior), cuando aparezcan por primera vez, se colocará la palabra o palabras definidas en *letras inclinadas*.

Para las referencias bibliográficas no se sigue el mismo principio que las ecuaciones para referirlas. Todos los capítulos disponen al final un listado de las bibliografías más importante a las cuales puede o no hacerse referencia. Esto se hizo así porque, aparte de las referencias, el material de la bibliografía se ha revisado en su extensión para extraer de él (o o contrariamente rechazar) el enfoque propuesto por los diferentes autores. Sin embargo, estos enfoques generalizados, en la mayoría de los casos, no se ha podido referenciar de manera específica, porque están diluidos en varias de las obras. Por consiguiente, es posible

encontrar la misma obra o artículo en dos o más de estos listados de bibliografías. Esto mismo que se hace con los capítulos se hace también con los apéndices. Las bibliografías se han ordenado en cada listado de forma alfabética, empleando al mismo tiempo un número entre corchetes para indicar el lugar que ocupa dentro de dicho ordenamiento. Al final del texto se ha ordenado una bibliografía general que recoge la totalidad de las obras bibliográficas anexada a cada capítulo o apéndice y adicionalmente se ha anexado una lista de las publicaciones periódicas de interés para la temática del texto.

Existe una única forma para hacer mención a una referencia. Esta forma es mediante el apellido del primer autor y el año entre corchetes o entre paréntesis. Cuando el año de la publicación está encerrado entre paréntesis significa que la publicación es periódica, y, en caso contrario, significa que es una monografía, por ejemplo, ... ver la referencia [Slattery,1972], o ... ver a [Hansen,(1965)]. Esta última referencia también se puede escribir como ...ver a Hansen [(1965)]... para no ser redundante si es necesario que el autor se mencione en el texto. Cuando para un mismo apellido de autor y un mismo año existen dos publicaciones o más, se anexa al año las diferentes letras minúsculas del alfabeto. Por ejemplo, ...[Truesdell,1960.a]...[Truesdell,1960.b]. Finalmente, cuando se desea mencionar un nombre o un autor que a su vez es referenciado en otra parte, este debe aparecer fuera de los corchetes. Por ejemplo, ... Noll-Gurtin [Truesdell,1960], aunque Noll y Gurtin no sean los autores de la referencia [Truesdell,1960]. Dentro de los corchetes puede aparecer eventualmente información adicional a la referencia como el capítulo o las páginas donde aparece, como por ejemplo, ...[Truesdell,1960;§.81,p.347]. El símbolo ‘Chp.’ se emplea para los capítulos, el símbolo ‘§’ se emplea para indicar las secciones o subsecciones, el símbolo ‘¶’ se emplea para indicar los párrafos y el símbolo ‘p’ para indicar las páginas. Cuando estos símbolos aparecen dos veces significa que son varias las entidades a la que se hace referencia, las cuales se pueden indicar como un rango de cantidades separadas por el símbolo ‘-’.

La notación usada en el texto es la convencional para estos temas, sin embargo, al final del texto se ha hecho un anexo con la notación más importante. De manera general, se puede decir que se ha empleado la notación simbólica de Gibbs, empleando itálicas para los escalares, negrillas minúsculas para los vectores y negrillas mayúsculas para los tensores de orden dos o más. Esta regla, aunque en general tiene muy pocas excepciones, se puede violar en algunos casos mencionando ampliamente el carácter de la cantidad que se especifica (por ejemplo, el tensor métrico en el Apéndice B se designa por  $\mathbf{g}$ ). El producto escalar se especifica con un punto ( $\cdot$ ), el producto vectorial se especifica con una cruz ( $\times$ ) y la doble contracción del producto de dos tensores de segundo orden (o producto escalar de dos tensores) se especifica con el doble punto ( $:$ ). Puede existir también, en algunos casos, una triple contracción. Adicionalmente, se ha definido el producto punto ( $\cdot$ ) o contracción simple de un tensor y un vector, como la transformación de este por aquel, significando al mismo tiempo que existe una contracción en los índices adyacentes en las componentes (cuando se expresa en notación indicial). Algo similar se ha definido para el producto cruz ( $\times$ ) de un tensor y un vector, donde el producto solamente afecta los vectores bases adyacentes al símbolo de multiplicación. También se define el producto cuña ( $\wedge$ ) como el producto exterior y su relación con el producto cruz y con el producto tensorial. El producto tensorial, para los efectos de simplificar la notación en la gran mayoría de los casos, se indica como un producto diádico y no con una cruz encerrada en un círculo ( $\otimes$ ), como normalmente se hace en los textos de análisis matemático. Sin embargo, en donde se hace necesario emplear el producto tensorial de forma explícita se emplea el símbolo antes mencionado. La notación matricial se ha prácticamente confinado al capítulo de álgebra lineal y superior, pero en los temas principales aparece eventualmente. En este caso se ha usado la notación de la variable en negrillas encerradas entre corchetes para las matrices ( $n \times n$  elementos componentes de un tensor de segundo orden y dimensión  $n$ ) y encerradas entre llaves para los vectores ( $n$ -uplas componentes de un vector de dimensión  $n$ ), especificando donde sea necesario la base usada como un subíndice fuera de los símbolos de agrupación.

Todos los errores que pudiera presentar esta monografía son de exclusiva responsabilidad del autor y no involucra de ningún modo a la institución donde se generó, ni a la bibliografía consultada. Cualquier comentario de forma o de fondo acerca de esta obra será bien recibido por el autor, puesto que se está bien seguro que ellos redundarán en mejoras y añadiduras, que de otra forma tardarían mucho más tiempo en realizarse.

Finalmente se desea dar las gracias a todas aquellas personas que de una u otra forma se han interesado en esta obra, haciendo sus observaciones de manera oportuna. A los profesores colegas, cuyas discusiones

y dudas acerca de algunos temas relacionados dieron la idea de publicar un trabajo que eliminara las ambigüedades y aclarara las dudas. A los estudiantes del curso de postgrado sobre la Mecánica de Medios Continuos, cuya ingenuidad hizo en múltiples oportunidades que se reformulara o parafraseara parte del contenido para su mejor entendimiento, cuando aún estaba escribiendo el borrador de esta obra.

En esta oportunidad esta monografía se ha justificado como trabajo de ascenso del autor para optar a la categoría de Asociado en la Universidad Simón Bolívar, sin embargo, existe un deseo muy intenso de que se trascienda esta frontera. Se espera que sea de mucha utilidad, tanto para los cursos donde se pueda emplear como material de apoyo, como para su uso en calidad de material de consulta, aquí en esta universidad y en otras universidades e instituciones.

Andrés L. Granados M.  
**UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR**  
**Departamento de Mecánica**  
Caracas, Venezuela, Junio de 2002



# CONTENIDO

<b>DEDICATORIA.</b>	v
<b>PREFACIO.</b>	vii
<b>CONTENIDO.</b>	xiii
<b>INTRODUCCION.</b>	1
1. DEFINICION DE FLUIDO, SOLIDO Y MEDIO CONTINUO.	1
2. SISTEMA MATERIAL DISCRETO Y CONTINUO.	2
3. SISTEMA DE COORDENADAS, SISTEMA DE REFERENCIA Y MARCO DE REFERENCIA.	3
4. VECTORES Y TENSORES CARTESIANOS Y ABSOLUTOS.	4
5. NOTACION SIMBOLICA, MATRICIAL E INDICIAL.	4
6. MECANICA (ESTATICA, CINEMATICA Y DINAMICA) Y TERMODINAMICA.	5
BIBLIOGRAFIA.	6
<b>CAPITULO I. CINEMATICA DE LOS SISTEMAS MATERIALES.</b>	7
1. MOVIMIENTO.	9
2. FLUJO.	22
3. DEFORMACIONES.	37
BIBLIOGRAFIA.	61
<b>CAPITULO II. ANALISIS DE ESFUERZOS.</b>	67
1. TRACCION Y ESFUERZO.	67
2. ESTADO DE ESFUERZO.	71
3. CRITERIOS DE FALLA.	76
4. TENSION SUPERFICIAL.	79
BIBLIOGRAFIA.	82
<b>CAPITULO III. PRINCIPIOS DE CONSERVACION.</b>	85
1. CONSERVACION DE MASA.	87
2. CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.	88
3. CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR.	92
4. CONSERVACION DE LA ENERGIA.	96
5. CONSERVACION DE LA ENTROPIA.	102
6. ECUACION GENERAL DE CONSERVACION.	105
BIBLIOGRAFIA.	109
<b>CAPITULO IV. PRINCIPIOS VARIACIONALES.</b>	113
1. PRINCIPIO DE HAMILTON.	113
2. SISTEMAS DISCRETOS.	114
3. SISTEMAS CONTINUOS.	116

BIBLIOGRAFIA.	120
<b>CAPITULO V. DINAMICA DE LOS SISTEMAS MATERIALES.</b>	123
1. ECUACIONES UNIVERSALES DE LA MECANICA.	124
2. SIMPLIFICACION PARA FUNCIONES UNIFORMES.	137
BIBLIOGRAFIA.	140
<b>CAPITULO VI. TERMODINAMICA DE LOS SISTEMAS MATERIALES.</b>	143
1. PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA.	144
2. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA.	148
3. RELACIONES TERMODINAMICAS.	151
BIBLIOGRAFIA.	157
<b>CAPITULO VII. RELACIONES CONSTITUTIVAS.</b>	159
1. INTRODUCCION.	159
2. MATERIALES SIMPLES.	163
BIBLIOGRAFIA.	169
<b>CAPITULO VIII. SOLIDOS RIGIDOS.</b>	175
1. ECUACIONES ESPECIALES.	175
2. FORMULACION DE EULER.	177
BIBLIOGRAFIA.	178
<b>CAPITULO IX. FLUIDOS PERFECTOS.</b>	181
1. FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO.	182
2. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (INCOMPRESIBLES).	201
2. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (COMPRESIBLES).	216
BIBLIOGRAFIA.	225
<b>CAPITULO X. FLUIDOS VISCOSOS.</b>	227
1. FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO.	228
2. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (ESTACIONARIOS).	236
3. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (TRANSITORIOS).	240
4. TEORIA DE LA CAPA LIMITE.	247
BIBLIOGRAFIA.	259
<b>CAPITULO XI. SOLIDOS ELASTICOS.</b>	261
1. FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO.	262
2. PROBLEMAS FUNDAMENTALES.	267
3. VIGAS CON GRANDES DEFLEXIONES.	272
BIBLIOGRAFIA.	277

<b>CAPITULO XII. MATERIALES VISCOELASTICOS.</b>	281
1. FLUIDOS VISCOELASTICOS.	281
2. SOLIDOS VISCOELASTICOS.	286
BIBLIOGRAFIA.	287
<b>CAPITULO XIII. SOLIDOS PLASTICOS.</b>	287
1. DEFORMACIONES ELASTICAS.	287
2. DEFORMACIONES PLASTICAS.	289
BIBLIOGRAFIA.	294
<b>CAPITULO XIV. SISTEMAS MULTICOMPONENTES.</b>	297
1. DIFUSION.	297
BIBLIOGRAFIA.	298
<b>CAPITULO XV. TURBULENCIA.</b>	303
1. INTRODUCCION.	304
2. ECUACIONES FUNDAMENTALES PROMEDIADAS.	319
3. MODELOS DE TURBULENCIA.	329
BIBLIOGRAFIA.	348
<b>CAPITULO XVI. RELATIVIDAD.</b>	351
1. RELATIVIDAD ESPECIAL.	351
2. RELATIVIDAD GENERAL.	356
BIBLIOGRAFIA.	367
<b>APENDICE A. VECTORES Y TENSORES CARTESIANOS.</b>	371
1. ALGEBRA.	374
2. CALCULO.	395
BIBLIOGRAFIA.	440
<b>APENDICE B. ANALISIS TENSORIAL ABSOLUTO.</b>	443
1. ALGEBRA.	444
2. CALCULO.	450
3. GEOMETRIA.	466
BIBLIOGRAFIA.	468
<b>APENDICE C. ALGEBRA LINEAL Y SUPERIOR.</b>	471
1. OPERACIONES BINARIAS.	473
2. CUERPO.	474
3. ESPACIO VECTORIAL.	475
4. TRANSFORMACION LINEAL.	478
5. ESPACIO PRODUCTO INTERIOR.	486
6. GRUPO.	489

7. ANILLO.	490
8. MODULO.	490
9. FORMAS Y TENSORES.	491
10. ALGEBRA LINEAL.	494
BIBLIOGRAFIA.	495
<b>APENDICE D. TOPOLOGIA Y ANALISIS FUNCIONAL.</b>	497
1. ESPACIOS METRICOS.	498
2. CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS.	500
3. CONECTIVIDAD Y COMPACIDAD.	505
4. SUCESSIONES.	507
5. ESPACIOS NORMADOS.	508
6. ESPACIOS EUCLIDEOS.	509
7. INTEGRALES ACOTADAS.	510
8. ANALISIS VARIACIONAL.	512
9. TRANSFORMADA DE LEGENDRE.	525
BIBLIOGRAFIA.	532
<b>APENDICE E. METODOS MATEMATICOS.</b>	535
1. METODOS ANALITICOS DIRECTOS.	536
2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.	542
3. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.	545
4. TRANSFORMADAS INTEGRALES.	552
5. PROBABILIDAD Y ESTADISTICA.	567
6. PERTURBACIONES.	573
BIBLIOGRAFIA.	574
<b>NOTACION.</b>	581
1. LISTA DE SIMBOLOS PRINCIPALES.	581
2. LISTA DE SIMBOLOS GRIEGOS.	585
3. LISTA DE SUBINDICES.	587
4. LISTA DE SUPERINDICES.	588
5. LISTA DE SIMBOLOS ESPECIALES.	589
<b>BIBLIOGRAFIA.</b>	591
BIBLIOGRAFIA GENERAL.	591
PUBLICACIONES PERIODICAS.	615

# INTRODUCCION

## CONTENIDO

1. DEFINICION DE FLUIDO, SOLIDO Y MEDIO CONTINUO.	1
2. SISTEMA MATERIAL DISCRETO Y CONTINUO.	2
3. SISTEMA DE COORDENADAS, SISTEMA DE REFERENCIA Y MARCO DE REFERENCIA.	3
4. VECTORES Y TENSORES CARTESIANOS Y ABSOLUTOS.	4
5. NOTACION SIMBOLICA, MATRICIAL E INDICIAL.	4
6. MECANICA (ESTATICA, CINEMATICA Y DINAMICA) Y TERMODINAMICA.	5
BIBLIOGRAFIA.	6

### 1. DEFINICION DE FLUIDO, SOLIDO Y MEDIO CONTINUO.

Se define a un fluido como aquel material sobre el cual se puede producir una deformación permanente al someterlo a un esfuerzo cortante. Dentro de los fluidos podemos distinguir dos estados, el líquido y el gaseoso, distinguidos entre si por tener el primero una estructura molecular mucho más confinada que el segundo, debida a las fuerzas de cohesión entre las moléculas. En los gases esta fuerza de cohesión es prácticamente inexistente.

Existen fluidos que tienen la capacidad de recuperar parte de la deformación sobre ellos producida y se denominan viscoelásticos. Todos los fluidos presentan una estructura molecular muy parecida, la cual las moléculas se mueven libremente excepto cuando chocan con otras, y no presentan una estructura cristalina definida. Sin embargo, existen materiales fluidos que se denominan *tixotrópicos* o *reopéticos* que presentan una estructura cristalina, que se destruye o que se restituye, al someterlos a una deformación tangencial, respectivamente. Existen también materiales que presentan un esfuerzo cortante de fluencia y que se denominan fluidos de Bingham.

Todos aquellos fluidos que se denominan viscosos poseen la característica de oponerse a la deformación a la que han sido sometidos. Existen fluidos viscosos de distintos grados de complejidad dependiendo de la relación constitutiva del material, que relaciona esfuerzo con deformación. Se tiene así los fluidos de Rivlin-Ericksen, los fluidos stokesianos y los fluidos maxwellianos, y los más sencillos y más comunes en la naturaleza, los fluidos newtonianos, que son un caso particular de los fluidos stokesianos. Inclusive, existen fluidos con memoria cuya relación constitutiva depende de la historia de su deformación.

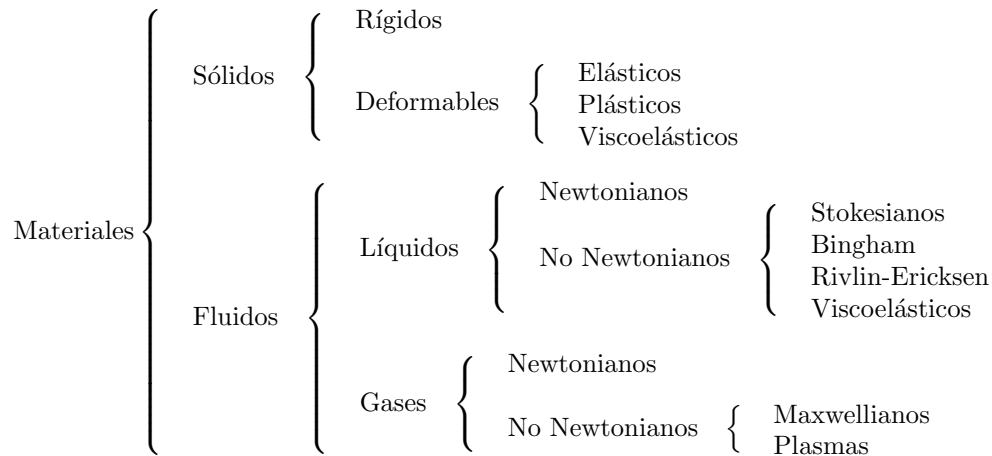
La diferencia más importante de los gases respecto a los líquidos, es que poseen mayor compresibilidad. Adicionalmente dentro de los gases podemos tener los fluidos maxwellianos los cuales presentan esfuerzos dependientes de los gradientes de temperatura. También se tienen los plasmas que son gases en estado de disociación molecular debido a las muy altas temperaturas y bajas presiones por lo cual intervienen fenómenos electromagnéticos.

Se define a un sólido elástico como aquel material que tiene una tendencia marcada a recuperar gran parte de la deformación a la que ha sido sometido. Por otro lado, existen sólidos que presentan un comportamiento marcadamente fluido, es decir, que no recuperan en gran medida la deformación a la que han sido sometidos y se denominan sólidos plásticos. Los sólidos en general poseen una estructura molecular cristalina bien definida. Esta estructura cristalina puede ser ordenada, en cuyo caso se habla de materiales cristalinos simplemente. En el caso contrario, cuando la estructura cristalina no presenta ordenamiento alguno, se denominan materiales amorfos. De acuerdo a la relación constitutiva que relaciona esfuerzo con deformación, los sólidos suelen clasificarse en sólidos elásticos o sólidos plásticos, y cuando combinan ambas características se denominan sólidos elastoplásticos. Cuando combinan características elásticas y viscosas se

denominan sólidos viscoelásticos. Al igual que en los fluidos, también existen dentro de los sólidos materiales con memoria, cuya relación constitutiva depende de la historia de su deformación. Al conjunto de todos los materiales mencionados en este párrafo se le denomina *sólidos deformables* en contraposición de los *sólidos rígidos*, en los cuales no existe deformación alguna.

Como se habrá visto en las dos definiciones anteriores existen sólidos que fluyen en cierta medida y fluidos que presentan un comportamiento elástico. Aparentemente, no existe una marcada frontera entre ambos tipos de materiales, y siempre se pueden conseguir diferentes tipos de materiales que cubren todo el espectro de comportamiento desde los fluidos hasta los sólidos. Esto hecho justifica que se definan lo que se denomina los medios continuos. Los medios continuos se definen como aquellos medios materiales o cuerpos que poseen características y propiedades que son continuas, inclusive a nivel infinitesimal. Para los medios materiales continuos ya no se puede hablar de estructura molecular, puesto que son continuos y sus volúmenes no son más que las configuraciones geométricas que adquiere el espacio que ocupan los cuerpos. Sin embargo, hasta cierto nivel microscópicos, los medios continuos son una buena descripción geométrica/física para modelar los fluidos y los sólidos, ambos unidos bajo un mismo término: Medios Continuos.

El siguiente diagrama resume de forma gráfica como se relacionan los conceptos definidos dentro de los materiales conocidos



Sin embargo, existen materiales con un comportamiento más general que los descritos y que se denominan *materiales simples* [Noll,1974].

## 2. SISTEMA MATERIAL DISCRETO Y CONTINUO.

Un *cuerpo* es aquella entidad física que posee materia, o sea, es una entidad material o un *sistema material*. Aquí vamos a distinguir entre cuerpos *discretos* y cuerpos *continuos*.

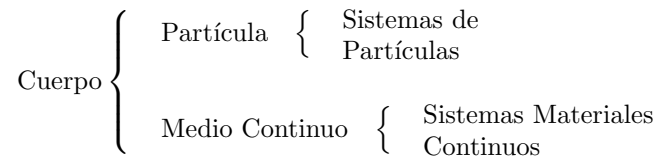
En este trabajo se ha empleado el término de sistemas materiales continuos para significar un medio continuo o la unión de varios medios continuos, como lo son los medio compuesto, en donde existen discontinuidades de un medio a otro, localizadas en una superficie, una linea o un punto, dependiendo del número y de la configuración de los medios. Sin embargo, para distinguir entre un medio continuo y varios medios continuos unidos, se hablará de un medio continuo y un medio compuesto, respectivamente. Un caso particular de un medio continuo serán los sistemas multicomponentes, donde existen varios componentes cuya concentración (volumétrica, másica o molar) es una función continua en el medio. Un caso particular de los medios compuestos son los sistemas *multifásicos*, en donde existen *interfases* que separan las distintas fases presentes. En estas interfases las funciones son discontinuas, y su variación es lo que se denomina la condición de salto. Por último, es lógico pensar que si un sistema material es continuo, cualquier parte de este también lo es.

El término *volumen material* se aplica para identificar aquella porción del espacio ocupado por un sistema material continuo, y donde se sobreentiende que dicho volumen está formado por puntos que son

materiales también y no por partículas. Como caso trivial, se entenderá que un solo medio continuo también será un sistema material que ocupa un volumen material. En varios casos dentro del texto, para efectos de resumir, se referirá a un volumen material para indicar a un sistema material continuo cuya configuración geométrica es conocida. En algunos otros textos de la mecánica racional de los medios continuos se aplica el término de cuerpo para indicar a un sistema material continuo. Aquí el término de cuerpo se empleará para significar el conjunto de todos los puntos de un sistema material continuo, sin importar si su configuración geométrica (volumen material) es conocida o no, adoptando el contexto de la teoría de conjuntos.

En un sistema material discreto se distinguen partículas, con o sin volumen, ubicadas en puntos espaciales discretos. El conjunto de todas estas partículas conforman el sistema material discreto y cuyo objeto de estudio no está contemplado extensivamente en este trabajo. Sin embargo, muchas de las descripciones y resultados reportados aquí son fácilmente extensibles a sistemas de partículas discretas, haciendo las transformaciones correspondientes de integrales de funciones por la densidad en los volúmenes materiales a sumatorias de las mismas funciones por las masas de las partículas o empleando funciones de distribución.

Todos los conceptos definidos en este apartado pueden resumirse con el siguiente diagrama



donde se describe al objeto de la mecánica que es el cuerpo.

### 3. SISTEMA DE COORDENADAS, SISTEMA DE REFERENCIA Y MARCO DE REFERENCIA.

Los sistemas de coordenadas son un conjunto de líneas, que son los ejes, con un punto en común que es el origen, y con unas medidas y orientación sobre ellos, definidas por la métrica, que permiten ubicar cualquier punto en el espacio. Las distancias sobre cada una de estas líneas para un determinado punto del espacio forman sus coordenadas respectivas en dicho sistema de coordenadas. Dependiendo del sistema, entonces las coordenadas serán distintas para cada uno de ellos.

Un sistema de coordenadas, desde el punto de vista de la cinemática, puede estar en movimiento. El origen puede moverse y también los ejes de coordenadas de una forma arbitraria. Cuando los ejes son rígidos, es decir, el movimiento relativo entre ellos es nulo, se puede definir un vector de velocidad angular que caracteriza el movimiento del sistema, junto con el movimiento del origen. En este trabajo se trabajará con sistemas rígidos en casi todos los desarrollos, pero los sistemas no rígidos, cuya métrica depende del tiempo, serán usados eventualmente. Un sistema de coordenadas puede estar en reposo o en movimiento de traslación con velocidad uniforme (sin rotación), con respecto a las estrellas fijas del universo (fijas a su centro de masa), en cuyo caso se denomina sistema de coordenadas inercial. Un sistema de coordenadas que simplemente no cumpla con las condiciones anteriores se denomina no inercial. Cualquier sistema de coordenadas que sirva para describir un movimiento se denomina sistema de referencia, con respecto al cual se tiene una descripción particular. Para cada sistema de referencia habrá una descripción diferente. Si el sistema de coordenadas empleado como referencia es inercial, se dice que el sistema de referencia es inercial.

Un marco de referencia es aquel definido por un sistema de coordenadas rígido (también se acostumbra a referirlo a un cuerpo rígido). Cuando el sistema de coordenadas es inercial, se dice que el marco de referencia es inercial. Algunos autores definen el marco de referencia identificándolo con un cuerpo rígido con referencia al cual se estudian los movimientos, pero esta definición y la que se ha dado aquí son realmente equivalentes. Por la misma forma como está definido el marco de referencia, su uso es limitado, y existen situaciones donde no se puede emplear o es de poca utilidad su aplicación.

#### 4. VECTORES Y TENSORES CARTESIANOS Y ABSOLUTOS.

Un sistema de coordenadas, cuyos ejes son líneas rectas, y donde las medidas sobre dichos ejes son uniformes, en cada uno e iguales entre ellos, se denomina un sistema de coordenadas cartesiano.

Un sistema de coordenadas, cuyos ejes son líneas curvas, y donde las medidas sobre dichos ejes son variables en cada eje o variable entre ellos, pudiendo inclusive depender del tiempo, se denomina un sistema de coordenadas curvilíneo.

La estructura algebraica de los vectores y tensores es similar, es una estructura algebraica vectorial, y, por consiguiente, sus entidades son independientes del sistema de coordenadas que se emplee para describirlos. Un vector se describe en un sistema de coordenadas particular mediante una matriz columna, una matriz fila o una  $n$ -úpla. Un tensor de segundo orden se describe en un sistema de coordenadas particular mediante una matriz cuadrada. En ambos casos se habla de las componentes del vector o tensor en un sistema de coordenadas particular. Por esta razón, en el álgebra lineal siempre se han descrito ciertas operaciones entre vectores y entre tensores o entre unos y otros, como operaciones matriciales. Sin embargo, estas operaciones matriciales solamente son válidas en un sistema de coordenadas específico.

Como se sabe, una ecuación vectorial o tensorial (un vector es un tensor de primer orden) debe ser invariante bajo una transformación de coordenadas cualquiera, sobre todo si ella describe un fenómeno físico. Esta regla, algunas veces denominada la Regla del Cociente, simplemente lo que infiere es que, una ecuación vectorial invariante, al describirla en un sistema de coordenadas cartesianas, representa a las mismas entidades, que cuando se emplea un sistema de coordenadas curvilíneas. En el primer caso, a los vectores o tensores (o mejor dicho a sus componentes) se les denomina cartesianos. En el segundo, caso se les denomina absolutos. Sin embargo, los vectores o tensores en ambos casos son los mismos.

#### 5. NOTACION SIMBOLICA, MATRICIAL E INDICIAL.

Con la observación hecha en la sección anterior, entonces las operaciones entre vectores y tensores deben definirse de forma tal que cumpla con la regla de invarianza bajo transformación de sistemas de coordenadas. Haciendo énfasis en esto se definen, el producto interior (indicado con un punto  $\cdot$ ), que el caso de vectores se denomina producto escalar, y el producto exterior (indicado con una cruz  $\times$ ), que en el caso de vectores se denomina producto vectorial. Estos productos también se definen para tensores u operaciones entre vectores y tensores. El producto interior entre un tensor y un vector se puede calcular, en sus componentes, como el producto entre una matriz cuadrada y una matriz columna. Esto se puede interpretar, desde el punto de vista del álgebra lineal, como una transformación lineal de un vector. También se define el producto interior como la contracción de un par de índices adyacentes cuando se está empleando la notación indicial. El producto de doble punto se define como una doble contracción, y se interpreta como el producto escalar de dos tensores de segundo orden. El producto exterior entre un tensor y un vector, por su complejidad, se definirá más adelante con mayor detalle, sin embargo, se adelanta que es el mismo producto vectorial afectando solamente a los vectores base adyacentes al símbolo. En cuanto al producto tensorial, en la gran mayoría de los temas se ha preferido la notación diádica introducida por J. W. Gibbs [Seeger,1974] (simplemente extrayendo el símbolo entre los vectores factores) en lugar de la notación clásica de una cruz encerrada en un círculo  $\otimes$ , aunque esta última se emplea en el capítulo de vectores y tensores absolutos.

La notación simbólica se empleará cuando los vectores y tensores no estén representados en ningún sistema de coordenadas en especial. En estos casos se denotará con una letra negrilla, minúscula para los vectores y mayúscula para los tensores. Cuando se viole esta regla se hará la acotación de manera explícita. En cualquier caso se entenderá que la letra en negrilla representa a la entidad completa, con todos sus componentes y su base. Al conjunto de operaciones y notación descritas en el párrafo anterior, junto con la notación en negrilla, es lo que se conoce como notación simbólica. En algunos textos a este tipo de notación se le conoce también como notación de Gibbs, pero sin incluir el producto exterior entre un tensor y un vector, y entre tensores, y considerando al producto tensorial como un producto diádico.

La notación matricial es un tipo de notación simbólica diferente, donde los símbolos se interpretan como matrices columna para los vectores, y matrices cuadradas para los tensores de segundo orden. En la notación matricial no se emplea el símbolo de producto interior (punto), sino que se asume como el producto



de dos matrices. El símbolo de producto vectorial ( $\times$ ) y el producto tensorial ( $\otimes$ ) o diádico no existen en la notación matricial. Para el caso del producto escalar entre dos vectores, en notación matricial se acostumbra a indicarlo como el producto de una matriz transpuesta por una matriz columna. Para el caso del producto entre un tensor y un vector, se indica como el producto de una matriz cuadrada por una matriz columna. Para el caso del producto de dos tensores, se indica como el producto de dos matrices cuadradas. Para el caso del producto escalar de dos tensores de segundo orden, se indica con un sólo punto, y no con dos puntos como en la notación de Gibbs. En la notación matricial, cuando se opera con los elementos de las matrices, debe interpretarse que se está expresando a las entidades en un sistema de coordenadas particular con su respectiva base.

La notación matricial se empleará en este texto sólomente para el apéndice de álgebra lineal y superior, pero los símbolos no se indicarán con letras en negrillas como en la notación de Gibbs. Muchos libros emplean de manera indistinta la notación simbólica de Gibbs con la notación simbólica matricial, utilizando letras en negrillas para indicar los símbolos de las entidades, sin embargo, en este texto el uso de una notación o de la otra estará limitado como se planteó antes, y las equivalencia entre una y otra se establecerán de manera explícita en el apéndice de vectores y tensores cartesianos.

La notación indicial se empleará en aquellos casos donde se hagan los desarrollos de algunas demostraciones en algún sistema de coordenadas en particular. En esta oportunidad se denotará con letra itálica subindicada o superindicada, dependiendo del sistema de coordenadas. Para cada valor de los índice se entenderá que es una componente diferente. La convención de minúsculas y mayúsculas será igual que en la notación simbólica o de Gibbs. Esta notación será empleada con mayor frecuencia en el apéndice de vectores y tensores absolutos, donde los sistemas de coordenadas son por excelencia del tipo curvilíneos.

## 6. MECANICA (ESTATICA, CINEMATICA Y DINAMICA) Y TERMODINAMICA.

Este trabajo está enfocado a dos aspectos de los sistemas materiales continuos estudiados por el campo de la física: la mecánica y la termodinámica. La mecánica está compuesta a su vez de una parte descriptiva, más geométrica que física, que es la cinemática; y al mismo tiempo también está compuesta por una parte completamente física, que es la dinámica. La cinemática describe el comportamiento de los sistemas o cuerpos, sin importar la causa que lo produce. La dinámica estudia el movimiento de los cuerpos a través de las causas que los producen. Estas causas son las que denominamos fuerzas. La estática, es aquella parte trivial de la mecánica que se presenta cuando no existe movimiento relativo a un sistema de referencia inercial y cuando todas las fuerzas se equilibran. Brand en su libro [Brand,1959] incluye la estática como parte de la dinámica. La parte complementaria de la dinámica, cuando hay movimiento no uniforme, es lo que se denomina la cinética. En el siguiente diagrama se puede observar como escajan estos conceptos dentro de la mecánica desde un punto de vista de causa-efecto

$$\text{Mecánica} \left\{ \begin{array}{l} \text{Cinemática} \\ \text{Dinámica} \left\{ \begin{array}{l} \text{Estática} \\ \text{Cinética} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La termodinámica es una parte del campo de la física que estudia el movimiento o flujo de calor y las causas que lo producen. Cuando no existe flujo de calor, se denomina termostática, y los resultados son tan triviales que ni siquiera se estudian. La termodinámica también estudia las restricciones bajo las cuales ocurre el flujo de calor, introduciendo una variable de estado denominada la entropía.

El estudio de la mecánica y la termodinámica de los sistemas materiales llevados a cabo en este trabajo se hace de una forma armoniosa, consistente y unificada. Es decir, no se enfoca a cada aspecto por separado, sino que se hace un tratamiento simultáneo de ambas partes, resaltando las influencia de una en la otra, y viceversa. La termodinámica mostrada en este trabajo escudriña dentro de todas sus leyes aquellos aspectos que están relacionados con la mecánica. Lo mismo se hace de forma recíproca.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Brand, L. **Mecánica Vectorial**. Compañía Editorial Continental S.A. (CECSA), 1959. 9<sup>na</sup> Impresión, 1969.
- [2] Einstein, A.; Infeld, L. **The Evolution of Physics**. The Growth of Ideas from Early Concepts to Relativistic and Quanta. Simon and Schuster, 1938. 19<sup>th</sup> Printing, 1961.
- [3] Hilbert, D. "Mathematical Problems". **Archiv für Mathematik und Physik**, Vol.1, No.3, pp.44-63,213-237, (1901).
- [4] Mach, E. **The Science of Mechanics**, A Critical Historical Account of its Development, 6<sup>th</sup> Edition. The Open Court Publishing Company, 1960. 3<sup>rd</sup> Paperback Edition, 1974. First Edition, 1893.
- [5] McGuinness, B.; (Ed.). **Ludwing Boltzmann: Theoretical Physics and Philosophical Problems**. Selected Writings. D. Reidel Publishing Company, 1974.
- [6] Noll, W. "A New Mathematical Theory of Simple Materials". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.48, pp.1-50, (1972).
- [7] Seeger, R. J. **Men of Physics: J. Willard Gibbs**. American Mathematical Physicist *par excellence*. Pergamon Press, 1974.
- [8] Truesdell, C. A. **Essays in the History of Mechanics**. Springer-Verlag, 1968.

MECANICA Y TERMODINAMICA DE  
SISTEMAS MATERIALES CONTINUOS

# **FUNDAMENTOS**



# CAPITULO I

## CINEMATICA DE LOS SISTEMAS MATERIALES

### CONTENIDO

1. MOVIMIENTO.	11
1.1. Descripción del Movimiento.	11
1.1.1. Descripción Espacial.	11
1.1.2. Configuración de Referencia.	12
1.1.3. Descripción Material.	13
1.1.4. Derivación Material.	13
1.1.5. Velocidad y Aceleración.	15
1.2. Trayectorias.	15
1.2.1. Paso de la Partícula.	15
1.2.2. Línea de Corriente.	16
1.2.3. Tubo de Corriente.	17
1.2.4. Traza.	17
1.2.5. Circulación.	18
1.3. Vorticidad.	18
1.3.1. Definición.	18
1.3.2. Línea de Vorticidad	19
1.3.3. Tubo de Vorticidad.	19
1.3.4. Teorema de Helmholtz.	19
1.4. Sistema de Coordenadas no Inercial.	20
1.4.1. Transformación del Movimiento.	20
1.4.2. Relaciones de Poisson.	21
1.4.3. Derivación Relativa.	21
1.4.4. Derivación Parcial.	22
1.4.5. Campo de Velocidades.	23
2. FLUJO.	24
2.1. Dilatación.	24
2.1.1. Cambio de Volumen.	24
2.1.2. Jacobiano de la Transformación.	24
2.1.3. Fórmula de Expansión de Euler.	25

2.1.4.	Descomposición del Jacobiano.	26
2.1.5.	Composición del Jacobiano.	27
2.1.6.	Transformación del Jacobiano.	27
2.2.	Teoremas del Transporte de Reynolds.	28
2.2.1.	Regla de Leibniz.	29
2.2.2.	Primer Teorema del Transporte.	29
2.2.3.	Segundo Teorema del Transporte.	31
2.2.4.	Vector Normal a la Superficie.	31
2.2.5.	Ecuación de Continuidad.	32
2.2.6.	Tercer Teorema del Transporte.	32
2.2.7.	Transporte en una Superficie.	32
2.2.8.	Movimiento de una Superficie.	35
2.3.	Transporte en el Sistema No Inercial.	37
2.3.1.	Regla de Leibniz.	37
2.3.2.	Teorema del Transporte.	38
2.3.3.	Conservación de Masa y Continuidad.	38
3.	DEFORMACIONES.	39
3.1.	Descripción de la Deformación.	39
3.1.1.	Puntos y Partículas.	39
3.1.2.	Dominios y Cuerpos.	40
3.1.3.	Configuración, Deformación y Flujo.	40
3.1.4.	Posición y Desplazamiento.	41
3.2.	Análisis de la Deformación.	41
3.2.1.	Gradiente de Deformación.	41
3.2.2.	Gradiente de Desplazamiento.	42
3.2.3.	Tensor de Cauchy y de Piola	42
3.2.4.	Deformación Finita.	43
3.2.5.	Rotación Finita.	43
3.2.6.	Deformación Infinitesimal.	44
3.2.7.	Rotación Infinitesimal.	44
3.3.	Estado de Deformación en un Punto.	45
3.3.1.	Deformaciones sobre un plano.	45
3.3.2.	Tensores Esférico y Desviador.	45
3.3.3.	Descomposición Espectral.	46
3.3.4.	Deformaciones cortantes Máximas.	46
3.3.5.	Deformación Cortante Octaedral.	47
3.4.	Tensores Fundamentales y sus Derivadas.	48
3.4.1.	Gradiente de Deformación.	48
3.4.2.	Descomposición Polar.	48
3.4.3.	Tensores de Cauchy-Green.	48
3.4.4.	Tensores de Piola-Finger.	49
3.4.5.	Tensor Velocidad de Deformación.	49
3.4.6.	Tensor Velocidad de Giro.	50

3.4.7. Tensores Rivlin-Ericksen.	50
3.4.8. Derivada Convectiva.	51
3.5. Ecuaciones de Compatibilidad.	55
3.5.1. Condición Necesaria.	56
3.5.2. Condición de Suficiencia.	57
3.5.3. Unicidad de la Solución.	58
3.5.4. Condición de Bianchi.	60
3.5.5. Regiones Múltiplemente Conexas.	60
3.5.6. Condición para Deformaciones Finitas.	61
BIBLIOGRAFIA.	63

## 1. MOVIMIENTO

La cinemática es la parte de la mecánica que estudia la descripción del movimiento por si mismo. No se toman en cuenta cómo el movimiento es originado, o las fuerzas envueltas en esto, lo cual es del dominio de la dinámica

### 1.1. DESCRIPCION DEL MOVIMIENTO

La idea matemática básica del movimiento de un sistema material es que puede ser descrito por una transformación de punto. En algún instante se observa el sistema material y se remarca que cierto punto del mismo está en posición  $\mathbf{X}$ , y en un tiempo más tarde el mismo punto está en otra posición  $\mathbf{x}$  (en el caso de sistema materiales discretos se habla de partícula en lugar de punto material, que es un término más adecuado para sistemas materiales continuos). Sin pérdida de generalidad [Aris,1962], se puede tomar el primer instante como  $t = 0$ , y si el instante más tarde es  $t$ , se dirá que  $\mathbf{x}$  es una función de  $t$  y la posición inicial  $\mathbf{X}$ ,

$$\mathbf{x} = \chi(t, \mathbf{X}) \quad (1)$$

Por supuesto, que se habrá inmediatamente violado el concepto de la teoría cinética de los fluidos, si en esta teoría los puntos materiales son reemplazados por partículas que son las moléculas, y estas están en un movimiento arbitrario. De hecho se ha substituido la idea de la molécula o la partícula por la idea del continuo, cuya velocidad en cualquier punto se puede suponer como la velocidad promedio de las moléculas en una vecindad apropiada del punto. Como se debe hacer notar, la definición de promedio necesita algún cuidado en este contexto, pero esta idealización, la cual dota a las porciones elementales de los fluidos con una permanencia negada por la teoría molecular, es la llave para el tratamiento clásico del movimiento de los fluidos, y en general para todos aquellos sistemas materiales continuos, incluyendo a los sólidos.

#### 1.1.1. Descripción Espacial

El vector de posición  $\mathbf{x}$  de los puntos materiales en un sistema de coordenadas particular tendrá como componentes los valores  $x_i$ , que son las coordenadas espaciales de dichos puntos, o coordenadas eulerianas como a veces se les denomina incorrectamente en los textos de mecánica de fluidos [Aris,1962].

Toda función  $f$  que dependa de  $t$  y de  $\mathbf{x}$  se dice que posee una descripción espacial y se puede expresar como

$$f(t, \mathbf{x}) = f(t, \chi(t, \mathbf{X})) = F(t, \mathbf{X}) = \tilde{f}(t, \mathbf{X}) \quad (2)$$

El último miembro de la expresión anterior se define como la descripción material de una función espacial (entendiéndose por función espacial a una función cuya descripción original es espacial). Físicamente, la expresión (2) lo que quiere decir es que el valor de la función  $f$  en el tiempo  $t$  y en la posición  $\mathbf{x}$ , es el valor adoptado por el punto material que en el tiempo  $t = 0$  estaba en  $\mathbf{X}$ , y que luego en el tiempo  $t$  está en el punto  $\mathbf{x}$ .

### 1.1.2. Configuración de Referencia

Sea  $X$  un punto del cuerpo  $\mathcal{B}$  (en lo sucesivo  $\mathcal{B}$  se supone como una variedad diferenciable), entonces se puede decir que existe un mapa con el cual se obtiene la configuración de referencia

$$\mathbf{X}_\kappa = \kappa(X) \quad (3)$$

siendo  $\kappa$  el mapa de configuración de referencia. La configuración de referencia se puede suponer como el vector de posición que tiene o puede tener un punto material  $X$  en una posición cualquiera de su movimiento, el cual no necesariamente tiene que ser el movimiento en estudio, pero debe ser un movimiento hipotéticamente factible [Truesdell, 1977].

Cuando el mapa de la configuración de referencia se hace respecto a la posición del punto material  $X$  en el instante  $\tau$  la configuración de referencia se denotará

$$\mathbf{X}_\tau = \kappa_\tau(X) \quad (4)$$

Cuando la posición de referencia sea el tiempo actual  $t$  el índice  $\tau$  se cambiará por el índice  $t$ . Para el caso particular cuando  $\tau = 0$ , entonces la notación de la configuración de referencia coincidirá con la empleada en (1)

$$\mathbf{X} = \kappa_o(X) \quad (5)$$

A esta configuración de referencia la denominaremos “configuración inicial”.

Si el mapa (5) se aplica a todo el conjunto  $\mathcal{B}$ , y se compone con la función  $\chi$ , entonces se obtiene lo que se ha definido como el volumen material  $\mathcal{V}_m$ , que es el volumen que ocupa un sistema material en cada instante de su movimiento. O sea que

$$\mathcal{V}_m = \chi(t, \mathcal{V}_o) = \chi(t, \kappa_o(\mathcal{B})) \quad (6)$$

donde

$$\mathcal{V}_o = \kappa_o(\mathcal{B}) \quad (7)$$

es el volumen del sistema material para una configuración de referencia inicial para  $t = 0$ . Los subíndice  $m$  y  $o$  se han empleado en la definiciones (6) y (7) para distinguir las diferencias que existen entre el volumen material y el volumen de una cierta región del espacio (a lo que llamaremos un volumen espacial). En la Sección 2.2.5. estas diferencias podrán aclararse con más detalle.

Todo lo dicho en esta sección puede ser empleado para generalizar la función  $\chi$  en (1), para cualquier configuración de referencia  $\kappa$ , de la forma

$$\mathbf{x} = \chi_\kappa(t, \mathbf{X}_\kappa) \quad (8)$$

con lo cual el volumen material tendrá una expresión similar a (6)

$$\mathcal{V}_m = \chi_\kappa(t, \mathcal{V}_\kappa) = \chi_\kappa(t, \kappa(\mathcal{B})) = \chi(t, \mathcal{B}) \quad (9)$$

donde

$$\mathcal{V}_\kappa = \kappa(\mathcal{B}) \quad (10)$$

el cual no tendrá ninguna interpretación dentro del movimiento actual del sistema material. La función  $\chi_\kappa$  ya definida en (8), y el mapa  $\chi$  definido como

$$\mathbf{x} = \chi_\kappa(t, \mathbf{X}_\kappa) = \chi(t, X) \quad (11)$$

se han empleado en (9) para tratar de evitar el paso intermedio de evaluar el mapa  $\kappa$ , y, específicamente en el caso del mapa  $\chi$ , se es independiente del uso de un mapa de configuración de referencia cualquiera.

Para lo que sigue se evitará usar el índice  $\kappa$ , al menos que sea absolutamente necesario. Sin embargo, debe interpretarse que la configuración de referencia no necesariamente tiene que ser la configuración inicial,



ni una configuración cualquiera del movimiento del sistema material dada para un instante  $\tau$ . En este último caso, en lugar del índice  $\kappa$  se empleará el índice  $\tau$ .

### 1.1.3. Descripción Material

Las componentes  $X_i$  del vector de posición inicial  $\mathbf{X}$ , serán referidas como las coordenadas materiales del punto material (aunque esto también aplica para cualquier otra configuración de referencia), y, cuando sea conveniente, el punto material por sí mismo puede ser llamado el punto  $\mathbf{X}$  para resumir. Los términos coordenadas convectivas o lagrangeanas son también usados. El primero es un término sensible, ya que el sistema de coordenadas materiales es convectivo con el sistema material. El segundo, es inapropiado y carente de cualidad descriptiva [Aris,1962].

Ya que dos puntos materiales no pueden ocupar la misma posición espacial, al mismo tiempo, la posición material  $\mathbf{X}$  define un sólo punto del sistema material, o sea un sólo punto  $\mathbf{X}$  del cuerpo  $\mathcal{B}$ . Para que esta condición se cumpla la función  $\chi$  debe ser biyectiva y el mapa  $\kappa$  debe ser un homeomorfismo. La condición antes expuesta recibe el nombre de Axioma de Impenetrabilidad [Truesdell,1977]. Por supuesto, es posible relajar este axioma en puntos, curvas o superficies singulares, para así representar ondas de choque, capas de deslizamiento, remaches, soldaduras, fracturas, flujo alrededor de un obstáculo, etc.

Del Axioma de Impenetrabilidad se deduce que el movimiento del sistema material debe ser continuo, de un sólo valor para cada punto material y la función definida en la ecuación (1) puede ser invertida para dar la posición inicial o coordenadas materiales del punto material que está en la posición  $\mathbf{x}$  en el tiempo  $t$ . Esto es, la función

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(t, \mathbf{x}) \quad (12)$$

también es continua y de un sólo valor para cada posición espacial. Físicamente esto significa que un arco de puntos materiales continuo no se rompe durante el movimiento, o que los puntos materiales en la vecindad de un punto cualquiera, continua en su vecindad durante el movimiento. La unicidad de los valores en las ecuaciones (1) y (12) significa que un punto material no puede dividirse en dos y ocupar dos lugares simultáneamente, y que dos puntos materiales distintos no puedan ocupar el mismo lugar simultáneamente. Suposiciones deben también ser hechas acerca de la continuidad de la derivadas (suavidad de la funciones y mapas). Es usual suponer continuidad hasta las derivadas de tercer orden. Excepciones a estos requerimientos también pueden ser permitidas en un número finito de superficies, líneas o puntos singulares, como se mencionó antes. Se puede mostrar que una condición necesaria y suficiente para la existencia de la función inversa  $\chi^{-1}$  es que el jacobiano

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} \quad (13)$$

no se anule.

Toda función  $F$  que dependa de  $t$  y de  $\mathbf{X}$  se dice que posee una descripción material y se puede expresar como

$$F(t, \mathbf{X}) = F(t, \chi^{-1}(t, \mathbf{x})) = f(t, \mathbf{x}) = \tilde{F}(t, \mathbf{x}) \quad (14)$$

El último miembro de la expresión anterior se define como la descripción espacial de una función material (entendiéndose por función material a una función cuya descripción original es material). Físicamente, la expresión (14) lo que quiere decir es que el valor de la función  $F$  en el tiempo  $t$  y para el punto material  $\mathbf{X}$ , es el valor adoptado por dicho punto que en el tiempo  $t$  está en la posición  $\mathbf{x}$ . Como se observa la interpretación de la descripción material es inversa a la descripción espacial.

### 1.1.4. Derivación Material

Asociadas con respecto a la descripción espacial y la descripción material existen dos derivadas con un significado muy específico. Estas derivadas se denotarán como

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_x \quad \frac{d}{dt} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_X \quad (15)$$

La primera de ellas es una derivada con respecto al tiempo manteniendo constante la posición actual, la segunda de ellas es una derivada respecto al tiempo manteniendo constante el punto material.

Así  $\partial f / \partial t$  es la tasa de cambio de  $f$  como se observa desde un punto fijo en el espacio  $\mathbf{x}$ , mientras que  $df/dt$  es la tasa de cambio de  $f$  como se observa cuando el observador se mueve con el punto material del cuerpo en movimiento. A esta última derivada se le denomina la derivada material o substancial. Algunos autores denominan a esta derivada también convectiva, sin embargo, en este trabajo dejaremos este calificativo para denominar a otro tipo de derivación que se definirá más adelante. La derivada material también se acostumbra a denotar en muchos textos como  $Df/Dt$ , pero en este caso la notación adoptada no tiene inconveniente, debido a que el movimiento de los sistemas materiales siempre se describe en función del movimiento de los puntos materiales que lo componen. Si se presenta cualquier otro caso, la cantidad a diferenciar indicará que tipo de derivación total se quiere realizar.

El caso particular de la derivada material de la posición  $\mathbf{x}$  de un punto material, es su velocidad  $\mathbf{v}$ . Así, colocando  $\mathbf{x} = \chi(t, \mathbf{X})$ , tenemos

$$\mathbf{v} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \chi(t, \mathbf{X}) \right|_{\mathbf{X} = \chi^{-1}(t, \mathbf{x})} \equiv \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (16)$$

puesto que la función  $\chi$  posee una descripción material y la velocidad  $\mathbf{v}$  posee una descripción espacial  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ . Esto nos permitirá establecer una conexión entre las dos derivadas mencionadas arriba para la derivación de una función  $f$  con una descripción espacial, aplicando la regla de la cadena

$$\frac{df}{dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_x + \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_t \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (17)$$

De lo expuesto anteriormente se desprende que cuando  $b(t, \mathbf{X})$  es una función escalar, vectorial o tensorial con una descripción material, entonces su derivada material se obtiene mediante

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} \quad (18)$$

Cuando  $b(t, \mathbf{x})$  es una función escalar, vectorial o tensorial con una descripción espacial, entonces su derivada material se obtiene mediante

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla b \quad (19)$$

Cuando  $b(t, \mathbf{x}_a)$  es una función escalar, vectorial o tensorial dependiente de un recorrido arbitrario  $\mathbf{x}_a(t)$ , entonces su derivada total se obtiene mediante

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla b \quad (20)$$

donde

$$\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{x}_a}{dt} \quad (21)$$

y donde se ha seguido un procedimiento parecido al que se empleo en (17).

En la derivación material se pueden distinguir dos partes. La primera parte  $\partial b / \partial t$  se denomina “la parte transitoria” y, cuando un problema es estacionario en la variable  $b$ , simplemente esa parte se anula. La segunda parte, denominada “la parte convectiva”, representa la cantidad de la variable  $b$  que se transporta junto con la materia a una velocidad  $\mathbf{v}$ . Cuando esta segunda parte es nula se dice que el flujo está desarrollado en la variable  $b$ .

### 1.1.5. Velocidad y Aceleración

De la descripción material  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$  de un flujo se ha derivado un campo vectorial de velocidades

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (22)$$

cuya descripción es espacial.

La aceleración o tasa de cambio de la velocidad es definida como la derivada material de la función vectorial  $\mathbf{v}$  en la forma

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (23)$$

De esta forma un flujo es llamado estacionario si la velocidad es independiente del tiempo. Nótese que para dicho flujo la aceleración no se anula, sino que se reduce a

$$\mathbf{a} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (24)$$

Un flujo es llamado desarrollado si la velocidad es un campo vectorial que cumple con

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (25)$$

aunque esto no signifique que  $\mathbf{v}$  ni  $\nabla \mathbf{v}$  sean nulos.

## 1.2. TRAYECTORIAS.

Las trayectorias que normalmente se estudian son aquellas que recorren los puntos materiales durante el movimiento de un sistema material. A veces se observa el movimiento de un sólo punto material visto desde varios sistema de coodenadas o a veces se observa el movimiento de varios puntos material que cumplen con una cierta condición. Las definiciones que siguen normalmente se aplican a sistemas materiales fluidos (líquidos o gases), pero su interpretación puede extenderse también a los sólidos deformables. La descripción de estos conceptos fueron tomados de [Aris,1962] y [Currie,1993].

### 1.2.1. Paso de la Partícula

La definición 1.1.(1) puede ser vista como la ecuación paramétrica de una curva en el espacio, con  $t$  como parámetro. La curva a través del punto  $\mathbf{X}$ , correspondiente al valor del parámetro  $t = 0$ , y son denominadas trayectoria o paso de la partícula por la analogía que se puede establecer con la cinemática de la partícula en los sistemas materiales discretos. Para sistemas materiales continuos, el término de paso de la partícula está mal empleado y debe interpretarse como la trayectoria del punto material. Sin embargo, por el hecho de ser una denominación bastante popularizada se ha adoptado con la observación antes hecha.

En resumen, Para obtener el paso de las partículas del campo de velocidades se tiene que seguir el movimiento de cada partícula. Esto significa que hay que resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

sujeto a la condición inicial

$$t = 0 \quad \mathbf{x} = \mathbf{X} \quad (2)$$

donde el tiempo  $t$  se emplea como parámetro para definir la curva resultante en el espacio (la ecuación (1) realmente representa un problema de valor inicial para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden).

Cualquier propiedad del sistema material puede ser seguida a lo largo de la trayectoria de la partícula. Por ejemplo, puede ser dada la densidad en la densidad de un punto material como una función  $\rho(t, \mathbf{X})$  con una descripción material, significando que, para cualquier punto material prescrito, se tiene la densidad como

una función del tiempo, esto es, la densidad que un observador desplazándose con el punto material vería. La posición, por sí misma, es una propiedad en este sentido general, así que la ecuación de la trayectoria de la partícula es también de esta forma (ver 1.1.(1)).

Como ejemplo de lo que es el paso de la partícula analízese el caso de un flujo plano dado por el siguiente campo de velocidades

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t} \quad v_2 = x_2 \quad v_3 = 0$$

Entonces la trayectoria del punto material que en el tiempo inicial  $t = 0$  se encuentra en el punto  $\mathbf{X}$  viene a ser la solución de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{1+t} \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2 \quad \frac{dx_3}{dt} = 0$$

con las condiciones iniciales

$$t = 0 \quad x_1 = X_1 \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3$$

Esta solución es

$$x_1 = X_1(1+t) \quad x_2 = X_2 e^t \quad x_3 = X_3$$

donde  $t$  es el parámetro que define la curva. Esta curva en el plano  $x_3 = X_3$  sería

$$x_2 = X_2 e^{(x_1 - X_1)/X_1}$$

### 1.2.2. Línea de Corriente

Las *líneas de corriente* son las llamadas líneas del campo vectorial de la velocidad y se definen como aquellas curvas que siempre son tangentes a los vectores velocidad en cada uno de sus puntos. De acuerdo a esto, ellas son las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (3)$$

sujeto a la condición

$$s = 0 \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^o \quad (4)$$

donde  $s$  es un parámetro a lo largo de la línea de corriente. Este parámetro no debe ser confundido con el tiempo  $t$ . Para la ecuación (3) el tiempo  $t$  es mantenido fijo, mientras las ecuaciones son integradas, y las curvas resultantes son las líneas de corriente en el instante  $t$ . Estas pueden variar de un instante a otro y, en general no coinciden con el paso de las partículas.

Si la función  $\mathbf{v}$  no depende de  $t$ , que es el caso de flujo estacionario (y el sistema de ecuaciones diferenciales (3) es autónomo), entonces el parámetro  $s$  a lo largo de las líneas de corriente puede ser tomado como  $t$  y claramente las líneas de corriente y el paso de las partículas coincidirán, aunque esto también puede ocurrir para algunos casos de movimiento no estacionario, como por ejemplo en el caso donde  $\mathbf{v} = \mathbf{x}/(1+t)$ .

Como ilustración del procedimiento para hallar las líneas de corriente se hallarán las mismas para el ejemplo mostrado en la sección anterior. En este ejemplo, las líneas de corriente en el tiempo  $t$  son las soluciones de

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{x_1}{1+t} \quad \frac{dx_2}{ds} = x_2 \quad \frac{dx_3}{ds} = 0$$

con las condiciones

$$s = 0 \quad x_1 = x_1^o \quad x_2 = x_2^o \quad x_3 = x_3^o$$

Entonces, manteniendo  $t$  constante, la línea de corriente a través del punto  $\mathbf{x}^o$  es

$$x_1 = x_1^o e^{s/(1+t)} \quad x_2 = x_2^o e^s \quad x_3 = x_3^o$$

donde  $s$  es el parámetro que define la curva. Esta curva en el plano  $x_3 = x_3^o$  sería

$$x_2 = x_2^o \left( \frac{x_1}{x_1^o} \right)^{(1+t)}$$

### 1.2.3. Tubo de Corriente

Si  $\mathcal{L}$  es una curva cerrada en una región del flujo (región del espacio donde está definido el campo vectorial de velocidad), las líneas de corriente a través de cada punto de  $\mathcal{L}$  generan una superficie conocida como *tubo de corriente*. Sea  $\mathcal{A}$  una superficie con  $\mathcal{L}$  como curva limitante, luego la integral

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (5)$$

es conocida como la *fuerza del tubo de corriente* en su sección transversal  $\mathcal{A}$ . Esta fuerza del tubo de corriente representa el caudal volumétrico que atraviesa la superficie  $\mathcal{A}$ . Debido a que la velocidad es tangente a la línea de corriente en cada punto, el volumen material no cruza las paredes del tubo de corriente.

### 1.2.4. Trazas

El nombre de traza es aplicado a la curva delineada por ejemplo por un plumero de humo o tinta la cual es continuamente inyectada en un punto fijo, y que no se difunde. Así, en el tiempo  $t$ , la traza a través de un punto fijo  $\mathbf{y}$  del espacio es una curva que va desde  $\mathbf{y}$  hasta  $\mathbf{x} = \chi(t, \mathbf{y})$ , la posición alcanzada por el punto material que estaba en  $\mathbf{y}$  para el tiempo  $t = 0$ . Un punto material está sobre la traza si éste pasa por el punto fijado  $\mathbf{y}$  en algún momento entre 0 y  $t$ . Si este tiempo es designado como  $s$ , luego las coordenadas materiales del punto material serían dadas por la ecuación 1.1.(12) como

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(s, \mathbf{y}) \quad (6)$$

Sin embargo, en el tiempo  $t$  este punto material está en

$$\mathbf{x} = \chi(t, \mathbf{X}) \quad (7)$$

así la ecuación de la traza en el tiempo  $t$  está dada por

$$\mathbf{x} = \chi(t, \chi^{-1}(s, \mathbf{y})) \quad (8)$$

donde el parámetro  $s$  a lo largo de ella cae en el intervalo  $0 \leq s \leq t$ . Si se considera el movimiento como si este hubiese empezado para todo momento, entonces el origen del tiempo es arbitrario y  $s$  puede tomar valores negativos en el intervalo  $-\infty \leq s \leq t$ .

El concepto de traza puede ser ilustrado si volvemos al ejemplo planteado en la Sección 1.2.1. Para este caso, las relaciones inversa, definiendo el punto material ubicado en  $\mathbf{y}$  para el tiempo  $s$ , se tiene

$$X_1 = \frac{y_1}{1+s} \quad X_2 = y_2 e^{-s} \quad X_3 = y_3$$

De aquí, las traza está dada por

$$x_1 = y_1 \frac{1+t}{1+s} \quad x_2 = y_2 e^{(t-s)} \quad x_3 = y_3$$

### 1.2.5. Circulación

Sea  $\mathcal{L}$  una curva cerrada en una región del flujo igual a la presentada en la definición de tubo de corriente en la Sección 1.2.3. y sea  $\mathcal{A}$  una superficie con  $\mathcal{L}$  como curva limitante, luego la integral

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\mathcal{L} \quad (9)$$

es conocida como la *circulación* y debe interpretarse como la integral alrededor del contorno de  $\mathcal{A}$  de la componente del vector velocidad que es tangencial a dicho contorno. En este contexto el vector unitario  $\boldsymbol{\lambda}$  es el vector tangente a la curva  $\mathcal{L}$  en cada uno de sus puntos.

Aplicando el Teorema de Stokes a la integral (9), se tiene que

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\mathcal{L} = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (10)$$

donde el vector unitario  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie  $\mathcal{A}$  en cada uno de sus puntos. Dicho vector normal está dirigido hacia un sentido consistente con la orientación dada a la integral de línea. Normalmente se escoge que el vector normal se dirija a la parte convexa de la superficie y el sentido de giro debe ser en el sentido del reloj observando la curva en la misma dirección que el vector normal. Más adelante se verá como el concepto de circulación servirá para caracterizar la cinemática de las líneas de vorticidad.

## 1.3. VORTICIDAD

### 1.3.1. Definición

La *vorticidad* de un elemento del sistema material se define como el rotacional del vector velocidad (con una descripción espacial). Esto es, la vorticidad  $\mathbf{w}$  es definida como [Currie,1993]

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (1)$$

En notación indicial, la definición (1) puede ser reescrita (en coordenadas cartesianas) como

$$w_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad (2)$$

De esta definición se desprende (más adelante esto se aclarará) que la vorticidad es numéricamente el doble de la velocidad angular de la rotación de un elemento del volumen material alrededor de sus propios ejes. No obstante, se debe hacer notar que un elemento del volumen material puede moverse sobre una línea de corriente circular mientras que su vorticidad es nula. La vorticidad es proporcional a la velocidad angular de un elemento de volumen material alrededor de sus ejes principales, sin ser aquel que pasa por su centro de gravedad. Así, un elemento material, la cual viaja en una línea de corriente circular, no tendrá vorticidad si no rota alrededor de su centro de gravedad durante su movimiento.

La vorticidad está relacionada con la circulación mediante la expresión 1.2.(10) y la definición (1) en la forma

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\mathcal{L} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (3)$$

donde la integral de línea del contorno  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{A}$  ha sido convertida a una integral de superficie mediante el uso del Teorema de Stokes.

La ecuación (3) muestra que, para una selección arbitraria del contorno y áreas, si  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  entonces  $\Gamma = 0$  y viceversa. El flujo para el cual  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  es llamado *irrotacional*, y el flujo para el cual no se anula la vorticidad *rotacional*. La distinción entre el flujo rotacional y el irrotacional es importante es sumamente importante desde el punto de vista analítico, como se verá más adelante.

### 1.3.2. Línea de Vorticidad

La *línea de vorticidad* se define de forma similar que la línea de corriente, sólomente que en este caso el campo vectorial no es la velocidad, sino su rotacional.

Las líneas de vorticidad son las llamadas líneas del campo vectorial de la vorticidad de la velocidad. Ellas son las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{w}(t, \mathbf{x}) \quad (4)$$

sujeto a la condición

$$s = 0 \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^o \quad (5)$$

donde  $s$  es un parámetro a lo largo de la línea de vorticidad y  $\mathbf{x}^o$  es el punto por donde pasa dicha línea. Este parámetro no debe ser confundido con el tiempo  $t$ . Para la ecuación (4)  $t$  es mantenido fijo, mientras las ecuaciones son integradas, y las curvas resultantes son las líneas de vorticidad en el instante  $t$ . Estas pueden variar de un instante a otro y, en general no coinciden con ninguna de las trayectorias definidas en la Sección 1.2.

### 1.3.3. Tubo de Vorticidad

Si  $\mathcal{L}$  es una curva cerrada en una región del flujo (región del espacio donde está definido el campo vectorial de vorticidad), las líneas de vorticidad a través de cada punto de  $\mathcal{L}$  generan una superficie conocida como tubo de vorticidad. Sea  $\mathcal{A}$  una superficie con  $\mathcal{L}$  como curva limitante, luego la integral

$$\Gamma = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (6)$$

es conocida como la fuerza del tubo de vorticidad en su sección transversal  $\mathcal{A}$ . Esta fuerza del tubo de vorticidad coincide con la circulación  $\Gamma$  del campo de velocidades definida en la Sección 1.2.5. En las paredes de un tubo de vorticidad siempre se cumple que  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

### 1.3.4. Teorema de Helmholtz

Sea  $\mathcal{L}$  una curva cerrada en una región del flujo igual a la presentada en la definición de tubo de vorticidad, y sean  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  dos superficies diferentes con  $\mathcal{L}$  como curva limitante, luego las integrales [Currie,1993]

$$\Gamma_1 = \int_{\mathcal{A}_1} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\mathcal{L} \quad (7.a)$$

y

$$\Gamma_2 = \int_{\mathcal{A}_2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\mathcal{L} \quad (7.b)$$

son iguales debido a que la curva cerrada  $\mathcal{L}$  es común para ambas áreas  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$ , y el sentido de orientación de las integrales de lía se han escogido iguales (con su respectiva consecuencia sobre los vectores normales).

Por otra parte si se define una superficie cerrada  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  la aplicación del Teorema de la divergencia

$$\Gamma_2 - \Gamma_1 = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{w} \, d\mathcal{V} = 0 \quad (8)$$

ofrece el mismo resultado, puesto que siempre se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (9)$$

Obsérvese que el vector normal en la integral (7.a) sobre  $\mathcal{A}_1$  se ha definido opuesto al vector normal en la misma porción de superficie en la integral (8) sobre  $\mathcal{A}$ .

Adicionalmente, si se hubiesen escogidos dos superficies transversales  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  distintas del mismo tubo de vorticidad, y luego se hubiese realizado la integral de volumen de (9) sobre todo el tubo limitado por las superficies mencionadas, el resultado sería el mismo

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma \quad (10)$$

luego de aplicar el Teorema de la divergencia a dicha integral.

Esta tres formas de presentar el mismo resultado es lo que se conoce como el *Teorema de Helmholtz* y es un teorema netamente cinemático basado exclusivamente en criterios geométricos y en las definiciones de la circulación y la vorticidad.

## 1.4. SISTEMA DE COORDENADAS NO INERCIAL

### 1.4.1. Transformación del Movimiento

El cambio del sistema de coordenadas que se presenta y que es útil para los Capítulos III y V, es aquel que ocurre entre un sistema inercial (a veces también denominado *marco de referencia inercial*, el cual se considera rígido y sin movimiento de aceleración y rotación) y uno no inercial (aunque siendo un marco de referencia, se considera también rígido), siendo este último traslacional y rotacional con respecto al primero. Por convención, se escogerán los ejes  $oxyz$  para representar al sistema de coordenadas inercial, y los ejes  $OXYZ$  para representar al sistema de coordenadas no inercial. El sistema  $OXYZ$  describe un movimiento de traslación y rotación con respecto al sistema  $oxyz$ . Para que esta descripción sea posible ambos sistemas de coordenadas deben ser rígidos, o sea que los ángulos entre sus ejes sean invariantes. De otra forma, sería imposible definir una velocidad de rotación  $\omega$  para el sistema no inercial. Eventualmente, se puede permitir el uso de sistemas de coordenadas curvilíneos si se tiene en cuenta la observación anterior.

La interrelación entre un sistema de referencia inercial y otro que no lo sea viene dada por el siguiente conjunto de ecuaciones ([León,1979], [Meriam,1990], [Bottema & Roth,1990], [Goldstein,1980]).

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_o + \mathbf{R} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_o + \omega \times \mathbf{R} + \mathbf{V} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}_o + \alpha \times \mathbf{R} + \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) + 2\omega \times \mathbf{V} + \mathbf{A} \end{aligned} \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} & \mathbf{v}_o &= \frac{d\mathbf{r}_o}{dt} & \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} & \mathbf{a}_o &= \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} \\ \omega \times \mathbf{R} + \mathbf{V} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} & \omega \times \mathbf{V} + \mathbf{A} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\ \alpha \times \mathbf{R} + \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) + \omega \times \mathbf{V} &= \frac{d(\omega \times \mathbf{R})}{dt} & \alpha &= \frac{d\omega}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

Los vectores  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{A}$  son respectivamente las velocidad y aceleración *Relativas*. El término  $\omega \times (\omega \times \mathbf{R})$  es la aceleración *Giroscópica* y  $2\omega \times \mathbf{V}$  es la aceleración de *Coriolis*. Los tres primeros términos de (1) en la aceleración a veces se le denominan aceleración de *Transporte* debido a que no involucra los términos relativos. Lo mismo se puede decir de la velocidad en (1). Todas estas expresiones serán usadas luego en el desarrollo de los principios de conservación para sistemas no inerciales en la Secciones 2.1.2, 2.2.4 y 3.1.2 del Capítulo III.

La derivación total respecto al tiempo en esta primera parte, al igual que para el resto del texto, se entenderá que es para sistemas materiales, o en otras palabras, la derivación total se hará siguiendo las trayectorias de las partículas materiales. Esto último, sin embargo, es indiferente para las derivadas de  $\mathbf{r}_o$  y  $\omega$  respecto al tiempo, puesto que estas cantidades dependen exclusivamente del tiempo, es decir, dependen del movimiento del sistema de coordenadas no inercial  $OXYZ$  y no de las partículas materiales o los puntos del volumen material.



### 1.4.2. Relaciones de Poisson

Las expresiones (1) y (2) tan conocidas de casi todos los textos de mecánica se deducen de hacer uso de las Relaciones de Poisson [León,1979]. Estas relaciones básicamente permiten calcular la variación de un vector de la base del sistema de coordenadas no inercial que, por supuesto, es móvil (se puede permitir el uso de una base para un sistema de coordenadas curvilíneas). Suponiendo que la base del sistema de coordenadas no inercial está formada por vectores a los que denominaremos  $\check{\mathbf{e}}_i$ , entonces su derivada respecto al tiempo vendrá dada por

$$\frac{d\check{\mathbf{e}}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \check{\mathbf{e}}_i \quad (3)$$

Estas relaciones establecen que sólomente la parte del vector base que es perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$  sufre variación con el movimiento de rotación del sistema, y esta variación es proporcional a  $|\boldsymbol{\omega}|$ . Sería la rapidez con la cual la punta del vector “parte perpendicular del vector base” recorre el espacio describiendo un diferencial de arco de circunferencia en un diferencial de tiempo. El módulo de la variación es así  $|\boldsymbol{\omega} \times \check{\mathbf{e}}_i|$  y su dirección es perpendicular a los vectores  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\check{\mathbf{e}}_i$ , siguiendo la regla de la mano derecha. La parte del vector base que es paralela no sufre variación alguna. Todo esto es fácil de comprobar cinemáticamente.

### 1.4.3. Derivación Relativa

La derivación relativa a un sistema de coordenadas no inercial sólomente tiene sentido cuando se derivan vectores y tensores. Para funciones escalares la derivación relativa y absoluta (la cual es relativa a un sistema de coordenadas inercial) no tienen diferencia.

Cuando un vector cualquiera se expresa como una combinación lineal de la base del sistema de coordenadas no inercial, por ejemplo,

$$\mathbf{b} = b_i \check{\mathbf{e}}_i \quad (4)$$

entonces, su derivada respecto al tiempo vendrá dada por

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = b_i \frac{d\check{\mathbf{e}}_i}{dt} + \frac{db_i}{dt} \check{\mathbf{e}}_i \quad (5)$$

En el primer término del miembro de la derecha, se puede substituir la relación de Poisson

$$\frac{d\check{\mathbf{e}}_i}{dt} = b_i \boldsymbol{\omega} \times \check{\mathbf{e}}_i + \frac{db_i}{dt} \check{\mathbf{e}}_i \quad (6)$$

y al segundo término, se le puede denominar “la derivación relativa del vector  $\mathbf{b}$ ”, porque es la derivación del vector como la viera un observador fijo al sistema de coordenadas no inercial. Así, finalmente queda que

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} + \frac{\delta \mathbf{b}}{\delta t} \quad (7)$$

donde el símbolo  $\delta/\delta t$  se ha empleado para denotar la derivación relativa (relativa al observador en un marco de referencia no inercial).

Cuando en cambio se tiene a un tensor de segundo orden cualquiera expresado como una combinación lineal de la base del sistema de coordenadas no inercial, por ejemplo,

$$\mathbf{B} = B_{ij} \check{\mathbf{e}}_i \check{\mathbf{e}}_j \quad (8)$$

entonces su derivada respecto al tiempo vendrá dada por

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = B_{ij} \frac{d\check{\mathbf{e}}_i}{dt} \check{\mathbf{e}}_j + B_{ij} \check{\mathbf{e}}_i \frac{d\check{\mathbf{e}}_j}{dt} + \frac{dB_{ij}}{dt} \check{\mathbf{e}}_i \check{\mathbf{e}}_j \quad (9)$$

En el primer y segundo términos del miembro de la derecha se pueden substituir las relaciones de Poisson

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = B_{ij}\boldsymbol{\omega} \times \check{\mathbf{e}}_i\check{\mathbf{e}}_j + B_{ij}\check{\mathbf{e}}_i\boldsymbol{\omega} \times \check{\mathbf{e}}_j + \frac{dB_{ij}}{dt}\check{\mathbf{e}}_i\check{\mathbf{e}}_j \quad (10)$$

y al tercer término se le puede denominar “la derivación relativa del tensor  $\mathbf{B}$ ”, porque es la derivación del tensor como la viera un observador fijo al sistema de coordenadas no inercial. Así, finalmente queda que

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\delta\mathbf{B}}{\delta t} \quad (11)$$

En el segundo término se ha cambiado el signo porque se ha intercambiado el ordenamiento de los vectores en la multiplicación vectorial y se ha definido la multiplicación “ $\times$ ” entre un vector y un tensor, o viceversa. Esta multiplicación debe entenderse que se realiza entre los vectores bases adyacentes al símbolo que la indica y el resto de los vectores bases con su ordenamiento pre-establecido quedan sin ser afectados.

La derivación relativa expuesta aquí no es nada más que un caso particular de la derivación convectiva corrotacional, expresada en este caso función del vector de velocidad angular (mitad de la vorticidad del campo de velocidades), en lugar de un tensor de velocidad de rotación (parte antisimétrica del tensor gradiente del campo de velocidades), relacionados entre sí a través del vector axial de este último. Como el marco de referencia es rígido, visto como medio continuo, posee estas cantidades definidas de forma homogénea en todo este medio (vistas como cantidades calculadas localmente a partir del campo de velocidades), por lo que los vectores velocidad y aceleración angulares son vectores deslizantes a lo largo del eje instantáneo de rotación formado por los puntos con velocidad relativa nula o uniforme (velocidad relativa al marco de referencia no inercial). Este eje en una línea paralela a la velocidad y aceleración angulares que pasa precisamente por el punto donde convergen todas sus componentes, que este caso particular coincide con el origen  $O$  del sistema de coordenadas no inercial  $OXYZ$ . Para un análisis más detallado de las derivadas convectivas ver la sección 3.4.8. Es necesario recalcar, que la velocidad y aceleración angulares del marco de referencia no inercial y del sistema materia continuo, cuando es un sólido rígido, no necesariamente tienen que coincidir, aunque esto último facilita bastante los cálculos.

En las expresiones (1) se supone que  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_o$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_o$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}_o$  están expresados en la base  $\mathbf{e}$  del sistema de referencia inercial  $oxyz$  (esta base no se mueve para los efectos de análisis). Por el contrario, se supone que  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\boldsymbol{\alpha}$  están expresados en la base  $\check{\mathbf{e}}$  del sistema de referencia no inercial  $OXYZ$ . Con base en este criterio, sabiendo que los vectores  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\boldsymbol{\alpha}$  son paralelos entre sí y aplicando la derivación (7) a los vectores que corresponden, se pueden deducir fácilmente las relaciones (2). Es evidente que en esta deducción hay que considerar que

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{\delta t} \quad \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \frac{\delta\boldsymbol{\alpha}}{\delta t} \quad (12)$$

por las razones expuestas arriba. También se puede observar que la velocidad  $\mathbf{V}$  y la aceleración  $\mathbf{A}$  relativas son las derivadas relativas de  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{V}$ , respectivamente.

Finalmente es necesario hacer la observación de que es práctica usual escoger los sistemas de coordenadas  $oxyz$  y  $OXYZ$  coincidentes o paralelos entre sí y con una base idéntica para el instante de análisis, con la finalidad de poder sumar sus componente cuando se tienen suma de vectores expresado uno en un sistema de coordenadas inercial y el otro en el no inercial.

#### 1.4.4. Derivación Parcial

Sea  $\mathbf{b}$  un vector de un campo vectorial que puede estar definido simultáneamente en el sistema de coordenadas inercial y en el sistema de coordenadas no inercial en la forma

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(t, \mathbf{r}) = \check{\mathbf{b}}(t, \mathbf{R}) \quad (13)$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}}{dt} &= \frac{d\check{\mathbf{b}}}{dt} \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{b} &= \boldsymbol{\omega} \times \check{\mathbf{b}} + \frac{\delta \check{\mathbf{b}}}{\delta t} = \boldsymbol{\omega} \times \check{\mathbf{b}} + \frac{\partial \check{\mathbf{b}}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (14)$$

Para un instante de análisis dado se puede hacer coincidir o hacer paralelos los sistemas  $oxyz$  y  $OXYZ$ , para los cuales los operadores  $\nabla$  y  $\check{\nabla}$  coincidan, lo mismo que  $\nabla \mathbf{b}$  y  $\check{\nabla} \check{\mathbf{b}}$ . Esto es cierto desde el punto de vista vectorial, aunque los sistemas no sean coincidentes o paralelos, puesto que la expresión (14) es una expresión vectorial y el tensor métrico en ambos sistemas es el mismo. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \boldsymbol{\omega} \times \check{\mathbf{b}} + \frac{\partial \check{\mathbf{b}}}{\partial t} - (\mathbf{v} - \mathbf{V}) \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{b}} \\ &= \frac{\partial \check{\mathbf{b}}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \check{\mathbf{b}} - (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (15)$$

Nótese que  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{b}} \neq \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{b}})$  por lo que no se puede extraer  $\boldsymbol{\omega} \times$  como factor común en el miembro de la derecha.

Para los casos de una función escalar o tensorial los resultados son similares

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial \check{b}}{\partial t} - (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot \check{\nabla} \check{b} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \check{\mathbf{B}}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \check{\mathbf{B}} - \check{\mathbf{B}} \times \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{B}} \quad (17)$$

Como una conclusión fundamental de las expresiones (15), (16) y (17), se tiene que si un problema, en una variable o propiedad, es estacionario en un sistema de coordenadas, no necesariamente lo es en el otro.

#### 1.4.5. Campo de Velocidades

Para el campo vectorial de velocidades la suposición (13) ya no es válida puesto que

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}_o(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(t) + \mathbf{V}(t, \mathbf{R}) \quad (18)$$

y, por consiguiente, aplicando la derivación con respecto al tiempo a la expresión anterior, considerando la derivación (7) de los dos últimos términos, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + \frac{\delta}{\delta t}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) \\ &= \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta \mathbf{R}}{\delta t} + \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} \\ &= \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} \end{aligned} \quad (19)$$

Ahora si se substituye la definición de la derivación material en cada sistema de coordenadas

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \check{\nabla} \mathbf{V} \quad (20)$$

y luego se substituye (18) en el gradiente del miembro izquierdo, considerando a los dos sistemas de coordenadas, el inercial y el no inercial, paralelos o coincidentes, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \mathbf{V}) &= \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \check{\nabla} \mathbf{V} \implies \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}) + \mathbf{v} \cdot \check{\nabla} \mathbf{V} &= \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \check{\nabla} \mathbf{V} \end{aligned} \quad (21)$$

donde, al aplicar la propiedad del triple producto escalar, finalmente queda

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{V}) \cdot \check{\nabla} \mathbf{V} \quad (22.a)$$

o lo que es lo mismo (al substituir (18))

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + 2 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 3 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_o - (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot \check{\nabla} \mathbf{V} \quad (22.b)$$

Al igual que en la sección anterior resulta la misma conclusión fundamental de las expresiones (22). Se tiene que si un problema, en lo que respecta al campo de velocidades, es estacionario en un sistema de coordenadas, no necesariamente lo es en el otro.

## 2. FLUJO

Esta sección comprende la cinemática de los sistemas materiales concebidos como un conjunto continuo de lo que se ha denominado puntos materiales. En este contexto, el concepto de volumen material, y su evolución en el espacio al transcurrir el tiempo, se hace importante. Así mismo, la descripción espacial de la velocidad de los puntos materiales es la más adecuada. Los balance de las cantidades relacionadas con la materia se hace mediante el Teorema del Transporte de Reynolds, que no es más que una aplicación particular a volúmenes materiales, de lo que se conoce como la Regla de Leibniz. Casi en toda su globalidad esta sección fue extraída del texto de [Aris,1962], aunque fue enriquecida con aportes de otras fuentes no menos importantes.

### 2.1. DILATACION

Se ha notado en la sección A.2.4.3. que si un sistema de coordenadas es cambiado de las coordenadas  $\mathbf{X}$  a las coordenadas  $\mathbf{x}$ , entonces el elemento de volumen cambia por la fórmula

$$d\mathcal{V} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} dX_1 dX_2 dX_3 = J d\mathcal{V}_o \quad (1.a)$$

donde  $J$ , que es el jacobiano de la transformación, es llamado también la *dilatación*. Normalmente se considera que existe una *expansión* cuando  $J > 1$ . Por el contrario, se considera una *contracción*, si la expansión es opuesta, o sea cuando  $J < 1$ .

#### 2.1.1. Cambio de Volumen

Si se piensa en  $\mathcal{X}$  como las coordenadas materiales, estas son las coordenadas cartesianas en  $t = 0$ , así que  $dX_1 dX_2 dX_3$  es el volumen  $d\mathcal{V}_o$  de un paralelepípedo elemental diferencial. Considérese este paralelepípedo elemental alrededor de un punto  $\mathbf{X}$ , dado en el instante inicial. Debido al movimiento, este paralelepípedo es movido y distorsionado, pero como el movimiento es continuo, este no se rompe, y así, en el tiempo  $t$ , este volumen se convierte en  $d\mathcal{V}$  en la vecindad del punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ . Por la ecuación (1), su volumen es  $d\mathcal{V} = J d\mathcal{V}_o$  y de aquí que

$$J = \frac{d\mathcal{V}}{d\mathcal{V}_o} = \frac{\text{Volumen material elemental}}{\text{Volumen inicial}} \quad (1.b)$$

#### 2.1.2. Jacobiano de la Transformación

La suposición de que la ecuación 1.1.(1) puede ser invertida en todo momento, para dar la ecuación 1.1.(12), y viceversa, es equivalente a decir que tanto  $J$  como  $J^{-1}$  nunca se anulan y son finitos. Así que

$$0 < J < \infty \quad (2)$$

El signo se  $J$  se justifica porque los volúmenes se definen como cantidades positivas.

Se puede expresar el determinante jacobiano de un forma compacta usando el símbolo alternante  $\epsilon_{ijk}$  como se hizo en A.2.3.(14). Esto es,

$$J \equiv J(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = |\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{J}$  es el tensor jacobiano definido como

$$\mathbf{J} = [\tilde{\nabla} \chi(t, \mathbf{X})]^t \quad (4)$$

y en el operador diferencial  $\tilde{\nabla}$  las derivadas parciales se hacen respecto a las coordenadas materiales  $X_i$ .

### 2.1.3. Formula de Expansión de Euler

Se puede preguntar ahora como cambia la dilatación  $J$  a medida que se sigue el movimiento. Para responder esto se va a calcular la derivada material de la función  $J$ . Aplicando la derivación material a (3), se obtiene que

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \right) \quad (5)$$

donde aplicando la regla de derivación de un producto resulta

$$\frac{dJ}{dt} = \epsilon_{ijk} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \right) \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \right) \right] \quad (6)$$

Como la derivada material se obtiene por definición manteniendo constante  $\mathbf{X}$ , las derivadas parciales y materiales de la ecuación anterior pueden ser intercambiadas de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} \quad (7)$$

Por consiguiente,

$$\frac{dJ}{dt} = \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial v_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial v_3}{\partial X_k} \right] \quad (8)$$

Si ahora tomamos en cuenta que  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  son funciones de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , y estas a su vez de  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$ , vamos a aplicar la Regla de la Cadena

$$\frac{\partial v_1}{\partial X_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \quad \frac{\partial v_2}{\partial X_j} = \frac{\partial v_2}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} \quad \frac{\partial v_3}{\partial X_k} = \frac{\partial v_3}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_k} \quad (9)$$

Al substituir estas relaciones queda que

$$\frac{dJ}{dt} = \epsilon_{ijk} \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} \right) \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_k} \right) \right] \quad (10)$$

Así  $dJ/dt$  sería la suma de tres determinantes, el primero de los cuales es

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \quad (11)$$

Expandiendo este determinante por la primera fila, se puede observar que sólo el primer término ( $m = 1$ ) de los elementos en la primera fila sobrevive. Para  $m = 2$  o  $m = 3$ , el coeficiente de  $\partial v_1 / \partial x_m$  es un determinante con dos filas iguales, y por lo tanto nulo.

Si se hacen estas mismas consideraciones a los otros dos determinantes de  $dJ/dt$ , se tiene que

$$\frac{dJ}{dt} = \epsilon_{ijk} \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \right] \quad (12)$$

Extrayendo el factor común y teniendo en cuenta la definición de  $J$ , se obtiene finalmente

$$\frac{dJ}{dt} = \left( \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \quad (13)$$

o equivalentemente,

$$\frac{dJ}{dt} = J \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \frac{d \ln J}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (14)$$

De esta forma se tiene un significado físico importante para la divergencia del campo de velocidades. Es la tasa relativa de cambio de la dilatación, siguiendo la trayectoria de un punto material. Es evidente, que para el movimiento de un fluido incompresible,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (15)$$

Cuando  $J = J[t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_a)]$  depende de un recorrido arbitrario  $\mathbf{x}_a(t)$ , entonces su derivada total se obtiene mediante

$$\frac{dJ}{dt} = J \nabla \cdot \mathbf{v}_a \quad (16)$$

#### 2.1.4. Descomposición del Jacobiano

Formalmente hablando, cuando se escoge una configuración de referencia arbitraria  $\kappa$ , el tensor jacobiano se define como

$$\mathbf{J}_\kappa = \mathbf{J}_\kappa(t, \mathbf{X}_\kappa) = [\tilde{\nabla}_\kappa \chi_\kappa(t, \mathbf{X}_\kappa)]^t \quad (17)$$

donde el operador diferencial  $\nabla_\kappa$  se toma respecto a las coordenadas definidas por la configuración de referencia  $\mathbf{X}_\kappa$ . Cuando se escoge como configuración de referencia, la configuración del sistema material en un instante  $\tau$  de su movimiento, el índice  $\kappa$  se debe cambiar por el índice  $\tau$ . O sea,

$$\mathbf{J}_\tau = \mathbf{J}_\tau(t, \mathbf{X}_\tau) = [\tilde{\nabla}_\tau \chi_\tau(t, \mathbf{X}_\tau)]^t \quad (18)$$

Teniendo en consideración (18) y aplicando la Regla de la cadena, el tensor jacobiano se puede descomponer en dos movimientos del sistema material

$$\mathbf{J}_\tau(t, \mathbf{X}_\tau) = \mathbf{J}_{\tau'}(t, \mathbf{X}_{\tau'}) \cdot \mathbf{J}_\tau(\tau', \mathbf{X}_\tau) \quad (19.a)$$

o de una forma más simplificada

$$\mathbf{J}_\tau(t) = \mathbf{J}'_\tau(t) \cdot \mathbf{J}_\tau(\tau') \quad (19.b)$$

Considerando que

$$\mathbf{J}_\tau(\tau, \mathbf{X}_\tau) = \mathbf{I} \quad \mathbf{J}_\tau(\tau) = \mathbf{I} \quad (20)$$

entonces (19) implica que

$$\mathbf{J}_t(\tau) \cdot \mathbf{J}_\tau(t) = \mathbf{I} \quad (21)$$

Considerando lo dicho en la Sección A.1.7.12 de la descomposición polar de un tensor cualquiera, el tensor jacobiano puede descomponerse en las formas

$$\mathbf{J}_\tau(t) = \mathbf{R}_\tau(t) \cdot \mathbf{U}_\tau(t) = \mathbf{V}_\tau(t) \cdot \mathbf{R}_\tau(t) \quad (22)$$

donde  $\mathbf{R}$  es el tensor jacobiano de un movimiento de rotación y  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son los tensores jacobianos de movimientos de deformación. Estos movimientos son diferentes para cada punto del sistema material al igual que lo es el tensor jacobiano  $\mathbf{J}$ . El tensor  $\mathbf{U}$  se denomina *tensor de deformación positivo* y el tensor  $\mathbf{V}$  el *tensor de deformación negativo*. En algunos textos, a los tensores  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  se les denominan los tensores de extensión derecho e izquierdo, respectivamente, por las razones que se explicarán en la Sección 3.3.2. Los tensores  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$ , por supuesto, son simétricos y el tensor  $\mathbf{R}$  es ortogonal. Todos los tensores mencionados en esta sección, excepto  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{R}$ , son no mixtos (es decir, sus componentes se expresan normalmente sobre una base única).

### 2.1.5. Composición del Jacobiano

El tensor jacobiano se compone con su transpuesto de la forma

$$\mathbf{J}_\tau(t)^t \cdot \mathbf{J}_\tau(t) = [\mathbf{U}_\tau(t)]^2 = \mathbf{R}_\tau(t)^t \cdot [\mathbf{V}_\tau(t)]^2 \cdot \mathbf{R}_\tau(t) = \mathbf{R}_\tau(t)^t \cdot \mathbf{B}_\tau(t) \cdot \mathbf{R}_\tau(t) \equiv \mathbf{C}_\tau(t) \quad (23.a)$$

$$\mathbf{J}_\tau(t) \cdot \mathbf{J}_\tau(t)^t = [\mathbf{V}_\tau(t)]^2 = \mathbf{R}_\tau(t) \cdot [\mathbf{U}_\tau(t)]^2 \cdot \mathbf{R}_\tau(t)^t = \mathbf{R}_\tau(t) \cdot \mathbf{C}_\tau(t) \cdot \mathbf{R}_\tau(t)^t \equiv \mathbf{B}_\tau(t) \quad (23.b)$$

donde los tensores  $\mathbf{C}_\tau(t) \equiv \mathbf{C}_\tau(t, \mathbf{X}_\tau)$  y  $\mathbf{B}_\tau(t) \equiv \mathbf{B}_\tau(t, \mathbf{X}_\tau)$  simétricos, son los denominados *tensores de Cauchy y de Green*, respectivamente. Algunos autores [Truesdell,1977; Chung,1988/1996] los denominan *tensores de Cauchy-Green derecho e izquierdo*, respectivamente.

Existen otros tensores que se obtienen a partir del tensor jacobiano. Los tensores

$$\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{B}_\tau^{-1}(t) \quad \tilde{\mathbf{B}}_t(\tau) = \mathbf{C}_\tau^{-1}(t) \quad (24.a)$$

son los denominados *tensores de Piola y de Finger*, respectivamente. Algunos autores emplean los nombre de tensores de Piola-Finger derecho e izquierdo. Similarmente, los tensores de Cauchy y de Green se pueden expresar en función de estos tensores como

$$\mathbf{C}_\tau(t) = \tilde{\mathbf{B}}_t^{-1}(\tau) \quad \mathbf{B}_\tau(t) = \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau) \quad (24.b)$$

Existen también los tensores de deformación finita

$$\mathbf{IE}_\tau(t) = \frac{1}{2}[\mathbf{C}_\tau(t) - \mathbf{I}] \quad \tilde{\mathbf{IE}}_t(\tau) = \frac{1}{2}[\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)] \quad (25)$$

de Cauchy y de Piola, respectivamente. A los tensores  $\mathbf{IE}$  y  $\tilde{\mathbf{IE}}$  también se les denomina los tensores de deformación finita de Green y de Almansi, respectivamente. El primero tiene una descripción material o lagrangeana y el segundo una descripción espacial o euleriana.

### 2.1.6. Transformación del Jacobiano

Sea  $[\mathbf{Q}(t, \mathbf{x})]$  la matriz de los cosenos directores que definen un cambio de la base del sistema de coordenadas

$$\mathbf{a}_i = Q_i^\alpha \bar{\mathbf{a}}_\alpha \quad \mathbf{a}_i \cdot \bar{\mathbf{a}}^\alpha = Q_i^\alpha \quad (26)$$

válido para cada instante y diferente para cada punto  $p$  del espacio (con vector de posición  $\mathbf{x}$ ). De manera que los tensores métricos de los sistema de coordenadas  $px_1x_2x_3$  y  $p\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$  (diferentes para cada punto  $p$ ), se relacionan en la forma

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = Q_i^\alpha Q_j^\beta \bar{g}_{\alpha\beta} \quad (27)$$

Este cambio de base produce una transformación del sistema de coordenadas  $px_1x_2x_3$ , al sistema de coordenadas  $p\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$  (diferente para cada punto  $p$ ), tal que, cualquier tensor de segundo orden  $\mathbf{T}$  (no mixto), expresado en función de un base  $\{\mathbf{a}_i\}$ , se puede transformar en un tensor  $\bar{\mathbf{T}}$ , expresado en función de la base  $\{\bar{\mathbf{a}}_\alpha\}$ , como

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \quad (28)$$

donde el tensor  $\mathbf{Q}$  es el tensor mixto cuyas componentes en la base  $\{\mathbf{a}^i \bar{\mathbf{a}}_\alpha\}$  son los elementos  $Q_i^\alpha$  de la matriz  $[\mathbf{Q}]$  definidos en (26).

Como el tensor  $\mathbf{J}$  es mixto respecto a la base  $\{\mathbf{a}_i \bar{\mathbf{a}}_j\}$ , entonces la transformación de los sistemas de coordenadas debe hacerse por separado en cada una de las bases. Por consiguiente el equivalente de (28) para el tensor jacobiano es

$$\bar{\mathbf{J}}_\tau(t) = \mathbf{Q}(t)^t \cdot \mathbf{J}_\tau(t) \cdot \mathbf{Q}(\tau) \quad (29)$$

donde

$$\mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{Q}(t, \mathbf{x}) = Q_i^\alpha \mathbf{a}^i \bar{\mathbf{a}}_\alpha \quad (30.a)$$

y

$$\mathbf{Q}(\tau) \equiv \mathbf{Q}(\tau, \mathbf{X}_\tau) = \tilde{Q}_i^\alpha \bar{\mathbf{a}}^i \bar{\mathbf{a}}_\alpha \quad (30.b)$$

El mismo procedimiento de transformación del sistema de coordenadas se puede aplicar a los otros tensores  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{B}$ , con sus respectivos tensores inversos. Estos resultados se resumen en las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}_\tau(t) &= \mathbf{Q}(t)^t \cdot \mathbf{J}_\tau(t) \cdot \mathbf{Q}(\tau) & \bar{\mathbf{J}}_\tau(t)^{-1} &= \mathbf{Q}(\tau)^t \cdot \mathbf{J}_\tau(t)^{-1} \cdot \mathbf{Q}(t) \\ \bar{\mathbf{R}}_\tau(t) &= \mathbf{Q}(t)^t \cdot \mathbf{R}_\tau(t) \cdot \mathbf{Q}(\tau) & \bar{\mathbf{R}}_\tau(t)^{-1} &= \mathbf{Q}(\tau)^t \cdot \mathbf{R}_\tau(t)^{-1} \cdot \mathbf{Q}(t) \\ \bar{\mathbf{U}}_\tau(t) &= \mathbf{Q}(\tau)^t \cdot \mathbf{U}_\tau(t) \cdot \mathbf{Q}(\tau) & \bar{\mathbf{U}}_\tau(t)^{-1} &= \mathbf{Q}(\tau)^t \cdot \mathbf{U}_\tau(t)^{-1} \cdot \mathbf{Q}(\tau) \\ \bar{\mathbf{V}}_\tau(t) &= \mathbf{Q}(t)^t \cdot \mathbf{V}_\tau(t) \cdot \mathbf{Q}(t) & \bar{\mathbf{V}}_\tau(t)^{-1} &= \mathbf{Q}(t)^t \cdot \mathbf{V}_\tau(t)^{-1} \cdot \mathbf{Q}(t) \\ \bar{\mathbf{C}}_\tau(t) &= \mathbf{Q}(\tau)^t \cdot \mathbf{C}_\tau(t) \cdot \mathbf{Q}(\tau) & \bar{\mathbf{C}}_\tau(t)^{-1} &= \mathbf{Q}(\tau)^t \cdot \mathbf{C}_\tau(t)^{-1} \cdot \mathbf{Q}(\tau) \\ \bar{\mathbf{B}}_\tau(t) &= \mathbf{Q}(t)^t \cdot \mathbf{B}_\tau(t) \cdot \mathbf{Q}(t) & \bar{\mathbf{B}}_\tau(t)^{-1} &= \mathbf{Q}(t)^t \cdot \mathbf{B}_\tau(t)^{-1} \cdot \mathbf{Q}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

Las ecuaciones de  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{C}$  son transformaciones indiferentes al valor de  $\tau$ . Si  $\mathbf{Q}(t)$  se elige igual a  $\mathbf{R}_\tau(t)$ ,  $\mathbf{J}_\tau(t)$  o  $\mathbf{J}_\tau(t)^{-t}$ , al nuevo sistema de referencia se le llama *corotado*, *convectivo bajo* o *convectivo alto*. Debido a (31), en estos tres tipos de sistemas de coordenadas se tiene que  $\bar{\mathbf{R}}_\tau(t) = \mathbf{I}$ ,  $\bar{\mathbf{J}}_\tau(t)^{-1} = \mathbf{I}$  y  $\bar{\mathbf{J}}_\tau(t) = \mathbf{I}$ , respectivamente, por lo que sus nombres quedan justificados.

## 2.2. TEOREMAS DEL TRANSPORTE DE REYNOLDS

El Teorema del Transporte, según [Truesdell,1960; §.81,p.347], fué originalmente enunciado por [Reynolds,1903;§.14], por lo cual lleva su nombre, y luego por [Jaumann,1905;§.383]. Posteriormente, fue demostrado por [Spielrein,1916;§.29], quien dió numerosas formas alternativas y algunos corolarios.

En esta sección, los dos primeros teoremas del transporte de Reynolds se desarrollan a partir de la Regla de Leibniz cuya deducción para  $\mathbb{R}^3$  está en el Apéndice A y cuya deducción general para  $\mathbb{R}^n$  está en el Apéndice B. Todo este desarrollo de los Apéndices A y B puede verse también en [Granados,1995] y [Granados,(1996)]. La deducciones del teorema que allí aparecen, básicamente siguen el mismo esquema que se sigue en [Aris,1962], [Serrin,1959] y [Slattery,1972/1999], pero con la extensión a dominios más generales (en  $\mathbb{R}^n$  en el Apéndice B) y aplicado funciones de varias variables (vectores o tensores). Procedimientos para el cambio de las variables de integración fueron tomados de [Apostol,1972] y [Marsden & Tromba,1991], y se emplearon algunos conceptos de geometría diferencial de sistemas dinámicos, que aparecen descritos, por ejemplo, en [Arnold, 1988] y [Guckenheimer,1990].

En la referencia [Hansen,1965] se deduce la Regla de Leibniz (para  $\mathbb{R}^3$ ) basándose en la definición de derivadas y usando criterios del límite [Currie,1993], pero allí mismo el Teorema del Transporte de Reynolds se



deduce como en [Aris,1962], extendiéndose luego a volúmenes de control arbitrarios (con velocidades no fijas). En [Arpaci,1984] aparece la deducción del Teorema del Transporte de Reynolds con un volumen de control de velocidad arbitraria (no fijo), pero sin usar la Regla de Leibniz. La referencia [Slattery,1972] reproduce casi de forma similar la deducción de la referencia [Aris,1962], pero a partir del Teorema del Transporte de Reynolds deduce la Regla de Leibniz como un caso particular, denominándola Teorema del Transporte Generalizado. Algo similar se hace en la referencia [Arpaci,1984]. En este trabajo seguiremos el camino opuesto, el cual se piensa es el correcto. Es decir, a partir de la Regla de Leibniz se deducirán los Teoremas del Transporte de Reynolds como un caso particular.

Finalmente se mostrará el Teorema del Transporte de Reynolds para el flujo de un sistema material en donde está presente una superficie que se deforma. Esta forma del Teorema está deducida en la Parte I, para el caso general de la Regla de Leibniz adaptada para hipersuperficies con métrica dependiente del parámetro, con respecto al cual se está derivando y el cual define el flujo del espacio, o para porciones del espacio con una superficie singular o una superficie interfaz. La aplicación de esta forma del Teorema del Transporte de Reynolds se ve en el análisis flexional transitorio y en el flujo bifásico separado por un interfaz permeable que permite el transporte de masa y energía, y representa una superficie singular donde las funciones son discontinuas. En la segunda aplicación mencionada, las referencias más frecuentes donde se encuentra esta forma del Teorema del Transporte para un volumen material con una superficie singular son: [Truesdell & Toupin,1960;Parte C,§.172-194A,pp.491-529], [Slattery,1972;§.1,pp.23-24;§.2,p.56;§.8,pp.443-497], [Bedford,1985;§.5,pp.88-98] y [Joseph,1990;§.3,pp.44-68]. Las referencias más frecuentes para un volumen material con una superficie interfaz son: [Delhay, (1974)], [Ishii,1975;§.II.1.1,p.13-14], [Delhay et al.,1981;§.7,p.159-170] y [Bergles et al.,1981;§.2,p.40-97]. Por cierto, que Ishii es el único autor de los mencionados que expresamente afirma que el Teorema del Transporte de Reynolds es un caso particular de la Regla de Leibniz.

### 2.2.1. Regla de Leibniz

Aunque en el Apéndice B se encuentra la deducción de la Regla de Leibniz para un dominio  $\mathbb{R}^n$ , en esta sección se trabajará en un dominio  $\mathbb{R}^3$ . Así que para este caso particular se tiene la Regla de Leibniz de la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a} f(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_a} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} f \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n} dA \quad (1)$$

donde la velocidad del flujo se ha denotado  $\mathbf{v}_a$  para indicar que es la velocidad arbitraria de cada punto de un volumen espacial o como también se le llama “Volumen de Control”. En ningún caso debe interpretarse  $\mathbf{v}_a$  como la velocidad de las partículas materiales, que aquí se les denotará simplemente como  $\mathbf{v}$ . En la expresión (1),  $\mathcal{A}_a = \partial\mathcal{V}_a$  es la frontera del volumen espacial  $\mathcal{V}_a$  y  $\mathbf{n}$  es la normal a dicha frontera en cada uno de sus puntos y en la dirección que apunta hacia el exterior de  $\mathcal{V}_a$ . Puede observarse que solamente es necesario conocer la velocidad de desplazamiento de los puntos de la frontera para aplicar la Regla de Leibniz. Los puntos interiores en  $\mathcal{V}_a$  se pueden mover arbitrariamente y esto no afecta el resultado de la expresión (1).

La función  $f$  debe ser una aplicación con características basadas en una descripción euleriana. Es decir, debe depender del espacio y del tiempo, pero no sigue a la partícula (si se sigue a la partícula la descripción se denomina lagrangeana). Tomando  $f(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x}) b(t, \mathbf{x})$ , donde  $b$  es una función que representa una propiedad específica por unidad de masa y  $\rho$  es la densidad del medio, se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a} \rho b d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_a} \frac{\partial \rho b}{\partial t} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho b \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n} dA \quad (2)$$

Nótese que tanto  $\rho$  como  $b$  están basadas en una descripción euleriana.

### 2.2.2. Primer Teorema del Transporte

Como (2) puede ser aplicado a cualquier volumen espacial, vamos a escoger uno tal que en todo instante coincida con el volumen material  $\mathcal{V}_m$  cuya frontera es  $\mathcal{A}_m$ . Un volumen material siempre está formado por las mismas partículas, por consiguiente, se define como aquel volumen cuya masa no varía en el

tiempo, sin importar como se mueva. Haciendo estas substituciones en (2) queda una expresión similar pero con un significado distinto

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho b \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial \rho b}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_m} \rho b \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}_m} \left( \frac{d\rho b}{dt} + \rho b \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \, d\mathcal{V} \quad (3)$$

donde en el último término se ha aplicado el Teorema de la Divergencia y la definición de la derivación material 1.1.(19). Esta expresión se conoce como el 1<sup>er</sup> Teorema del Transporte de Reynolds.

El Primer Teorema del Transporte de Reynolds se puede deducir a partir de la Fórmula de Expansión de Euler 2.1.(14) de una manera muy similar a como aparece deducida la Regla de Leibniz en el Apéndice B. En este contexto, sea  $f(t, \mathbf{x})$  cualquier función escalar, vectorial o tensorial con una descripción espacial, y sea  $\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m(t)$  un volumen material moviéndose en el espacio (esto es, formado por los mismos puntos materiales siempre). Entonces,

$$F(t) = \int_{\mathcal{V}_m} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} \quad (4)$$

es una función de  $t$  que puede ser calculada. En esta oportunidad se está interesado en calcular su derivada material  $dF/dt$ . Ahora, la integral (4) es calculada sobre el volumen variable  $\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m(t)$ , así que no se puede efectuar la diferenciación a través del símbolo de la integral. Pero, sin embargo, si la integración fuese hecha con respecto a un volumen  $\mathcal{V}_o$  fijo en el espacio, sería posible intercambiar la diferenciación y la integración, ya que  $d/dt$  es la derivada con respecto al tiempo, manteniendo  $\mathbf{X}$  constante. Sin embargo, la transformación  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ , junto con el cambio de volumen  $\mathcal{V}_m = J d\mathcal{V}_o$ , permitirá hacer justamente esto, para  $\mathcal{V}(t)$  definido como un volumen material moviéndose desde algún volumen fijo  $\mathcal{V}_o$ , definido para  $t = 0$  en la configuración inicial. Así

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} f(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_o} f(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})) J d\mathcal{V}_o = \int_{\mathcal{V}_o} \left( \frac{df}{dt} J + f \frac{dJ}{dt} \right) d\mathcal{V}_o \\ &= \int_{\mathcal{V}_o} \left[ \frac{df}{dt} + f(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] J d\mathcal{V}_o = \int_{\mathcal{V}_m} \left[ \frac{df}{dt} + f(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (5)$$

en donde se ha empleado el resultado 2.1.(14) como se habrá podido observar.

Substituyendo ahora la expresión 1.1.(19) para la derivada material del primer término del integrando y agrupando los términos que contienen el operador  $\nabla$  queda que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}_m} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}_m} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (6)$$

Por último, aplicando el Teorema de Gauss (Teorema de la Divergencia) al segundo término del integrando, resulta finalmente

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_m} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (7)$$

donde  $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(t)$  es la frontera de  $\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m(t)$  para todo  $t$ , y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $\mathcal{A}_m$  que apunta hacia el exterior de  $\mathcal{V}$ . Esta última expresión permite, de una visión física inmediata, decir que la tasa de cambio de la integral de  $f$  dentro del volumen  $\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m(t)$  en movimiento, es la integral de la tasa de cambio en un punto determinado, más el flujo neto de  $f(t, \mathbf{x})$  sobre la superficie  $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(t)$ . Como se mencionó antes  $f$  puede ser cualquier escalar o componente de un vector o tensor, así que esto es un resultado cinemático de amplia aplicación. También se puede definir  $f$  como una función intensiva por unidad de masa del sistema material si se emplea la función densidad. Con esto,  $f(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x}) b(t, \mathbf{x})$ , resultando la expresión (3). Obsérvese también la semejanza entre las expresiones (1) y (7).

### 2.2.3. Segundo Teorema del Transporte

Ahora podemos restar las expresiones (2) y (3), suponiendo que para el instante  $t$  las fronteras de los volúmenes material y espacial coinciden ( $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_a$  para un sólo instante  $t$ ), obteniéndose

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho b \, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a} \rho b \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho b (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (8)$$

Esta expresión se conoce como el 2<sup>do</sup> Teorema del Transporte de Reynolds, y es la misma que finalmente se obtiene en [Spielrein, 1916]. Nótese que las integrales del primer término de los miembros de la derecha en (2) y (3) se eliminan puesto que los integrandos son los mismos y dependen únicamente de las funciones involucradas no de la distribución de los puntos materiales o espaciales dentro de los volúmenes cuyas fronteras coinciden instantáneamente. Al primer término del miembro de la derecha de (8) se le designará con el nombre de *Término de Acumulación* y al segundo con el nombre de *Término de Flujo* por la interpretación física que se les pueden dar desde el punto de vista del volumen de control  $\mathcal{V}_a$  (adentro) y su frontera  $\mathcal{A}_a$  (a través), respectivamente. La referencia [Arpaci, 1984] denomina a las expresiones (3) y (8) como el 2<sup>do</sup> y el 1<sup>er</sup> Teorema del Transporte de Reynolds, correspondientemente. Es decir, de forma inversa como aquí se hace.

En la expresión (8) las derivadas totales con respecto a  $t$  tienen significados distintos. La primera en el miembro de la izquierda es una derivación siguiendo a las partículas materiales y se denomina “Derivada Material”, “Derivada Convectiva” o “Derivada Substancial”, y en muchas publicaciones se simboliza como  $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\delta}{\delta t} \equiv \frac{d}{dt}$ . La segunda en el miembro de la derecha es una derivación siguiendo los puntos espaciales o que conforman el volumen de control. En ambos casos, la derivación se realiza a una integral cuyo dominio determina de forma inequívoca que tipo de derivación debe interpretarse. De ahora en adelante cuando no se especifique el dominio sobre el cual se está derivando, se interpretará que la derivada es una derivada material, al menos que se aclare lo contrario.

### 2.2.4. Vector Normal a la Superficie

Si se toma  $h(t, \mathbf{x}) = 0$  la ecuación de la superficie  $\mathcal{A}_a$ , entonces

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla h = 0 \quad (9.a)$$

donde  $\nabla h$  se puede expresar como un vector en la dirección de la normal  $\mathbf{n}$ , puesto que

$$\nabla h = \|\nabla h\| \mathbf{n} \quad (9.b)$$

La derivada material de la función  $h$  se calcula de la siguiente forma

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h \quad (10.a)$$

Aquí se puede substituir  $\partial h / \partial t$  despejándola de (10.a), con lo que se obtiene que

$$\frac{dh}{dt} = -\mathbf{v}_a \cdot \nabla h + \mathbf{v} \cdot \nabla h = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \nabla h \quad (10.b)$$

y finalmente empleando (9.b) queda

$$\frac{dh}{dt} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} \|\nabla h\| \quad (10.c)$$

o lo que es lo mismo

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} = \frac{dh/dt}{\|\nabla h\|} \quad (10.d)$$

### 2.2.5. Ecuación de Continuidad

El Primer Teorema del Transporte de Reynolds se puede expresar de forma diferente si se aplica el teorema de la divergencia a la segunda integral del miembro de la derecha. Haciendo esto se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho b \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \left[ \frac{\partial \rho b}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho b \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} \quad (11)$$

Si ahora tomamos  $b = 1$  en la expresión anterior queda que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (12)$$

Como se puede observar en el miembro de la izquierda se tiene la derivada de la masa total del volumen material, la cual es constante, por lo que la expresión anterior se anula. Al ser la integral de la derecha nula para cualquier volumen material, entonces se infiere que el integrando es nulo para todos los puntos interiores a dicho volumen. Esto es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (13)$$

donde en la segunda parte se ha empleado la definición de la derivada material. Esta ecuación diferencial se conoce como la Ecuación de Conservación de Masa en su forma diferencial o como la *ecuación de continuidad*.

### 2.2.6. Tercer Teorema del Transporte

La ecuación de continuidad permite obtener un resultado interesante que describiremos a continuación. El integrando del lado derecho en (11) puede ser expandido, empleando la regla de derivación de un producto, con lo cual se obtiene que

$$\frac{\partial \rho b}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho b \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial b}{\partial t} + b \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla b + b \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (14.a)$$

$$= \rho \left( \frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla b \right) + b \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] = \rho \frac{db}{dt} \quad (14.b)$$

En este desarrollo se ha empleado la ecuación de continuidad, por lo que el segundo término de la ecuación del centro se elimina puesto que es nulo. El resultado final se ha expresado empleando el operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (15)$$

que es conocido como el operador derivación material, ya que representa una derivación siguiendo a las partículas. En el apéndice A se explica este tipo de operador como aquel que se aplica manteniendo constante los puntos de la configuración de referencia  $\mathcal{V}_0$ , lo que es equivalente a lo dicho anteriormente si se interpreta a dicha configuración como una etiqueta que se le asigna a las partículas en el instante  $t = 0$ .

Con el resultado (14) aplicado a (11) directamente se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho b \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \frac{db}{dt} \, d\mathcal{V} \quad (16)$$

Esta expresión se conoce como el 3<sup>er</sup> Teorema del Transporte de Reynolds.

### 2.2.7. Transporte en una Superficie

El Teorema del Transporte de Reynolds al aplicarse al flujo sobre una superficie interfaz  $\mathcal{A}_i$  tiene la forma [Delhay, (1974)]

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}_i} f_i(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}_i} \left( \frac{df_i}{dt} + f_i \nabla \cdot \mathbf{v}_p \right) d\mathcal{A} \quad (17)$$

donde

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{ni} + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_{ni} = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad (18)$$

y la función  $f_i$  está definida sobre la superficie. La velocidad  $\mathbf{v}_t$  es la velocidad tangencial del fluido sobre la superficie. Esta velocidad no necesariamente es la velocidad neta  $\mathbf{v}$  del fluido, pues este puede estar atravesando la superficie, la cual puede ser permeable. La velocidad  $\mathbf{v}_{ni}$  es la componente normal a la superficie de la velocidad  $\mathbf{v}_i$  con la cual la misma se desplaza en el espacio. Esta velocidad normal está relacionada con el cambio de la métrica, empleada para un sistema de coordenadas curvilíneas sobre la superficie, en la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{ni} = \frac{1}{2g} \frac{dg}{dt} \quad (19)$$

donde el operador  $\nabla$  se toma en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , pero sobre la superficie. El cambio de la métrica  $g$  debido a una deformación tangencial de la superficie no aporta nada al término  $\nabla \cdot \mathbf{v}_{ni}$ . Para entender con mayor detalle y formalidad los aspectos geométricos de estas expresiones, se recomienda revisar el Apéndice B, donde aparece la deducción de la Regla de Leibniz y su aplicación a un espacio con cambio de métrica y a una superficie interfaz general inmersa en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Cuando en (17) la función  $f_i$  se escoge como la densidad (por unidad de área) de la superficie interfaz  $\rho_i$ , se obtiene la ecuación de continuidad para dicha superficie

$$\frac{dm_i}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}_i} \rho_i(t, \mathbf{x}) d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}_i} \left( \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \nabla \cdot \mathbf{v}_p \right) d\mathcal{A} \quad (20)$$

Nótese el parecido que tiene con la ecuación (12), si se considera la definición de la derivación material (15). Esta expresión se anula sólo cuando la superficie interfaz es una superficie material. Es decir, es una superficie que conserva su masa  $m_i$  al transcurrir el tiempo. En este caso, la velocidad  $\mathbf{v}_t$  es la velocidad del fluido relativa a la superficie, la cual se deforma con una velocidad normal a ella igual a  $\mathbf{v}_{ni}$ . Por consiguiente, la velocidad neta del fluido para una superficie material es  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p$ .

Finalmente, la función  $f_i$  se puede substituir en (17) por el producto  $\rho_i b_i$  para obtener una forma del Teorema del Transporte de Reynolds para una superficie interfaz, similar a (3). De manera que,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}_i} \rho_i b_i d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}_i} \left( \frac{d\rho_i b_i}{dt} + \rho_i b_i \nabla \cdot \mathbf{v}_p \right) d\mathcal{A} \quad (21)$$

La derivación material (15) continúa siendo válida para una superficie interfaz, y debido a que no siempre  $\mathbf{v}$  es igual a  $\mathbf{v}_p$ , entonces la expresión (21) no se puede llevar a la forma del segundo miembro de (3), aplicando el Teorema de Gauss. Téngase en cuenta también que el Teorema de Gauss para una superficie curva en el espacio, no tiene una forma similar que el mismo teorema para un volumen en el espacio [Brand,1959;Delhay,1974]. (Ver en el Apéndice A, la Sección 2.5.3.).

Sea un sistema material bifásico  $\mathcal{V}_m$  formado por dos volúmenes  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$ , no necesariamente materiales, y una superficie interfaz  $\mathcal{A}_i$ , también no necesariamente material, ubicada entre los dos volúmenes. Para este caso, las expresiones B.2.4.(50) hasta B.2.4.(58) son igualmente válidas, particularizadas para dominios materiales inmersos en un espacio en  $\mathbb{R}^3$ , y donde las velocidades definidas son de los puntos materiales correspondientes en cada caso. Substituyendo la función  $f$  por  $\rho b$ , al igual como se hizo en (21), las expresiones antes mencionadas quedan

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho b d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_*} \rho b d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_i} \left( \frac{d\rho_i b_i}{dt} + \rho_i b_i \nabla \cdot \mathbf{v}_p \right) d\mathcal{A} \quad (22.a)$$

donde

$$\mathcal{V}_* = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_m - \mathcal{A}_i \quad \mathcal{A}_* = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{ni} + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_{ni} = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad (22.b)$$

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2} \quad \mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad \mathbf{v}_{t2} = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad (22.c)$$

y donde  $\mathbf{n}_i$  se debe interpretar que es el vector unitario normal a la superficie interfaz  $\mathcal{A}_i$ , dirigiéndose de  $\mathcal{V}_1$  a  $\mathcal{V}_2$ . El primer término del miembro de la derecha de (22.a) puede calcularse como en B.2.4.(47) o B.2.4.(49), pero asumiendo para simplificar que la métrica es constante ( $g = 1$  y  $\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ ), por lo que resulta que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_*} \rho b \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_*} \frac{\partial \rho b}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_*} \rho b \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_{\mathcal{A}_i} \llbracket \rho b \rrbracket \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \, dA \quad (22.d)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_*} \rho b \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_*} \left[ \frac{\partial \rho b}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho b \mathbf{v}) \right] \, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{A}_i} \llbracket \rho b (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \rrbracket \cdot \mathbf{n}_i \, dA \quad (22.e)$$

Las expresiones (22) se conocen como el *Teorema del Transporte de Reynolds para un sistema bifásico con una superficie interfaz*. El símbolo en las última integrales de (22.d) significa  $\llbracket f \rrbracket = f_2 - f_1$ .

Cuando el caso estudiado es con una superficie singular, todo lo dicho antes es válido, con la particularidad de que la integral sobre  $\mathcal{A}_i$  en (22.a) no existe para dicho caso, y la integral sobre  $\mathcal{V}_*$  se convierte en la integral sobre  $\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{A}_2$ .

Algunos autores usan en sus ecuaciones la *curvatura total* (el doble de la *curvatura media*  $\kappa$ ) en lugar de menos la divergencia del vector normal  $-(\nabla \cdot \mathbf{n}_i)$  ( $\kappa$  es positiva cuando  $\mathbf{n}_i$  apunta hacia el centro medio de curvatura, en caso contrario es negativa). Particularmente, emplean la *velocidad intrínseca*  $\mathbf{v}_c$  (introducida por Gurtin [(1993)]), definida como

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_{ni} + \mathbf{v}_{ti} \quad \mathbf{v}_{ni} = v_{ni} \mathbf{n}_i \quad \mathbf{v}_{ti} = v_{ti} \boldsymbol{\eta}_i \quad (23)$$

donde

$$v_{ni} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \quad v_{ti} = \mathbf{v}_t \cdot \boldsymbol{\eta}_i \quad (24)$$

en lugar de los componentes normal y tangencial de la velocidad  $\mathbf{v}_p$  (descomposición (18)). Adicionalmente, definen la *Derivada Normal*,  $f_i^\circ$ , en sus formulaciones (Gurtin [(1993)]), en lugar del uso de  $\partial f_i / \partial t$  dentro del operador diferencial  $d/dt$  (vea la definición general (15) y la expresión (17)). Ambas consideraciones son equivalentes, pero la primera no puede ser extendida a un espacio curvo en  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ), ya que la curvatura no es única (el número de curvaturas es al menos  $N = n^2(n^2 - 1)/12$ , el número de los símbolos de Riemann-Christoffel del primer tipo independientes), y es calculada de una forma diferente, dependiendo de un hiperplano específico seleccionado previamente (Cf. [Levi-Civita,1977], Cap.VII, pp.172-220, principalmente §1, §4, §9, §10 y §12).

Cuando (17) es aplicada a una superficie espacial entonces  $v_{ti}$  es la velocidad tangencial del borde en la dirección de  $\boldsymbol{\eta}_i$  y se obtiene la Regla de Leibniz para superficies arbitrarias móviles (Cf. [Petryk & Mróz,(1986)], deducción de la expresión (2.36). Este es la primera publicación que deduce la Regla de Leibniz para integrales y funcionales de línea sobre superficies y en volúmenes). Gurtin en su Teorema del Transporte para interfaces móviles (Cf. [Gurtin et al.,(1989)], deducción de la expresión (2), para  $\mathcal{A}_m$  fijo; [Jaric,(1992)], deducción de la expresión (1.1), para  $\mathcal{A}_m$  móvil; o [Gurtin,(1993)], Apéndice A2, ecuación A15, para el caso general en  $\mathbb{R}^2$ ) expone la Regla de Leibniz para superficies, pero usando métodos y notación diferentes. Cuando (17) se aplica a una superficie material entonces  $v_{ti}$  es la velocidad de flujo volumétrico hacia afuera por unidad de longitud en  $\mathcal{C}_i$  y el Teorema del Transporte de Reynolds se obtiene para superficies materiales móviles. Ambos puntos de vistas son válidos.

En este contexto, y aplicando el Teorema de la Divergencia A.2.5.(75) (Teorema de Gauss sobre superficies), el Teorema del Transporte sobre superficies (17) (o equivalentemente la Regla de Leibniz para una superficie espacial) puede ser expresada como [Gurtin,(1993);Petryk & Mróz,(1986);Gurtin et al.,(1989); Jaric,(1992);Estrada & Kanwal,(1991)36,37,38]

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}_i} f_i(t, \mathbf{x}) \, dA = \int_{\mathcal{A}_i} (f_i^\circ - 2\kappa f_i v_{ni}) \, dA + \int_{\mathcal{C}_i} f_i v_{ti} \, d\mathcal{L} \quad (25)$$

donde

$$f_i^\circ = \frac{\partial f_i}{\partial t} \quad 2\kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n}_i \quad (26)$$

y donde el término con  $\mathbf{n}_i \cdot \nabla v_{ni}$  ha sido eliminado porque  $\nabla v_{ni}$  es perpendicular a  $\mathbf{n}_i$ . La expresión (25) no puede ser extendida a un espacio curvado en  $\mathbb{R}^n$ , como ya se mencionó. Es por eso que, en un análisis general, la expresión (17) será preferida.

Gurtin et al. [(1989)] y Jaric [(1992)] desarrollaron, con métodos para  $\mathbb{R}^4$ , una expresión equivalente para  $v_{ti}$

$$v_{ti} = (u - v_{ni}\theta)(1 - \theta^2)^{-1/2} \quad (27)$$

donde

$$u = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{y} \quad \theta = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n} \quad (28)$$

son, respectivamente, la rapidez normal de la superficie  $\mathcal{A}_m$  y el coseno del ángulo entre  $\mathbf{n}_i$  y  $\mathbf{n}$ .

La expresión (27) puede ser deducida tomando

$$\mathbf{v}_c = v_{nc}\mathbf{n} + v_{tc}\boldsymbol{\tau} \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}_{ni} \geq 0 \quad (29)$$

donde

$$v_{nc} = v_{ni}\theta + v_{ti}(1 - \theta^2)^{1/2} \quad v_{tc} = v_{ni}(1 - \theta^2)^{1/2} - v_{ti}\theta \quad (30)$$

son las componentes normal y tangencial de  $\mathbf{v}_c$  sobre la superficie  $\mathcal{A}_m$  (recuérdese que  $\mathbf{n}_i$  y  $\boldsymbol{\eta}_i$  son perpendiculares, y son coplanares con  $\mathbf{n}$  en el plano ortogonal a  $\mathcal{C}_i$ ). El vector unitario  $\boldsymbol{\tau}$  es el vector tangencial a  $\mathcal{A}_m$  en la dirección del movimiento de la curva  $\mathcal{C}_i$ . La condición para que la curva  $\mathcal{C}_i$  siempre esté en la superficie  $\mathcal{A}_m$  es

$$u = v_{nc} \quad \text{or} \quad (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (31)$$

Así, la velocidad normal de la superficie  $\mathcal{A}_m$  y la componente normal de la velocidad intrínseca  $\mathbf{v}_c$  (la velocidad de la curva  $\mathcal{C}_i$ ) son iguales. La curva  $\mathcal{C}_i$  se desliza sobre la superficie  $\mathcal{A}_m$  con una rapidez tangencial  $v_{tc}$ . La condición (31.a) junto con la relación (30.a) implica (27).

### 2.2.8. Movimiento de una Superficie

Para el análisis que sigue, en lo que resta de esta sección, la superficie intermedia  $\mathcal{A}_i$  puede considerarse una superficie singular, una superficie interfaz o una superficie cualquiera. Sea  $\mathbf{f}$  la función que define la superficie  $\mathcal{A}_i$  mediante la ecuación

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_i) = 0 \quad (32)$$

de forma similar a como se hizo en la Sección 2.2.4. Considérese los valores  $\mathbf{x}_i$  como puntos de dicha superficie desplazándose en el espacio al transcurrir el tiempo, definidos por la función

$$\mathbf{x}_i = \chi_i(t, \mathbf{X}_i) \quad (33)$$

donde  $\mathbf{X}_i$  representa la posición de los puntos de la superficie para una configuración de referencia dada (la cual puede ser la inicial). El valor  $\mathbf{X}_i$  actúa como una etiqueta para los puntos de la superficie. La expresión (33) permite definir la función dual  $\mathbf{F}$  como

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_i) = \mathbf{f}(t, \chi_i(t, \mathbf{X}_i)) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}_i) = 0 \quad (34)$$

Definanse la *velocidad de desplazamiento*  $\mathbf{v}_i$  y la *velocidad de propagación*  $\mathbf{V}_i$ , dual de la anterior, de la forma

$$\mathbf{v}_i(t, \mathbf{x}_i) = \frac{\partial}{\partial t} \chi_i(t, \mathbf{X}_i) \quad \mathbf{V}_i(t, \mathbf{X}_i) = \frac{\partial}{\partial t} \chi_i^{-1}(t, \mathbf{x}_i) \quad (35)$$

El nombre de velocidad de desplazamiento proviene del hecho de que  $\mathbf{v}_i$  es la velocidad con la cual se desplaza cada punto de la superficie en su movimiento. La razón del nombre de velocidad de propagación se expondrá a continuación.

Considérese el movimiento de un sistema material fluyendo a través de la superficie  $\mathcal{A}_i$  y descrito con la función

$$\mathbf{x} = \chi(t, \mathbf{X}) \quad (36)$$

donde  $\mathbf{X}$  es la configuración de referencia para dicho fluido, no necesariamente igual a la configuración de referencia  $\mathbf{X}_i$  para la superficie  $\mathcal{A}_i$ . Defínase la función *desplazamiento de la superficie* como

$$\mathbf{u}_i(t, \mathbf{X}_i) = \chi_i(t, \mathbf{X}_i) - \chi(t, \mathbf{X}) \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}_i \quad (37)$$

en donde se han hecho coincidir las configuraciones de referencia  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{X}_i$  del fluido y de la superficie, respectivamente, para hacer consistente la definición. La derivada de (37)

$$\mathbf{c}_i = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_i(t, \mathbf{X}_i) = \mathbf{v}_i - \mathbf{v} \quad (38)$$

es lo que se va a denominar la *velocidad de propagación local*. Considérese a

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (39)$$

como una superficie definida en el seno del sistema material, pero que no es material, y que coincide con la superficie  $\mathcal{A}_i$  en todo instante. Dicha superficie no es material, porque la función  $\mathbf{f}$  en (39) continúa siendo la misma que en la expresión (32), aunque en esta oportunidad el argumento  $\mathbf{x}$ , de la posición de los puntos materiales, tenga un significado distinto a  $\mathbf{x}_i$ , posición de los puntos de la superficie. En (39) el valor  $\mathbf{x}$  coincide con el valor  $\mathbf{x}_i$  en todo instante.

Se verá ahora la relación entre la velocidad de propagación local  $\mathbf{c}$  y la velocidad de propagación  $\mathbf{V}_i$ . Para ello obsérvese que el vector normal unitario  $\mathbf{n}_i$  de la superficie  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_i) = 0$  y el vector normal unitario  $\mathbf{N}_i$  de la superficie dual  $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}_i) = 0$  se calculan como

$$\mathbf{n}_i = \frac{\nabla \mathbf{f}}{\|\nabla \mathbf{f}\|} \quad \mathbf{N}_i = \frac{\nabla \mathbf{F}}{\|\nabla \mathbf{F}\|} \quad (40)$$

Las derivadas totales de las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{F}$  se calculan como

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{f} = 0 \quad \frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mathbf{V}_i \cdot \nabla \mathbf{F} = 0 \quad (41)$$

en donde se ha aplicado la regla de la cadena y las definiciones (35). De (41) se pueden despejar las componentes normales respectivas de las velocidades  $\mathbf{v}_i$  y  $\mathbf{V}_i$ , obteniéndose

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} = v_{ni} = -\frac{\partial \mathbf{f} / \partial t}{\|\nabla \mathbf{f}\|} \quad \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{N} = V_{Ni} = -\frac{\partial \mathbf{F} / \partial t}{\|\nabla \mathbf{F}\|} \quad (42)$$

La derivada material de la función  $f$  en (39) da

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{f} \neq 0 \quad (43)$$

Substituyendo en (43) las relaciones (42), se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{f} = (v_n - v_{ni}) \|\nabla \mathbf{f}\| \\ &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = -V_{Ni} \|\nabla \mathbf{F}\| \end{aligned} \quad (44)$$



donde

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla \mathbf{f}}{\|\nabla \mathbf{f}\|} \quad (45)$$

y donde se ha interpretado que la derivada material de  $\mathbf{f}$  es igual a la derivada parcial de  $\mathbf{F}$  respecto al tiempo por ser las configuraciones empleadas en la definición de ambas funciones la misma  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_i$ . Igualando ambas partes de (44) se obtiene que

$$\mathbf{V}_{Ni} \|\nabla \mathbf{F}\| = (\mathbf{v}_{ni} - \mathbf{v}_n) \|\nabla \mathbf{f}\| \quad (46)$$

cuya única restricción es que las configuraciones de referencia del sistema material y de la superficie sean las mismas. Si ahora se dice que las configuraciones de referencia son las posiciones actuales, finalmente resulta

$$\mathbf{V}_{Ni} = (\mathbf{v}_{ni} - \mathbf{v}_n) \quad (47.a)$$

en donde se ha eliminado  $\|\nabla \mathbf{f}\| = \|\nabla \mathbf{F}\|$ . La expresión (47.a) es equivalente a decir que localmente se cumple que

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v} = \mathbf{c}_i \quad (47.b)$$

lo cual justifica el nombre de velocidad de propagación local para  $\mathbf{c}_i$ . Recuérdese que para las condiciones impuestas se cumple que  $\mathbf{n}_i = \mathbf{N}_i$ . Para un instante diferente  $\mathbf{V}_i \neq \mathbf{c}_i$ . El nombre de “propagación” proviene del hecho de que la superficie  $\mathcal{A}_i$  se desplaza como si fuese una onda propagándose en el seno de un sistema material con una velocidad relativa a dicho sistema igual a  $\mathbf{c}_i$ .

**Teorema.** (Criterio de Lagrange). Una condición necesaria y suficiente para que la superficie  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 0$  sea material, es que

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{f} = 0 \quad (48)$$

Demostración. La suficiencia se verifica comparando (48) con (41.a), con lo cual se obtiene que  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$ , lo cual significa que la superficie se mueve junto con el fluido, o sea, es material. La necesidad se obtiene cuando al substituir  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$  en (41.a), resulta (48).  $\triangle$

Para concluir la sección se dirá que la discontinuidad de la velocidad de propagación local en la superficie  $\mathcal{A}_i$  cumple con la relación

$$[\mathbf{c}] = -[\mathbf{v}] \quad (49)$$

la cual se basa en la definición (38). Esta definición También puede substituirse en (22.e) para simplificar dicha expresión en algo. Más adelante en la Sección III.6 podrán observarse muchas expresiones en las cuales también podrá substituirse dicha definición.

## 2.3. TRANSPORTE EN EL SISTEMA NO INERCIAL

### 2.3.1. Regla de Leibniz

La Regla de Leibniz tal como está expresada en 2.2.(2) para una función vectorial es

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{b} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_a} \frac{\partial \rho \mathbf{b}}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \mathbf{b} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad \rho = \rho(t, \mathbf{r}) \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(t, \mathbf{r}) \quad (1)$$

Sin embargo, esta misma regla para un sistema de coordenadas no inercial es

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_a} \frac{\partial \check{\rho} \check{\mathbf{b}}}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad \check{\rho} = \check{\rho}(t, \mathbf{R}) \quad \check{\mathbf{b}} = \check{\mathbf{b}}(t, \mathbf{R}) \quad (2)$$

Estos dos puntos de vista están relacionados mediante la aplicación de la derivación 1.4.(7) en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{b} \, d\mathcal{V} = \boldsymbol{\omega} \times \int_{\mathcal{V}_a} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \, d\mathcal{V} + \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \, d\mathcal{V} \quad (3)$$

### 2.3.2. Teorema del Transporte

El Segundo Teorema del Transporte de Reynolds tal como está planteado en 2.2.(8), teniendo en cuenta que

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_a = \mathbf{V} - \mathbf{V}_a \quad (4)$$

para la integral de área, se expresa como

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{b} \, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{b} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \mathbf{b} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (5)$$

Si sustituimos en este teorema la expresión (3) y a su vez la expresión (2), considerando que las funciones involucradas son

$$\rho = \rho(t, \mathbf{r}) = \check{\rho}(t, \mathbf{R}) \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(t, \mathbf{r}) = \check{\mathbf{b}}(t, \mathbf{R}) \quad (6)$$

se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{b} \, d\mathcal{V} = \boldsymbol{\omega} \times \int_{\mathcal{V}_a} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_a} \frac{\partial \check{\rho} \check{\mathbf{b}}}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (7)$$

Este último resultado es válido para un volumen espacial arbitrario, sin importar que la velocidad que aparece en la integral sobre el área sea la velocidad de los puntos materiales ubicados sobre dicha área en el instante de análisis. Hagamos coincidir el volumen material y el volumen espacial para ese instante. Esto puede hacerse puesto que no existe ninguna derivada fuera de las integrales. De esta forma se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{b} \, d\mathcal{V} &= \boldsymbol{\omega} \times \int_{\mathcal{V}_m} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial \check{\rho} \check{\mathbf{b}}}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_m} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \int_{\mathcal{V}_m} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \, d\mathcal{V} + \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_m} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \, d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (8)$$

donde

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_m} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial \check{\rho} \check{\mathbf{b}}}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_m} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (9)$$

no es más que el Primer Teorema del Transporte de Reynolds aplicado como se observa desde el sistema de coordenadas no inerciales. Fíjese que (9) puede ser obtenido directamente de (2) para el caso particular donde  $\mathcal{V}_a$  coincide con  $\mathcal{V}_m$ .

Por último, del teorema del transporte (9) y de la Regla de Leibniz (2), se puede obtener una versión del Segundo Teorema del Transporte de Reynolds para sistemas de coordenadas no inerciales. Esto es,

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_m} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \, d\mathcal{V} = \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (10)$$

en donde se ha impuesto que  $\mathcal{V}_a = \mathcal{V}_m$  para el instante de análisis.

### 2.3.3. Conservación de Masa y Continuidad

La ecuación de Conservación de Masa se obtiene al aplicar los resultados (7), (8), (9) y (10) a una función escalar constante  $b = \check{b} = 1$ . Esto es,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = 0 \quad (11.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, d\mathcal{V} &= \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = 0 \\ &= \int_{\mathcal{V}_a} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = 0 \end{aligned} \quad (11.b)$$

donde no aparece  $\boldsymbol{\omega} \times$  debido a que la función es escalar y no vectorial como fue supuesta antes.

Aplicando el Teorema de la divergencia a la segunda parte de la expresión (11) y asumiendo que el volumen es arbitrario, evidentemente el integrando debe ser nulo. O sea,

$$\frac{\partial \check{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\check{\rho} \mathbf{V}) = 0 \quad (12)$$

Fíjese que el análisis presentado aquí es muy parecido al expuesto en la Sección 2.2.5.

Por último, si se hace un análisis similar al presentado en la Sección 2.2.6. se deduce el Tercer Teorema del Transporte de Reynolds relativo al sistema de coordenadas no inercial en la forma

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_m} \check{\rho} \check{\mathbf{b}} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \check{\rho} \frac{\delta \check{\mathbf{b}}}{\delta t} \, d\mathcal{V} \quad (13)$$

donde

$$\frac{\delta \check{\mathbf{b}}}{\delta t} = \frac{\partial \check{\mathbf{b}}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \check{\mathbf{b}} \quad (14)$$

se define como la derivación material relativa al sistema de coordenadas no inercial.

### 3. DEFORMACIONES

En esta sección se hará una descripción de la deformación de sistemas materiales, así como su posterior análisis. No se hará mucho énfasis en el proceso de deformación como flujo de un sistema material, puesto que este aspecto ya fue discutido en la Sección 2. Muchas de los conceptos que se discutirán en esta Sección ya han sido introducidos con antelación de manera aislada, pero en esta oportunidad se hará un esfuerzo para relacionarlos entre sí, y por consiguiente, realizar la unificación teórica de las tres secciones que conforma este capítulo de cinemática.

#### 3.1. DESCRIPCION DE LA DEFORMACION

En esta parte se describirá de una forma global todo el proceso de deformación, tanto desde un punto de vista espacial como desde un punto de vista material. En este contexto se hablará de punto espacial y punto material, de dominio y de cuerpo, de configuración y deformación, de posición y desplazamientos. La dicotomía entre espacio y materia siempre estará presente a lo largo de esta sub-sección.

##### 3.1.1. Puntos y Partículas

Como se explicó en la introducción vamos a describir todos los sistemas materiales continuos como un conjunto de puntos a los que llamaremos *puntos materiales*. En algunos textos se ha acostumbrado a emplear el distintivo de *partícula* para los puntos materiales, pero en este trabajo se ha preferido dejar dicho sustantivo para emplearse en sistemas materiales discretos. Dichos puntos materiales se desplazan durante su evolución en el tiempo por el espacio, ocupando, cada punto material, un *punto espacial* en cada instante. De manera que en el mismo instante sea imposible que dos puntos materiales ocupen el mismo punto espacial. A esta condición se le ha denominado en la sección anterior como el *Axioma de la Impenetrabilidad* de los sistemas materiales [Truesdell, 1977]. Cada punto material  $X$  ocupará en cada instante la posición del espacio dado por el vector

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(t, X) \quad (1)$$

Para un instante inicial el mismo punto material ocupará la posición espacial

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\kappa}_o(X) \quad (2)$$

dada por el mapa de *configuración inicial*  $\kappa_o$ . Ambas posiciones espaciales, la actual y la configuración inicial se relacionan entre sí mediante la función

$$\mathbf{x} = \chi(t, \mathbf{X}) = \chi[t, \kappa_o^{-1}(\mathbf{X})] \quad (3)$$

dependiente del parámetro tiempo  $t$ . Esta función relaciona un punto del espacio  $\mathbf{X}$  para un tiempo  $t = 0$ , con otro punto del espacio  $\mathbf{x}$  en un instante  $t$ , no necesariamente posterior. En algunas oportunidades al usar esta notación, por razones de brevedad, se omitirá esta descripción, y se podrá hablar de un punto material  $\mathbf{X}$ , aunque en realidad lo que se quiere expresar, sea el punto material  $X$ , el cual en el instante  $t = 0$  ocupa la posición  $\mathbf{X}$ .

### 3.1.2. Dominios y Cuerpos

En el contexto de todo este trabajo se hablará de *dominio*, al conjunto de partida de una función definida como un campo escalar, vectorial o tensorial. En otras palabras, el dominio será sinónimo de una región del espacio euclidiano, sin excluir a todo el espacio. Se denominará *cuerpo* al conjunto de todos los puntos materiales que lo forman. Se hablará de parte de un cuerpo como un subconjunto de un cuerpo. En otras palabras, el cuerpo será sinónimo de un sistema material continuo. Con estos conceptos, entonces la región del espacio o dominio  $\mathcal{V}_o$  que ocupa el cuerpo  $\mathcal{B}$  en el instante  $t = 0$ , vendrá dada por el mapa de configuración inicial

$$\mathcal{V}_o = \kappa_o(\mathcal{B}) \quad (4)$$

y el dominio  $\mathcal{V}_m$  que ocupa el mismo sistema material o cuerpo en el instante  $t$  vendrá dado por las funciones (1) y (3) como

$$\mathcal{V}_m = \chi(t, \mathcal{B}) = \chi(t, \mathcal{V}_o) \quad (5)$$

Los dominios se identificarán como  $\mathcal{V}_m$  cuando representen la región del espacio ocupada por el cuerpo  $\mathcal{B}$ , en cada instante  $t$ . Los dominios se identifican como  $\mathcal{V}$  o  $\mathcal{V}_a$  cuando sea una región arbitraria del espacio, seleccionada para hacer algún análisis.

### 3.1.3. Configuración, Deformación y Flujo

La *configuración de referencia* es la posición del espacio que puede estar ocupada por un punto material y que sirve como referencia para el análisis de su movimiento. Es decir,

$$\mathbf{X}_\kappa = \kappa(\mathbf{X}) \quad (6)$$

donde  $\mathbf{X}_\kappa$  es una posición del espacio factible de ser ocupada por un punto material, y no necesariamente deba ser un punto cualquiera del movimiento de  $X$ . La configuración de referencia de todo el cuerpo  $\mathcal{B}$  es entonces

$$\mathcal{V}_\kappa = \kappa(\mathcal{B}) \quad (7)$$

Cuando la configuración de referencia es la posición del movimiento actual en un instante  $\tau$ , entonces

$$\mathbf{X}_\tau = \kappa_\tau(\mathbf{X}) \quad \mathcal{V}_\tau = \kappa_\tau(\mathcal{B}) \quad (8)$$

Cuando la configuración de referencia es la configuración para el instante  $\tau = 0$ , entonces la configuración se denomina inicial y se define como en (4).

La posición  $\mathbf{x}$  en el instante  $t$ , de un punto materia  $X$ , se puede expresar en la forma

$$\mathbf{x} = \chi_\kappa(t, \mathbf{X}_\kappa) = \chi(t, \mathbf{X}) \quad (9)$$

A la función  $\chi_\kappa(t, \mathbf{X}_\kappa)$  se le denomina la *deformación local* del punto material  $X$  relativa a la configuración de referencia (6). El adjetivo ‘local’ se emplea aquí en el contexto de que se trata de un punto material y no de un cuerpo. Este concepto se puede extender a todo el cuerpo  $\mathcal{B}$  y todo el dominio  $\mathcal{V}_\kappa$  en la forma

$$\mathcal{V}_m = \chi_\kappa(t, \mathcal{V}_\kappa) = \chi(t, \mathcal{B}) \quad (10)$$

En este caso se habla que  $\mathcal{V}_m$  es la deformación del cuerpo  $\mathcal{B}$ .

La función inversa de  $\chi_\kappa$  en (9) y su caso particular  $\chi$  en (3) se definen sólo para las posiciones espaciales, es decir, el tiempo  $t$  no interviene de forma explícita en el proceso de inversión de la función. Esto es

$$\mathbf{X}_\kappa = \chi_\kappa^{-1}(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(t, \mathbf{x}) \quad (11)$$

La *velocidad de flujo* del cuerpo  $\mathcal{B}$  se define de forma general a partir de (9) como

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \chi_\kappa(t, \mathbf{X}_\kappa) \right]_{\mathbf{X}_\kappa} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \chi(t, \mathbf{X}) \right]_{\mathbf{X}} \quad (12)$$

donde la función  $\mathbf{v}$  tiene una descripción espacial y es independiente de la configuración de referencia empleada.

No obstante, todo el desarrollo que sigue depende del mapa de configuración de referencia  $\kappa$  elegido, el subíndice  $\kappa$  se eliminará para efectos de hacer la notación menos recargada, a no ser que sea sumamente necesario. Sin embargo, no debe interpretarse que necesariamente se trata de la configuración inicial, aunque esto sería un caso particular que es válido de igual manera.

### 3.1.4. Posición y Desplazamiento

La posición  $\mathbf{x}$  en el instante  $t$  del punto material  $\mathbf{X}$  deformado, se relaciona con la posición de referencia  $\mathbf{X}$ , definiendo la función vectorial de *desplazamiento*  $\mathbf{u}$ , de dos maneras distintas a saber

$$\chi(t, \mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(t, \mathbf{X}) \quad \mathbf{x} = \chi^{-1}(t, \mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) \quad (13)$$

donde  $\mathbf{u}$  posee una descripción material y  $\tilde{\mathbf{u}}$  posee una descripción espacial. El vector desplazamiento representa la traslación de un punto material, y por consiguiente, sirve para evaluar las deformaciones sin considerar donde están ubicados los orígenes de los sistemas de coordenadas a partir de los cuales se miden los vectores de posición  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{X}$ . La función  $\chi^{-1}(t, \mathbf{x})$  se suele representar como  $\chi(t, \mathbf{x})$  para simplificar.

## 3.2. ANALISIS DE LA DEFORMACION

Con todos los conceptos necesarios definidos en la Sección 3.1. se procederá a realizar el análisis de las deformaciones y cantidades tensoriales afines que se derivan de diversas formas, bien sea obteniendo los gradientes de los vectores involucrados en (13), componiendo los tensores obtenidos, o encontrando la métrica de ciertos espacios vectoriales.

### 3.2.1. Gradiente de Deformación

El *gradiente de deformación local* se define como el tensor jacobiano presentado en la Sección 2.1.2 (Expresión 2.1.(4), para una configuración de referencia inicial) y en la Sección 2.1.4 (Expresión 2.1.(17), para una configuración de referencia arbitraria  $\kappa$ ). Es decir,

$$\mathbf{F}_\kappa \equiv \mathbf{J}_\kappa(t, \mathbf{X}_\kappa) = [\tilde{\nabla} \chi_\kappa(t, \mathbf{X}_\kappa)]^t \quad (1)$$

donde el operador nabla deriva con respecto a las componentes de  $\mathbf{X}$ . El índice  $\kappa$  se suprimirá donde se pueda en lo que sigue, pero debe interpretarse que la configuración de referencia siempre está presente en la definición hecha. En este sentido, la definición (1) se puede expresar con brevedad en la forma

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_\kappa(t) \equiv \mathbf{F}_\kappa(t, \mathbf{X}_\kappa) \quad (2)$$

Normalmente, las componentes del gradiente de deformación local se expresan en la base  $\{\mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{a}}_j\}$ , siendo el primer factor de la diádica el vector base empleado para expresar  $\mathbf{x}$ , y el segundo factor de la diádica el vector base empleado para expresar  $\mathbf{X}$ . En estas circunstancias, el tensor  $\mathbf{F}$  es un tensor mixto.

El gradiente de deformación local permite expresar en cuanto se elonga un diferencial de arco entre dos puntos materiales fijos muy cercanos entre sí

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}.d\mathbf{X} \quad (3)$$

Tomando como configuración de referencia la posición espacial  $\mathbf{X}_\tau$  en un instante  $\tau$ , la expresión (3) se modifica como

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_\tau(t).d\mathbf{X}_\tau \quad (4)$$

donde se ha eliminado el argumento  $\mathbf{X}_\tau$  de la funciones debido a que dicha variable permanece constante en el tiempo para cada punto material.

En la expresión (4) se puede calcular la derivada material (en este caso se indicará con un punto para efectos de simplificar la notación), obteniéndose que las expresiones

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = d\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{F}}_\tau(t).d\mathbf{X}_\tau = \dot{\mathbf{F}}_\tau(t).\mathbf{F}_\tau^{-1}(t).d\mathbf{x}(t) \quad (5.a)$$

$$d\mathbf{v}(t) = [\tilde{\nabla}_\tau \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}_\tau))]^t.d\mathbf{X}_\tau = [\nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x})]^t.d\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(t).d\mathbf{x}(t) \quad (5.b)$$

son equivalentes entre sí. Nótese que la operación punto  $\cdot$  y la operación diferencial  $d$  se pueden intercambiar, debido a que la primera es en la dirección temporal y la segunda es en la dirección espacial (las derivaciones temporal y espacial se realizan con respecto a los argumentos de las funciones). El tensor  $\mathbf{G}$  que aparece en la expresión (5.b) es denominado *gradiente de velocidad* y sus componentes se expresan en la base  $\{\mathbf{a}_i\}$ . De (5) se concluye que

$$\dot{\mathbf{F}}_\tau(t) = [\tilde{\nabla}_\tau \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}_\tau))]^t \quad \mathbf{G}(t) = [\nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x})]^t = \dot{\mathbf{F}}_\tau(t).\mathbf{F}_\tau^{-1}(t) \quad (6)$$

En primera instancia se observa que los gradiente que aparecen en (6) no son iguales, y en segunda instancia que el tensor  $\mathbf{G}$  no depende de la configuración de referencia  $\mathbf{X}_\tau$  y mide el gradiente de la velocidad a lo largo del paso de partícula de los puntos materiales. En el operador  $\tilde{\nabla}_\tau$  las derivadas parciales se realizan respecto a la variable  $\mathbf{X}_\tau$ .

### 3.2.2. Gradiente de Desplazamiento

El *gradiente de desplazamiento*  $\mathbf{L}$  se define aplicándole el gradiente a las expresiones 3.1.(13), obteniéndose

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{L} \quad \mathbf{F} = (\tilde{\nabla} \mathbf{x})^t \quad \mathbf{L} = (\tilde{\nabla} \mathbf{u})^t \quad (7.a)$$

$$\mathbf{I} = \tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{L}} \quad \tilde{\mathbf{F}} = (\nabla \mathbf{X})^t \quad \tilde{\mathbf{L}} = (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^t \quad (7.b)$$

Formalmente hablando, se tiene que

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = [\nabla \mathcal{X}_t(\tau, \mathbf{x})]^t \equiv [\nabla \mathbf{x}_\tau^{-1}(t, \mathbf{x})]^t = \mathbf{F}_\tau^{-1}(t) \quad d\mathbf{X}_\tau = \tilde{\mathbf{F}}_\tau(t).d\mathbf{x}(t) \quad (8)$$

$$\mathbf{L}_\tau(t) \equiv [\tilde{\nabla}_\tau \mathbf{u}(t, \mathbf{X}_\tau)]^t \quad \tilde{\mathbf{L}}_t(\tau) \equiv [\nabla \tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})]^t \quad (9)$$

donde la función  $\mathcal{X}_t(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{x}_\tau^{-1}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{X}_\tau(t, \mathbf{x}) = \mathbf{X}_\tau$  es la *historia del paso de la partícula*. La base en la cual se expresan las componentes del tensor  $\mathbf{L}$  es la misma que la del tensor  $\mathbf{F}$ . La base en la cual se expresan las componentes de los tensores  $\tilde{\mathbf{F}}$  y  $\tilde{\mathbf{L}}$  es  $\{\tilde{\mathbf{a}}_i \tilde{\mathbf{a}}_j\}$ .

### 3.2.3. Tensor de Cauchy y de Piola

Se define el *tensor de Cauchy* como el producto

$$\mathbf{C}_\tau(t) = \mathbf{F}_\tau(t)^t.\mathbf{F}_\tau(t) \quad (10.a)$$

Este es un tensor cuyas componentes se expresan en la base  $\{\tilde{\mathbf{a}}_i \tilde{\mathbf{a}}_j\}$ .

El *tensor de Piola* se define de manera similar

$$\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau)^t \cdot \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) \quad (10.b)$$

Este es un tensor cuyas componentes se expresan en la base  $\{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j\}$ .

Los tensores de Cauchy y de Piola son dos tensores simétricos y sus componentes actúan como la de un tensor métrico cuando el sistema de coordenadas en el que se expresan los vectores de posición  $\mathbf{x}$  es cartesiano y el sistema de las coordenadas materiales  $\mathbf{X}$  es curvilíneo, o viceversa, respectivamente. Tomando los cuadrados de los diferenciales de longitud para cada sistema de coordenadas, empleando las expresiones (4) y (8.b), se tiene

$$(dl)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^t) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} \quad (11.a)$$

$$(dL)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (d\mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^t) \cdot (\tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot (\tilde{\mathbf{F}}^t \cdot \tilde{\mathbf{F}}) \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot d\mathbf{x} \quad (11.b)$$

donde se ha eliminado el índice  $\tau$  y el argumento  $t$  para simplificar las expresiones. De la observación de (11) se ve claro la influencia de los tensores  $\mathbf{C}$  y  $\tilde{\mathbf{C}}$  como tensores métricos que relacionan las longitudes en los dos sistemas de coordenadas involucrados.

En este punto es recomendable hacer un aclaratoria. Las componentes de  $\mathbf{C}$  y  $\tilde{\mathbf{C}}$  en las bases mencionadas después de las respectivas expresiones (10.a) y (10.b), son los componentes de un tensor métrico en la base curvilínea, si, por una parte, uno de los sistemas de coordenadas es cartesiano, y por otra parte, la base del sistema curvilíneo se desplaza junto con dicho sistema al transcurrir el tiempo. Por ejemplo, fijemos para  $\mathbf{x}$  una base cartesiana  $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\}$ , constante en el tiempo. Supongamos que la base  $\{\tilde{\mathbf{a}}_i \tilde{\mathbf{a}}_j\}$  es también fija en el tiempo y las componentes de  $\tilde{\mathbf{C}}$  se expresan en dicha base. Estas mismas componentes forman un tensor métrico en la base  $\{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j\}$  que se desplaza en el tiempo junto con el sistema de coordenadas  $PX_1X_2X_3$ , el cual define la posición de los puntos materiales al transcurrir el movimiento. Los ejes coordenados de este sistema de coordenadas curvilíneas son líneas materiales, es decir, viajan junto con los puntos materiales. El tensor métrico, así definido, representa la manera como las distancias medidas en el sistema de coordenadas cartesianas  $px_1x_2x_3$  se calculan en el sistema de coordenadas curvilíneas  $PX_1X_2X_3$ , ambas referidas al mismo instante de tiempo. Una explicación un poco más ilustrativa se verá más adelante en la Sección 3.4.6.

### 3.2.4. Deformación Finita

Basándose en las expresiones (11) se puede calcular como varía la diferencia

$$(dl)^2 - (dL)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (12)$$

durante la deformación de un cuerpo. Para los dos casos se tiene

$$\begin{aligned} (dl)^2 - (dL)^2 &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} = 2 d\mathbf{X} \cdot \mathbf{IE} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}) \cdot d\mathbf{x} = 2 d\mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{IE}} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (13)$$

donde

$$\mathbf{IE} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^t + \mathbf{L}^t \cdot \mathbf{L}) \quad \tilde{\mathbf{IE}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^t - \tilde{\mathbf{L}}^t \cdot \tilde{\mathbf{L}}) \quad (14)$$

se definen como los tensores de *deformación finita* lagrangeano y euleriano, respectivamente. Estos tensores también reciben los nombres de tensores de deformación finita de Cauchy o Green y de Piola o Almansi, respectivamente. De (13) se observa claramente que los tensores de deformación finita actúan como tensores métricos para medir las deformaciones en los sistemas de coordenadas correspondiente en cada caso.

### 3.2.5. Rotación Finita

Se define el tensor de *rotación finita*  $\mathbf{IK}$ , tal que

$$\mathbf{IE} + \mathbf{IK} = \mathbf{L} \quad \tilde{\mathbf{IE}} + \tilde{\mathbf{IK}} = \tilde{\mathbf{L}} \quad (15)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{IK} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^t - \mathbf{L}^t \cdot \mathbf{L}) \quad \mathbf{\tilde{IK}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{L}}^t + \tilde{\mathbf{L}}^t \cdot \tilde{\mathbf{L}}) \quad (16)$$

El tensor de deformación finita representa la parte simétrica del tensor gradiente de desplazamiento  $\mathbf{L}$  y el tensor de rotación finita representa la parte antisimétrica del tensor  $\mathbf{L}$ .

### 3.2.6. Deformación Infinitesimal

Cuando los gradientes de desplazamientos  $\mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{L}}$  son muy pequeño los productos

$$\mathbf{L}^t \cdot \mathbf{L} \cong \mathbf{0} \quad \tilde{\mathbf{L}}^t \cdot \tilde{\mathbf{L}} \cong \mathbf{0} \quad (17)$$

se pueden despreciar y se dice que la deformación es infinitesimal. En este caso los tensores de deformación finita (14) se reducen a

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) \quad \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^t) \quad (18)$$

denominados *tensores de deformación infinitesimal*.

Para las deformaciones infinitesimales se cumple que

$$\varrho = \text{tr} \mathbf{E} = \text{tr} \mathbf{L} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (19)$$

representa de forma aproximada el cambio unitario de volumen

$$\varrho \cong \frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_o}{\mathcal{V}_o} = J - 1 \quad J = |\mathbf{F}| \quad (20)$$

que ocurre entre una configuración inicial y una posición cualquiera  $t$ , para el cual  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_o(t)$ .

La relación (20) se deriva de la definición del alargamiento unitario

$$\ell(d\mathbf{X}) = \frac{\|d\mathbf{x}\| - \|d\mathbf{X}\|}{\|d\mathbf{X}\|} = \frac{dl - dL}{dL} \quad (21)$$

el cual, empleando (13), se puede expresar como

$$(dl)^2 - (dL)^2 = (d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2 = 2 d\mathbf{X} \cdot \mathbf{IE} \cdot d\mathbf{X} \quad (d\mathbf{x})^2 = (d\mathbf{X})^2 + 2 d\mathbf{X} \cdot \mathbf{IE} \cdot d\mathbf{X} \quad (22)$$

$$\frac{(dl)}{(dL)} = \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|} = \sqrt{1 + \frac{2 d\mathbf{X} \cdot \mathbf{IE} \cdot d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|^2}} \cong 1 + \frac{d\mathbf{X} \cdot \mathbf{IE} \cdot d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|^2} \quad (23)$$

$$\ell(d\mathbf{X}) = \frac{(dl)}{(dL)} - 1 = \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|} - 1 \cong \frac{d\mathbf{X} \cdot \mathbf{IE} \cdot d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|^2} \quad (24)$$

Por último, aplicando esta expresión a un volumen elemental  $\mathcal{V}_o = dX_1 dX_2 dX_3$  en coordenadas cartesianas, considerando que  $\ell(\mathbf{e}_i) \cong E_{ii}$  y que  $dx_i \cong dX_i(1 + E_{ii})$  ( $i$  no suma), despreciando los productos de las componentes del tensor esfuerzo en  $\mathcal{V} = dx_1 dx_2 dx_3$ , se obtiene (20). En el ensayo de tracción simple la deformación infinitesimal local  $d\epsilon = dl/l$ , una vez integrada analíticamente, se relaciona con la deformación unitaria  $\epsilon = (l - L)/L$  mediante la expresión  $\epsilon = \ln(1 + \epsilon)$ .

### 3.2.7. Rotación Infinitesimal

De manera análoga a la sección anterior, cuando los gradientes de desplazamientos  $\mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{L}}$  son muy pequeño los productos (17) se pueden despreciar y se dice que la deformación es infinitesimal. En este caso los tensores de rotación finita (16) se reducen a

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^t) \quad \tilde{\mathbf{K}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}} - \tilde{\mathbf{L}}^t) \quad (25)$$



denominados *tensores de rotación infinitesimal*.

El tensor de rotación infinitesimal cumple con ciertas relaciones con el vector  $\mathbf{k}$  rotacional de los desplazamientos  $\mathbf{u}$ , las cuales colocaremos a continuación

$$\mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{u} = -\mathbf{K}_x \quad 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \times \mathbf{r} \quad \varpi = \frac{1}{2}\mathbf{k} \quad (26)$$

donde  $\mathbf{r}$  es cualquier vector, y  $\varpi$  es un ángulo de rotación vectorial alrededor del eje formado por  $\mathbf{k}$ .

### 3.3. ESTADO DE DEFORMACION EN UN PUNTO

En esta sección se seguirá la misma secuencia de ideas que más adelante se aplicarán a los tensores de esfuerzo y los vectores de tracción. En esta oportunidad se hará el análisis para el tensor de deformación infinitesimal, pero la extensión de los resultados para las deformaciones finitas es idéntica, salvo algunos detalles de interpretación física de las deformaciones. Las ideas antes mencionadas se basan en el hecho de que los tensores de esfuerzo, y de deformación en este caso, definidos para un punto de un sistema material, poseen la información necesaria para calcular el vector de tracción (fuerza de contacto) o el vector deformación (extensión-corte), si se conoce la normal unitaria  $\mathbf{n}$  de la superficie sobre la cual se desea conocer estas cantidades. De esta forma, para el caso de las deformaciones se tiene que el vector deformación  $\mathbf{e}$  viene dado en función del tensor deformación  $\mathbf{E}$  como

$$\mathbf{e} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \quad (1)$$

Este vector de deformación no necesariamente posee la misma dirección que la normal, por lo que se pueden distinguir dos componentes, una de extensión, en la dirección de la normal  $\mathbf{n}$ , y otra de corte, tangente a la superficie, las cuales se describirán a continuación.

#### 3.3.1. Deformación sobre un Plano

El vector de deformación  $\mathbf{e}$  obtenido por (1) posee una componente de extensión  $\varepsilon$  en la misma dirección que la normal  $\mathbf{n}$  del plano de análisis. También posee una componente de corte  $\gamma > 0$  en la dirección de la proyección de  $\mathbf{e}$  sobre el mismo plano. El plano de estudio es aquel que contiene el punto donde se ha definido el estado de deformación mediante el tensor deformación  $\mathbf{E}$ , y al mismo tiempo es tangente a la superficie de análisis. Este plano, si se considera el límite para una región muy cercana al punto de análisis, coincide con la superficie en el punto.

Las componentes de extensión y de corte del vector deformación se definen como

$$\mathbf{e} = \varepsilon \mathbf{n} + \gamma \boldsymbol{\lambda} \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \quad (2)$$

donde

$$\varepsilon = \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \quad \gamma = \|\mathbf{e} - \varepsilon \mathbf{n}\| = \sqrt{\|\mathbf{e}\|^2 - \varepsilon^2} \quad (3)$$

y donde  $\boldsymbol{\lambda}$  es el vector tangente unitario en la dirección de la proyección de  $\mathbf{e}$  sobre el plano cuya normal es  $\mathbf{n}$ .

La interpretación física de estas componentes es sencilla. La componente  $\varepsilon$  representa cuanto sería el alargamiento relativo de un elemento diferencial de una línea material que pasa por el punto de análisis y tiene la misma dirección que la normal  $\mathbf{n}$ . El alargamiento relativo aquí planteado se refiere a cuanto es el estiramiento (o encogimiento) adicional a la longitud original, dividido entre la longitud original. La componente  $\gamma$  representa cuanto sería el giro del mismo elemento diferencial en la dirección de  $\boldsymbol{\lambda}$ , medido como la tangente del ángulo recorrido.

#### 3.3.2. Tensores Esférico y Desviador

El tensor de deformación  $\mathbf{E}$  se puede descomponer en su parte isótropa o esférica  $\mathbf{E}^\circ$  y su parte desviatoria  $\mathbf{E}'$  en la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^\circ + \mathbf{E}' \quad \mathbf{E}^\circ = \frac{1}{3}(\text{tr} \mathbf{E})\mathbf{I} = \frac{\varrho}{3}\mathbf{I} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{E}^\circ \quad (4)$$

De manera que

$$\text{tr} \mathbf{E}' = \text{tr} \mathbf{E} - \text{tr} \mathbf{E}^0 = 0 \quad (5)$$

A veces es recomendable denotar  $\epsilon_m = \varrho/3$  para simplificar algunas expresiones que se obtendrán más adelante. El cantidad  $\epsilon_m$  es un valor promedio de las deformaciones principales como se verá en la próxima sección, de allí el uso del subíndice  $m$ .

### 3.3.3. Descomposición Espectral

Las *deformaciones principales* se obtienen cuando se hace la descomposición espectral (Teorema de Cayley-Hamilton) del tensor de deformación como

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \epsilon_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha \quad (\alpha \text{ no suma}) \quad (6)$$

donde los valores  $\epsilon_\alpha$  son los autovalores del tensor  $\mathbf{E}$  simétrico y se pueden obtener mediante la resolución de la ecuación característica

$$|\mathbf{E} - \epsilon \mathbf{I}| = -\epsilon^3 + \mathbf{I}_E \epsilon^2 - \mathbf{II}_E \epsilon + \mathbf{III}_E = 0 \quad (7)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_E &= \text{tr} \mathbf{E} = \frac{1}{1!} \delta_a^i E_{ia} = E_{ii} = \varrho \\ \mathbf{II}_E &= \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{E})^2 - \text{tr}(\mathbf{E}^2)] = \frac{1}{2!} \delta_{ab}^{ij} E_{ia} E_{jb} = E_{22} E_{33} - E_{23} E_{32} + E_{33} E_{11} - E_{31} E_{13} + E_{11} E_{22} - E_{12} E_{21} \\ \mathbf{III}_E &= \frac{1}{6} [2\text{tr} \mathbf{E}^3 - 3(\text{tr} \mathbf{E}^2)(\text{tr} \mathbf{E}) + (\text{tr} \mathbf{E})^3] = |\mathbf{E}| = \frac{1}{3!} \delta_{abc}^{ijk} E_{ia} E_{jb} E_{kc} = \epsilon_{ijk} E_{i1} E_{j2} E_{k3} \end{aligned} \quad (8)$$

los invariantes principales del tensor de deformación  $\mathbf{E}$ . Un cálculo simple da que los invariantes principales se pueden expresar en función de los autovalores  $\epsilon_\alpha$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_E &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ \mathbf{II}_E &= \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{E})^2 - \text{tr}(\mathbf{E}^2)] = \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_1 \epsilon_3 \\ \mathbf{III}_E &= \frac{1}{6} [2\text{tr} \mathbf{E}^3 - 3(\text{tr} \mathbf{E}^2)(\text{tr} \mathbf{E}) + (\text{tr} \mathbf{E})^3] = |\mathbf{E}| = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Un análisis similar hecho para el tensor de deformación desviador  $\mathbf{E}'$  da como resultado relaciones entre los invariantes de este tensor y los invariantes (9). De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{E'} &= \text{tr}(\mathbf{E}') = 0 \\ \mathbf{II}_{E'} &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{E}')^2 = -\frac{1}{3} (\mathbf{I}_E^2 - 3\mathbf{II}_E) \\ \mathbf{III}_{E'} &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{E}')^3 = \frac{1}{27} (2\mathbf{I}_E^3 - 9\mathbf{I}_E \mathbf{II}_E + 27\mathbf{III}_E) \end{aligned} \quad (10)$$

En esta sección se ha hecho el análisis para el tensor de deformación infinitesimal  $\mathbf{E}$ , pero los resultados son igualmente válidos para el tensor de deformación finita  $\mathbf{IE}$ . En la Sección A.1.7.12 se pueden revisar los conceptos dados aquí, de manera más formal.

### 3.3.4. Deformaciones Cortantes Máximas

Para esta sección y la siguiente se va a emplear, para expresar las componentes de los vectores y tensores, el sistema de coordenadas principal formado por los ejes principales 0123. Al aplicar las expresiones (1), (2) y (3) a este caso particular se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \|\mathbf{n}\|^2 &= n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} &= n_1^2 \epsilon_1 + n_2^2 \epsilon_2 + n_3^2 \epsilon_3 = \epsilon \\ \|\mathbf{e}\|^2 &= n_1^2 \epsilon_1^2 + n_2^2 \epsilon_2^2 + n_3^2 \epsilon_3^2 = \epsilon^2 + \gamma^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Eliminando  $n_3$  de estas ecuaciones empleando para ello la primera, quedan dos ecuaciones con  $n_1$  y  $n_2$  como incógnitas. Derivando las ecuaciones resultantes con respecto a las incógnitas e igualándolas a cero con la finalidad de obtener la condición del máximo-mínimo, se obtiene

$$\begin{aligned} n_1[(\epsilon_1 - \epsilon_3)n_1^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_3)] &= 0 \\ n_2[(\epsilon_1 - \epsilon_3)n_1^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\epsilon_2 - \epsilon_3)] &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Una solución trivial de este sistema es  $n_1 = n_2 = 0$  y  $n_3 = \pm 1$ . Esta solución da un valor mínimo para  $\gamma$ . Otra solución es obtenida si se toma  $n_1 = 0$  pero no  $n_2$ . Entonces, de la segunda ecuación resulta que  $n_2 = \pm\sqrt{2}/2$ , con lo cual se encuentra también que  $n_3 = \pm\sqrt{2}/2$ . Esta solución si da un valor máximo para  $\gamma$ . Permutando las soluciones propuestas antes en los valores de  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  se encuentran todas las soluciones posibles. Todas las soluciones no triviales que ofrecen un máximo dan que  $\mathbf{n}$  define un plano que es paralelo a un eje coordenado y forma un ángulo de  $45^\circ$  con respecto a los otros dos. Sin pérdida de generalidad, considérese los autovalores del tensor deformación  $\mathbf{E}$  ordenados de manera creciente  $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$ . De esta forma las soluciones antes planteadas para  $\mathbf{n}$ , substituidas en (11), nos dan los valores de las componentes  $\varepsilon$  y  $\gamma$  para las condiciones de deformaciones cortantes máximas. Estas son

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{2}(\epsilon_2 + \epsilon_1) & \gamma_1 &= \frac{1}{2}(\epsilon_2 - \epsilon_1) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2}(\epsilon_3 + \epsilon_2) & \gamma_2 &= \frac{1}{2}(\epsilon_3 - \epsilon_2) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{2}(\epsilon_3 + \epsilon_1) & \gamma_3 &= \frac{1}{2}(\epsilon_3 - \epsilon_1) \end{aligned} \quad (13)$$

Cada par de valores de  $\varepsilon_i$  y  $\gamma_i$  corresponde a cada una de las soluciones obtenidas para  $\mathbf{n}$ , permutando la segunda solución no trivial.

### 3.3.5. Deformación Cortante Octaedral

Sea aquel plano que intersectado con los planos coordenados define los lados de un triángulo equilátero. Todos los posibles triángulo de longitud normalizada son ocho y forman un octaedro con cada una de sus caras en cada cuadrante del sistema de coordenadas principal. De manera que un plano octaedral es aquel cuya normal  $\mathbf{n}$  tiene como componentes

$$|n_1| = |n_2| = |n_3| = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (14)$$

Para estos planos octaedrales la componente  $\gamma$  se puede obtener de las ecuaciones (11), resultando

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{b}}^2 &= \frac{1}{9}[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2] \\ &= \frac{1}{3}[(\epsilon_1 - \epsilon_m)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_m)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_m)^2] = \frac{2}{9}(\mathbf{I}_{\mathbf{E}}^2 - 3\mathbf{II}_{\mathbf{E}}) = -\frac{2}{3}\mathbf{II}_{\mathbf{E}'} \\ &= \frac{1}{9}[(E_{11} - E_{22})^2 + (E_{22} - E_{33})^2 + (E_{33} - E_{11})^2 + 6(E_{12}^2 + E_{23}^2 + E_{31}^2)] \end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$\epsilon_m = \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{E} \quad (16)$$

Esta definición del esfuerzo cortante en el plano octaedral se empleará más adelante para formular el criterio de falla de Von Mises.

### 3.4. TENSORES FUNDAMENTALES Y SUS DERIVADAS

Esta parte es continuación de la Sección 3.2. En esta oportunidad los tensores fundamentales se obtendrán por distintas descomposiciones de los tensores definidos antes. También se obtendrán los tensores de tasa de variación de ciertas cantidades tensoriales, derivando respecto al tiempo.

En esta sección se harán los análisis para el tensor de deformación infinitesimal  $\mathbf{E}$ , pero los resultados son igualmente válidos para el tensor de deformación finita  $\mathbf{IE}$ .

#### 3.4.1. Tensor Gradiente de Deformación

El tensor gradiente de deformación se puede descomponer en el producto de los gradientes de dos movimientos seguidos uno detrás del otro. El primero de estos movimiento es  $\mathbf{X}_{\tau'} = \chi_{\tau'}(\tau', \mathbf{X}_{\tau})$ . El segundo movimiento es  $\mathbf{x} = \chi_{\tau'}(t, \mathbf{X}_{\tau'})$ . De acuerdo a esto, entonces se tiene que

$$\mathbf{F}_{\tau}(t) = \mathbf{F}_{\tau'}(t) \cdot \mathbf{F}_{\tau}(\tau') \quad (1)$$

Esta relación no es más que la transpuesta de la relación 2.1.(19).

Un resultado importante se obtiene de aplicar la derivada material a la relación (1). De esta forma se tiene que

$$\dot{\mathbf{F}}_{\tau}(t) = \dot{\mathbf{F}}_{\tau'}(t) \cdot \mathbf{F}_{\tau}(\tau') \quad (2.a)$$

Escogiendo una configuración de referencia  $\tau' = t$ , y aplicando la definición 3.2.(6.b) del gradiente de velocidad  $\mathbf{G}$ , resulta que

$$\dot{\mathbf{F}}_{\tau}(t) = \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{F}_{\tau}(t) \quad (2.b)$$

Las derivadas de orden superior se presentarán al final de la Sección 3.4.7, cuando se defina el tensor gradiente de velocidad de orden  $n$ .

#### 3.4.2. Descomposición Polar

El tensor de gradiente de deformación se puede descomponer de forma polar como

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son los *tensores de extensión derecho e izquierdo*, respectivamente. Estos tensores ya fueron definidos en la Sección 2.1.4. El tensor  $\mathbf{R}$  es un tensor de rotación y es el transpuesto del definido en la sección mencionada antes. El calificativo derecho e izquierdo proviene de su ubicación relativa en la expresión (1). Los tensores  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son simétricos y el tensor  $\mathbf{R}$  es ortogonal. Para encontrar una descripción más formal de lo que es una descomposición polar de un tensor revisar la Sección A.1.7.12.

#### 3.4.3. Tensores de Cauchy-Green

Los tensores de *Cauchy-Green* derecho e izquierdo se definen como

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{R} \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^t \quad (4)$$

respectivamente. Estos tensores son simétricos y son los mismos tensores de Cauchy  $\mathbf{C}$  y de Green  $\mathbf{B}$  definidos en la Sección 2.1.5. y la Sección 3.2.3.

Aplicando la expresión la expresión (1) en las definiciones (4.a) se obtienen las siguientes relaciones para los tensores de Cauchy-Green de dos movimientos seguidos, como los descritos en la Sección 3.4.1. Así se tiene que

$$\mathbf{C}_{\tau}(t) = \mathbf{F}_{\tau}(\tau') \cdot \mathbf{C}_{\tau'}(t) \cdot \mathbf{F}_{\tau}(\tau') \quad \mathbf{B}_{\tau}(t) = \mathbf{F}_{\tau'}(t) \cdot \mathbf{B}_{\tau}(\tau') \cdot \mathbf{F}_{\tau'}(t) \quad (5)$$

La derivada del tensor de Cauchy  $\mathbf{C}_{\tau}(t)$  se halla derivando la relación (5.a) y luego particularizándola para  $\tau' = t$ . En la Sección 3.4.5, cuando se analice el tensor velocidad de deformación, se darán los resultados correspondientes. Las derivadas de orden superior se presentarán al final de la Sección 3.4.7, cuando se defina el tensor de Rivlin-Ericksen de orden  $n$ .

### 3.4.4. Tensores de Piola-Finger

Los tensores de Piola-Finger derecho e izquierdo se definen como

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{U}}^2 = \tilde{\mathbf{F}}^t \cdot \tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{R}}^t \cdot \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{R}} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{V}}^2 = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^t = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^t \quad (6)$$

respectivamente. Estos tensores son simétricos y son los mismos tensores de Piola  $\tilde{\mathbf{C}}$  y de Finger  $\tilde{\mathbf{B}}$  definidos en la Sección 2.1.5. y la Sección 3.2.3.

### 3.4.5. Tensor Velocidad de Deformación

La derivación material del tensor de Cauchy (2.a), que es el mismo que aparece en 3.2.(10.a), da como resultado

$$\mathbf{C}_\tau(t) = \mathbf{F}_\tau(t)^t \cdot \mathbf{F}_\tau(t) \quad \dot{\mathbf{C}}_\tau(t) = \dot{\mathbf{F}}_\tau(t)^t \cdot \mathbf{F}_\tau(t) + \mathbf{F}_\tau(t)^t \cdot \dot{\mathbf{F}}_\tau(t) \quad (7)$$

Aplicando la relación 3.2.(6.a), evaluando (4) para una configuración actual  $\tau = t$  con  $\mathbf{F}_t(t) = \mathbf{I}$  y empleando la definición 3.2.(6.b) del gradiente de velocidad  $\mathbf{G}$ , se obtiene que

$$\dot{\mathbf{C}}_\tau(t)|_{\tau=t} = (\nabla \mathbf{v})^t + \nabla \mathbf{v} = \mathbf{G} + \mathbf{G}^t \quad \mathbf{G} = (\nabla \mathbf{v})^t \quad (8)$$

El resultado (8.a) es exactamente el doble del tensor simétrico de la *velocidad de deformación*  $\mathbf{D}$ . Es decir,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^t) \quad \mathbf{G} = (\nabla \mathbf{v})^t \quad (9)$$

De esta forma el tensor de la velocidad de deformación  $\mathbf{D}$  es la parte simétrica del gradiente de velocidad  $\mathbf{G}$ .

Haciendo un análisis similar con los tensores  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{B}$ , resulta que

$$\mathbf{D}(t) = \dot{\mathbf{U}}_\tau(t)|_{\tau=t} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}_\tau(t)|_{\tau=t} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{B}}_\tau(t)|_{\tau=t} = \dot{\mathbf{V}}_\tau(t)|_{\tau=t} \quad (10)$$

De la definición 3.2.(14.a) y de la relación (5), se puede obtener que

$$\dot{\mathbf{C}} = 2 \dot{\mathbf{I}}\mathbf{E} = 2 \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad \frac{d\mathbf{C}_\tau(t)}{dt} = 2 \frac{d\mathbf{I}\mathbf{E}_\tau(t)}{dt} = 2 \mathbf{F}_\tau^t(t) \cdot \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{F}_\tau(t) \quad (11)$$

De la descomposición polar (3) y de la definición 3.2.(14.b) se puede obtener que [Truesdell,1977]

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{R}^t = \frac{d\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{E}}{dt} + \mathbf{G}^t \cdot \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{E} \cdot \mathbf{G} = \frac{\delta \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{E}}{\delta t} \quad (12)$$

donde en la última parte de (12) se ha empleado la definición de derivada convectiva alta explicada más adelante en la Sección 3.4.8. La base del tensor  $\mathbf{D}$ , normalmente se escoge para que sea  $\{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j\}$ .

De 3.2.(4) y de 3.2.(11.a), se deduce que

$$\frac{d(dx)}{dt} = \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{v} \quad \frac{d(dl)^2}{dt} = 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x} \quad (13)$$

La traza del tensor velocidad de deformación se calcula como

$$\vartheta = \text{tr} \mathbf{D} = \text{tr} \mathbf{G} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (14)$$

### 3.4.6. Tensor Velocidad de Giro

La derivación material del tensor gradiente de deformación en (1), el cual es el mismo tensor que aparece en 2.1.(22), da como resultado

$$\dot{\mathbf{F}}_\tau(t) = \dot{\mathbf{R}}_\tau(t)\mathbf{U}_\tau(t) + \mathbf{R}_\tau(t)\dot{\mathbf{U}}_\tau(t) = \dot{\mathbf{V}}_\tau(t)\mathbf{R}_\tau(t) + \mathbf{V}_\tau(t)\dot{\mathbf{R}}_\tau(t) \quad (15)$$

Evaluando (15) para una configuración actual  $\tau = t$   $\mathbf{U}_t(t) = \mathbf{V}_t(t) = \mathbf{R} = \mathbf{I}$  y empleando las expresiones 3.2.(6), (9) y (16), se obtiene que

$$\mathbf{G} = (\nabla \mathbf{v})^t = \dot{\mathbf{F}}_\tau(t)|_{\tau=t} = \dot{\mathbf{R}}_\tau(t)|_{\tau=t} + \dot{\mathbf{U}}_\tau(t)|_{\tau=t} = \dot{\mathbf{V}}_\tau(t)|_{\tau=t} + \dot{\mathbf{R}}_\tau(t)|_{\tau=t} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (16)$$

Este resultado implica que  $\mathbf{W}$ , el cual es la velocidad de giro

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}_\tau(t)|_{\tau=t} \quad (17)$$

sea la parte antisimétrica del tensor gradiente de velocidad  $\mathbf{G}$ . Es decir,

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{G}^t) \quad \mathbf{G} = (\nabla \mathbf{v})^t \quad (18)$$

De 3.2.(20) se deduce que el tensor velocidad de giro cumple con ciertas relaciones con el vector vorticidad  $\mathbf{w}$ , que es el rotacional de las velocidades  $\mathbf{v}$ , las cuales colocaremos a continuación

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} = -\mathbf{W}_x \quad 2\mathbf{W} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{w} \quad \mathbf{W} : \mathbf{W} = -\frac{1}{2}\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \quad (19)$$

donde  $\mathbf{r}$  es cualquier vector, y  $\boldsymbol{\omega}$  es una velocidad angular vectorial (local) alrededor del eje formado por la vorticidad  $\mathbf{w}$  (ver sección A.1.7.10).

### 3.4.7. Tensores de Rivlin-Ericksen

Los *tensores de Rivlin-Ericksen* de orden  $n$ ,  $\mathbf{A}_n$ , se definen como

$$\mathbf{A}_n(t, \mathbf{x}) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathbf{C}_\tau(t, \mathbf{X}_\tau) \right|_{\tau=t} \quad (20)$$

En particular  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}$ . Estos tensores serán fundamentales en el desarrollo de las relaciones constitutivas de ciertos fluidos llamados *fluidos de Rivlin-Ericksen* de complejidad  $n$ .

El tensor  $\mathbf{C}_\tau(t', \mathbf{X}_\tau)$  describe la deformación en el tiempo  $t'$  de un elemento diferencial de volumen material, el cual está en  $\mathbf{X}_\tau$  en el tiempo  $\tau$ . De manera similar el tensor  $\mathbf{C}_t(t', \mathbf{x})$  describe la deformación en el tiempo  $t'$  de un elemento diferencial de volumen material, el cual está en  $\mathbf{x}$  en el tiempo  $t$ . Por lo tanto, si se varía  $t'$  desde  $t' = -\infty$  hasta  $t' = t$  en la función  $\mathbf{C}_t(t', \mathbf{x})$ , se obtendrá toda la historia de deformación, desde un tiempo infinitamente alejado en el pasado hasta el tiempo presente  $t$ . Si se asume que se puede expandir el tensor  $\mathbf{C}_t(t', \mathbf{x})$  en series de Taylor, alrededor de  $t' = t$ , se tiene

$$\mathbf{C}_t(t', \mathbf{x}) = \mathbf{C}_t(t, \mathbf{x}) + (t' - t) \left. \frac{\partial \mathbf{C}_\tau(t)}{\partial t} \right|_{\tau=t} + \frac{(t' - t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{C}_\tau(t)}{\partial t^2} \right|_{\tau=t} + \cdots + \frac{(t' - t)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n \mathbf{C}_\tau(t)}{\partial t^n} \right|_{\tau=t} + \cdots \quad (21.a)$$

Esto expresado en función de los tensores de Rivlin-Ericksen sería

$$\mathbf{C}_t(t', \mathbf{x}) = \mathbf{I} + (t' - t)\mathbf{A}_1 + \frac{(t' - t)^2}{2!}\mathbf{A}_2 + \cdots + \frac{(t' - t)^n}{n!}\mathbf{A}_n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t' - t)^k}{k!}\mathbf{A}_k \quad (21.b)$$

De la ecuación colocada arriba se ve que los tensores de Rivlin-Ericksen  $\mathbf{A}_n$  determinan la historia  $\mathbf{A}_{t'=-\infty}^{t'=t}[\mathbf{C}_t(t', \mathbf{x})]$  del tensor de Cauchy, referido a la configuración de referencia actual [Lai et al., 1978].

Dupont, Rivlin & Ericksen [Truesdell, 1977] desarrollaron fórmulas recurrentes que permiten obtener el tensor de Rivlin-Ericksen de grado  $(n+1)$  en función de los tensores de órdenes inferiores

$$\mathbf{A}_{n+1} = \frac{d\mathbf{A}_n}{dt} + \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{G} + (\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{G})^t = \frac{\check{\delta}\mathbf{A}_n}{\delta t} \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{G}_n + \mathbf{G}_n^t + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \mathbf{G}_i^t \cdot \mathbf{G}_{n-i} \quad (22.a)$$

donde

$$\mathbf{G}_n(t, \mathbf{x}) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathbf{F}_\tau(t, \mathbf{X}_\tau) \right|_{\tau=t} \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{G} \quad (22.b)$$

es el *gradiente de velocidad* de orden  $n$ . Las definiciones (20) y (22.b) permiten obtener expresiones para las derivadas de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{C}$  de cualquier orden [Truesdell, 1977]

$$\frac{\partial^n \mathbf{F}}{\partial t^n} = \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{F} \quad \frac{\partial^n \mathbf{C}}{\partial t^n} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{F} \quad (22.c)$$

en donde se han empleado para su deducción las relaciones (1) y (5.a). Las expresiones (22.c) pueden verse como generalizaciones de las expresiones (2.b) y (11). La derivación  $\check{\delta}/\delta t$  se explicará en la siguiente sección.

### 3.4.8. Derivada Convectiva

Supóngase que se tiene un tensor  $\tilde{\mathbf{T}}(t, \mathbf{X})$  con una descripción material. La derivada  $d\tilde{\mathbf{T}}/dt$  denota la derivada material de  $\tilde{\mathbf{T}}$  manteniendo las coordenadas materiales  $\mathbf{X}$  constantes. El mismo tensor con una descripción espacial es  $\mathbf{T}(t, \mathbf{x})$  y se desea calcular las componentes de  $d\tilde{T}_j^i/dt$  en el sistema de coordenadas espacial. Esta derivada, conocida como la derivada convectiva de  $T_q^p$ , fué primeramente descrita por Oldroyd [Oldroyd, (1950); p.523], quien usó una notación especial. En este texto se empleará la notación  $\bar{\delta}\mathbf{A}/\delta t$  para esta derivada.

Para calcular  $\bar{\delta}T_q^p/\delta t$ , primero se colocará la transformación en la forma

$$\frac{\partial x^p}{\partial X^i} \tilde{T}_j^i = \frac{\partial x^q}{\partial X^j} T_q^p \quad (23.a)$$

y se derivará ambos lados con respecto a  $t$  manteniendo constante  $\mathbf{X}$ . Entonces, considerando que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x^p}{\partial X^i} = \frac{\partial v^p}{\partial X^i} = \frac{\partial v^p}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial X^i} \quad (23.b)$$

se tiene,

$$\frac{\partial x^p}{\partial X^i} \frac{d\tilde{T}_j^i}{dt} + \frac{\partial v^p}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial X^i} T_j^i = \frac{\partial x^q}{\partial X^j} \left( \frac{\partial T_q^p}{\partial t} + v^m \frac{\partial T_q^p}{\partial x^m} \right) + \frac{\partial v^q}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial X^j} T_q^p \quad (24.a)$$

Multiplicando ambos miembros por  $\partial X^j/\partial x^r$  y rearreglando la ecuación se tiene

$$\frac{\bar{\delta}T_r^p}{\delta t} = \frac{\partial X^j}{\partial x^r} \frac{\partial x^p}{\partial X^i} \frac{d\tilde{T}_j^i}{dt} = \left( \frac{\partial X^j}{\partial x^r} \frac{\partial x^q}{\partial X^j} \right) \left[ \frac{\partial T_q^p}{\partial t} + v^m \frac{\partial T_q^p}{\partial x^m} \right] + \frac{\partial v^q}{\partial x^s} \left( \frac{\partial x^s}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial x^r} \right) T_q^p - \frac{\partial v^p}{\partial x^n} \left( \frac{\partial x^n}{\partial X^i} \frac{\partial X^j}{\partial x^r} \tilde{T}_j^i \right) \quad (24.b)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\bar{\delta}T_r^p}{\delta t} = \frac{\partial T_r^p}{\partial t} + v^m \frac{\partial T_r^p}{\partial x^m} + \frac{\partial v^q}{\partial x^r} T_q^p - \frac{\partial v^p}{\partial x^n} T_r^n \quad (25)$$

De esta forma no está bien claro que se tiene un tensor en el miembro de la derecha. Sin embargo, como

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_r^p}{\partial x^m} &= T_{r,m}^p - \Gamma_{mn}^p T_r^n + \Gamma_{mr}^q T_q^p \\ \frac{\partial v^q}{\partial x^r} &= v_{,r}^q - \Gamma_{mr}^q v^m \\ \frac{\partial v^p}{\partial x^n} &= v_{,n}^p - \Gamma_{mn}^p v^m\end{aligned}\quad (26)$$

entonces, los tres últimos términos de (25) pueden ser escritos como derivadas covariantes y finalmente resulta que

$$\frac{\bar{\delta} T_r^p}{\delta t} = \frac{\partial T_r^p}{\partial t} + v^m T_{r,m}^p + v_{,r}^q T_q^p - v_{,n}^p T_r^n \quad (27)$$

En esta forma el caracter tensorial es evidente. Este resultado puede ser extendido por analogía a tensores de orden superior sin ninguna dificultad. Para ello fíjese que los dos primeros términos de (27) forman las componentes de la derivada material del tensor  $\mathbf{T}$ . Los dos últimos términos de (27) como sumatorias, la primera, para todos los subíndice, y la segunda, para todos los superíndices de las componentes del tensor  $\mathbf{T}$ .

La derivada convectiva de las componentes de un vector  $\mathbf{u}$ , de acuerdo a lo dicho al final del párrafo anterior, se calcula como

$$\frac{\bar{\delta} u^i}{\delta t} = \frac{\partial u^i}{\partial t} + v^m u_{,m}^i - v_{,n}^i u^n \quad (28)$$

De este modo la derivada convectiva de la velocidad  $\mathbf{v}$  es

$$\frac{\bar{\delta} v^i}{\delta t} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^m v_{,m}^i - v_{,n}^i v^n = \frac{\partial v^i}{\partial t} \quad (29)$$

Este resultado tiene sentido, puesto que para un observador moviéndose con el sistema material la velocidad es cero, pero la aceleración no, y en un sistema de coordenadas espaciales esta es  $\partial v^i / \partial t$ .

La noción de derivación convectiva se puede aplicar a entidades vectoriales o tensoriales [Joseph, 1990], considerando, por ejemplo, que

$$\frac{\hat{\delta} \mathbf{T}}{\delta t} \equiv \frac{d\tilde{\mathbf{T}}}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}_{\cdot j}^i(t, \mathbf{X}) \right] \tilde{\mathbf{a}}_i \tilde{\mathbf{a}}^j = \left[ \frac{\partial}{\partial t} T_{\cdot j}^i(t, \mathbf{x}) \right]_{x^i=X^i} \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = \frac{\bar{\delta} T_{\cdot j}^i}{\delta t} \bar{\mathbf{a}}_i \bar{\mathbf{a}}^j \quad (30)$$

donde  $\mathbf{T}(t, \mathbf{x})$  tiene una descripción espacial en las coordenadas espaciales  $x^i = X^i$  curvilíneas, las cuales tiene una base fija (constante) en el tiempo, y  $\tilde{\mathbf{T}}(t, \mathbf{X})$  tiene una descripción material en las mismas coordenadas, pero consideradas como materiales en una base diferente también fija, siendo  $\mathbf{T}(t, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{T}}(t, \mathbf{X})$ . O sea que

$$\frac{\bar{\delta} T_{\cdot j}^i}{\delta t} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} T_{\cdot j}^i(t, \mathbf{x}) \right]_{x^i=X^i} \quad (31)$$

Fíjese, que en esta definición, sí ha sido importante diferenciar el orden de los índices, por la presencia de la base diádica ordenada. La base  $\{\tilde{\mathbf{a}}_i, \tilde{\mathbf{a}}^j\}$  es fija en el tiempo y es preferiblemente cartesiana cuando se habla de una configuración inicial. La base  $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^j\}$  depende del tiempo debido que es definida para un sistema de coordenadas curvilíneo  $PX_1X_2X_3$  formado por tres ejes de coordenadas curvilíneas que son líneas materiales fijas a los puntos materiales en cada instante. La base  $\{\bar{\mathbf{a}}_i, \bar{\mathbf{a}}^j\}$  coincide con la base  $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^j\}$  en el instante de análisis, pero es fija en el tiempo, dependiendo solamente de la posición espacial ( $\bar{\mathbf{a}}_i = \bar{\mathbf{a}}_i(\mathbf{x})$ ). En este contexto, el sistema de coordenadas curvilíneo  $PX_1X_2X_3$  posee una base  $\{\mathbf{a}_i\}$ , tangente a los ejes



coordenados, que es generadora del espacio y una base recíproca  $\{\mathbf{a}^j\}$  que es generadora del espacio dual. Estas bases se definen como

$$\mathbf{a}_i(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^i} \quad \mathbf{a}^j(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_j} \quad (32)$$

Más adelante en la Sección 3.4.6. se verá como se relacionan estos vectores base con el tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ .

La base  $\{\bar{\mathbf{a}}_i(\mathbf{x})\}$  origina un tensor métrico

$$\bar{g}_{ij}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{a}}_i(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{a}}_j(\mathbf{x}) \quad (33)$$

cuya derivada convectiva tiene una interpretación interesante. Aplicando la derivada convectiva a  $\bar{g}_{ij}$ , siguiendo las reglas de derivación sugeridas por (27), se obtiene que

$$\frac{\delta \bar{g}_{ij}}{\delta t} = \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial t} + v^m g_{ij,m} + v^p_{,j} g_{ip} + v^p_{,i} g_{pj} = v_{i,j} + v_{j,i} = 2 D_{ij} \quad (34)$$

donde la derivada parcial con respecto al tiempo es nula por ser las componentes  $\bar{g}_{ij}(\mathbf{x})$  del tensor métrico fijas para todo instante, y donde la derivada covariante de las mismas componentes siempre se anulan debido al Lema de Ricci. Las cantidades  $D_{ij}$  son las componentes del tensor  $\mathbf{D}$  de la velocidad de deformación.

Cualquier vector  $\mathbf{u}$  y cualquier tensor  $\mathbf{T}$  se puede expresar como combinación lineal de las bases  $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^j\}$ , o de sus productos tensoriales, de la forma

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{a}_i = u_j \mathbf{a}^j \quad \mathbf{T} = T^i_j \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = T_j^i \mathbf{a}^j \mathbf{a}_i = T_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j = T^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \quad (35)$$

Estas componentes serían también las mismas en la base  $\{\bar{\mathbf{a}}_i\}$ , pero su derivación respecto al tiempo sería distinta.

Las derivadas materiales de las base  $\{\mathbf{a}_i\}$  se calculan como

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}_i}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{a}_i(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial X^i} \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \right] = \frac{\partial}{\partial X^i} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial X^i} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = (\nabla \mathbf{v})^t \cdot \frac{\partial}{\partial X^i} \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (36.a)$$

Las derivadas materiales de las base  $\{\mathbf{a}^j\}$  se calculan empleando la identidad

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j) = \frac{d\mathbf{a}_i}{dt} \cdot \mathbf{a}^j + \mathbf{a}_i \cdot \frac{d\mathbf{a}^j}{dt} = \mathbf{a}^j \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_i + \frac{d\mathbf{a}^j}{dt} \cdot \mathbf{a}_i = 0 \quad (36.b)$$

con la cual se obtiene que

$$\frac{d\mathbf{a}^j}{dt} = -\mathbf{a}^j \cdot \mathbf{G} = -\mathbf{G}^t \cdot \mathbf{a}^j \quad (36.c)$$

El tensor  $\mathbf{G}$  es el gradiente de velocidad  $(\nabla \mathbf{v})^t$ , el cual se puede descomponer en su parte simétrica y parte antisimétrica de la forma

$$\mathbf{D} + \mathbf{W} = \mathbf{G} \quad \mathbf{D} - \mathbf{W} = \mathbf{G}^t \quad (37)$$

donde los tensores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{W}$  son las velocidades de deformación y de giro, respectivamente.

Empleando las derivadas (36) de las bases, se pueden definir las siguientes derivadas convectivas de un vector  $\mathbf{u}$  y de un tensor  $\mathbf{T}$ , en función de la derivada material. Se verá que la derivada convectiva depende de la base que se ha empleado para definir las componentes del vector o tensor con una descripción espacial. Esto es, para un vector  $\mathbf{u}$

$$\frac{\hat{d}\mathbf{u}}{\delta t} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial t} u^i(t, \mathbf{x}) \right]_{x^i=X^i} \mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{u} \quad \frac{\check{d}\mathbf{u}}{\delta t} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial t} u_i(t, \mathbf{x}) \right]_{x^i=X^i} \mathbf{a}^i = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{G}^t \cdot \mathbf{u} \quad (38.a, b)$$

$$\frac{\ddot{\delta}\mathbf{u}}{\delta t} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{\delta}\mathbf{u}}{\delta t} + \frac{\hat{\delta}\mathbf{u}}{\delta t} \right) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} \quad \frac{\ddot{\delta}\mathbf{u}}{\delta t} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{\delta}\mathbf{u}}{\delta t} - \frac{\hat{\delta}\mathbf{u}}{\delta t} \right) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \quad (38.c, d)$$

donde los símbolos  $\hat{\delta}$  o  $\ddot{\delta}$  se emplean para indicar que la derivación convectiva es alta o baja, con relación a los índices, si las componentes son contravariantes o covariantes (con superíndices o subíndices, respectivamente). Los símbolos  $\ddot{\delta}$  y  $\hat{\delta}$  se emplean para indicar que la derivación convectiva es corrotacional o de deformación. La derivada convectiva corrotacional es aquella que se observa desde un sistema de coordenadas rígido que rota localmente con la misma velocidad angular que el sistema de coordenadas generado por la base  $\mathbf{a}_i$ , aunque por ser rígido no se deforma de igual manera. Obsérvese que, si se tiene en cuenta (19), entonces particularmente de la derivada corrotacional (38.c) se obtiene 1.4.(7). La derivada convectiva de deformación es aquella que se observa desde un sistema de coordenadas que se deforma de la misma manera que el sistema de coordenadas generado por la base  $\mathbf{a}_i$ , aunque los ejes no rotan necesariamente con la misma velocidad angular en cada punto. La descripción hecha para estas dos últimas derivadas convectivas tiene una connotación puramente local e instantánea, puesto que los sistemas de coordenadas a los que se ha hecho referencia son curvilíneos y varían en el tiempo. Con los conceptos antes expuestos, es evidente que la derivada convectiva alta de  $\mathbf{a}_i$  y la derivada convectiva baja de  $\mathbf{a}^j$  son ambas nulas.

Para un Tensor  $\mathbf{T}$  la derivadas convectivas son

$$\frac{\hat{\delta}\mathbf{T}}{\delta t} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial t} T^{ij}(t, \mathbf{x}) \right]_{x^i=X^i} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = \frac{d\mathbf{T}}{dt} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{G}^t \quad \frac{\ddot{\delta}\mathbf{T}}{\delta t} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial t} T_{ij}(t, \mathbf{x}) \right]_{x^i=X^i} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j = \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{G}^t \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \quad (39.a, b)$$

$$\frac{\hat{\delta}\mathbf{T}}{\delta t} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial t} T^{i \cdot j}(t, \mathbf{x}) \right]_{x^i=X^i} \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = \frac{d\mathbf{T}}{dt} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \quad \frac{\ddot{\delta}\mathbf{T}}{\delta t} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial t} T_{i \cdot j}(t, \mathbf{x}) \right]_{x^i=X^i} \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j = \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{G}^t \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{G}^t \quad (39.c, d)$$

$$\frac{\ddot{\delta}\mathbf{T}}{\delta t} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{\delta}\mathbf{T}}{\delta t} + \frac{\hat{\delta}\mathbf{T}}{\delta t} \right) = \frac{d\mathbf{T}}{dt} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} \quad \frac{\ddot{\delta}\mathbf{T}}{\delta t} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{\delta}\mathbf{T}}{\delta t} - \frac{\hat{\delta}\mathbf{T}}{\delta t} \right) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (39.e, f)$$

donde los símbolos antes definidos para indicar el tipo de derivación convectiva es igualmente válido, pero con la adición de derivadas convectivas mixtas alta-baja y baja-alta en la expresiones (39.c, d), respectivamente. Estas últimas derivadas, a diferencia de las anteriores, poseen la característica de no conservar en general la simetría del tensor. De nuevo, si se tiene en cuenta (19), afectando sólo a uno de los vectores de la base didica y considerando que  $\mathbf{W}$  es antisimétrica, entonces particularmente de la derivada corrotacional (39.e) se deduce 1.4.(11).

Existe una forma generalizada de la derivadas convectivas que incluye todos los tipos anteriores

$$\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta t} = c_0 \frac{\ddot{\delta}\mathbf{u}}{\delta t} - c_1 \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \quad \frac{\delta\mathbf{T}}{\delta t} = c_0 \frac{\ddot{\delta}\mathbf{T}}{\delta t} - c_1 \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - c_2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (40)$$

donde los coeficientes  $c_\alpha$  son constantes que para los casos anteriores asumen los valores 0, 1 o -1. De este modo la derivada convectiva (40) puede ser alta ( $c_0 = 1, c_1 = c_2 = 1$ ), baja ( $c_0 = 1, c_1 = c_2 = -1$ ), alta-baja ( $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = -1$ ), baja-alta ( $c_0 = 1, c_1 = -1, c_2 = 1$ ), corrotacional ( $c_0 = 1, c_1 = c_2 = 0$ ) o de deformación ( $c_0 = 0, c_1 = c_2 = -1$ ). Todos estos tipos de derivadas convectivas expresadas con (40), pueden ser resumidas en la siguiente tabla

**Tabla.** Coeficientes para la Derivada Convectiva Generalizada.

Derivada Convectiva	$c_0$	$c_1$	$c_2$
Alta	1	1	1
Baja	1	-1	-1
Alta-Baja	1	1	-1
Baja-Alta	1	-1	1
Corrotacional	1	0	0
de Deformación	0	-1	-1

La importancia de la derivación convectiva se verá más adelante, cuando se trate de expresar algunas relaciones constitutivas para los materiales viscoelásticos en el Capítulo XII. La formulación de las derivadas convectivas son ideales para las relaciones constitutivas, debido a que son invariantes bajo un cambio del sistema de coordenadas cuando se están expresando las componentes de los vectores o tensores. Particularmente, son muy usadas las derivadas convectivas alta y baja (con respecto a  $t$ ), puesto que conservan a los tensores de Green  $\mathbf{B}_\tau(t) = \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau)$  y de Piola  $\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{B}_\tau^{-1}(t)$ , respectivamente. O sea, que sus derivadas son nulas (ver ecuaciones XII.1.1.(9)) y mantienen invariantes las métricas en el espacio convectado y en el espacio de la configuración de referencia, respectivamente (ver ecuaciones I.3.2.(11) y definiciones I.3.4.(4) – (6)).

### 3.5. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Dado un campo vectorial de desplazamientos  $\mathbf{u}$  en un cierto cuerpo  $\mathcal{B}$  es posible encontrar de forma unívoca el campo tensorial de deformaciones  $\mathbf{E}$ , mediante su definición

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u})^t + \nabla \mathbf{u}] \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

Sin embargo, el problema inverso, donde dado un campo tensorial de deformaciones  $\mathbf{E}$  encontrar el campo vectorial de desplazamientos  $\mathbf{u}$ , no necesariamente posee solución única. Este problema inverso significa resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (1), lo cual no siempre es posible. Para que la unicidad de la solución del problema inverso planteado sea posible, es una condición necesaria y suficiente que el cuerpo  $\mathcal{B}$  sea una región simplemente conexa, y, además, que se cumplan la siguientes relaciones del tensor  $\mathbf{E}$ , las cuales son denominadas *ecuaciones de compatibilidad*. Estas ecuaciones son

$$\mathbf{Z} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})^t = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})]^t - \nabla^2 \mathbf{E} - \nabla \nabla(\text{tr} \mathbf{E}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

o lo que es lo mismo

$$\mathbf{Z} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})^t = \nabla \psi + (\nabla \psi)^t - \nabla^2 \mathbf{E} - \nabla \nabla \varrho = \mathbf{0} \quad (3)$$

donde

$$\psi = \nabla \cdot \mathbf{E} \quad \varrho = \text{tr} \mathbf{E} = E_{ii} \quad (4)$$

Las ecuaciones (3) expresadas con notación indicial para un sistema de coordenadas cartesiano serían

$$Z_{ij} = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} E_{kl,mn} = \psi_{i,j} + \psi_{j,i} - \nabla^2 E_{ij} - \varrho_{,ij} = 0 \quad (5)$$

Estas mismas ecuaciones planteadas de forma extendida para un sistema de coordenadas cartesiano  $oxyz$ , constituyen en realidad un conjunto de seis ecuaciones diferentes, puesto que el tensor  $\mathbf{Z}$  es simétrico. Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} Z_{xx} &= \frac{\partial^2 E_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 E_{yz}}{\partial y \partial z} = 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \nabla^2 E_{xx} - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} = 0 \\ Z_{yy} &= \frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 E_{zx}}{\partial z \partial x} = 2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \nabla^2 E_{yy} - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} = 0 \\ Z_{zz} &= \frac{\partial^2 E_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 E_{xy}}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial \psi_z}{\partial z} - \nabla^2 E_{zz} - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2} = 0 \\ Z_{xy} &= -\frac{\partial^2 E_{zz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial E_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial E_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial E_{zx}}{\partial y} \right) = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \nabla^2 E_{xy} - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x \partial y} = 0 \\ Z_{yz} &= -\frac{\partial^2 E_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial E_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial E_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial E_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\partial \psi_y}{\partial z} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \nabla^2 E_{yz} - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y \partial z} = 0 \\ Z_{zx} &= -\frac{\partial^2 E_{yy}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial E_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial E_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial E_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\partial \psi_z}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \nabla^2 E_{zx} - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z \partial x} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Con este preámbulo, entonces se procederá a enunciar el Teorema de las Condiciones de Compatibilidad.

**Teorema.** Sea  $\mathcal{B}$  un cuerpo deformado que ocupa una región del espacio simplemente conexa y donde existe definido un campo tensorial de deformaciones infinitesimales  $\mathbf{E}$ . Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial

$$(\nabla \mathbf{u})^t + \nabla \mathbf{u} = 2 \mathbf{E} \quad u_{i,j} + u_{j,i} = 2 E_{ij} \quad (7)$$

admita una solución  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  única (salvo un desplazamiento rígido infinitesimal arbitrario), es que satisfaga cualquiera de las dos ecuaciones de compatibilidad

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})^t = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\nabla \psi + (\nabla \psi)^t = \nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \nabla \varrho \quad \psi = \nabla \cdot \mathbf{E} \quad \varrho = \text{tr} \mathbf{E} = E_{ii} \quad (9)$$

equivalentes entre sí.

La demostración del Teorema de Compatibilidad se hará en tres partes en los próximos tres capítulos. Primero se demostrará la necesidad de las condiciones y luego su suficiencia, y finalmente se demostrará la unicidad de la solución.

### 3.5.1. Condición Necesaria

Primero demostraremos de una manera muy sencilla que (1) implica (8). Extrayendo el rotacional a (1) se obtiene que

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{2} [\nabla \times (\nabla \mathbf{u})^t + \nabla \times \nabla \mathbf{u}] = \frac{1}{2} [\nabla (\nabla \times \mathbf{u})]^t = (\nabla \varpi)^t \quad \nabla \times \nabla \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \varpi = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \quad (10)$$

y extrayendo de nuevo el rotacional al transpuesto del tensor obtenido en (10)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})^t = \nabla \times (\nabla \varpi) = \mathbf{0} \quad (11)$$

lo que demuestra (8) (Recuérdese que el rotacional de un gradiente es siempre nulo).

Demostraremos ahora que (1) implica (9). La ecuación (9) se puede ordenar de la forma

$$\nabla(\psi - \nabla \varrho) + (\nabla \psi)^t = \nabla^2 \mathbf{E} \quad (12)$$

Substituyendo (1) en  $\psi$  y  $\varrho$ , se obtiene

$$\varrho = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \psi = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \varrho) \quad \psi - \nabla \varrho = \frac{1}{2} (\nabla^2 \mathbf{u} - \nabla \varrho) \quad (13)$$

Introduciendo estos resultados en los tres términos de (12) se generan los siguientes tres resultados parciales

$$\nabla(\psi - \nabla \varrho) = \frac{1}{2} [\nabla(\nabla^2 \mathbf{u}) - \nabla \nabla \varrho] \quad (14.a)$$

$$(\nabla \psi)^t = \frac{1}{2} \{ [\nabla(\nabla^2 \mathbf{u})]^t + \nabla \nabla \varrho \} \quad (14.b)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{2} \{ \nabla(\nabla^2 \mathbf{u}) + [\nabla(\nabla^2 \mathbf{u})]^t \} \quad (14.c)$$

Con estos tres resultados parciales se verifica (12) y, por consiguiente, la condición de compatibilidad (9).

Se ha demostrado hasta ahora la necesidad de la condición (8) o (9) para que la ecuación diferencial (7) admita una solución  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ .

Ahora queda demostrar la equivalencia de las expresiones (8) y (9). Para ello vamos a emplear algunas identidades obtenidas de la Sección A.2.2.7. Estas son:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})^t = [\nabla^2 \varrho - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}] \mathbf{I} - \nabla^2 \mathbf{E} - \nabla \nabla \varrho + \nabla \boldsymbol{\psi} + [\nabla \boldsymbol{\psi}]^t \quad (15.a)$$

$$\text{tr}[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})^t] = [\nabla^2 \varrho - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}] \quad (15.b)$$

donde

$$\boldsymbol{\psi} = \nabla \cdot \mathbf{E} \quad \varrho = \text{tr} \mathbf{E} \quad (15.c)$$

Si se tiene que  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})^t = 0$ , entonces su traza es nula y así mismo lo es la identidad (15.b). Resultando de ello que, para este caso, (15.a) coincide con (3), lo que demuestra la equivalencia entre las expresiones (8) y (9).

### 3.5.2. Condición de Suficiencia

En esta parte se demostrará, al contrario de la sección anterior, que (8) implica (1). La condición de compatibilidad se puede expresar de manera diferente si se define una variable auxiliar

$$\mathbf{A} = (\nabla \times \mathbf{E})^t \quad (16)$$

con la cual (8) se expresa como

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (17)$$

Esta ecuación conduce a que debe existir una función vectorial  $\mathbf{a}$ , tal que

$$\mathbf{A} = \nabla \mathbf{a} \quad (18)$$

Recuérdese que el rotacional de un gradiente siempre es nulo.

La definición (16) implica que la traza de  $\mathbf{A}$  es nula, debido a que el tensor  $\mathbf{E}$  es simétrico, lo cual junto a (18) resulta en

$$\text{tr} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (19)$$

Definamos ahora a  $\mathbf{a}$  como el opuesto de la mitad del vector axial de un tensor antisimétrico  $\mathbf{K} = -\mathbf{K}^t$ , o sea

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{2} \mathbf{K}_x \quad (20)$$

Substituyendo esto en la identidad

$$\nabla \times \mathbf{K} = \frac{1}{2} [(\nabla \cdot \mathbf{K}_x) \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{K}_x)^t] \quad (21)$$

y tomando en consideración la expresión (19), se obtiene que

$$\nabla \times \mathbf{K} = (\nabla \mathbf{a})^t = \mathbf{A}^t \quad (22)$$

La definición (16), junto con el resultado (22), expresan que

$$\nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{A}^t = \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{K} = \nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{K}) = \mathbf{0} \quad (23)$$

Por la misma razón que antes, entonces  $(\mathbf{E} - \mathbf{K})$  debe ser el gradiente de un función, digamos  $\mathbf{u}$ . Esto es,

$$\mathbf{E} - \mathbf{K} = \nabla \mathbf{u} \quad (24)$$

Si la expresión (24) es sumada con su transpuesta

$$\mathbf{E}^t - \mathbf{K}^t = (\nabla \mathbf{u})^t \quad \implies \quad \mathbf{E} + \mathbf{K} = (\nabla \mathbf{u})^t \quad (25)$$

y luego es dividida entre dos, da como resultado final que la función  $\mathbf{u}$  cumple con (1), lo que demuestra la suficiencia de la condición (8). Adicionalmente, la variable auxiliar  $\mathbf{a}$  coincide con la variable  $\boldsymbol{\varpi}$  definida en la sección anterior y el tensor  $\mathbf{K}$  coincide con el tensor de desplazamiento rígido infinitesimal.

### 3.5.3. Unicidad de la Solución

Bajo las hipótesis asumidas para el Teorema de Compatibilidad, es posible obtener una fórmula explícita que pueda ser útil en el cálculo del campo vectorial de desplazamientos  $\mathbf{u}$ , correspondiente al campo tensorial de deformaciones  $\mathbf{E}$ . Sea  $\mathbf{x}_o$  un punto fijo en un cuerpo  $\mathcal{B}$ . Entonces para cada  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$  se puede hacer el siguiente análisis.

De acuerdo a esto, la unicidad de la solución de la ecuación diferencial (7) la demostraremos mediante un proceso de integración de

$$d\mathbf{u} = [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{y})]^t \cdot d\mathbf{y} \quad (26)$$

Por consiguiente, haciendo dicha integración, se tiene que

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_o = \int_{\mathbf{u}_o}^{\mathbf{u}} d\mathbf{u} = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{y})]^t \cdot d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} [\mathbf{E}(\mathbf{y}) + \mathbf{K}(\mathbf{y})] \cdot d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} + \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{K}(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \quad (27)$$

donde se ha empleado la relación (25.b) para desarrollar la última parte. La última integral se resuelve empleando la integración por parte y haciendo un cambio de variable de integración de la forma

$$\int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{K}(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{x}_o - \mathbf{x}}^{\mathbf{0}} \mathbf{K}(\mathbf{y}) \cdot d(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = [\mathbf{K}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}_o}^{\mathbf{y}=\mathbf{x}} - \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\nabla \mathbf{K}^t)^t \cdot d\mathbf{y} \quad (28)$$

y en la cual se ha empleado la propiedad del diferencial de un producto y la definición de la diferencial de un tensor

$$d[\mathbf{K} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})] = d\mathbf{K} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{K} \cdot d(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad d\mathbf{K} = d\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{K} \quad (29)$$

Substituyendo ahora (28) en (27) se obtiene que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_o + \mathbf{K}_o \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{U}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{y} \quad (30)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= \mathbf{E}(\mathbf{y}) - (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot [\nabla \mathbf{K}^t(\mathbf{y})]^t & U_{ij} &= E_{ij} - (y_k - x_k) K_{ik,j} \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{y}) - (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot [\nabla \mathbf{E}(\mathbf{y})] + \{ (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot [\nabla \mathbf{E}(\mathbf{y})]^t \}^t & &= E_{ij} - (y_k - x_k) (E_{ij,k} - E_{kj,i}) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{y})] & &= E_{ij} + \epsilon_{ikr} \epsilon_{rpq} (y_k - x_k) E_{qj,p} \end{aligned} \quad (31)$$

Es evidente que la integral en (30) es independiente del paso seguido en  $\mathcal{B}$  desde  $\mathbf{x}_o$  hasta  $\mathbf{x}$ , y la función así definida es el campo vectorial de desplazamientos  $\mathbf{u}$  correspondiente al campo tensorial de deformaciones  $\mathbf{E}$ . Esta solución es única cuando se elimina el desplazamiento rígido infinitesimal dado por

$$\mathbf{u}_o + \mathbf{K}_o \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \quad (32)$$

y que no produce deformación en el cuerpo  $\mathcal{B}$ , y, por consiguiente, no altera al tensor deformación  $\mathbf{E}$ . Con esto se ha demostrado la unicidad de la solución de la ecuación diferencial (7), y la expresión

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{U}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{y} \quad (33)$$

representa una fórmula explícita que pueda ser empleada para el cálculo del campo vectorial de desplazamientos, de forma única.

Para completar el análisis, se tratará de obtener la condición (8) a partir de la integral en (33). Si  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  es una función biyectiva y continua, la integral de línea en (33) debe ser independiente del paso seguido. Por consiguiente, la integral seguida a lo largo de una curva cerrada  $\mathcal{L}$  debe ser nula, esto es,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{U}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \mathbf{U}^t)^t \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = 0 \quad \oint_{\mathcal{L}} U_{ij} \, dy_j = \int_{\mathcal{A}} \epsilon_{lkj} U_{ij,k} n_l \, d\mathcal{A} = 0 \quad (34)$$

Fíjese que en esta última expresión, denominada *integrales de Ceàro*, se ha empleado el teorema de Stokes, siendo  $\mathcal{A}$  cualquier superficie sostenida por la curva cerrada  $\mathcal{L}$ . En estas circunstancias entonces se tiene que el integrando es nulo también, o sea,

$$\nabla \times \mathbf{U}^t = \mathbf{0} \quad \epsilon_{lkj} U_{ij,k} = 0 \quad (35)$$

Como  $U_{ij,k}$  es simétrica en los índices  $jk$  y  $\epsilon_{lkj}$  es antisimétrica con respecto a los mismos índices, se obtiene que (35) puede ser reducida a

$$U_{ij,k} - U_{ik,j} = 0 \quad (36)$$

Substituyendo (31.b), cancelando los términos correspondientes y haciendo algunas manipulaciones de los términos restantes en la ecuación obtenida, resulta

$$E_{ij,kl} + E_{kl,ij} - E_{lj,ki} - E_{ki,lj} = 0 \quad (37)$$

y se puede deducir que es equivalente a la condición de compatibilidad (5).

Para deducir la equivalencia entre la ecuaciones de compatibilidad (5) (o la condición (8)) y las ecuaciones (37), se substituirá la expresión (31.c) en la ecuación (35), obteniéndose

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{U}^t &= \nabla \times \mathbf{E}^t + \nabla \times [(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \times (\nabla \times \mathbf{E})]^t = \nabla \times \mathbf{E}^t - \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{E})^t \times (\mathbf{y} - \mathbf{x})] \\ &= \nabla \times \mathbf{E}^t - [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})^t] \times (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \{[(\nabla \times \mathbf{E})^t \times \mathbf{I}]^t\}_{\mathbf{x}} \\ &= \nabla \times \mathbf{E}^t - [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})^t] \times (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \text{tr}(\nabla \times \mathbf{E}) \mathbf{I} - \nabla \times \mathbf{E} \\ &= -[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})^t] \times (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (38)$$

o lo que es lo mismo en notación indicial para un sistema de coordenadas cartesiano

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{U}^t)_{li} &= \epsilon_{lmj} E_{ij,m} + \epsilon_{lmj} [\epsilon_{ikr} \epsilon_{rpq} (y_k - x_k) E_{qj,p}]_{,m} \\ &= \epsilon_{lmj} E_{ij,m} - \epsilon_{irk} (\epsilon_{lmj} \epsilon_{rpq} E_{qj,pm}) (y_k - x_k) + \epsilon_{lkj} \epsilon_{ikr} \epsilon_{rpq} E_{qj,p} \\ &= \epsilon_{lmj} E_{ij,m} - \epsilon_{irk} (\epsilon_{lmj} \epsilon_{rpq} E_{qj,pm}) (y_k - x_k) + \delta_{li} \epsilon_{jpk} E_{qj,p} - \epsilon_{lpq} E_{qi,p} \\ &= -\epsilon_{irk} (\epsilon_{lmj} \epsilon_{rpq} E_{qj,pm}) (y_k - x_k) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

donde se ha eliminado

$$\text{tr}(\nabla \times \mathbf{E}) = \epsilon_{jpk} E_{qj,p} = \epsilon_{qjp} E_{qj,p} = 0 \quad (40)$$

y se ha cancelado  $(\nabla \times \mathbf{E})$  por ser  $\mathbf{E}$  un tensor simétrico.

Finalmente, debido a que  $(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  es arbitrario, entonces

$$\mathbf{Z} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})^t = \mathbf{0} \quad Z_{lr} = \epsilon_{lmj} \epsilon_{rpq} E_{qj,pm} \quad (41)$$

que era el resultado esperado (5).

Con esto queda demostrada la necesidad y suficiencia de la condición de compatibilidad y la unicidad de la solución, enunciadas al principio.

### 3.5.4. Condición de Bianchi

Existen unas condiciones obtenidas de la divergencia del tensor  $\mathbf{Z}$  definido en (2), en la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad Z_{ij,j} = 0 \quad (42)$$

las cuales son tres ecuaciones denominadas las *condiciones de Bianchi*. Este resultado se deduce directamente de la simetría de la derivada mixta  $\partial^2/\partial x_j \partial x_n$  y la antisimetría del símbolo alternante  $\epsilon_{jln}$ . Estas condiciones conllevan a que las seis ecuaciones de compatibilidad (6), representen en realidad tres condiciones funcionalmente independientes. Así, con estas condiciones, las seis ecuaciones de deformación-desplazamiento son ahora integrables para las tres componentes del desplazamiento.

### 3.5.5. Regiones Múltiplemente Conexas

El Teorema de Compatibilidad es válido para regiones simplemente conexas. Para el caso de regiones múltiplemente conexas se debe tener en consideración la siguiente afirmación: Una región múltiplemente conexa siempre puede dividirse en un número finito de regiones simplemente conexas. Cuando esto se hace, los bordes de los agujeros interiores de la región se fragmentan para formar porciones de los bordes de las regiones simplemente conexas, que a su vez son partes de la región original. Digamos que tenemos en total  $N$  agujeros y  $P$  partes. Sean  $\mathcal{L}_\alpha$  con  $\alpha = 1, 2, 3, \dots, N$  los bordes de los agujeros y sea  $\mathcal{L}$  el borde exterior de la región múltiplemente conexa  $\mathcal{A}$ . Si las partes simplemente conexas  $\mathcal{A}_i$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, P$ , en las que se ha dividido la región  $\mathcal{A}$ , poseen bordes  $\Gamma_i$ , entonces se puede decir que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^P \mathcal{A}_i \quad (43)$$

Con estas premisas entonces se puede calcular las integrales (34) para cada una de las partes  $i$  y sumarlas, obteniéndose

$$\sum_{i=1}^P \oint_{\Gamma_i} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{y} = \sum_{i=1}^P \int_{\mathcal{A}_i} (\nabla \times \mathbf{U}^t)^t \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \mathbf{U}^t)^t \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \mathbf{0} \quad (44)$$

donde la última integral se obtuvo observando la propiedad (43).

Analicemos ahora las integrales de línea sobre los bordes  $\Gamma_i$ . Estos bordes pueden estar formados en parte por una porción del borde exterior, en parte por una línea de fragmentación y en parte por una porción del borde de un agujero. Estas configuraciones pueden presentarse combinadas o individuales. Las integrales de línea sobre las porciones del borde exterior se suman todas y da la integral de línea sobre todo el borde exterior. Las integrales de línea sobre las porciones de los bordes de los agujeros se suman y dan el opuesto de la sumatoria de las integrales de línea sobre todos los bordes de los agujeros. El signo opuesto se obtiene porque el sentido de recorrido en las integrales de línea sobre los bordes de los agujeros cuando las partes están fragmentadas, es contrario al recorrido que se hace sobre los agujeros, el cual es en el mismo sentido que sobre el borde exterior, cuando las partes están unidas. La integral de línea sobre las líneas de fragmentación se cancelan entre sí, porque estas separan partes adyacentes, y el recorrido en cada una de ellas es en sentido opuesto. De acuerdo a esto, entonces el resultado de la primera integral de (44) es la integral de línea sobre el borde exterior, menos las integrales de línea sobre los bordes de los agujeros. Incorporando esto resulta que

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{y} - \sum_{\alpha=1}^N \oint_{\mathcal{L}_\alpha} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \mathbf{U}^t)^t \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \mathbf{0} \quad (45)$$

Por lo cual, finalmente se obtiene que

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{y} = \sum_{\alpha=1}^N \oint_{\mathcal{L}_\alpha} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{y} \quad (45)$$



En conclusión, se puede decir que para una región múltiplemente conexa se debe cumplir, aparte de la condiciones de compatibilidad, la anulación de las integrales de línea sobre cada uno de los bordes de los agujeros, de manera que cualquier recorrido que se haga en la región sobre una curva cerrada anule dicha integral. De esta forma la integral de línea (33) brindará siempre una solución única, sin importar que su recorrido pueda encerrar un agujero.

### 3.5.6. Condición para Deformaciones Finitas

Todo lo dicho anteriormente en lo que se refiere a las ecuaciones de compatibilidad fue planteado para el caso de deformaciones infinitesimales y, por consiguiente, no es válido para el caso de deformaciones finitas. Para deformaciones finitas se tiene que

$$(dl)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} \quad (46)$$

donde  $\mathbf{C}$ , el tensor de Cauchy, viene dado por

$$\mathbf{C} = 2\mathbf{IE} + \mathbf{I} \quad \mathbf{IE} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^t + \mathbf{L}^t \cdot \mathbf{L}) \quad \mathbf{L} = (\nabla \mathbf{u})^t \quad (47)$$

La expresión (46) sugiere que el tensor de Cauchy  $\mathbf{C}$  hace el papel de tensor métrico (para cada instante) cuando el sistema de coordenadas para ubicar los puntos materiales en  $\mathbf{X}$ , el cual es el que se emplea para describir las deformaciones, es curvilíneo, y las derivadas parciales sobre los vectores y tensores se convierten en derivadas covariantes sobre sus componentes. En este caso el sistema de coordenadas para describir las posiciones espaciales  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$  de los puntos materiales es cartesiano, y, por consiguiente, su métrica no interviene en las componentes del tensor de Cauchy  $\mathbf{C}$ . Bajo todas estas premisas, entonces las líneas materiales,  $PX^1X^2X^3$ , en cada instante de su movimiento, forman un trío de ejes coordenados curviíneos cuyo tensor métrico en sus componentes coincide con el tensor de Cauchy  $\mathbf{C}$ . Sin embargo, es necesario recalcar que la base donde normalmente se expresa el tensor de Cauchy es aquella formada por los vectores base  $\{\tilde{\mathbf{a}}_i\}$  del sistema de coordenadas de la configuración inicial, y la base para expresar el tensor métrico es aquella formada por los vectores  $\{\mathbf{a}_i\}$  del sistema de coordenadas  $PX^1X^2X^3$  que evoluciona en el tiempo junto con las correspondientes líneas materiales.

En este contexto, es un resultado bien conocido, que para que las derivadas covariantes mixtas sean intercambiables, se debe cumplir que el tensor de Riemann-Christoffel,  $R^i_{jkl}$ , basado en la métrica correspondiente (en este caso  $\mathbf{C}$ ), sea nulo. Adicionalmente, si para una función las derivadas mixtas de segundo orden se pueden intercambiar, entonces dicha función es continua y también lo son las derivadas de primer y segundo orden (esto es lo que se denomina una función analítica de clase  $C^2$ ). Los recíprocos de estas dos últimas afirmaciones también son válidos.

De manera que, para que el tensor de deformación finita sea una función continua con derivadas de hasta segundo orden también continua, se debe cumplir que

$$R^i_{jkl} = 0 \quad g_{ij} = C_{ij} = (\mathbf{C})_{ij} = (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F})_{ij} \quad (48)$$

donde el tensor de Riemann-Christoffel,  $R^i_{jkl}$ , se define como

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial X^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial X^l} + \Gamma^a_{jl} \Gamma^i_{ak} - \Gamma^a_{jk} \Gamma^i_{al} \quad (49)$$

y donde

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial X^i} \right) = \frac{\partial x^a}{\partial X^i} \frac{\partial^2 x^a}{\partial X^j \partial X^k} \quad \Gamma^i_{jk} = g^{ia} \Gamma_{ajk} \quad (g^{ia} g_{aj} = \delta^i_j) \quad (50)$$

son los símbolos de Christoffel de primera y segunda especie, respectivamente, para la métrica  $g_{ij} = C_{ij}$  (en cada instante). La ecuación (48) se justifica al observar una de las identidades de Ricci aplicada a un tensor cualquiera  $\mathbf{E}$ . Esta es,

$$\mathbf{E}_{ij,kl} - \mathbf{E}_{ij,lk} = R_{.jkl}^a \mathbf{E}_{ia} + R_{.ikl}^a \mathbf{E}_{aj} \quad (51)$$

De esta forma las ecuaciones (48) conforman las ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformaciones finitas. Fíjese que estas ecuaciones representan una condición para el tensor de deformaciones finitas  $\mathbf{E}$ , cuando se substituye la definición (47.a) en las definiciones (50), y a su vez en la (49) y, finalmente, se substituyen en la ecuación (48), empleando como tensor métrico el tensor de Cauchy  $\mathbf{C}$ , expresado en la base  $\{\mathbf{a}_i\}$  del sistema curvilíneo  $PX_1X_2X_3$  que evoluciona en cada instante.

De manera análoga al caso de deformaciones infinitesimales, se tiene también la condición de Bianchi, que en general constituyen las identidades de Bianchi. Una de estas, que es la que nos interesa, es

$$R_{.jkl,m}^i + R_{.jlm,k}^i + R_{.jmk,l}^i = 0 \quad (52)$$

Otra forma de obtener (48) es analizando el desplazamiento de dos puntos materiales A y B. Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  los vectores de posición de los puntos materiales antes mencionados (expresados, por ejemplo, en un sistema de coordenadas cartesianas), para un instante inicial. Es claramente visto que el desplazamiento de B está relacionado con el desplazamiento en A a través de la expresión

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \int_A^B d\mathbf{u} = \mathbf{u}_A + \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^i} dX^i = \mathbf{u}_A + \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^i} d(X^i - B^i) \quad (53)$$

Integrando por parte, se obtiene

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + (B^i - A^i) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^i} + \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} (B^i - X^i) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial X^j \partial X^i} dX^j \quad (54.a)$$

o lo que es lo mismo

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + (B^i - A^i) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^i} + \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} (B^i - X^i) \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial X^j} dX^j \quad (54.b)$$

donde

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_i \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_i \tilde{\mathbf{a}}^i \quad (55)$$

considerando que  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{L}$  y  $\mathbf{L} = (\nabla \mathbf{u})^t$ , por lo cual,  $\partial^2 \mathbf{u} / \partial X^j \partial X^i = \partial \mathbf{F}_i / \partial X^j$ . Fíjese que en la integral (53) se tiene que  $(\partial \mathbf{u} / \partial X^i) dX^i$  es exactamente igual a  $(\nabla \mathbf{u})^t \cdot d\mathbf{X}$ .

Sea

$$\mathbf{H}_n = (B^i - X^i) \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial X^n} \quad (56)$$

Entonces, en una región simplemente conexa, la integral

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{H}_n dX^n \quad (57)$$

es independiente del recorrido seguido si, y sólo si,

$$\frac{\partial \mathbf{H}_n}{\partial X^m} - \frac{\partial \mathbf{H}_m}{\partial X^n} = \mathbf{0} \quad (58)$$

y, por lo tanto, la relación entre  $\mathbf{u}_A$  y  $\mathbf{u}_B$  es única. Esto es equivalente a decir que la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{H}_n$ , sobre una curva simple cerrada, sea nulo, lo que a su vez implica que dicho campo

vectorial sea irrotacional. Por consiguiente, la existencia de  $\mathbf{u}$  está garantizada por la existencia del campo tensorial único  $\mathbf{F}$  (lo que equivale a la existencia del campo vectorial  $\mathbf{F}_i$ ), y su unicidad por la expresión (58).

Se Resolverá (58) para el caso donde el sistema de coordenadas para la configuración inicial es cartesiano, al igual que el sistema de coordenadas para expresar el movimiento de los puntos materiales  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ , y el sistema de coordenadas formado por las líneas materiales  $PX^1, X^2, X^3$  en todo instante es curvilíneo con vectores base iguales a  $\mathbf{F}_i$ . Esto último se justifica por ser  $\mathbf{F}_i = \partial \mathbf{x} / \partial X^i$ . Recuérdese que el tensor gradiente de deformación es  $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ . En estas circunstancias, de la relación (58) resulta

$$\frac{\partial}{\partial X^m} [(B^i - X^i) \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial X^n}] - \frac{\partial}{\partial X^n} [(B^i - X^i) \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial X^m}] = \mathbf{0} \quad (59.a)$$

$$(\Gamma_{\cdot nm}^r - \Gamma_{\cdot mn}^r) \mathbf{F}_r + (B^i - X^i) \left[ \frac{\partial (\Gamma_{\cdot in}^r \mathbf{F}_r)}{\partial X^m} - \frac{\partial (\Gamma_{\cdot im}^r \mathbf{F}_r)}{\partial X^n} \right] = \mathbf{0} \quad (59.b)$$

o equivalentemente,

$$[(\Gamma_{\cdot nm}^r - \Gamma_{\cdot mn}^r) + (B^i - X^i) R_{\cdot imn}^r] \mathbf{F}_r = \mathbf{0} \quad (59.c)$$

donde sabiendo que  $\Gamma_{\cdot nm}^r = \Gamma_{\cdot mn}^r$  y que  $B^i \neq X^i$  en todo el recorrido, exceptuando un punto, se concluye que  $R_{\cdot imn}^r = 0$ , lo cual verifica (48) junto con

$$\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j = g_{ij} = C_{ij} = C_{ij} = (\mathbf{C})_{ij} = (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F})_{ij} \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{a}_i \quad (60)$$

y (55), sabiendo que  $\{\mathbf{a}_i\}$  es la base del sistema de coordenadas curvilíneo formado por las tres curvas materiales  $PX_1X_2X_3$  en cada instante, y que ha evolucionado a partir de la base  $\{\tilde{\mathbf{a}}_i\}$  del instante y configuración iniciales.  $A^i, B^i$  y  $X^i$  son siempre las componentes de los vectores correspondientes en la base  $\{\mathbf{a}_i\}$ , para cada instante de análisis. Esta misma base fue la que se definió para la Sección 3.3.8. de derivadas convectivas.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Apostol, T. M. **Calculus: Cálculo con Funciones de Varias Variables y Algebra Lineal, con Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales y a las Probabilidades**, 2<sup>nd</sup> Edition. Editorial Reverté. España, Barcelona, 1972.
- [2] Aris, R. **Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics**. Prentice-Hall, 1962.
- [3] Arnold, V. I. **Geometrical Methods of Theory of Ordinary Differential Equations**. Springer-Verlag, 1983.
- [4] Arpaci, V. S. **Convection Heat Transfer**. Prentice-Hall, 1984.
- [5] Bedford, A. **Hamilton's Principle in Continuum Mechanics**. Pitman Publishing, 1985.
- [6] Bergles, A. E.; Collier, J. G.; Delhay, J. M.; Hewitt, G. F.; Mayinger, F.; (Eds.). **Two Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries**. Hemisphere Publishing Corp. - McGraw-Hill Book comp., 1981.
- [7] Bottema, O.; Roth, B. **Theoretical Kinematics**. Dover Publications, 1990.
- [8] Chung, T. J. **Continuum Mechanics**. Prentice-Hall International, 1988. Cambridge University Press, 1996.
- [9] Currie, I. G. **Fundamental Mechanics of Fluids**, Second Edition. McGraw-Hill, 1993.
- [10] Delhay, J. M. **Equations Fondamentales des Écoulements Diphasiques**. Commissariat à l'Energie Atomique, Reporte No.CEA-R 3429, 1968.
- [11] Delhay, J. M. "Jump Conditions and Entropy Sources in Two Phase Systems. Local Instant Formulation". **Int. J. Multiphase Flow**, Vol.1, pp.395-409. Pergamon Press, (1974).

- [12] Delhay, J. M.; Giot, M.; Riethmuller, M. L.; (Eds.). **Thermohydraulics of Two Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering**. Hemisphere Publishing Corp. - McGraw-Hill Book comp., 1981.
- [13] Estrada, R.; Kanwal, R. P. "Non-Classical Derivation of The Transport Theorems for Wave Fronts". **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Vol.159, pp.290-297, (1991).
- [14] Fox, E. A. **Mechanics**. Harper International - Harper & Row - John Weatherhill, 1967.
- [15] Goldstein, H. **Classical Mechanics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Addison-Wesley, 1980.
- [16] Granados M., A. L. "Reynolds Transport Theorems as a Special Application of Leibniz Rule". **Proceedings of The Third Caribbean Congress on Fluid Dynamics and The Third Latin-American Symposium on Fluid Mechanics**. Universidad Simón Bolívar, Sartenejas, del 5 al 9 de Febrero de 1995. Caracas, Venezuela.
- [17] Granados M., A. L. "Aplicaciones de la Regla de Leibniz: Teoremas del Transporte de Reynolds y Principios de Conservación". **Boletín Técnico IMME** (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales - Universidad Central de Venezuela), Vol.34, No.3, pp.1-31, Octubre, (1996).
- [18] Guckenheimer, J.; Holmes, P. J. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields**. Springer-Verlag, 1983. 3<sup>rd</sup> Printing, 1990.
- [19] Gurtin, M. E. "The Linear Theory of Elasticity". **Encyclopedia of Physics**. Flügge, S.; Truesdell, C. (Eds.). Vol.VIa/2: "Mechanics of Solids II", pp. 1-295. Springer-Verlag, 1972.
- [20] Gurtin, M. E. "The Dynamics of Solid-Solid Phase Transitions, 1. Coherent Interfaces". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.123, pp.305-335, (1993).
- [21] Gurtin, M. E.; Struthers, A.; Williams, W. O. "A Transport Theorem for Moving Interface". **Quarterly of Applied Mathematics**, Vol.47, No.4, pp.773-777, December (1989).
- [22] Hansen, A. G. "Generalized Control Volume Analyses with Application to the basic Laws of Mechanics and Thermodynamics". **Bull. Mech. Engng. Educ.** Vol.4, pp.161-168. Pergamon Press, (1965).
- [23] Ishii, M. **Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow**. Eyrolles, 1975.
- [24] Jaric, J. P. "On a Transport Theorem for Moving Interface". **International Journal of Engineering Science**, Vol.30, No.10, pp.1535-1542, (1992).
- [25] Jaumann, G. **Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem Modernen Standpunkte Aus**. Leipzig, 1905.
- [26] Joseph, D. D. **Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids**. Springer-Verlag, 1990.
- [27] Lai, W. M.; Rubin, D.; Krempl, E. **Introduction to Continuum Mechanics**, Revised Edition in SI/ Metric Units. Pergamon Press, 1974/1978. Third Edition, 1993/1996. Butterworth-Heinemann (Elsevier), 1999. Fourth Edition, 2010.
- [28] León L., J. **Mecánica**. Editorial Limusa, 1979. Segunda Edición, 1984.
- [29] Levi-Civita, T. **The Absolute Differential Calculus**, Calculus of Tensors. Dover Publications, 1977.
- [30] Malvern, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Prentice-Hall, 1969.
- [31] Marsden, J. E.; Tromba, A. J. **Cálculo Vectorial**, 3<sup>ra</sup> Edición. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- [32] Mase, G. E. **Theory and Problems of Continuum Mechanics**. McGraw-Hill, 1970.
- [33] Meriam, J. L. **Dinámica**. Editorial Reverté, 1990.
- [34] Oldroyd, J. G. "On the Formulation of Rheological Equations of State". **Proceeding of the Royal Society**, Vol.A200,(1950).
- [35] Petryk, H.; Mróz, Z. "Time Derivatives of Integrals and Functionals Defined on Varying Volume and Surface Domains". **Arch. Mech.**, Vol.38, No.5-6, pp.697-724, (1986).
- [36] Reynolds, O. "The Sub-Mechanics of the Universe". **Collected Papers**, Vol.3, 1903.

- [37] Saffman, P. G. **Vortex Dynamics**. Cambridge University Press, 1992. Reprint with corrections, 1995.
- [38] Serrin, J. "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.**VIII/1**, pp.125-263. Springer-Verlag, 1959.
- [39] Shames, I. H.; Cozzarelli, F. A. **Elastic and Inelastic Stress Analysis**. Prentice-Hall, 1992.
- [40] Slattery, J. C. **Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua**. McGraw-Hill, 1972.
- [41] Slattery, J. C. **Advanced Transport Phenomena**. Cambridge University Press, 1999.
- [42] Spielrein, J. **Lehrbuch de Vektorrechnung nach den Bedürfnissen in der Thechnischen Mechanik und Elektrizitätslehre**. Stuttgart, 1916.
- [43] Temam, R.; Miranville, A. **Mathematical Modeling in Continuum Mechanics**. Cambridge University Press, 2001.
- [44] Truesdell, C. A. **The Elements of Continuum Mechanics**. Springer-Verlag, 1966.
- [45] Truesdell, C. A. **A First Course in Rational Continuum Mechanics**. Vol.1: "General Concepts". Academic Press, 1977.
- [46] Truesdell, C. A.; Toupin, R. A. "The Classical Field Theories". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.**III/1**, pp.226-793. Springer-Verlag, 1960.
- [47] White, F. M. **Viscous Fluid Flow**. McGraw-Hill, 1974.



# CAPITULO II

## ANALISIS DE ESFUERZOS

### CONTENIDO

1. TRACCION Y ESFUERZO.	68
1.1. Vector Tracción.	68
1.2. Tensor de Esfuerzos y Componentes.	69
1.3. Simetría del Tensor de Esfuerzo.	70
1.4. Indiferencia Respecto al Sistema de Coordenadas.	71
2. ESTADO DE ESFUERZO.	71
2.1. Estado de Esfuerzo en un Punto.	72
2.2. Tensores Esférico y Desviador.	72
2.3. Descomposición Espectral.	72
2.4. Esfuerzos Cortantes Máximos.	73
2.5. Esfuerzo Cortante Octaedral.	74
2.6. Círculos de Mohr.	74
2.7. Tensor de Esfuerzo de Piola-Kirchhoff.	75
3. CRITERIOS DE FALLA.	76
3.1. Criterio de Falla de Rankine.	76
3.2. Criterio de Falla de Saint-Venant.	77
3.3. Criterio de Falla de Tresca-Coulomb.	77
3.4. Criterio de Falla de Beltrami.	78
3.5. Criterio de Falla de Von Mises.	78
4. TENSION SUPERFICIAL.	79
4.1. Tensión Superficial Homogénea.	79
4.2. Tensión Superficial Isótropa.	80
4.3. Tensor de Tensión Superficial.	80
4.4. Líneas y Puntos de Tensión.	80
4.5. Angulo de Contacto.	81
BIBLIOGRAFIA.	82

## 1. TRACCION Y ESFUERZO

El *vector tracción* se define como aquella fuerza por unidad de área que se origina en el seno de un cuerpo como una reacción interna, siendo esta fuerza una fuerza de contacto. Un caso límite es cuando dicha reacción interna se tiene para la frontera del cuerpo. El vector tracción, por su propia definición depende de la posición de un punto en el cuerpo y de la orientación de la normal a la superficie sobre la cual se ha calculado. Toda esta definición tiene una connotación instantánea, por lo que se va a eliminar el tiempo del argumento de las funciones para simplificar la notación, sin embargo, la dependencia está implícita en todas y cada una de dichas funciones.

El *vector esfuerzo* es aquel vector de tracción definido para una superficie cuya normal es una de la base del sistema de coordenadas empleado. En este sentido el vector esfuerzo es un caso particular del vector tracción. Se verá a continuación como se relacionan los vectores tracción y el vector esfuerzo con los tensores de deformación.

### 1.1. VECTOR TRACCION

Sea  $\mathcal{B}$  un cuerpo ocupando una región orientada del espacio  $\mathcal{V}$  y la frontera  $\partial\mathcal{B}$  ocupando la región  $\mathcal{A}$ , la cual es la frontera de  $\mathcal{A}$ . Sea  $\pi$  un plano que corta al cuerpo en dos porciones denotadas  $\mathcal{B}^+$  y  $\mathcal{B}^-$  que ocupan las regiones  $\mathcal{V}^+$  y  $\mathcal{V}^-$ , respectivamente. El plano  $\pi$  define una región plana  $\mathcal{A}_\pi$  dentro de la región  $\mathcal{V}$ . Sea el punto  $X$  un punto del cuerpo ocupando la posición  $\mathbf{x}$  sobre el plano  $\mathcal{A}_\pi$ . Centrado en este punto y sobre  $\mathcal{A}_\pi$  sea un círculo  $\sigma$  de radio  $\epsilon$ . La suma de las fuerzas o reacciones internas de la porción  $\mathcal{B}^+$  sobre la porción  $\mathcal{B}^-$ , en el círculo  $\sigma$  de área  $\mathcal{A}_\sigma$ , se denotarán  $\mathbf{F}_\sigma$ . Haciendo uso del límite, el vector tracción, o simplemente la tracción como se designa más simplificadaamente, se define como

$$\mathbf{t}_{\mathcal{A}_\sigma} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_\sigma}{\mathcal{A}_\sigma} \equiv \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal a  $\mathcal{A}_\pi$ , o más específicamente a  $\mathcal{A}_\sigma$ , en la dirección de la parte exterior de  $\mathcal{V}^-$  ( $\mathcal{A}_\sigma$  se ha supuesto orientada de acuerdo a la normal  $\mathbf{n}$ ). Esta definición se puede extender a una superficie no plana  $\mathcal{A}_\pi$  que pase por el punto ubicado en  $\mathbf{x}$ , puesto que en el límite, la superficie curva y la superficie plana coinciden entre sí.

El resultado (1) se conoce como el *postulado de Cauchy* [Truesdell,1977] y cuando se aplica a las fuerzas de contacto por unidad de área  $\mathbf{t}_\mathcal{A}$  en la frontera  $\mathcal{A}$  de la región  $\mathcal{V}$  se enuncia como

$$\mathbf{t}_\mathcal{A} \equiv \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal unitaria sobre la superficie orientada  $\mathcal{A}$  y exterior a la región  $\mathcal{V}$ .

Si se hace el mismo análisis hecho antes sobre el círculo  $\sigma$ , pero con la suma de las fuerzas o reacciones internas de la porción  $\mathcal{B}^-$  sobre la porción  $\mathcal{B}^+$ , el resultado es el mismo pero ahora el vector normal  $\mathbf{n}$  apunta hacia la parte exterior  $\mathcal{V}^+$ . Por la Ley de Acción y Reacción estas fuerzas son opuestas a las fuerzas del análisis anterior, por lo cual se tiene que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la misma que la definida en (1). El resultado (2) se conoce como el *lemma fundamental de Cauchy* [Truesdell,1977], y se asume como un corolario del Teorema de Acción y Reacción [Noll,1959].

Sea el sistema de coordenadas  $ox_1x_2x_3$  curvilíneas con una base covariante  $\{\mathbf{a}_i\}$  y una base contravariante  $\{\mathbf{a}^i\}$ , los vectores de esfuerzos  $\mathbf{t}_i$  y  $\mathbf{t}^i$  se definen como

$$\mathbf{t}_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) \quad \mathbf{t}^i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{a}^i) \quad (3)$$

De esta forma el vector de tracción se puede expresar en función de los vectores de esfuerzo mediante el teorema fundamental de Cauchy [Truesdell,1977], el cual se enunciará a continuación en la próxima sección.



## 1.2. TENSOR DE ESFUERZOS Y COMPONENTES

**Teorema.** (Teorema Fundamental de Cauchy). Si  $\mathbf{t}(\cdot, \mathbf{n})$  es una función continua de  $\mathbf{x}$ , entonces existe un campo tensorial  $\mathbf{T}(\cdot)$  denominado el *tensor de esfuerzo*, tal que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

Este Teorema permite escribir

$$\mathbf{t} = n^i \mathbf{t}_i = n_i \mathbf{t}^i \quad \mathbf{n} = n^i \mathbf{a}_i = n_i \mathbf{a}^i \quad (2)$$

donde  $n^i$  y  $n_i$  son las componentes contravariantes o covariantes del vector normal unitario  $\mathbf{n}$ , en el sistema de coordenadas curvinéas  $ox_1x_2x_3$ . Las componentes de los vectores de esfuerzos son en realidad las componentes (por filas cuando se disponen en un ordenamiento matricial) del tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$ . Esto es,

$$\mathbf{t}_i = T_{ij} \mathbf{a}^j = T_{i \cdot}^j \mathbf{a}_j \quad \mathbf{t}^i = T^{ij} \mathbf{a}_j = T_{\cdot j}^i \mathbf{a}^j \quad (3)$$

o recíprocamente despejando el tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{a}^i \mathbf{t}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{t}^i \quad (4)$$

como productos diádicos. Las expresiones (2) y (3) (o (4) en lugar de (3)) equivalen a la relación (1) enunciada en el Teorema Fundamental de Cauchy.

La relación (1) permite dar una interpretación a los índices de las componentes del tensor esfuerzo  $\mathbf{T}$ . De este modo los índices de las componentes del tensor de esfuerzo, por ejemplo  $T_{i \cdot}^j$ , significan que el vector tracción  $\mathbf{t}$  se calcula sobre una superficie cuya normal está en la dirección de  $\mathbf{a}_i$ , y luego se proyecta el resultado  $\mathbf{t}$  en la dirección de  $\mathbf{a}^j$  para obtener  $T_{i \cdot}^j$ . En otras palabras,  $T_{i \cdot}^j$  es la componente en la dirección  $\mathbf{a}^j$  de la fuerza  $\mathbf{t}$  sobre el elemento de superficie con normal unitaria exterior en la dirección de  $\mathbf{a}_i$ .

La demostración del Teorema Fundamental de Cauchy se basa en el uso de la definición de las componentes del vector esfuerzo según (3) y en la demostración de la expresión (2). Para hacer esto último se va a asumir válido el *principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal*: La tasa de cambio de la cantidad de movimiento lineal de un volumen materia  $\mathcal{V}_m$  es igual a la resultante de las fuerzas externas aplicadas sobre el volumen [Serrin, 1959]. Este principio expresado como una ecuación recibe el nombre de la *Primera ley del movimiento de Euler* y se escribe como

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{ext} \mathbf{F} \quad \mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} \quad \sum_{ext} \mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{g} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{t} d\mathcal{A} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{g}$  es una fuerza de volumen por unidad de masa que actúa a distancia, y  $\mathcal{A}_m$  es la frontera de  $\mathcal{V}_m$ . Aplicando el Tercer Teorema del Transporte de Reynolds I.2.2.(16), la ecuación (5) puede ser escrita en la forma

$$\int_{\mathcal{V}_m} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{g} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{t} d\mathcal{A} \quad \int_{\mathcal{V}_m} \rho (\mathbf{g} - \mathbf{a}) d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{t} d\mathcal{A} = \mathbf{0} \quad (6)$$

donde en la parte derecha se puede interpretar a la aceleración  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  como una fuerza inercial. Aquí, la integración sobre un volumen material que se mueve se puede reemplazar, sin pérdida de generalidad, por la integración sobre un volumen fijo  $\mathcal{V}$  que coincide con el volumen material  $\mathcal{V}_m$  en el instante de análisis.

De la forma (6) de la Primera Ley del Movimiento de Euler sigue un resultado de gran importancia. Sea  $l^3$  el volumen  $\mathcal{V}$  de un tetraedro centrado en  $\mathbf{x}$ , formado por los planos coordenados y un plano inclinado triangular de área  $\mathcal{A}_n$  sobre el cuadrante donde todas las coordenadas son cartesianas y positivas. El vector

unitario normal exterior al tetraedro sobre el plano inclinado es  $\mathbf{n}$  con componentes en el sistema de coordenadas de  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$ . Dividiendo la ecuación (6) por  $l^2$  para el volumen de este tetraedro, haciendo tender el volumen  $\mathcal{V}$  a cero, y notando que las integrales son acotadas, se obtiene que

$$\frac{1}{l^2} \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{t} d\mathcal{A} = \mathbf{0} \quad \frac{1}{l^2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) d\mathcal{V} = O(l^2) \quad (7)$$

Esto es, las fuerzas debidas a los esfuerzos están localmente en equilibrio. Este resultado se conoce como la *condición de equilibrio local de las tracciones*. Los vectores normales a las otras caras no inclinadas en el tetraedro son  $-\mathbf{e}_1$ ,  $-\mathbf{e}_2$  y  $-\mathbf{e}_3$ , y sus áreas son  $n_1\mathcal{A}_n$ ,  $n_2\mathcal{A}_n$  y  $n_3\mathcal{A}_n$ . Se va ahora a aplicar (7.a) al tetraedro diferencial obtenido haciendo tender  $\mathcal{A}_n \rightarrow 0$ . Puesto que  $\mathbf{t}$  es una función continua de la posición, y  $\mathcal{A}_n \sim l^2$ , se obtiene fácilmente que

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) + n_1\mathbf{t}(-\mathbf{e}_1) + n_2\mathbf{t}(-\mathbf{e}_2) + n_3\mathbf{t}(-\mathbf{e}_3) = \mathbf{0} \quad (8)$$

donde se ha usado la notación  $\mathbf{t}(\mathbf{n})$  como una abreviación de  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ . La fórmula (8) ha sido provada, por supuesto, sólomente para el caso cuando todas las componentes  $n_i$  son positivas. Para extender su validez considérese la relación 1.2.(2), con lo cual se tiene que

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = -\mathbf{t}(-\mathbf{e}_i) \quad (9)$$

Ahora aplicando el argumento del tetraedro a las otras caras del octaedro, y usando (9), se encuentra que en todos los casos

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1) + n_2\mathbf{t}(\mathbf{e}_2) + n_3\mathbf{t}(\mathbf{e}_3) = n_i\mathbf{t}(\mathbf{e}_i) = n_i\mathbf{t}_i \quad (10)$$

El vector tracción  $\mathbf{t}$  por lo tanto se expresa como una función lineal de las componente de  $\mathbf{n}$ . La expresión (10) se puede extender a otros sistemas de coordenadas curvilíneas como en (2), puesto que es una expresión vectorial y cumple con la Regla del Cociente. La expresión (2) junto con la definición (3) conduce inmediatamente a la relación (1). Esto concluye la demostración del Teorema Fundamental de Cauchy.

### 1.3. SIMETRIA DEL TENSOR DE ESFUERZO

El *principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular* es usualmente enunciado como un teorema de la dinámica Clásica de sistemas de partículas o de cuerpos rígidos. Su demostración, sin embargo, depende de ciertos axiomas relativos a la naturaleza de las fuerzas internas entre las partículas o cuerpos que componen el sistema dinámico en cuestión. La situación puede ser tratada de manera similar en la mecánica de los sistemas materiales continuos. Aquí, con la finalidad de garantizar la conservación de la cantidad de movimiento angular, es necesario hacer ciertas suposiciones concernientes a las fuerzas ejercidas a través de los elementos de superficie, o en otras palabras, concernientes al tensor de esfuerzo. Específicamente, se postulará que el tensor de esfuerzo es simétrico, es decir,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^t \quad (1)$$

Cuando están presentes pares de fuerzas distribuidos en el sistema material, por ejemplo en materiales polares, este postulado necesita modificación. Sin embargo, por ahora se excluirán estos pares de fuerza de este estudio, ya que generalmente ellos aparecen en medios polarizados, los cuales son rara vez encontrados en la mecánica de fluidos y la mecánica de sólidos (Ver [Truesdell & Toupin,1960] o [Aris,1962]). Como un teorema, la ecuación (1) es debida a Cauchy; el que también pueda igualmente servir como un axioma fue primeramente reconocido por Boltzmann [Serrin,1959], aunque existen quienes le confieren este reconocimiento a Poisson [Truesdell,1960]. Como una consecuencia de (1) se cumple el siguiente resultado.

**Teorema 1.** (Conservación de la Cantidad de Movimiento Angular). Para un sistema material continuo  $\mathcal{V}_m$  satisfaciendo la Ecuación de Continuidad 1.2.2.(13), la Primera Ley del Movimiento de Euler 1.2.(6.a), junto con la relación 1.2.(1), y el postulado de Boltzmann (1), se tiene

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \sum_{ext} \mathbf{M} \quad \mathbf{h} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} d\mathcal{V} \quad \sum_{ext} \mathbf{M} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\mathcal{A} \quad (2)$$

expresión conocida como la *Segunda Ley del Movimiento de Euler*.

Demostración. Aplicando el Tercer Teorema del Transporte de Reynolds I.2.2.(16) y el Teorema de la Divergencia A.2.5.(19) a 1.2.(6.a) con 1.2.(1) substituida, considerando la relación A.2.5.(90), es relativamente sencillo mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{a} d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{T}_x d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (3)$$

Aquí  $\mathbf{T}_x$  es el vector axial del tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$ , con sus componentes definidas como  $(\mathbf{T}_x)^i = \varepsilon^{ijk} T_{jk}$ . En virtud de (1) y A.1.7.(29), se tiene que  $\mathbf{T}_x = \mathbf{0}$  y la ecuación (2) es provada. Inversamente, si se tiene que se cumple la ecuación (2) para un volumen material arbitrario  $\mathcal{V}_m$ , entonces  $\mathbf{T}$  debe ser simétrico.  $\triangle$

La demostración hecha antes junto con algunas consideraciones adicionales se podrá estudiar con más detalle en la Sección III.3.2.

**Teorema 2.** (Teorema de Reciprocidad de Cauchy). En la Segunda Ley del Movimiento de Euler, la simetría del tensor de esfuerzo es equivalente a la condición de que cada uno de dos vectores de tracción en un punto tiene igual proyección sobre la normal a la superficie en la cual el otro actúa.

Demostración. Considerando que existen dos vectores normales unitarios  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{n}'$  en un punto de análisis, entonces

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}') = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}' \quad (4)$$

lo que concluye la demostración.  $\triangle$

#### 1.4. INDIFERENCIA RESPECTO AL SISTEMA DE COORDENADAS

Las relaciones 1.2.(1) y 1.3.(1), fundamentales para el desarrollo de los principios de conservación y la mecánica de los sistemas materiales continuos, por ser expresiones tensoriales, no dependen de ningún sistema de coordenadas en particular. De manera similar las Leyes del movimiento de Euler 1.2.(5) y 1.3.(2) necesarias para deducir 1.2.(1) y 1.3.(1), respectivamente, son igualmente indiferentes a un cambio en el sistema de coordenadas empleado para expresar sus componentes. En cualquier sistema de coordenadas, sea cartesiano o curvilíneo las expresiones mencionadas siempre tendrán la misma forma, con cantidades vectoriales y tensoriales que tendrán el mismo significado en cada uno de estos sistemas de coordenadas. O sea, que serán las mismas entidades vectoriales y tensoriales, con distintas componentes para cada sistema de coordenadas en particular.

Las cuatro expresiones mencionadas en esta sección forman la base teórica fundamental para el desarrollo de los próximos tres capítulos, por lo que su entendimiento claro y profundo en este primer capítulo se ha hecho necesaria. Más adelante se verán aplicadas estas expresiones con enfoques distintos pero su significado fundamental estará latente en cada uno de estos enfoques analizados.

## 2. ESTADO DE ESFUERZO

En esta sección se seguirá la misma secuencia de ideas que se siguió en la Sección 3.3 para las deformaciones. En esta oportunidad se hará el análisis para el tensor de esfuerzo. Las ideas antes mencionadas se basan en el hecho de que los tensores de esfuerzo definidos para un punto de un sistema material, posee la información necesaria para calcular el vector de tracción (fuerza de contacto) si se conoce la normal unitaria  $\mathbf{n}$  de la superficie sobre la cual se desea conocer estas cantidades. De esta forma, para el caso de los esfuerzos se tiene que el vector de tracción  $\mathbf{t}$  viene dado en función del tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$  como

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad (1)$$

Este vector de tracción no necesariamente posee la misma dirección que la normal, por lo que se pueden distinguir dos componentes, una de extensión, en la dirección de la normal  $\mathbf{n}$ , y otra de corte, tangente a la superficie, las cuales se describirán a continuación.

### 2.1. ESTADO DE ESFUERZO EN UN PUNTO

El vector de esfuerzo  $\mathbf{t}$  obtenido por (1) posee una componente de extensión  $N$  en la misma dirección que la normal  $\mathbf{n}$  del plano de análisis. También posee una componente de corte  $T > 0$  en la dirección de la proyección de  $\mathbf{t}$  sobre el mismo plano. El plano de estudio es aquel que contiene el punto donde se ha definido el estado de esfuerzo mediante el tensor esfuerzo  $\mathbf{T}$ , y al mismo tiempo es tangente a la superficie de análisis. Este plano, si se considera el límite para una región muy cercana al punto de análisis, coincide con la superficie en el punto.

Las componentes de extensión y de corte del vector esfuerzo se definen como

$$\mathbf{t} = N\mathbf{n} + T\boldsymbol{\lambda} \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \quad (1)$$

donde

$$N = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \quad T = \|\mathbf{t} - N\mathbf{n}\| = \sqrt{\|\mathbf{t}\|^2 - N^2} \quad (2)$$

y donde  $\boldsymbol{\lambda}$  es el vector tangente unitario en la dirección de la proyección de  $\mathbf{t}$  sobre el plano cuya normal es  $\mathbf{n}$ .

La interpretación física de estas componentes es sencilla. La componente  $N$  representa la fuerza por unidad de área que actúa en la dirección normal a la superficie. La componente  $T$  representa la fuerza cortante por unidad de área que actúa sobre la misma superficie en la dirección de  $\boldsymbol{\lambda}$ .

### 2.2. TENSORES ESFERICO Y DESVIADOR

El tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$  se puede descomponer en su parte isotrópica o esférica  $\mathbf{T}^\circ$  y su parte desviatoria  $\mathbf{T}'$  en la forma

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^\circ + \mathbf{T}' \quad \mathbf{T}^\circ = \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{T})\mathbf{I} = \frac{\Upsilon}{3}\mathbf{I} \quad \mathbf{T}' = \mathbf{T} - \mathbf{T}^\circ \quad (1)$$

De manera que

$$\text{tr}\mathbf{T}' = \text{tr}\mathbf{T} - \text{tr}\mathbf{T}^\circ = 0 \quad (2)$$

A veces es recomendable denotar  $\sigma_m = \Upsilon/3$  para simplificar algunas expresiones que se obtendrán más adelante. El cantidad  $\sigma_m$  es un valor promedio de los esfuerzos principales como se verá en la próxima sección, de allí el uso del subíndice  $m$ .

### 2.3. DESCOMPOSICION ESPECTRAL

Las *esfuerzos principales* se obtienen cuando se hace la descomposición espectral (Teorema de Cayley-Hamilton) del tensor de esfuerzo como

$$\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \sigma_\alpha\hat{\mathbf{e}}_\alpha\hat{\mathbf{e}}_\alpha \quad (\alpha \text{ si suma}) \quad (1)$$

donde los valores  $\sigma_\alpha$  son los autovalores y  $\hat{\mathbf{e}}_\alpha$  los autovectores normalizados del tensor  $\mathbf{T}$  simétrico y se pueden obtener mediante la resolución de la ecuación característica

$$|\mathbf{T} - \sigma\mathbf{I}| = -\sigma^3 + \mathbf{I}_T\sigma^2 - \mathbf{II}_T\sigma + \mathbf{III}_T = 0 \quad \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\alpha = \sigma \hat{\mathbf{e}}_\alpha \quad (2)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_T &= \text{tr}\mathbf{T} = \frac{1}{1!} \delta_a^i T_{ia} = T_{ii} = \Upsilon \\ \mathbf{II}_T &= \frac{1}{2} [(\text{tr}\mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)] = \frac{1}{2!} \delta_{ab}^{ij} T_{ia}T_{jb} = T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32} + T_{33}T_{11} - T_{31}T_{13} + T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} \\ \mathbf{III}_T &= \frac{1}{6} [2\text{tr}\mathbf{T}^3 - 3(\text{tr}\mathbf{T}^2)(\text{tr}\mathbf{T}) + (\text{tr}\mathbf{T})^3] = |\mathbf{T}| = \frac{1}{3!} \delta_{abc}^{ijk} T_{ia}T_{jb}T_{kc} = \epsilon_{ijk} T_{i1}T_{j2}T_{k3} \end{aligned} \quad (3)$$

los invariantes principales del tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$ . Un cálculo simple da que los invariantes principales se pueden expresar en función de los autovalores  $\sigma_\alpha$  como

$$\begin{aligned} \text{I}_{\mathbf{T}} &= \text{tr} \mathbf{T} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \text{II}_{\mathbf{T}} &= \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)] = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 \\ \text{III}_{\mathbf{T}} &= \frac{1}{6} [2 \text{tr} \mathbf{T}^3 - 3(\text{tr} \mathbf{T}^2)(\text{tr} \mathbf{T}) + (\text{tr} \mathbf{T})^3] = |\mathbf{T}| = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Un análisis similar hecho para el tensor de esfuerzo desviador  $\mathbf{T}'$  da como resultado relaciones entre los invariantes de este tensor y los invariantes (4). De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{I}_{\mathbf{T}'} &= \text{tr}(\mathbf{T}') = 0 \\ \text{II}_{\mathbf{T}'} &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{T}')^2 = -\frac{1}{3} (\text{I}_{\mathbf{T}}^2 - 3 \text{II}_{\mathbf{T}}) \\ \text{III}_{\mathbf{T}'} &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T}')^3 = \frac{1}{27} (2 \text{I}_{\mathbf{T}}^3 - 9 \text{I}_{\mathbf{T}} \text{II}_{\mathbf{T}} + 27 \text{III}_{\mathbf{T}}) \end{aligned} \quad (5)$$

En la Sección A.1.7.11 se pueden revisar los conceptos dados aquí, de manera más formal.

## 2.4. ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS

Para esta sección y la siguiente se va a emplear, para expresar las componentes de los vectores y tensores, el sistema de coordenadas principal formado por los ejes principales 0123. Al aplicar las expresiones 2.1.(1) y 2.1.(2) a este caso particular, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \|\mathbf{n}\|^2 &= n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} &= n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2 + n_3^2 \sigma_3 = \text{N} \\ \|\mathbf{t}\|^2 &= n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2 + n_3^2 \sigma_3^2 = \text{N}^2 + \text{T}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Eliminando  $n_3$  de estas ecuaciones, empleando para ello la primera, quedan dos ecuaciones con  $n_1$  y  $n_2$  como incógnitas. Derivando las ecuaciones resultantes con respecto a las incógnitas e igualándolas a cero con la finalidad de calcular la condición del máximo-mínimo, se obtiene

$$\begin{aligned} n_1 [(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)] &= 0 \\ n_2 [(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)] &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Una solución trivial de este sistema es  $n_1 = n_2 = 0$  y  $n_3 = \pm 1$ . Esta solución da un valor mínimo para  $\text{T}$ . Otra solución es obtenida si se toma  $n_1 = 0$  pero  $n_2$  no es nulo. Entonces, de la segunda ecuación resulta que  $n_2 = \pm \sqrt{2}/2$ , con lo cual se encuentra también que  $n_3 = \pm \sqrt{2}/2$ . Esta solución sí da un valor máximo para  $\text{T}$ . Permutando las soluciones propuestas antes en los valores de  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  se encuentran todas las posibles soluciones. Todas las soluciones no triviales que ofrecen un máximo dan que  $\mathbf{n}$  define un plano que es paralelo a un eje coordenado y forma un ángulo de  $45^\circ$  con respecto a los otros dos. Sin pérdida de generalidad, considérese los autovalores del tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$  ordenados de manera creciente  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ . De esta forma las soluciones antes planteadas para  $\mathbf{n}$ , substituidas en (1), nos dan los valores de las componentes  $\text{N}$  y  $\text{T}$  para las condiciones de esfuerzos cortantes máximos. Estas son

$$\begin{aligned} \text{N}_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1) & \text{T}_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \\ \text{N}_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_2) & \text{T}_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_2) \\ \text{N}_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) & \text{T}_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) \end{aligned} \quad (3)$$

Cada par de valores de  $\text{N}_i$  y  $\text{T}_i$ , corresponde a cada una de las soluciones obtenidas para  $\mathbf{n}$ , permutando la segunda solución no trivial.

## 2.5. ESFUERZO CORTANTE OCTAEDRAL

Sea aquel plano que intersectado con los planos coordenados define los lados de un triángulo equilátero. Todos los posibles triángulo de longitud normalizada son ocho y forman un octaedro, con todas las caras triangulares que tiene en cada cuadrante del sistema de coordenadas principal. De manera que un plano octaedral es aquel cuya normal  $\mathbf{n}$  tiene como componentes

$$|n_1| = |n_2| = |n_3| = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

Para estos planos octaedrales, la componente  $\mathbf{T}$  se puede obtener de las ecuaciones 2.4.(1), resultando

$$\begin{aligned} T_{\triangleright}^2 &= \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2] = \frac{2}{9} (\mathbf{I}_{\mathbf{T}}^2 - 3 \mathbf{I}_{\mathbf{T}}) = -\frac{2}{3} \mathbf{I}_{\mathbf{T}}' \\ &= \frac{1}{9} [(T_{11} - T_{22})^2 + (T_{22} - T_{33})^2 + (T_{33} - T_{11})^2 + 6(T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{31}^2)] \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$$\sigma_m = N_{\triangleright} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T} \quad (3)$$

Esta definición del esfuerzo cortante en el plano octaedral se empleará más adelante para formular el Criterio de Falla de Von Mises.

## 2.6. CIRCULOS DE MOHR

El sistema de ecuaciones 2.4.(1) en las variables  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  se puede resolver obteniéndose el siguiente resultado

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{T^2 + (N - \sigma_2)(N - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \\ n_2^2 &= -\frac{T^2 + (N - \sigma_1)(N - \sigma_3)}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 &= \frac{T^2 + (N - \sigma_1)(N - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{aligned} \quad (1)$$

Sin pérdida de generalidad se pueden asignar los autovalores del tensor de esfuerzo de manera que  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ . De (1) se observa que todos los resultados de  $n_i^2$  deben ser positivos. Como todos los denominadores son positivos, entonces todos los numeradores también deben serlos, excepto el segundo por el símbolo negativo que antecede a la fracción. De esta forma se obtienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} T^2 + (N - \sigma_2)(N - \sigma_3) &\geq 0 \\ T^2 + (N - \sigma_1)(N - \sigma_3) &\leq 0 \\ T^2 + (N - \sigma_1)(N - \sigma_2) &\geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Estas expresiones se pueden también colocar en función de los esfuerzos normales  $N_i$  y cortantes  $T_i$  para la condición de esfuerzos cortantes máximos 2.4.(3). Así resulta

$$\begin{aligned} T^2 + (N - N_2)^2 &\geq T_2^2 \\ T^2 + (N - N_3)^2 &\leq T_3^2 \\ T^2 + (N - N_1)^2 &\geq T_1^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Las últimas desigualdades encontradas representan la parte interior o exterior de tres círculos centrados en  $N_i$  y con un radio igual a  $T_i$ . Estos círculos se denominan los *círculos de Mohr*. En realidad estos lugares geométricos son semicírculos debido a que  $T$  siempre es positivo por la condición 2.1.(2.c). Designemos con el índice  $i$  el número del círculo de Mohr correspondiente. La primera desigualdad de (3) representa la parte exterior del círculo 1. La segunda desigualdad de (3) representa la parte interior del círculo 3. La tercera desigualdad de (3) representa la parte exterior del círculo 1. La intersección de estas tres regiones resulta en la región de estados de esfuerzos normal  $N$  y cortante  $T$  factibles, para un estado de esfuerzo dado en un punto mediante el tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$  y la normal unitaria a la superficie  $\mathbf{n}$ . Las expresiones 2.1.(2) y 2.1.(3) permiten definir el estado de esfuerzo en un punto completamente.

## 2.7. TENSOR DE ESFUERZO DE PIOLA-KIRCHHOFF

La expresión A.2.4.(10), para el cambio de variables en una integral de superficie, se puede aplicar al caso de la integral del vector de tracción  $\mathbf{t}$  en la forma

$$\oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\mathcal{A} = \oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) d\mathcal{A} = \oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{T}^t(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \oint_{\mathcal{A}_o} \mathbf{T}^t[\mathbf{x}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{IF} \cdot \mathbf{n}_o d\mathcal{A}_o = \oint_{\mathcal{A}_o} \mathbf{n}_o \cdot \mathbf{IF}^t \cdot \mathbf{T}[\mathbf{x}(\mathbf{X})] d\mathcal{A}_o \quad (1)$$

donde

$$\mathbf{n} d\mathcal{A} = \mathbf{IF} \cdot \mathbf{n}_o d\mathcal{A}_o \quad \mathbf{IF} = |\mathbf{F}| \mathbf{F}^{-t} \quad \mathbf{F} = [\tilde{\nabla} \mathbf{x}(t, \mathbf{X})]^t \quad (2)$$

y donde  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{n}_o$  son, respectivamente, los vectores unitarios normales sobre las superficies  $\mathcal{A}_m$  en la configuración actual y  $\mathcal{A}_o$  en la configuración de referencia. De esta forma, si se define el tensor

$$\mathbf{S} = \mathbf{IF}^t \cdot \tilde{\mathbf{T}} \quad \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}[\mathbf{x}(\mathbf{X})] \quad (3)$$

entonces

$$\oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} d\mathcal{A} = \oint_{\mathcal{A}_o} \mathbf{n}_o \cdot \mathbf{S} d\mathcal{A}_o \quad (4)$$

donde  $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{X})$  es la descripción material del tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ . Nótese que el tiempo se ha suprimido de todas las ecuaciones solamente para simplificar la notación, pero todas las expresiones expuestas son válidas para cada instante durante el movimiento del sistema material.

Al tensor  $\mathbf{S}(\mathbf{X})$  definido por (3) se le designa como el *tensor de Piola-Kirchhoff*. En la literatura a veces es referido como el Primer Tensor de Piola-Kirchhoff [Gurtin,1981]. Por (4), el producto

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_o \cdot \mathbf{S} \quad (5)$$

es el vector tracción en la configuración de referencia. Si se hubiese empleado cualquier otra configuración de referencia, como por ejemplo la inicial, el resultado hubiese sido similar.

Procediendo de manera semejante con las fuerzas de volumen correspondientes al movimiento estudiado y aplicando la Fórmula de expansión de Euler

$$\rho_o = J \rho \quad \mathcal{V}_m = J \mathcal{V}_o \quad J = |\mathbf{F}| \quad (6)$$

entonces

$$\int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{g} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_o} \rho \tilde{\mathbf{g}} J d\mathcal{V}_o = \int_{\mathcal{V}_o} \rho_o \tilde{\mathbf{g}} d\mathcal{V}_o \quad (7)$$

donde  $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{X})$  es la descripción material de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ . Se denominará a  $\tilde{\mathbf{g}}$  como la *fuerza de volumen en la configuración de referencia* y representa la fuerza de volumen por unidad de masa en la configuración de referencia.

**Proposición 1.** El esfuerzo de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  satisface las ecuaciones de conservación integrales

$$\int_{\mathcal{V}_o} \rho_o \tilde{\mathbf{a}} d\mathcal{V}_o = \int_{\mathcal{V}_o} \rho_o \tilde{\mathbf{g}} d\mathcal{V}_o + \oint_{\mathcal{A}_o} \mathbf{n}_o \cdot \mathbf{S} d\mathcal{A}_o \quad (8.a)$$

$$\int_{\mathcal{V}_o} \rho_o \tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{a}} d\mathcal{V}_o = \int_{\mathcal{V}_o} \rho_o \tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{g}} d\mathcal{V}_o + \oint_{\mathcal{A}_o} \tilde{\mathbf{r}} \times (\mathbf{n}_o \cdot \mathbf{S}) d\mathcal{A}_o \quad (8.b)$$

para cada parte de  $\mathcal{V}_o$ .

**Demostración.** Aplicando (6) al miembro de la izquierda de la Primera Ley del Movimiento de Euler 1.2.(6.a), se obtiene el miembro de la izquierda de (8.a). El miembro de la derecha de (8.a) se obtiene de 1.2.(6.a) substituyendo los resultados parciales (4) y (7). La ecuación (8.b) se obtiene mediante un procedimiento similar aplicado a la Segunda Ley del Movimiento de Euler 1.3.(3), con la diferencia de que se escoge  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{X}$  en lugar de  $\mathbf{r}$  como el brazo de palanca para calcular los momentos de los vectores correspondientes.  $\triangle$

**Proposición 2.** El esfuerzo de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  satisface las ecuaciones de conservación diferenciales

$$\rho_o \tilde{\mathbf{a}} = \rho_o \tilde{\mathbf{g}} + \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S} \quad (9.a)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{F}^t \quad (9.b)$$

**Demostración.** De (8.a) y aplicando el Teorema de la Divergencia, resulta

$$\oint_{\mathcal{V}_o} (\rho_o \tilde{\mathbf{a}} - \rho_o \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S}) d\mathcal{V}_o = 0 \quad \rho_o \tilde{\mathbf{a}} - \rho_o \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (10)$$

Como esta relación debe ser satisfecha para cada porción de  $\mathcal{V}_o$ , entonces (9.a) debe cumplirse. De la simetría del tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$  y considerando (2) y (3), se obtiene (9.b). Es importante mencionar que por (9.b) el tensor de Piola-Kirchhoff no necesariamente es simétrico, aunque  $\mathbf{T}$  si lo sea.  $\triangle$

Todos los desarrollos hechos en las secciones anteriores, y las subsiguientes de este capítulo, para el tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$ , pueden extenderse también para el tensor de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ , sin más aclaratoria que cambiar la letra “te” por la letra “ese” (*Upsilon* se cambia por *theta*, N se cambia por  $\eta$  y T se cambia por  $\tau$ ), y teniendo en consideración que  $\mathbf{S}$  posee una descripción material, al contrario que  $\mathbf{T}$ , el cual posee una descripción espacial.

### 3. CRITERIOS DE FALLA

Los *criterios de falla* son aquellos que permiten definir las condiciones límites de esfuerzo a partir de las cuales el comportamiento del sólido deja de ser elástico y se convierte en plástico. Todos los criterios de falla se basan en comparar la situación particular de esfuerzo-deformación en un material, con la condición de fluencia en un ensayo de tracción (o compresión) simple (uniaxial) sobre una probeta del mismo material. La cantidad a comparar en una u otra situación debe ser la misma, y calculada de la misma forma.

Numerosos criterios han sido propuestos para determinar la fluencia en sólidos, yendo tan lejos atrás como Coulomb en 1773. Muchos de estos criterios fueron originalmente sugeridos como criterio para un material frágil y fueron posteriormente adoptados como criterio de falla para materiales dúctiles. Algunos de los criterios de falla más comunes serán discutidos brevemente a continuación. Aunque algunos de estos criterios no están más en uso, son discutidos aquí tanto por su interés histórico como para dar al lector las bases de razonamiento empleado para promulgar un criterio de falla.

#### 3.1. CRITERIO DE FALLA DE RANKINE

El criterio de falla de Rankine o la teoría del máximo esfuerzo axial, asume que la fluencia ocurre cuando el valor de uno de los esfuerzos principales iguala a la misma cantidad en un ensayo de tracción (o compresión) simple. Así si  $\sigma_3$  es el máximo esfuerzo principal (positivo) y  $\sigma_1$  es el mínimo esfuerzo principal (negativo), la fluencia ocurrirá en tracción cuando  $\sigma_3 = \sigma_{0,t}$ , y ocurrirá en compresión cuando  $\sigma_1 = \sigma_{0,c}$ .



Para un material el mismo límite de fluencia en tracción y en compresión  $\sigma_0$  (en valor absoluto), este criterio se convierte en

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |\sigma_i| = \sigma_0 \quad (1)$$

Este criterio de máximo esfuerzo muestra una pobre correlación con experimentos donde existe un estado combinado de esfuerzo [Mendelson,1968,§.6], y rara vez es usado como criterio de falla de materiales frágiles sometidos a una carga predominantemente uniaxial.

### 3.2. CRITERIO DE FALLA DE SAINT-VENANT

El criterio de falla de Saint-Venant o teoría de la máxima deformación, asume que la fluencia ocurre cuando el valor de una de las deformaciones principales iguala a la misma cantidad en un ensayo de tracción (o compresión) simple,  $\epsilon_0 = \sigma_0/E$ . Así si  $\sigma_1$  es la deformación más grande en valor absoluto, la fluencia ocurre cuando

$$|\epsilon_1| = \frac{1}{E} |\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)| = \frac{\sigma_0}{E} \quad (1)$$

Equivalentemente, se obtiene lo mismo para las otras dos deformaciones principales, en caso de que sean las más grandes en valor absoluto

$$|\epsilon_2| = \frac{1}{E} |\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)| = \frac{\sigma_0}{E} \quad (2)$$

$$|\epsilon_3| = \frac{1}{E} |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)| = \frac{\sigma_0}{E} \quad (3)$$

Aquí se ha supuesto que el límite de fluencia es el mismo para un ensayo de tracción y un ensayo de compresión simples. También se ha empleado la relación constitutiva XI.1.1.(2.b).

Esta teoría también no concuerda bien con la mayoría de los experimentos. Ella ha sido, sin embargo, usada para el diseño de armas, puesto que los resultados de algunos experimentos con cilindros de paredes gruesas están de acuerdo con esta teoría [Mendelson,1968,§.6;Marin,1962,p.117].

### 3.3. CRITERIO DE FALLA DE TRESCA-COULOMB

El criterio de falla de Tresca (algunas veces llamada la teoría de Coulomb) o teoría del esfuerzo cortante máximo asume que la fluencia ocurre cuando el esfuerzo cortante máximo alcanza el esfuerzo cortante máximo presente en un ensayo de tracción (o compresión) simple. El esfuerzo cortante máximo se puede obtener de la relación 2.4.(3) aplicada al tensor  $\mathbf{S}$ , y es igual a un medio de la diferencia entre el máximo y el mínimo esfuerzo principal. Para un ensayo de tracción simple, por lo tanto, ya que  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , el esfuerzo cortante máximo en la fluencia es  $\frac{1}{2}\sigma_0$ . El criterio de Tresca-Coulomb entonces afirma que la fluencia ocurre cuando una de las tres siguientes condiciones se alcanza

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{\sigma_0}{2} \\ \tau_2 &= \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| = \frac{\sigma_0}{2} \\ \tau_3 &= \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| = \frac{\sigma_0}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

Cuando los esfuerzos principales están ordenados solamente hay que emplear la tercera expresión.

El criterio de Tresca-Coulomb concuerda con los experimentos de una forma conservadora y los cálculos involucrados para su aplicación son relativamente simples. Por estas razones su uso dentro de la ingeniería se ha hecho bastante extendido. Sin embargo, el criterio sufre de una dificultad, es necesario conocer anticipadamente cuales son los esfuerzos principales máximo y mínimo.

Para el caso de esfuerzo cortante puro (con esfuerzos principales ordenados)

$$\tau_{max} = \sigma_3 = -\sigma_1 \quad \sigma_2 = 0 \quad (2)$$

El criterio de Tresca-Coulomb predice que la fluencia ocurre cuando

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) = \frac{\sigma_0}{2} \quad (3)$$

Esto es, el esfuerzo cortante de fluencia en corte puro es la mitad del esfuerzo axial en el caso de la tracción simple.

### 3.4. CRITERIO DE FALLA DE BELTRAMI

El criterio de falla de Beltrami, también conocido como la teoría de la máxima energía de deformación, asume que la fluencia ocurre cuando la energía total de deformación por unidad de volumen iguala la misma energía presente en la fluencia uniaxial a tracción o compresión. La energía total de deformación durante la fluencia en un ensayo de tracción simple es

$$\mathcal{U}_0 = \frac{1}{2}\sigma_0\epsilon_0 = \frac{1}{2E}\sigma_0^2 \quad (1)$$

y la energía total de deformación  $\mathcal{U}$  de un estado cualquiera de esfuerzos  $\mathbf{S}$  y deformación  $\mathbf{E}$  viene dada por

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\mathbf{S} : \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\sigma_1\epsilon_1 + \sigma_2\epsilon_2 + \sigma_3\epsilon_3) = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (2)$$

El criterio de fluencia de Beltrami predice que existe fluencia cuando

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_0^2 \quad (3)$$

Esta es la ecuación de un elipsoide en el espacio  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Es aparente de (2) que la fluencia puede ocurrir bajo una presión hidrostática  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  lo suficientemente alta, lo cual, como ya ha sido mostrado es contrario a los resultados experimentales. Esto también es aparente del hecho de que sólo la energía de distorsión (parte desviatoria de la energía de deformación total) es la que puede contribuir a la fluencia. Es por lo tanto que esta teoría de falla ha sido superada por la teoría de von Mises descrita a continuación.

### 3.5. CRITERIO DE FALLA DE VON MISES

La teoría de la energía de distorsión (también asociada a Hencky) asume que la fluencia comienza cuando la energía de distorsión iguala la energía de distorsión en la fluencia durante el ensayo de tracción simple. Así, empleando la descomposición de los tensores en su parte esférica y desviatoria se obtiene que la energía de deformación total se puede también descomponer como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\mathbf{S} : \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{S}^\circ + \mathbf{S}') : (\mathbf{E}^\circ + \mathbf{E}') = \frac{1}{2}\mathbf{S}^\circ : \mathbf{E}^\circ + \frac{1}{2}\mathbf{S}' : \mathbf{E}' = \mathcal{U}^\circ + \mathcal{U}' \quad (1)$$

donde

$$\mathcal{U}^\circ = \frac{K}{2}(\mathbf{I}_{\mathbf{E}}^2 - 3\alpha\Delta T \mathbf{I}_{\mathbf{E}}) \quad \mathcal{U}' = -\frac{1}{2G}\mathbb{I}_{\mathbf{S}'} = -2G\mathbb{I}_{\mathbf{E}'} = \frac{3}{4G}\mathbf{T}_{\triangleright}^2 \quad (2)$$

siendo  $K$  el módulo de elasticidad volumétrica y  $G$  el módulo de corte del material (ver sección III.2.3.2). Similarmente para el punto de fluencia en un ensayo de tracción simple se tiene que

$$\mathbb{I}_{\mathbf{S}'} = \frac{1}{3}\sigma_0^2 \quad \mathcal{U}'_0 = \frac{1}{6G}\sigma_0^2 \quad (3)$$

Por consiguiente la condición de fluencia se vuelve

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U}'_0 \quad \frac{9}{2} T_{\triangleright}^2 = \sigma_0^2 \quad (4)$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \sigma_0^2 \quad (5)$$

Al igual que antes, este resultado expresa la ecuación de un elipsoide.

El criterio de von Mises es menos conservador que el criterio de Tresca y al mismo tiempo es más fácil de usar. Adicionalmente concuerda usualmente (pero no siempre) con los resultados experimentales de una forma más consistente que las otras teorías. Por todas estas razones este criterio es ampliamente usado en la actualidad.

Von Mises originalmente propuso su criterio por razones de conveniencia matemática. Hencky luego mostró que era equivalente a asumir que la fluencia se presenta cuando la energía de distorsión (debida a los esfuerzos cortantes) alcanza un valor crítico, como se mostró arriba. Esto se puede expresar también como

$$T_{\triangleright} = T_{\triangleright,0} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_0 \quad (6)$$

Esto es, la fluencia ocurre cuando el esfuerzo cortante octedral alcanza el valor que tendría en la fluencia durante el ensayo de tracción simple. Alternativamente, el criterio de fluencia de von Mises puede verse visto como que la fluencia comienza cuando el segundo invariante  $\mathbb{I}_{\mathbf{S}'}$  de la parte desviatoria del tensor de esfuerzo, alcanza un valor crítico.

## 4. TENSION SUPERFICIAL

La *tensión superficial* es un fenómeno que se presenta en la interfaz entre dos materiales inmiscibles, por ejemplo, gas y líquido o dos líquidos inmiscibles. Este fenómeno, que es una fuerza de tensión distribuida a lo largo de la superficie, se debe primordialmente a la interacción entre moléculas parecidas (cohesión) y entre moléculas diferentes (adhesión) [Shames,1995]. También puede existir una reacción de los puntos materiales de la superficie a oponerse al movimiento sobre esta, creándose lo que se puede denominar una *viscosidad interfacial*.

### 4.1. TENSION SUPERFICIAL HOMOGENEA

En el interior de un fluido las fuerzas cohesivas se cancelan, pero en la superficie libre las fuerzas cohesivas desde el interior exceden las fuerzas adhesivas del fluido vecino localizado por afuera, dando como resultado una tensión superficial. Esta es la razón por la cual una gota de líquido adquiere una forma esférica. La tensión superficial se mide como una intensidad de carga lineal  $\sigma_o$  tangencial a la superficie y se expresa por unidad de longitud de una línea imaginaria dibujada sobre la superficie interfaz. Al valor  $\sigma_o$  se le conoce como coeficiente de tensión superficial y es la fuerza por unidad de longitud transmitida desde la porción superficie de fluido localizada a un lado de la línea imaginaria hasta la porción de superficie de fluido localizada al otro lado, en una dirección perpendicular a la línea imaginaria apuntando hacia el exterior de la porción de superficie considerada.

En condiciones de equilibrio estático las fuerzas de tensión superficial se equilibran con la fuerza de presión producida por la condición de salto a través de la superficie interfaz. Esto es

$$\Delta P = 2 \sigma_o \kappa \quad (1)$$

donde  $\kappa$  es la curvatura promedio de la superficie.

#### 4.2. TENSION SUPERFICIAL ISOTROPICA

La tensión superficial isotrópica posee la siguiente forma tensorial con sólo parte esférica

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{I} \quad (1)$$

donde  $\sigma$  puede variar en la superficie considerada, dependiendo de las condiciones tensoactivas, las cuales hacen las condiciones de salto en la presión diferentes para cada punto de la superficie. En estos casos, la esfericidad de la superficie expuesta en la sección anterior ya no son obtenibles. De hecho la condición de salto bajo una situación de equilibrio estático es

$$(P_2 - P_1) \mathbf{n} = 2 \sigma \kappa \mathbf{n} + \nabla \sigma \quad (2)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario sobre la superficie apuntando de la porción 1 a la porción 2 y la curvatura media de la superficie  $\kappa$  es positiva si  $\mathbf{n}$  apunta hacia el centro de curvatura, en caso contrario es negativa. Como puede observarse se ha agregado un término adicional debido a la variación de la propiedad  $\sigma$  sobre la superficie interfaz. Sin embargo, como el gradiente  $\nabla \sigma$  tiene sólo componentes sobre la superficie, la única forma de que se cumpla (2) es que el mismo sea nulo. Es decir, la única forma de obtener equilibrio estático es mediante una tensión superficial constante. Esto se podrá justificar de una manera más forma cuando se revise la Sección III.6.3 relativa a la superficie interfaz.

#### 4.3. TENSOR DE TENSION SUPERFICIAL

El tensor de tensión superficial puede incluir elementos desviatorios, por lo que se puede expresar de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{I} + \lambda_\sigma (\text{Tr} \mathbf{D}_p) \mathbf{I} + 2\mu_\sigma \mathbf{D}_p \quad (1)$$

donde los coeficientes  $\lambda_\sigma$  y  $\mu_\sigma$  son denominadas *viscosidades interfaciales*. El tensor  $\mathbf{D}_p$  es el tensor de velocidad de deformación superficial basado en el campo de velocidades  $\mathbf{v}_p$  definido sobre la superficie como

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{ni} + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_{ni} = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad (2)$$

donde  $\mathbf{v}_{ni}$  es la velocidad de la interface en la dirección de su normal unitaria  $\mathbf{n}_i$ , y  $\mathbf{v}_t$  es la velocidad relativa (tangente) del fluido dentro de la superficie interfaz.

Empleando las cantidades antes definidas, entonces se tiene que el tensor velocidad de deformación superficial empleado en (1) se calcula sobre la superficie interfaz como

$$\mathbf{D}_p = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v}_p + \nabla \mathbf{v}_p^t) \quad (3)$$

Se pueden tener relaciones constitutivas diferentes a (1), por ejemplo, tomando tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  dependientes del tensor de deformación superficial  $\mathbf{D}_p$  hasta el término de segundo orden, o tomando una dependencia tensor de tensión superficial - tensor velocidad de deformación superficial del tipo viscoelástica.

Por las razones expuestas en la sección anterior, sólo puede existir una condición de salto de tipo desviatoria bajo condiciones de equilibrio metaestable, es decir, con el sistema en movimiento y con la presencia de esfuerzos viscosos (o viscoelásticos) en las fases y en la interfase (a través de (1) o cualquier otra relación constitutiva). La condición de salto en condiciones de equilibrio metaestable o dinámico será revisada con mayor formalidad en la Sección III.6.3.

#### 4.4. LINEAS Y PUNTOS DE TENSION

Cuando se tiene la interrelación (intersección) de dos superficies interfaces se obtiene una *línea de tensión* en la cual se puede definir una tensión que actúa a lo largo de la misma. Esta tensión compensa

dinámicamente (incluyendo las fuerzas inerciales) las fuerzas de tensión ejercidas por las dos superficies interfaz.

Cuando se tiene la interrelación entre dos o más líneas de tensión se obtiene un *punto de tensión* en el cual se puede establecer que existe equilibrio dinámico (incluyendo la fuerzas inerciales identificadas con el punto).

Si interpretamos a la superficie interfaz como el elemento geométrico que establece el equilibrio entre dos volúmenes, entonces por analogía se puede interpretar a la línea de tensión como el elemento geométrico que establece el equilibrio entre dos superficies interfaz. De igual forma se puede interpretar al punto de tensión como el elemento geométrico que establece el equilibrio entre líneas de tensión.

Esta descripción topológica permite emplear reglas de cálculo geométricas del mismo tipo para los tres casos planteados. Una de estas reglas es la llamada la Regla de Leibniz, la cual es un teorema del transporte generalizada. Un ejemplo típico donde se pueden observar la superficies interfaz interrelacionando con líneas de tensión, y estas a su vez con puntos de tensión, son las pompas de jabón y las espumas.

#### 4.5. ANGULO DE CONTACTO

Un líquido en contacto con un sólido exhibirá un ángulo de contacto entre la superficie libre del líquido y la parte mojada del sólido (entre la normal a la superficie libre del líquido y la normal de la superficie sólida). Si el sistema está en reposo, se obtiene un *ángulo de contacto estático*. Si el sistema está en movimiento, se obtiene un *ángulo de contacto dinámico*.

El ángulo de contacto formado por el avance del frente del líquido se denomina *ángulo de contacto de avance*. El ángulo de contacto formado por la parte precedente del líquido se denomina *ángulo de contacto precedente*. Los ángulos de contacto de avance son usualmente más grandes que los ángulos de contacto precedentes, cuando el sistema está en estado de equilibrio metaestable o equilibrio dinámico. Por otro lado, los ángulos de contactos de avance y precedente son iguales cuando el sistema está en estado de equilibrio estable o equilibrio estático.

El ángulo de contacto  $\theta$  en situación de equilibrio para una gota de líquido sobre una superficie idealmente suave, homogénea plana y no deformable se relaciona con varias tensiones superficiales mediante la expresión

$$\sigma_{lv} \cos \theta = \sigma_{sv} - \sigma_{sl} \quad (1)$$

donde  $\sigma_{lv}$  es la tensión superficial en equilibrio con su vapor saturado,  $\sigma_{sv}$  es la tensión superficial del sólido en equilibrio con el vapor saturado del líquido, y  $\sigma_{sl}$  es la tensión superficial entre el sólido y el líquido. Esta expresión es conocida como la *ecuación de Young* [Wu,1982;Young,(1804)]. Una demostración de esta expresión puede obtenerse al sumar vectorialmente (sobre la superficie sólida) las tensiones superficiales perpendiculares a la línea de tensión que separa a las tres fases: líquido, vapor saturado y sólido.

Cuando en lugar del sólido se tiene un substrato líquido, sobre el cual descansa una gota de otro líquido inmiscible, se tiene un ángulo de contacto, o ángulo de Neumann como también se le conoce, levemente diferente al caso anterior. La gota de líquido tiene forma de lente biconvexa y el *ángulo de Neumann* se define en su borde exterior, el cual constituye una línea de tensión que separa a las tres fases: gota de líquido, vapor saturado del líquido de la gota y líquido del substrato. Las tres tensiones superficiales colocadas vectorialmente de forma perpendicular sobre la línea de tensión deben anularse bajo condiciones de equilibrio estable o estático. En estas condiciones, la aplicación de la regla del coseno al triángulo de vectores de tensiones, o *triángulo de Neumann*, permite obtener la siguiente expresión

$$\sigma_{sl}^2 = \sigma_{lv}^2 + \sigma_{sv}^2 - 2 \sigma_{lv} \sigma_{sv} \cos \theta \quad (2)$$

conocida como la *ecuación de Neumann* [Wu,1982;Neumann,1894]. Aquí se ha identificado con el subíndice  $s$  al substrato líquido, con  $l$  al líquido de la gota, y con  $v$  al vapor saturado del líquido de la gota.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Aris, R. **Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics**. Prentice-Hall, 1962.
- [2] Batchelor, G. K. **An Introduction to Fluid Dynamics**. Cambridge University Press, 1967. 13<sup>th</sup> Printing, 1990.
- [3] Currie, I. G. **Fundamental Mechanics of Fluids**, Second Edition. McGraw-Hill, 1993.
- [4] Dowling, N. E. **Mechanical Behavior of Materials**, Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue. Prentice-Hall International, 1993.
- [5] Dryden, H.L.; Murnaghan, F.D.; Bateman, H. **Hydrodynamics**. Dover Publications, 1956.
- [6] Flügge, S.; Truesdell, C.; (Eds.). **Encyclopedia of Physics**. Vol.VIII/2: "Fluid Dynamics II". Springer-Verlag, 1963.
- [7] Fox, E. A. **Mechanics**. Harper International - Harper & Row - John Weatherhill, 1967.
- [8] Goldstein, S. (Ed.). **Modern Developements in Fluid Dynamics**. Dover Publications, 1965.
- [9] Gurtin, M. E. **An Introduction to Continuum Mechanics**. Academic Press, 1981.
- [10] Ladyzhenskaya, O. A. **The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow**, 2<sup>nd</sup> Edition. Gordon and Breach Science Publishers, 1969. 2<sup>nd</sup> Printing, 1987.
- [11] Lamb, H. **Hydrodynamics**, 6th Edition. Dover Publications, 1932.
- [12] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **Fluid Mechanics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Pergamon Press, 1987.
- [13] Marin, J. **Mechanical Behavior of Engineering Materials**. Prentice-Hall, 1962.
- [14] Mase, G. E. **Theory and Problems of Continuum Mechanics**. McGraw-Hill, 1970.
- [15] Mendelson, A. **Plasticity: Theory and Application**. The Macmillan Company - Collier-Macmillan Canada, 1968.
- [16] Meyer, R. E. **Introduction to Mathematical Fluid Dynamics**. Wiley-Interscience, 1971. Dover Publications, 1982.
- [17] Neumann, F. **Vorlesungen über die Theorie der Capillariat**. B. G. Teubner, Leipzig, 1894.
- [18] Noll, W. **The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics**. North-Holland, 1959. Reproducido en [Noll,1974].
- [19] Noll, W. **The Foundations of Mechanics and Thermodynamics**, Selected Papers. Springer-Verlag, 1974.
- [20] Prandtl, L.; Tietjens, O. G. **Fundamentals of Hydro - and Aeromechanics**. Dover Publications, 1934.
- [21] Prandtl, L.; Tietjens, O. G. **Applied Hydro - and Aeromechanics**. Dover Publications, 1934.
- [22] Raudkivi, A. J.; Callander, R. A. **Advanced Fluid Mechanics. An Introduction**. Edward Arnold Publishers, 1975.
- [23] Roy, M. **Mecánica**. Vol.II: "Medios Continuos". Marcombo, 1970.
- [24] Santaló, L. A. **Vectores y Tensores con sus Aplicaciones**, 10<sup>ma</sup> Edición. Editorial Universitaria de Buenos Aires (EUDEBA), 1976.
- [25] Serrin, J. "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.VIII/1, pp.125-263. Springer-Verlag, 1959.
- [26] Shames, I. H. **Mecánica de Fluidos**, Tercera Edición. McGraw-Hill, 1995.
- [27] Shames, I. H.; Cozzarelli, F. A. **Elastic and Inelastic Stress Analysis**. Prentice-Hall, 1992.
- [28] Sherman, F. S. **Viscous Flow**. McGraw-Hill, 1990.
- [29] Temam, R.; Miranville, A. **Mathematical Modeling in Continuum Mechanics**. Cambridge University Press, 2001.
- [30] Truesdell, C. A. **The Elements of Continuum Mechanics**. Springer-Verlag, 1966.

- [31] Truesdell, C. A. **A First Course in Rational Continuum Mechanics**. Vol.1: "General Concepts". Academic Press, 1977.
- [32] Truesdell, C. A.; Toupin, R. A. "The Classical Field Theories". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.**III/1**, pp.226-793. Springer-Verlag, 1960.
- [33] Whitaker, S. **Introduction to Fluid Mechanics**. Krieger, 1968.
- [34] White, F. M. **Viscous Fluid Flow**. McGraw-Hill, 1974.
- [35] Wu, S. **Polymer Interface and Adhesion**. Marcel Dekker, New York, 1982.
- [36] Young, T. "Collected Works" (D. Peacock, Ed.), **Proc. Roy. Soc. (London)**, December, (1804).





# CAPITULO III

## PRINCIPIOS DE CONSERVACION

### CONTENIDO

1. CONSERVACION DE MASA.	87
1.1. Ecuación Integral.	87
1.1.1. Sistema de Coordenadas Inercial.	87
1.1.2. Sistema de Coordenadas No Inercial.	87
1.2. Ecuación Diferencial.	87
1.2.1. Ecuación de Continuidad.	87
1.2.2. Derivada Material Alterna.	87
1.2.3. Sistema de Coordenadas No Inercial.	88
2. CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.	88
2.1. Ecuación Integral.	88
2.1.1. Sistema de Coordenadas Inercial.	88
2.1.2. Sistema de Coordenadas No Inercial.	88
2.2. Ecuación Diferencial.	89
2.2.1. Ecuación de Cauchy.	89
2.2.2. Ecuación del Movimiento.	89
2.2.3. Condiciones de Borde en la Velocidad.	90
2.2.4. Sistema de Coordenadas No Inercial.	90
2.3. EL Tensor de Esfuerzo.	91
2.3.1. Fluidos Newtonianos.	91
2.3.2. Sólidos Elásticos.	92
3. CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR.	92
3.1. Ecuación Integral.	92
3.1.1. Sistema de Coordenadas Inercial.	92
3.1.2. Sistema de Coordenadas No Inercial.	93
3.2. Ecuación Diferencial.	94
3.2.1. Relación del Vector Axial de Esfuerzo.	94
3.2.2. Simetría del Tensor de Esfuerzo.	94
• Material Polar.	95
4. CONSERVACION DE LA ENERGIA.	96
4.1. Energía Total.	96
4.1.1. Conservación de la Energía Total.	96

4.1.2. Ecuación de la Energía Total.	97
4.2. Energía Mecánica.	98
4.2.1. Ecuación de la Energía Mecánica.	98
4.2.2. Conservación de la Energía Mecánica.	98
4.2.3. Función de Disipación Viscosa.	99
4.3. Energía Térmica.	100
4.3.1. Ecuación de la Energía Térmica.	100
4.3.2. Conservación de la Energía Térmica.	100
4.3.3. Ecuación de la Entalpía.	101
4.3.4. Ecuaciones de la Temperatura.	101
5. CONSERVACION DE LA ENTROPIA.	102
5.1. Desigualdad Integral de la Entropía.	102
5.2. Desigualdad de Clausius-Duhem.	102
5.3. Ecuación de la Entropía.	103
5.4. Función Fuente de Generación de Entropía.	104
5.5. Condiciones Impuesta por la Entropía.	104
6. ECUACION GENERAL DE CONSERVACION.	105
6.1. Sistema Continuo.	105
6.1.1. Ecuación Integral.	105
6.1.2. Ecuación Diferencial.	105
6.2. Sistema con Superficie Singular.	106
6.2.1. Ecuación Integral.	106
6.2.2. Ecuación Diferencial.	107
6.3. Sistema con Superficie Interfaz.	107
6.3.1. Ecuación integral.	107
6.3.2. Ecuación Diferencial.	108
6.3.3. Leyes de Conservación.	109
BIBLIOGRAFIA.	109

El Segundo Teorema del Transporte de Reynolds (Expresión I.2.2.(8)) se puede aplicar a distintos y variados valores de  $b$ , teniéndose como ejemplos más usados los principios de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento lineal y de la cantidad de movimiento angular. También se describirán en este capítulo los principios de conservación de la energía y de la entropía. Aquellos primeros formarán más adelante, con una descripción más precisa, el Capítulo V, y estos últimos el Capítulo VI, de la Dinámica y la Termodinámica de los Sistemas Materiales Continuos, respectivamente.

Las ecuaciones integrales se formarán directamente de aplicar el Segundo Teorema del Transporte de Reynolds, el cual es el más sencillo de aplicar a casos concretos. Además, representa el teorema más completo en el sentido que se puede aplicar a un volumen de control con un movimiento arbitrario de acuerdo a las necesidades del usuario.

Las ecuaciones diferenciales se formarán a partir de las ecuaciones integrales obtenidas con el Primer Teorema del Transporte de Reynolds (Expresión I.2.2.(3)) y aplicando luego el Tercer Teorema (Expresión I.2.2.(16)) para introducir la derivada dentro del símbolo de integración. Luego se lleva la integración a tener un integrando único e igualada a cero. El resultado final de esto es que el integrando es nulo, originándose así las ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones integrales en sistemas de coordenadas no inerciales se obtienen de aplicar las relaciones de la Sección I.1.4. de manera recurrente y aplicando el Tercer Teorema del Transporte de Reynolds a aquella parte del integrando que no dependa puramente de las cantidades relativas ( $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{V}$ ).

## 1. CONSERVACION DE MASA

### 1.1. ECUACION INTEGRAL

#### 1.1.1. Sistema de Coordenadas Inercial

Esta ecuación corresponde a la aplicación del Segundo Teorema del Transporte de Reynolds tomándo  $b = 1$ :

- Masa

$$b = 1 \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = 0 \quad (1)$$

#### 1.1.2. Sistema de Coordenadas No Inercial

Esta ecuación se obtiene al aplicar la identidad

$$\mathbf{V} - \mathbf{V}_a = \mathbf{v} - \mathbf{v}_a \quad (2)$$

en la expresión (1) y considerar que la derivación relativa es igual que la absoluta para funciones escalares. Esto es, el principio de conservación de:

- Masa

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \, (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = 0 \quad (3)$$

Donde no exista confusión, se omitirá de ahora en adelante el indicativo  $\check{\rho}$  ó  $\check{\mathbf{b}}$  de las funciones definidas para el sistema de coordenadas no inerciales.

### 1.2. ECUACION DIFERENCIAL

#### 1.2.1. Ecuación de Continuidad

La ecuación de continuidad se dedujo en la Sección I.2.2.5. del Primer Teorema del Transporte de Reynolds haciendo  $b = 1$ . Con este procedimiento y aplicando el Teorema de la Divergencia se obtuvo la ecuación de continuidad I.2.2.(13)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

La ecuación de continuidad se puede expresar de manera diferente si se emplea la definición de la derivada material I.2.2.(15) en la forma

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

#### 1.2.2. Derivada Material Alterna

Haciendo uso de la definición de derivada material y de la ecuación de continuidad se puede obtener la siguiente relación de derivadas

$$\rho \frac{db}{dt} = \frac{d\rho b}{dt} + \rho b \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho b}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho b \mathbf{v}) \quad (3)$$

El último miembro de la relación de derivadas (3) es el más útil y cuando se usa se dice que la ecuación diferencial está expresada de forma conservativa.

### 1.2.3. Sistema de Coordenadas No Inercial

De la Sección I.2.3.3. se extrae que las expresiones equivalentes a (1), (2) y (3), para un sistema de coordenadas no inercial, son

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad \frac{\delta \rho}{\delta t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4, 5)$$

$$\rho \frac{\delta b}{\delta t} = \frac{\delta \rho b}{\delta t} + \rho b \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \rho b}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho b \mathbf{V}) \quad (6)$$

respectivamente.

## 2. CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

### 2.1. ECUACION INTEGRAL

#### 2.1.1. Sistema de Coordenadas Inercial

Esta ecuación corresponde a aplicación del Segundo Teorema del Transporte de Reynolds tomándo  $b = \mathbf{v}$ :

- Cantidad de Movimiento Lineal

$$b = \mathbf{v} \quad \sum_{ext} \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{v} \, dV = \frac{d}{dt} \int_{V_a} \rho \mathbf{v} \, dV + \oint_{A_a} \rho \mathbf{v} \, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (1)$$

Este es un principio de conservación para un sistema de referencia inercial, puesto que la expresión (1) no es más que una diferente forma de la Ley de Newton, la cual está concebida para un sistema de referencia inercial.

En la sumatoria de fuerzas externas pueden distinguirse básicamente las fuerzas de volumen y las fuerzas de superficie en la forma

$$\sum_{ext} \mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_s = \int_{V_m} \rho \mathbf{g} \, dV + \oint_{A_m} \mathbf{t} \, dA \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{g}$  es la fuerza ejercida por un campo externo por unidad de masa y donde  $\mathbf{T}$  es el tensor de esfuerzo que contiene a su vez una parte isótropa que actúa normal a la superficie (por ejemplo, la presión termodinámica) y una parte desviatoria que actúa de forma oblicua y/o tangencia a la superficie (por ejemplo, los esfuerzos viscosos). Finalmente, cuando se substituye (2) en (1) la expresión resultante se denomina *primera ley del movimiento de Euler* [Truesdell, 1977].

#### 2.1.2. Sistema de Coordenadas No Inercial

Esta ecuación se obtiene aplicando las relaciones I.1.4.(1) y I.1.4.(2) al miembro de la izquierda de la expresión (1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{v} \, dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \mathbf{V}) \, dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \, dV + \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{V} \, dV \\ &= \int_{V_m} \rho [\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}] \, dV + \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{V} \, dV \\ &= \int_{V_m} \rho [(\mathbf{a} - \mathbf{A}) - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}] \, dV + \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{V} \, dV \\ &= \int_{V_m} \rho (\mathbf{a} - \mathbf{A}) \, dV + \frac{\delta}{\delta t} \int_{V_m} \rho \mathbf{V} \, dV \end{aligned} \quad (3)$$

En estos desarrollos se ha empleado el tercer Teorema del Transporte de Reynolds para poder introducir el símbolo de derivación dentro de las integrales del miembro de la izquierda de la expresión (1).

El Segundo Teorema del Transporte de Reynolds para un sistema de coordenadas no inercial aplicado al último término de la expresión (3) permite obtener el principio de conservación de:

- Cantidad de Movimiento Lineal

$$\sum_{ext} \mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho (\mathbf{a} - \mathbf{A}) d\mathcal{V} + \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (4)$$

En las expresiones anteriores se ha empleado de nuevo la identidad

$$\mathbf{V} - \mathbf{V}_a = \mathbf{v} - \mathbf{v}_a \quad (5)$$

para el cálculo del flujo neto de una propiedad a través del área  $\mathcal{A}$ .

Adicionalmente, para simplificar algunas expresiones anteriores, se ha utilizado la identidad

$$\mathbf{a} - \mathbf{A} = \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (6)$$

que se obtiene fácilmente de I.1.4.(1.c).

En el cálculo de la integral de volumen  $\mathcal{V}$  en las expresión (4), para algunos casos, es recomendable emplear el análisis mostrado en la sección V.1 de las ecuaciones universales de la mecánica para sistemas materiales continuos.

## 2.2. ECUACION DIFERENCIAL

Las ecuaciones diferenciales normalmente se obtienen de aplicar el Teorema de la Divergencia a la integral sobre el área y el Tercer Teorema del transporte de Reynolds a la derivada de la integral de la cantidad de movimiento lineal. Luego de igualar a cero toda la expresión, se agrupan todos los integrandos, para justificar que si dicha expresión es nula para cualquier volumen material, entonces es nulo el integrando. De esta forma se obtiene, por ejemplo, la Ecuación de Cauchy a partir de la primera parte de 2.1.(1) y de la definición de las fuerzas involucradas 2.1.(2).

### 2.2.1. Ecuación de Cauchy

La Ecuación de Cauchy obtenida con el procedimiento planteado arriba se expresa como

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{g}$  constituye la fuerza a distancia o fuerza de cuerpo y donde  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$  constituye la fuerza de contacto o de superficie. La ecuación de Cauchy (1) también se conoce como la Primera Ley del Movimiento de Cauchy [Truesdell, 1977].

A veces el miembro de la derecha de (1) se identifica como una sola fuerza por unidad de volumen en la forma

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{g}$  se ha multiplicado por  $\rho$  debido a que viene expresada por unidad de masa.

### 2.2.2. Ecuación del Movimiento

La ecuación del movimiento se obtiene cuando se substituye la expresión de la aceleración en la ecuación (1), aplicando el operador derivada material explicado en la Sección I.1.1.3. De esta forma se tiene que

$$\rho \mathbf{a} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \mathbf{f} \quad (3)$$

donde se ha aplicado también la forma alterna de la derivada material 1.2.(3). y se considera que  $\mathbf{f}$  viene dado por (2). A los dos últimos términos de (3) se le denomina forma conservativa de la ecuación de movimiento.

### 2.2.3. Condiciones de Borde en la Velocidad

- Clásica

La condición de borde clásica para la velocidad es la *condición de no deslizamiento*. Es decir,

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_s = \mathbf{0} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{v}_s$  es la velocidad de los bordes sólidos. Por otra parte, la condición (4) y la aplicación del Teorema de Stokes implica que

$$\oint_{\mathcal{L}_s} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{A}_s} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = 0 \quad \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (5)$$

donde  $\mathcal{L}_s$  es una curva cerrada sobre la superficie sólida y  $\mathcal{A}_s$  es el pedazo de la superficie sólida encerrado por dicha curva. La variable  $\mathbf{w}$  es la vorticidad de la velocidad del fluido  $\mathbf{v}$  en la superficie.

- Con Deslizamiento

La diferencia de las velocidades en la superficie  $\Delta \mathbf{v}$  en la superficie puede dividirse en una componente normal a la superficie  $\Delta \mathbf{v}_n$  y una componente tangencial a la superficie  $\Delta \mathbf{v}_t$ . Lo mismo puede hacerse con la fuerza actuante por unidad de superficie  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ . De acuerdo a esto, la condición de borde para la velocidad en la superficie sólida donde hay deslizamiento puede venir dada por

$$\Delta \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad \Delta \mathbf{v}_t = \mu_t \mathbf{t}_t \quad (6)$$

donde  $\mu_t$  puede ser una constante dependiente del fluido y del estado termodinámico que difiere de cero a muy bajas presiones y a muy altas temperaturas.

Serrin [Serrin,1959] ha propuesto un modelo que impone una condiciones de deslizamiento críticas similar a la que existe en el contacto entre sólidos (modelo de Coulomb). Este modelo es

$$\mu_t = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_t^o |\mathbf{t}_t| \leq \mu_s |\mathbf{t}_n| \\ \mu_t^o - \mu_s |\mathbf{t}_n| / |\mathbf{t}_t| & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (7)$$

donde  $\mu_t^o$  y  $\mu_s$  son constantes positivas dependientes del fluido y del estado termodinámico. Obsérvese que  $\mu_t$  disminuye su valor hasta llevarlo a cero en los casos cuando crece mucho la fuerza normal o cuando disminuye la fuerza tangencial. Es decir, existe mayor deslizamiento cuando las fuerzas tangenciales superan a las fuerzas normales. Esto está en concordancia con el hecho de que el fenómeno de deslizamiento se presenta a bajas presiones.

### 2.2.4. Sistema de Coordenadas No Inercial

La Ecuación equivalente a la ecuación de Cauchy (1), para un sistema de coordenadas no inercial, se obtiene de substituir 2.1.(6). O sea

$$\rho \mathbf{A} = \rho \check{\mathbf{g}} + \check{\nabla} \cdot \check{\mathbf{T}} \quad (8)$$

donde  $\check{\nabla} \cdot \check{\mathbf{T}} = \nabla \cdot \mathbf{T}$  ya que estas derivadas no dependen del tiempo, y donde  $\check{\mathbf{g}}$  constituye la fuerza de cuerpo ficticia que experimenta la materia cuando se describe el movimiento desde un sistema de coordenadas no inercial. Esta fuerza se calcula como

$$\check{\mathbf{g}} = \mathbf{g} - [\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}] \quad (9)$$

Los tres primeros términos dentro de los corchetes conforman la fuerza de arrastre o de transporte del sistema de coordenadas y representa la fuerza que experimenta un punto material solidario al sistema móvil de coordenadas, en su movimiento de traslación, aceleración angular y aceleración centrípeta. El último

término se llama la fuerza de Coriolis ocasionada por la aceleración de Coriolis, también llamada aceleración complementaria.

## 2.3. EL TENSOR DE ESFUERZO

### 2.3.1. Fluidos Newtonianos

El tensor de esfuerzo para un fluido puede venir expresado (en caso de que no sea un fluido con memoria) como una función del tipo

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(P, T, \mathbf{D}) \quad (1)$$

que es dependiente de la presión  $P$ , de la temperatura  $T$  y del tensor velocidad de deformación

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^t) \quad \mathbf{G} = (\nabla \mathbf{v})^t \quad (2)$$

Para el caso particular de un fluido newtoniano la relación constitutiva del tensor de esfuerzo viene dada por

$$\mathbf{T} = (-P + \lambda \vartheta) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad \vartheta = \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr} \mathbf{D} \quad (3)$$

donde  $P$  es la presión termodinámica si el fluido es compresible (en caso contrario es la presión hidrodinámica),  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido,  $\lambda$  es la segunda viscosidad y  $\mu_v = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  es la viscosidad volumétrica con

$$P - \bar{P} = (\lambda + \frac{2}{3}\mu) \nabla \cdot \mathbf{v} = \mu_v \vartheta \quad \bar{P} = -\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T} = -\frac{1}{3} T_{ii} \quad (4)$$

siendo  $\bar{P} = -T_{ii}/3$  la presión media y satisfaciéndose  $-\bar{P} \mathbf{I} = \mathbf{T}^\circ$  (La viscosidad  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ , si se asume cierta la hipótesis de Stokes, donde  $\bar{P} = P$ . Ver por ejemplo [Gurtin,1981;Jaunzemis,1967]).

La fuerza por unidad de superficie, en donde la normal unitaria es  $\mathbf{n}$  y con un fluido newtoniano, viene dada por

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = [-P + (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{v}] \mathbf{n} - \mu \mathbf{n} \times \mathbf{w} = -P_n \mathbf{n} - \mu \mathbf{n} \times \mathbf{w} \quad \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (5)$$

donde la presión normal  $P_n$ , aplicando la relación (4), se calcula como

$$P_n = P - (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{v} = \bar{P} - \frac{4}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (6)$$

Como podrá observarse en (6), la presión normal a una superficie no es igual a la presión promedio, al menos que el fluido sea incompresible. De (5) se infiere que si el flujo es irrotacional la fuerza sobre una superficie imaginaria en el espacio es siempre normal a dicha superficie, sin importar la orientación de la misma.

Para el caso general de un fluido de stokes se tiene que

$$\mathbf{T} = [-P + \zeta(\mathbf{D})] \mathbf{I} + \mathcal{T}(\mathbf{D}) \quad (7)$$

donde el primer término del miembro de la derecha representa la parte isótropa del tensor de esfuerzo y el segundo término la parte desviatoria del mismo tensor, siendo  $\zeta$  y  $\mathcal{T}$  debidas a los efectos viscosos del fluido. Como condición fundamental de un fluido de stokes se debe cumplir que, cuando  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{0}$ , entonces  $\zeta \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{T} \rightarrow \mathbf{0}$  y  $\bar{P} \rightarrow P$  [Aris,1962;Serrin,1959].

Las relaciones constitutivas de la parte desviatoria son variadas, y cuando no se cumple (3) se dice que el fluido es no newtoniano. Para relaciones constitutivas más generales, ver por ejemplo [Lai et al.,1978; Leigh,1968;Aris,1962;Serrin,1959]. Sin embargo, más adelante en el Capítulo VII haremos un análisis más detallado y profundo de las relaciones constitutivas para los fluidos en general y su dependencia con respecto al tensor de deformación y de velocidad de deformación.

### 2.3.2. Sólidos Elásticos

El tensor de esfuerzo para un sólido puede venir expresado (en caso de que no sea un material con memoria) como una función del tipo

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(T, \mathbf{E}) \quad (8)$$

que es dependiente de la temperatura  $T$  y del tensor de deformación

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) \quad \mathbf{L} = (\nabla \mathbf{u})^t \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (9)$$

Para el caso particular de un sólido elástico lineal isótropo, la relación constitutiva del tensor de esfuerzo viene dada por

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}}(t, \mathbf{x}^{-1}(t, \mathbf{x})) \quad \tilde{\mathbf{T}}(t, \mathbf{X}) = \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|} \cdot \mathbf{S} \quad \mathbf{S} = \lambda_e \varrho \mathbf{I} + 2\mu_e \mathbf{E} = \left[ \left( \frac{2G\nu}{1-2\nu} \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{I} + 2G \mathbf{E} \quad (10)$$

donde

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{L} = (\nabla \mathbf{x})^t \quad \varrho = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr} \mathbf{E} = \text{tr} \mathbf{L} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (11)$$

Aquí  $\mathbf{S}$  es el tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff (ver la Sección II.2.7.),  $G$  es el módulo de corte,  $E$  es el módulo de elasticidad de Young, y  $\nu$  es el módulo de Poisson. Los coeficientes

$$\lambda_e = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad \mu_e = G \quad K = \lambda_e + \frac{2}{3}\mu_e \quad (12)$$

algunos de ellos presentes en la relación (10), también reciben el nombre de *coeficientes de Lamé*. El coeficiente  $K$  recibe el nombre de módulo de elasticidad volumétrica, porque mide en un material elástico aproximadamente la relación entre una presión y la disminución relativa del volumen ( $\approx 1/\kappa$ ). Con estos coeficientes así definidos, la relación constitutiva (10), para sólidos elásticos lineales, es muy parecida a la relación constitutiva (3) para fluidos newtonianos.

Más adelante en el Capítulo VII se hará también un análisis más detallado y profundo de las relaciones constitutivas para fluidos y sólidos en general y su dependencia respecto al tensor deformación.

## 3. CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

### 3.1. ECUACION INTEGRAL

#### 3.1.1. Sistema de Coordenadas Inercial

Esta ecuación corresponde a aplicación del Segundo Teorema del Transporte de Reynolds tomando  $b = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ :

- Cantidad de Movimiento Angular

$$b = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad \sum_{ext} \mathbf{M} = \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \frac{d}{dt} \int_{V_a} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV + \oint_{A_a} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} dA \quad (1)$$

Los momentos torsionales de las fuerzas externas, de forma similar se distinguen en momentos debido a fuerzas de volumen  $\mathbf{M}_g$  o a fuerzas de superficies  $\mathbf{M}_s$

$$\sum_{ext} \mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_e = \int_{V_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} dV + \oint_{A_m} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dA + \mathbf{M}_e \quad (2)$$



Adicionalmente, como se puede observar puede existir un momento torsional externo  $\mathbf{M}_e$  aplicado sobre el volumen material de forma puntual. Todos los momentos de fuerzas se toman respecto el origen del sistema de coordenadas inercial.

En las expresión (1) se ha supuesto que existe el mismo origen del sistema de coordenadas inercial con respecto al cual se calculan las cantidades de movimiento angulares y los momentos torsionales. Finalmente, cuando se substituye (2) en (1), la ecuación resultante se denomina *segunda ley del movimiento de Euler* [Truesdell,1977].

### 3.1.2. Sistema de Coordenadas No Inercial

Esta ecuación se obtiene aplicando las relaciones I.1.4.(1) y I.1.4.(2) al miembro de la izquierda de la expresión (1):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho (\mathbf{r}_o + \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \mathbf{V}) dV \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho [\mathbf{r}_o \times \mathbf{v}_o + \mathbf{r}_o \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{R} \times \mathbf{v}_o + \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{r}_o \times \mathbf{V}] dV + \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} dV \\
 &= \int_{V_m} \rho \{ \mathbf{r}_o \times [\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{A}] \\
 &\quad + \mathbf{R} \times [\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}] + \mathbf{V} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \} dV + \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} dV \\
 &= \int_{V_m} \rho [\mathbf{r}_o \times \mathbf{a} + \mathbf{R} \times (\mathbf{a} - \mathbf{A}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{V})] dV + \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} dV \\
 &= \int_{V_m} \rho [\mathbf{r}_o \times \mathbf{a} + \mathbf{R} \times (\mathbf{a} - \mathbf{A})] dV + \frac{\delta}{\delta t} \int_{V_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} dV \tag{3}
 \end{aligned}$$

En estos desarrollos se ha empleado el tercer Teorema del Transporte de Reynolds para poder introducir el símbolo de derivación dentro de las integrales del miembro de la izquierda de la expresión (1).

El Segundo Teorema del Transporte de Reynolds para un sistema de coordenadas no inercial aplicado al último término de la expresión (3) permite obtener el principio de conservación de:

- Cantidad de Movimiento Angular

$$\sum_{ext} \mathbf{M} = \int_{V_m} \rho [\mathbf{r}_o \times \mathbf{a} + \mathbf{R} \times (\mathbf{a} - \mathbf{A})] dV + \frac{\delta}{\delta t} \int_{V_a} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} dV + \oint_{A_a} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} dA \tag{4}$$

Por último cabe aquí señalar que también son válidas para esta sección las observaciones hechas al final de la Sección 2.1.2. con relación a las identidades 2.1.(5) y 2.1.(6). Adicionalmente, debe tenerse en cuenta que en las expresiones (1), (3) y (4) se cumple que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \int_{V_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{a} dV \quad \frac{\delta}{\delta t} \int_{V_a} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} dV = \int_{V_a} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{A} dV \tag{5}$$

obtenidas aplicando el tercer Teorema del Transporte de Reynolds para un sistema de coordenadas inercial y no inercial, respectivamente (ver 3.2.(3) en la próxima sección).

### 3.2. ECUACION DIFERENCIAL

#### 3.2.1. Relación del Vector Axial de Esfuerzo

De acuerdo a las Sección A.2.5.5. la relación del vector axial del tensor de esfuerzo expresa que

$$\oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{T}_x \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \mathbf{T}) \, d\mathcal{V} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{T}_x$  es el vector axial del tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$  y donde la integral de superficie con el vector tracción  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$  en el miembro izquierdo se ha convertido en la suma de dos integrales de volumen.

#### 3.2.2. Simetría del Tensor de Esfuerzo

De las ecuaciones 3.1.(1) y 3.1.(2) se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, \mathbf{r} \times \mathbf{g} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, d\mathcal{A} + \mathbf{M}_e = \sum_{ext} \mathbf{M} \quad (2)$$

La derivada (aplicando el tercer Teorema del Transporte de Reynolds) de la cantidad de movimiento angular es

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, d\mathcal{V} \quad (3)$$

donde al aplicar la derivada del producto en la segunda integral el términos  $d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{v}$  se anula debido a que los vectores son paralelos.

Substituyendo las expresiones (1) y (3) en la ecuación (2) y teniendo en cuenta que  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ , se obtiene que

$$\int_{\mathcal{V}_m} \rho \, \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, \mathbf{r} \times \mathbf{g} \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \mathbf{T}) \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{T}_x \, d\mathcal{V} \quad (4)$$

Reagrupando todos los términos excepto el del vector axial en un miembro finalmente queda que

$$\int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{T}_x \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{r} \times \left( \rho \, \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \, \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbf{T} \right) \, d\mathcal{V} = \mathbf{0} \quad (5)$$

Obsérvese que la segunda integral se ha anulado por cumplirse la ecuación de Cauchy 2.2.(1).

Debido a que la integral del primer miembro es nula para cualquier volumen material, entonces el integrando, que es el vector axial del tensor de esfuerzo, es también nulo. De la definición del vector axial (Sección A.1.7.10)

$$\mathbf{T}_x \times \mathbf{s} = -2 (\mathbf{T} - \mathbf{T}^t) \cdot \mathbf{s} \quad \forall \mathbf{s} \quad (6)$$

entonces, se deduce que el tensor de esfuerzo es un tensor simétrico

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^t \quad (7)$$

Como la parte isótropa de un tensor es siempre simétrica, la parte desviatoria del tensor de esfuerzo también lo es. Es decir,

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^t \quad (8)$$

Esta última expresión es conocida como la Segunda Ley del Movimiento de Cauchy (1827) [Serrin,1959] [Truesdell,1977] [Aris,1962]. Aunque Boltzmann (1927) reconoció que dicha ley puede igualmente servir como un axioma o postulado [Serrin,1959].

- Material Polar

En el caso de un material polar se debe introducir un momento torsional por unidad de masa  $\mathcal{G}$ , en adición a la fuerza de volumen  $\mathbf{g}$ , y un par-esfuerzo  $\mathbf{l}$  en adición a la tracción  $\mathbf{t}$ . Luego, ya que  $\mathbf{t}$  puede ser escrito como  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ , entonces  $\mathbf{l}$  puede ser escrito como  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{IB}$ , donde  $\mathbf{IB}$  representa el tensor de par-esfuerzo. Entonces 3.1.(2) se modifica en la forma

$$\sum_{ext} \mathbf{M} = \mathbf{M}'_g + \mathbf{M}'_s + \mathbf{M}_e = \int_{V_m} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{g} + \mathcal{G}) dV + \oint_{A_m} (\mathbf{r} \times \mathbf{t} + \mathbf{l}) dA + \mathbf{M}_e \quad (9)$$

y la ecuación de conservación de cantidad de movimiento angular equivalente a (2) para este caso da

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \int_{V_m} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{g} + \mathcal{G}) dV + \oint_{A_m} (\mathbf{r} \times \mathbf{t} + \mathbf{l}) dA + \mathbf{M}_e = \sum_{ext} \mathbf{M} \quad (10)$$

Substituyendo las expresiones (1) y (3) en la ecuación (10), al igual como se hizo con (2), considerando que  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$  y que  $\mathbf{l} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{IB}$ , resulta

$$\int_{V_m} \rho \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{V_m} \rho \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T}) dV + \int_{V_m} (\rho \mathcal{G} + \nabla \cdot \mathbf{IB}) dV + \int_{V_m} \mathbf{T}_x dV \quad (11)$$

Reagrupando todos los términos en un miembro, excepto los dos últimos, los cuales se reagrupan en el otro, finalmente queda que

$$\int_{V_m} (\mathbf{T}_x + \rho \mathcal{G} + \nabla \cdot \mathbf{IB}) dV = \int_{V_m} \mathbf{r} \times \left( \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbf{T} \right) dV = \mathbf{0} \quad (12)$$

Obsérvese que la segunda integral se ha anulado por cumplirse la ecuación de Cauchy 2.2.(1).

Debido a que la integral del primer miembro es nula para cualquier volumen material, entonces el integrando, que es el vector axial del tensor de esfuerzo, es también nulo. Esto es

$$\mathbf{T}_x + \rho \mathcal{G} + \nabla \cdot \mathbf{IB} = \mathbf{0} \quad (13)$$

En esta última expresión se puede observar claramente que el tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$  no es simétrico, aplicando la definición de vector axial (6). Por otro lado, el vector axial del tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}_x$  despejado de (13) y substituyendo lo restante en (10), considerando el Teorema de la divergencia, da que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \int_{V_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} dV + \oint_{A_m} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dA - \int_{V_m} \mathbf{T}_x dV \quad (14)$$

lo cual expresa que existe una pérdida (o ganancia dependiendo de los signos de las cantidades) de cantidad de movimiento angular debido a la no simetría del tensor de esfuerzo (o sea a su parte antisimétrica) por causa del momento torsional  $\mathcal{G}$  y del tensor de par-esfuerzo  $\mathbf{IB}$ . Algunos autores han sugerido agregar a  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  en el integrando del primer miembro de (10) una cantidad de movimiento angular específica por unidad de masa, intrínseca, producida por ciertos fenómenos moleculares relacionados con la teoría cinética de los gases [Truesdell & Toupin, 1960], pero aquí no se ha querido introducir dicha cantidad por la vaguedad que todavía envuelve a esta teoría. Sin embargo, para el caso planteado, el resultado (14) continúa siendo válido y la expresión (13) no es nula, sino igual a la derivada material de la cantidad mencionada multiplicada por la densidad.

## 4. CONSERVACION DE LA ENERGIA

### 4.1. ENERGIA TOTAL

#### 4.1.1. Conservación de la Energía Total

El Principio de la Conservación de la Energía Total establece que la variación de la energía interna más la energía cinética en un volumen material es igual a la potencia del trabajo realizado por las fuerzas de cuerpo, más la potencia del trabajo realizado por las fuerzas de superficie, más (menos) el calor que se recibe (libera) a través de la superficie y más (menos) el calor que se genera (atenúa) por radiación o por reacciones químicas exotérmicas (endotérmicas). En otras palabras esto sería

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_{V_m} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{A_m} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA - \int_{A_m} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{V_m} \Phi_r dV \quad (1)$$

donde

$$\mathcal{E}^T = \int_{V_m} \rho e dV = E \quad (2.a)$$

es la energía interna contenida en el volumen material, siendo  $e$  la energía interna específica. A este término también se le denomina energía térmica.

$$\mathcal{K} = \int_{V_m} \rho \left( \frac{v^2}{2} \right) dV \quad (2.b)$$

es la energía cinética contenida en el volumen material, siendo  $(v^2/2)$  la energía cinética específica por unidad de masa.

$$\dot{\mathcal{W}}_g = \int_{V_m} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV \quad (2.c)$$

es la potencia del trabajo realizado por las fuerzas de cuerpo o fuerzas a distancia. Estas fuerzas pueden ser conservativas y no conservativas o puede tener una combinación de ambas.

$$\dot{\mathcal{W}}_t^+ = \int_{A_m} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA = \int_{A_m} \mathbf{T} : \mathbf{v} \mathbf{n} dA = \int_{V_m} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) dV \quad (2.d)$$

es la potencia del trabajo realizado por las fuerzas de superficie o fuerzas de contacto. El superíndice '+' indica que las fuerzas son no conservativas y la potencia contiene la globalidad de todas las fuerzas de contacto o de superficie actuando como fuerzas externas. Las fuerzas internas, identificadas más adelante con un superíndice '-', no intervienen en el principio de conservación de la energía total debido que lo único que producen es un intercambio entre la energía mecánica y la energía térmica, que no se refleja en la totalidad de la energía.

En lo que respecta al calor se tiene que el término

$$\dot{\mathcal{Q}}_k = - \int_{A_m} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{q} dV \quad (2.e)$$

es el calor que se recibe a través de la superficie del volumen material normalmente mediante el mecanismo de la conducción. El término

$$\dot{\mathcal{Q}}_r = \int_{V_m} \Phi_r dV \quad (2.f)$$

es el calor que se genera (o se atenúa) por la radiación cuando el medio es participante (o absorbtivo), o también puede ser el calor generado por reacciones químicas exotérmicas (endotérmicas). Estos dos calores sumados conforman la cantidad total de calor  $\dot{\mathcal{Q}}$  que recibe el volumen material. O sea que

$$\dot{\mathcal{Q}} = \dot{\mathcal{Q}}_k + \dot{\mathcal{Q}}_r \quad (2.g)$$

Normalmente se emplea para el cálculo del flujo de calor en la superficie  $\mathbf{q}$  una relación constitutiva para la temperatura llamada la “Ley de Fourier”, y que expresa de la forma

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (2.h)$$

donde  $k$  es denominada la conductividad térmica.

Cuando existe la presencia de fuerzas, tanto conservativas (que provienen de una función potencial  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ ), como no conservativas (que provienen de procesos irreversibles), se tiene que

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^o + \mathbf{g}^* \quad \mathbf{g}^o = -\nabla \varphi \quad (3.a)$$

y las potencias de los trabajos de ambas fuerzas están relacionadas mediante

$$\dot{\mathcal{W}}_g = \dot{\mathcal{W}}^o + \dot{\mathcal{W}}_g^* \quad (3.b)$$

donde

$$\dot{\mathcal{W}}^o = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{g}^o \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}_m} \rho \nabla \varphi \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}_m} \rho \frac{d\varphi}{dt} \, d\mathcal{V} = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \varphi \, d\mathcal{V} = - \frac{d\mathcal{U}}{dt} \quad (3.c)$$

con

$$\mathcal{U} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \varphi \, d\mathcal{V} \quad (3.d)$$

es la potencia del trabajo realizado por las fuerzas conservativas y

$$\dot{\mathcal{W}}_g^* = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{V} \quad (3.e)$$

es la potencia del trabajo realizado por las fuerzas de cuerpo no conservativas. La cantidad  $\mathcal{U}$  se denomina energía potencial del volumen material, debido a que la fuerza  $\mathbf{g}^o$  se deriva del gradiente de una función potencial  $\varphi$ .

Substituyendo las expresiones (3) en el principio de conservación de la energía total (1), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \left( e + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_m} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_m} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}_m} \Phi_r \, d\mathcal{V} \quad (4)$$

Con todas las definiciones antes hechas, este principio de conservación puede expresarse de una forma más compacta como

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \dot{\mathcal{Q}} + \dot{\mathcal{W}}_t^+ + \dot{\mathcal{W}}_g^* \quad (5)$$

donde  $\mathcal{E}$  que es la energía total se define como

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^T + \mathcal{E}^M \quad \mathcal{E}^M = \mathcal{K} + \mathcal{U} \quad (6)$$

siendo  $\mathcal{E}^M$  la energía mecánica (energía cinética más energía potencial).

#### 4.1.2. Ecuación de la Energía Total

La ecuación de la energía total se obtiene a partir del principio de conservación aplicando el Tercer Teorema del Transporte a la derivada de la integral y aplicando el Teorema de la divergencia a las integrales sobre el área del volumen material. Luego se agrupan todos los términos en un miembro y se analiza que el volumen material puede ser cualquiera y por consiguiente el integrando debe ser nulo. De este procedimiento se obtiene de la ecuación (1) que

$$\rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi_r \quad (7)$$

y de la ecuación (4) que

$$\rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) = \rho \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi_r \quad (8)$$

## 4.2. ENERGIA MECANICA

### 4.2.1. Ecuación de la Energía Mecánica

Si la ecuación de Cauchy 2.2.(1) se multiplica escalarmente por la velocidad

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

y se tiene en consideración la relación

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) \quad (2)$$

se obtiene la ecuación de la energía cinética

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (3)$$

donde el segundo término del miembro de la derecha se puede descomponer en

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} \quad (4)$$

Aplicando esta descomposición la ecuación (3) queda como

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (5)$$

La fuerza  $\mathbf{g}$  puede descomponerse en una parte que es la fuerza conservativa  $\mathbf{g}^o$  y otra parte que es la fuerza no conservativa  $\mathbf{g}^*$  en la forma

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^o + \mathbf{g}^* \quad \mathbf{g}^o = -\nabla \varphi \quad (6)$$

Si se toma en cuenta que

$$\mathbf{g}^o \cdot \mathbf{v} = -\nabla \varphi \cdot \mathbf{v} = -\frac{d\varphi}{dt} \quad (7)$$

la ecuación (5) se transforma en la ecuación de la energía mecánica total que incluye la energía cinética y la energía potencial

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + \varphi \right) = \rho \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{v} \quad (8)$$

donde  $\mathbf{f}^*$  es la suma de todas las fuerzas no conservativas por unidad de volumen. O sea que

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f} - \rho \mathbf{g}^o \quad (9)$$

### 4.2.2. Conservación de la Energía Mecánica

Las ecuaciones de conservación integrales se obtienen a partir de las ecuaciones diferenciales anteriores (ecuaciones (5) y (8)) integrándolas en el volumen material y aplicándoles el Tercer Teorema del Transporte al término con las derivadas y el Teorema de la divergencia al término positivo del tensor esfuerzo. Siguiendo este procedimiento se obtienen las ecuaciones de conservación de la energía cinética y la energía mecánica total, respectivamente. Esto es,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \left( \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_{V_m} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{A_m} \mathbf{T} : \mathbf{v} \mathbf{n} dA - \int_{V_m} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} dV = \int_{V_m} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \left( \frac{v^2}{2} + \varphi \right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_m} \mathbf{T} : \mathbf{v}\mathbf{n} d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} \quad (11)$$

donde pueden identificarse los siguientes términos, a parte de los ya identificados en las expresiones 4.1.(2) y 4.1.(3),

$$\dot{\mathcal{W}}_t^+ = \int_{\mathcal{A}_m} \mathbf{T} : \mathbf{v}\mathbf{n} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}_m} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) d\mathcal{V} \quad (12.a)$$

es la potencia del trabajo realizado por aquellas fuerzas de contacto que actúan en la superficie del volumen material como fuerzas externas.

$$\dot{\mathcal{W}}_t^- = - \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} d\mathcal{V} \quad (12.b)$$

es la potencia del trabajo realizado por aquellas fuerzas de contacto que actúan dentro del volumen material como fuerzas internas que si realizan trabajo. Estas dos últimas potencias de trabajo sumadas dan  $\dot{\mathcal{W}}_t^*$ . O sea que

$$\dot{\mathcal{W}}_t^* = \dot{\mathcal{W}}_t^+ + \dot{\mathcal{W}}_t^- \quad (12.c)$$

Por último,

$$\dot{\mathcal{W}}^* = \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} = \dot{\mathcal{W}}_g^* + \dot{\mathcal{W}}_t^* \quad (12.d)$$

es la potencia del trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas. Adicionalmente

$$\dot{\mathcal{W}} = \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} = \dot{\mathcal{W}}_g + \dot{\mathcal{W}}_t^* = \dot{\mathcal{W}}^o + \dot{\mathcal{W}}^* \quad (12.e)$$

es la potencia del trabajo realizado por todas las fuerza, incluyendo las fuerzas a distancia y de contacto, o, equivalentemente, las fuerzas conservativas y no conservativas.

Para finalizar, se puede expresar los principios de conservación (10) y (11) en una forma más compacta haciendo uso de las cantidades definidas antes. Esto es,

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \dot{\mathcal{W}} \quad \frac{d\mathcal{E}^M}{dt} = \dot{\mathcal{W}}^* \quad \mathcal{E}^M = \mathcal{K} + \mathcal{U} \quad (13)$$

#### 4.2.3. Función de Disipación Viscosa

La función de disipación viscosa es aquella parte del integrando de  $\dot{\mathcal{W}}_t^-$  que depende de los esfuerzos viscosos. Se puede descomponer este integrando en la forma

$$\mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} = -P \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathcal{T} : \nabla \mathbf{v} \quad (14)$$

La segunda parte de (14) es entonces la función de disipación viscosa y se define como

$$\Phi_\mu = \mathcal{T} : \nabla \mathbf{v} = \mathcal{T} : \mathbf{D} \geq 0 \quad (15)$$

donde  $\mathbf{D}$  es el tensor velocidad de deformación definido antes en 2.3.(2) y  $\Phi_\mu$  siempre es positiva porque los esfuerzos viscosos siempre se oponen al movimiento del volumen material.

La potencia del trabajo de las fuerzas de presión en (14) se define como

$$\dot{\mathcal{W}}_p^- = \int_{\mathcal{V}_m} P \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} \quad (16.a)$$

La potencia del trabajo de las fuerzas viscosas en la función de disipación viscosa se define como

$$\dot{W}_\mu^- = - \int_{V_m} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \, dV = - \int_{V_m} \Phi_\mu \, dV = -\dot{Q}_\mu \quad (16.b)$$

La función de disipación viscosa puede interpretarse como aquella parte de la potencia de las fuerzas de contacto internas que disminuye la energía mecánica convirtiéndola en energía térmica. En la siguiente sección se desarrollarán las ecuaciones que reflejan este comportamiento.

### 4.3. ENERGIA TERMICA

Todas las ecuaciones de la energía térmica, tanto las diferenciales como las integrales se obtienen de restar las ecuaciones correspondientes de la energía mecánica a la ecuaciones de la energía total.

#### 4.3.1. Ecuación de la Energía Térmica

La ecuación de la energía térmica o ecuación de Neumann, como también se le conoce, se deriva de restar la ecuación 4.2.(5) a la ecuación 4.1.(5), obteniéndose

$$\rho \frac{de}{dt} = \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi_r \quad (1)$$

Teniendo en cuenta la relación 4.2.(14) y la definición 4.2.(15) la ecuación (1) se transforma en

$$\rho \frac{de}{dt} = -P \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (2)$$

donde

$$\Phi = \Phi_r + \Phi_\mu \quad (3)$$

es un término de fuente global que incluye la transferencia de calor por radiación o la influencia térmica de las reacciones químicas, y la generación de energía interna por la disipación viscosa, que transforma parte de la energía mecánica en energía térmica.

#### 4.3.2. Conservación de la Energía Térmica

Integrando las ecuaciones (1) y (2) en todo el volumen material, aplicando el Tercer Teorema del Transporte a la parte con la derivada, y aplicando el Teorema de la Divergencia al término con  $\mathbf{q}$ , resultan , respectivamente, la siguiente pareja de ecuaciones de conservación de la energía térmica

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho e \, dV = \int_{V_m} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} \, dV - \int_{A_m} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{V_m} \Phi_r \, dV \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho e \, dV = - \int_{V_m} P \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV - \int_{A_m} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{V_m} \Phi \, dV \quad (5)$$

donde, a parte de la definiciones ya hechas en 4.1.(2) en 4.2.(12) y en 4.2.(16), se tiene que

$$\dot{Q}_r + \dot{Q}_\mu = \int_{V_m} \Phi \, dV \quad (6.a)$$

$$\dot{Q}^+ = \dot{Q} + \dot{Q}_\mu \quad (6.b)$$

y las ecuaciones de conservación (4) y (5) se pueden expresar de una forma más compacta como

$$\frac{d\mathcal{E}^T}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}_t^- = \dot{Q}^+ - \dot{W}_p^- \quad (7)$$



#### 4.3.3. Ecuación de la Entalpía

La ecuación de la entalpía se obtiene a partir de la ecuación de Neumann (2) y de la definición de la entalpía

$$h = e + P v = e + \frac{P}{\rho} \quad (8)$$

De esta forma, substituyendo (8) en (2)

$$\rho \frac{dh}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{P}{\rho} \right) = -P \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (9)$$

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{dP}{dt} \right) - \frac{P}{\rho^2} \left( \frac{d\rho}{dt} \right) - \frac{P}{\rho^2} (\rho \nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (10)$$

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho} \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (11)$$

y, finalmente, considerando la ecuación de continuidad 1.2.(2) dentro de los corchetes, se obtiene

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (12)$$

#### 4.3.4. Ecuaciones de la Temperatura

Las ecuaciones de la temperatura se obtienen de la ecuación de Neumann (2), de la ecuación de la entalpía (12), respectivamente, y de las siguientes relaciones termodinámicas

$$C_p - C_v = \frac{T\beta^2}{\rho \kappa} \quad \left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - T\beta) \quad \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T = \frac{T\beta}{\kappa} - P \quad \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{\beta}{\kappa} \quad (13)$$

donde

$$C_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \quad (14.a)$$

es el *calor específico a presión constante*.

$$C_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \quad (14.b)$$

es el *calor específico a volumen constante*.

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (14.c)$$

es el *coeficiente de expansión volumétrica*.

$$\kappa = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \quad (14.d)$$

es el *coeficiente de compresibilidad isotérmica*.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (14.e)$$

es la equivalencia entre las derivadas del volumen específico y de la densidad, y donde en el último miembro se ha aplicado la ecuación de continuidad 1.2.(2).

La derivada de la energía interna se puede expandir en la forma

$$\frac{de}{dt} = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \frac{dT}{dt} + \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T \frac{dv}{dt} \quad (15)$$

Aplicando la definición (14.b), y las relaciones (13.c) y (14.e) se obtiene

$$\frac{de}{dt} = C_v \frac{dT}{dt} + \left( P - \frac{T\beta}{\kappa} \right) \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (16)$$

Substituyendo finalmente esta expresión en la ecuación de Neumann (2) y teniendo en consideración la ecuación de continuidad 1.2.(2), resulta la primera ecuación de la temperatura

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = -\frac{T\beta}{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (17)$$

La derivada de la entalpía se puede expandir en la forma

$$\frac{dh}{dt} = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \frac{dT}{dt} + \left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dt} \quad (18)$$

Aplicando la definición (14.a) y las relación (13.b) se obtiene

$$\frac{dh}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho} (1 - T\beta) \frac{dP}{dt} \quad (19)$$

Substituyendo finalmente esta expresión en la ecuación de la entalpía (12), resulta la segunda ecuación de la temperatura

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = T\beta \frac{dP}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (20)$$

## 5. CONSERVACION DE LA ENTROPIA

### 5.1. DESIGUALDAD INTEGRAL DE LA ENTROPIA

La desigualdad integral de la entropía se deduce de considerar que la variación de la entropía es siempre superior o igual a los calores recibidos por el volumen material, cada uno de ellos multiplicado por el inverso de su respectiva temperatura absoluta, como factor integrante. La temperatura de cada porción de área o de volumen que recibe su correspondiente calor debe ser la que se emplee como factor integrante. De este análisis entonces resulta que la desigualdad integral de la entropía se expresa como

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho s \, dV \geq - \oint_{A_m} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{V_m} \frac{\Phi_r}{T} \, dV \quad (1)$$

### 5.2. DESIGUALDAD DE CLAUSIUS-DUHEM

En la desigualdad integral de la entropía 5.1.(1) se puede aplicar el Tercer Teorema del Transporte de Reynolds al miembro de la izquierda y el Teorema de la Divergencia a la integral de superficie. Reagrupando

los términos en un sólo miembro y justificando que, si la desigualdad se cumple para la integral, también se cumple para el integrando, entonces se obtiene lo que se denomina la Desigualdad de Clausius-Duhem

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq -\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\Phi_r}{T} = \frac{1}{T} \left( -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \Phi_r \right) \quad (1)$$

donde en la igualdad lo que se ha hecho es desarrollar la derivación

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} \left( -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \quad (2)$$

El término de fuente de calor  $\Phi_r$  se puede despejar de la ecuación de la energía térmica 4.3.(1) y se puede substituir en la Desigualdad de Clausius-Duhem obteniéndose

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \frac{1}{T} \left( \rho \frac{de}{dt} - \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} \left( \rho \frac{de}{dt} + P \nabla \cdot \mathbf{v} - \Phi_\mu + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \quad (3)$$

Esta última expresión permite evaluar el miembro de la derecha de la Desigualdad de Clausius-Duhem sin la necesidad de conocer al término de fuente  $\Phi_r$ . Nótese que en el miembro de la derecha de la igualdad se ha substituido la expresión 4.2.(14) y la definición 4.2.(15).

En la desigualdad de Clausius-Duhem se verifica la igualdad sólo cuando existe equilibrio hidrodinámico ( $\Phi_\mu = 0$ ) y equilibrio térmico ( $\nabla T = \mathbf{0}$ ) locales. En este caso, y teniendo en consideración la relación 4.3.(14.e) para la divergencia de la velocidad, se tiene que

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + P \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

o eliminando el diferencial del tiempo

$$T ds = de + P dv \quad (5)$$

La condición de equilibrio hidrodinámico y térmico globales sólo cuando el proceso de evolución del sistema material es cuasi-estático, como se verá en el Capítulo VI. Sin embargo, se va a suponer de ahora en adelante que la condición de equilibrio hidrodinámico y térmico local es válida para cualquier proceso. A esta suposición se le denomina la *hipótesis de equilibrio local*, y la relación termodinámica (5) se asume que es válida siempre, aunque los diferenciales involucrados no sean exactos (los diferenciales pueden ser exactos, parciales, de línea, gradientes y otros operadores diferenciales lineales de primer orden).

### 5.3. ECUACION DE LA ENTROPIA

La ecuación de la entropía se obtiene de la relación termodinámica 5.2.(5)

$$T ds = de + P dv \quad (1)$$

la cual también es válida si se divide toda por el diferencial  $dt$ , como en la expresión 5.2.(4), con lo cual

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + P \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

Substituyendo ahora la Ecuación de la Energía Térmica 4.3.(2) y la relación 4.3.(14.e) se obtiene

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad \rho \frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi) \quad (3)$$

Esta ecuación de la entropía puede ser integrada en el volumen material obteniéndose también

$$\int_{\mathcal{V}_m} \rho T \frac{ds}{dt} d\mathcal{V} = - \oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}_m} \Phi d\mathcal{V} = \mathcal{Q}^+ \quad (4)$$

en donde se ha empleado las definiciones 4.3.(6) y se ha aplicado el Teorema de la Divergencia a la integral con  $\mathbf{q}$ .

La ecuación (4), sin embargo, puede ser expresada de una forma más conveniente si se divide (3) por  $T$  antes de realizar la integración. Esto es,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho s d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \frac{1}{T} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \frac{1}{T} \left( -\nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \Phi \right) d\mathcal{V} - \oint_{\mathcal{A}_m} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (5)$$

Observese que se ha empleado el Tercer Teorema del Transporte de Reynolds, la derivación 5.2.(2) y el Teorema de la Divergencia de nuevo.

#### 5.4. FUNCION FUENTE DE GENERACION DE ENTROPIA

Algunos autores acostumbran añadir a la ecuaciones 5.1.(1) y 5.2.(1) un término adicional para cumplir con la igualdad. A este término lo denominan la Generación de Entropía, y a la función específica  $\Psi$  la Función de Generación de la Entropía por unidad de volumen. En estos términos se tiene entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho s d\mathcal{V} = - \oint_{\mathcal{A}_m} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}_m} \frac{\Phi_r}{T} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_m} \Psi d\mathcal{V} \quad (1)$$

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\Phi_r}{T} + \Psi = \frac{1}{T} \left( -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \Phi_r \right) + \Psi \quad (2)$$

Si se substituye 5.3.(3) en (2), se obtiene que dicha Función de Generación de la Entropía puede ser calculada como

$$\Psi = \frac{1}{T} \left( \Phi_\mu - \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \geq 0 \quad (3)$$

Así la función de generación  $\Psi$  es positiva debido a la condición resultante en 5.5.(3) mostrada abajo y representa las irreversibilidades hidrodinámicas ocasionadas por la función de disipación viscosa y las irreversibilidades ocasionadas por existir desequilibrio térmico en la temperatura.

#### 5.5. CONDICIONES IMPUESTA POR LA ENTROPIA

Si se resta la ecuación 5.3.(3.b) a la desigualdad de Clausius-Duhem 5.2.(1), se obtiene que

$$\Phi_\mu - \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \geq 0 \quad (1)$$

donde se sabe que

$$\Phi_\mu \geq 0 \quad (2)$$

con lo que a su vez se obtiene que

$$\nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \leq 0 \quad (3)$$

Estas dos últimas expresiones básicamente lo que reflejan es que, por un lado, las fuerzas viscosas siempre se oponen al movimiento produciendo un trabajo interno en volumen material que es negativo. Por otro lado, el flujo de calor debe dirigirse en aquella dirección donde el gradiente de la temperatura es negativo.

Por otro lado, se puede demostrar que partiendo de las desigualdades (1) y (2) de manera axiomática, se puede obtener la Desigualdad de Clausius-Duhem 5.2.(1), y, por consiguiente, todas las expresiones de la Secciones 5.1 y 5.2.

## 6. ECUACION GENERAL DE CONSERVACION

En esta parte se planteará la *ecuación general de conservación*, que es un forma de colocar todas las ecuaciones de conservación vistas antes, bajo una sólo formulación, empleando variables genéricas. Estas variables genéricas son: La propiedad transportada  $\varphi$ , el flujo total  $\mathbf{J}_\varphi$ , el flujo convectivo  $\mathbf{m}_\varphi$ , el flujo difusivo  $\mathbf{j}_\varphi$ , el término de fuente  $\mathbf{S}_\varphi$  y la difusividad genérica  $\Gamma_\varphi$ . Todas las cantidades mencionadas pueden ser vectores o tensores, dependiendo del caso. A continuación se verá como encajan la variables genéricas dentro la formulación de la ecuación general de conservación. El esquema de planteamiento de las ecuaciones será muy parecido al empleado en las secciones anteriores. Primero se formulará la ecuación de conservación en su forma integral, y luego se deducirá la ecuación de conservación correspondiente en su forma diferencial.

### 6.1. SISTEMA CONTINUO

Un *sistema material continuo* se va a considerar aquel donde todas las funciones definidas y sus derivadas involucradas sean continuas. Normalmente estos sistemas son monofásicos, y con propiedades físicas y químicas homogéneas. Los sistemas multicomponentes caen también dentro de esta categoría, cuando presentan una sola fase.

#### 6.1.1. Ecuación Integral

La ecuación general de conservación para un sistema continuo se plantea como la conservación de una cantidad global en el volumen material

$$\int_{\mathcal{V}_m} \rho \varphi d\mathcal{V} \quad (1)$$

donde la variable  $\varphi$  es una cantidad intensiva especificada por unidad de masa. Para llevar esta cantidad a una cantidad intensiva por unidad de volumen, se multiplica por la densidad.

El cambio de la cantidad global (1) se plantea como

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \varphi d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{A}_m} \mathbf{j}_\varphi \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{S}_\varphi d\mathcal{V} \quad \mathbf{j}_\varphi = -\Gamma_\varphi \nabla \varphi \quad (2)$$

donde  $\mathbf{j}_\varphi$  es el flujo de la propiedad  $\varphi$  por unidad de área y unidad de tiempo, expresado como la difusión de dicha cantidad proporcional a su gradiente  $\nabla \varphi$ , siendo el factor de proporcionalidad  $\Gamma_\varphi$  la difusión genérica. La difusión genérica  $\Gamma_\varphi$  puede ser un escalar cuando el sistema es isótropo, que es el caso planteado en (2.b), o puede ser un tensor de segundo o cuarto orden contrayéndose una o dos veces con el gradiente  $\nabla \varphi$ , cuando el sistema es anisótropo, de manera que el resultado sea consistente con el resto de la ecuación. El último término de (2.a) se denomina el *término de fuente*, con la cantidad  $\mathbf{S}_\varphi$  especificada por unidad de volumen.

#### 6.1.2. Ecuación Diferencial

La ecuación integral (2) se puede modificar, aplicándole el Tercer Teorema del Transporte de Reynolds al miembro de la izquierda, y al término con la integral sobre  $\mathcal{A}_m$  se le puede aplicar el Teorema de la divergencia. Reagrupando todos los términos en un solo miembro e igualando a cero, resulta que el integrando es nulo, puesto que el volumen material  $\mathcal{V}_m$  es arbitrario. Esto es,

$$\rho \frac{d\varphi}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\varphi + \mathbf{S}_\varphi \quad \mathbf{j}_\varphi = -\Gamma_\varphi \nabla \varphi \quad (3)$$

El miembro de la izquierda de (3) se puede expresar de forma conservativa, considerando que

$$\rho \frac{d\varphi}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \right) = \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varphi \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m}_\varphi \quad \mathbf{m}_\varphi = \rho \varphi \mathbf{v} \quad (4)$$

obtenida mediante el uso de la ecuación de continuidad. De substituir (4) en (3), finalmente resulta

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\varphi = \mathbf{S}_\varphi \quad \mathbf{J}_\varphi = \mathbf{m}_\varphi + \mathbf{j}_\varphi \quad \mathbf{m}_\varphi = \rho \varphi \mathbf{v} \quad \mathbf{j}_\varphi = -\Gamma_\varphi \nabla \varphi \quad (5)$$

La ecuación (3) o (5) es la *ecuación general de conservación* en su forma diferencial, no conservativa o conservativa, respectivamente.

## 6.2. SISTEMA CON SUPERFICIE SINGULAR

Existe la posibilidad de presentarse el caso donde la función  $\rho \varphi$  se discontinua en una superficie  $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{V}_m$ . La superficie mencionada  $\mathcal{A}_i$ , denominada superficie singular por la razón antes mencionada, divide el volumen  $\mathcal{V}$  en dos partes a la que denominaremos  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$ . Cada uno de estos volúmenes esta rodeado por una superficie compuesta, en una parte, por una porción de la superficie  $\mathcal{A}_m$ , a la que denominaremos  $\mathcal{A}^-$  o  $\mathcal{A}^+$ , según se esté refiriendo al volumen  $\mathcal{V}_1$  o  $\mathcal{V}_2$ , y, en otra parte, por la superficie singular  $\mathcal{A}_i$ . Esto es

$$\mathcal{A}_o = \mathcal{A}^- \cup \mathcal{A}^+ = \mathcal{A}_m \quad \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^- \cup \mathcal{A}_i^- \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}^+ \cup \mathcal{A}_i^+ \quad (1.a)$$

$$\mathcal{A}_m = \partial \mathcal{V}_m \quad \mathcal{A}_1 = \partial \mathcal{V}_1 \quad \mathcal{A}_2 = \partial \mathcal{V}_2 \quad (1.b)$$

$$\mathcal{V}_* = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_m \quad \mathcal{A}_* = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \quad \mathcal{C}_i = \partial \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_m \quad (1.c)$$

coincidiendo  $\mathcal{A}_i^-$  o  $\mathcal{A}_i^+$  con  $\mathcal{A}_i$ , pero no ambas ( $\mathcal{A}_i^- \cap \mathcal{A}_i^+ = \emptyset$ ). Sin embargo, para los efectos de calcular la integrales sobre las superficies, se pueden considerar las tres superficies  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{A}_i^-$  y  $\mathcal{A}_i^+$  como si fuesen coincidentes. La diferencia entre estas superficies es solamente con respecto a cual es el valor de la función  $\rho \varphi$  sobre ellas. Esta descripción es similar al caso de dos intervalos adyacentes, donde uno de ellos es cerrado y el otro es abierto, siendo su intersección el conjunto vacío. La curva cerrada  $\mathcal{C}_i$  en la tercera ecuación de (1.c) es la frontera de la superficie singular  $\mathcal{A}_i$ .

La velocidad del sistema material en la superficie singular también puede ser discontinua, siendo denotada como  $\mathbf{v}_1$  o  $\mathbf{v}_2$ , dependiendo si se está del lado de  $\mathcal{V}_1$  o de  $\mathcal{V}_2$ , respectivamente. La velocidad de la superficie singular, que puede ser distintas a las velocidades anteriores, se denotará como  $\mathbf{v}_i$ . Los volúmenes  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$  siempre están presentes y fluyen separados por la superficie singular, considerando las observaciones hechas en el párrafo anterior. Sin embargo, considerando el volumen total  $\mathcal{V}$ , se puede decir que existe un flujo volumétrico a través de la superficie singular, siendo la velocidad de este flujo  $\mathbf{v}_1$  o  $\mathbf{v}_2$ , dependiendo del caso. La superficie singular posee una velocidad independiente de la velocidad del sistema material.

Con respecto a la componente tangencial de la velocidad material, se debe imponer la condición de que sean continuas en la superficie singular

$$\mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2} = \mathbf{v}_t(t, \mathbf{x}) \quad (2)$$

para que el problema sea cerrado. Es decir, para que al aplicar la Regla de Leibniz a la superficie singular  $\mathcal{A}_i$ , la función  $\mathbf{v}$  en dicha expresión tenga una connotación única (De otra forma, el problema de la superficie interfaz de la próxima sección carecería de sentido como se verá más adelante). La expresión (2) se conoce como la condición de no deslizamiento y no siempre se cumple. Sin embargo, si esta condición no se cumple, todo lo dicho en esta sección es igualmente válido, siempre que no se tenga que aplicar la Regla de Leibniz a la superficie singular  $\mathcal{A}_i$ . La componente tangencial de la velocidad material  $\mathbf{v}_t$  no debe confundirse nunca con la velocidad tangencial de la superficie singular.

### 6.2.1. Ecuación Integral

Aplicando en 6.1.(2) el resultado obtenido en las expresiones I.2.2.(22) del Teorema del Transporte en una superficie, para el caso con una superficie singular (sin considerar la integral sobre  $\mathcal{A}_i$  en la ecuación I.2.2.(22.a)), se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \varphi \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \left[ \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varphi \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{A}_i} \llbracket \rho \varphi (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \rrbracket \cdot \mathbf{n}_i \, d\mathcal{A} = - \int_{\mathcal{A}_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\varphi \, d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{S}_\varphi \, d\mathcal{V} \quad (3)$$

donde la operación indicada en la integral sobre  $\mathcal{A}_i$  significa

$$[[f]] = f_2 - f_1 \quad (4)$$

Todo el soporte de las herramientas matemáticas aplicadas en esta parte está explicado de forma resumida en la Sección I.2.2. del Teorema del Transporte para una superficie. Una explicación más extendida y para dominios más generales se encuentra en la Sección B.2.4. de la deducción de la Regla de Leibniz.

### 6.2.2. Ecuación Diferencial

La expresión (3) se puede aplicar a un volumen material con una superficie singular en donde se hacen colapsar las superficies  $\mathcal{A}^-$  y  $\mathcal{A}^+$  con la superficie singular  $\mathcal{A}_i$ . Anulando las integrales de volumen de este caso en el límite, se obtiene

$$\int_{\mathcal{A}_i} [[\rho\varphi(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) - \mathbf{j}_\varphi^t]] \cdot \mathbf{n}_i d\mathcal{A} = 0 \quad (5)$$

Como este resultado es válido para cualquier porción de la superficie singular, entonces el integrando es nulo, resultando el siguiente teorema [Truesdell,1960;Kotchine,(1926)].

**Teorema.** (Teorema de Kotchine). Para una superficie singular en el seno de un sistema material se cumple que

$$[[\rho\varphi(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) - \mathbf{j}_\varphi^t]] \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad (6)$$

Esta expresión también se conoce como la *condición de salto en una superficie singular*.

Sumando el resultado (5) en el segundo miembro de (3), y considerando la siguiente igualdad

$$\int_{\mathcal{A}_i} [[\mathbf{j}_\varphi^t]] \cdot \mathbf{n}_i d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\varphi d\mathcal{A} = - \int_{\mathcal{A}_*} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\varphi d\mathcal{A} = - \int_{\mathcal{V}_m} \nabla \cdot \mathbf{j}_\varphi d\mathcal{V} \quad (7)$$

luego de reagrupar todos los términos en un solo miembro, resulta

$$\int_{\mathcal{V}_m} \left[ \frac{\partial \rho\varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\varphi \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{j}_\varphi - \mathbf{S}_\varphi \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (8)$$

Este resultado es válido para cualquier porción de los volúmenes  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$  que incluya a una porción de la superficie singular  $\mathcal{A}_i$ . Por consiguiente, el integrando se anula en cada subdominio a uno y otro lado de la superficie singular, y la ecuación 6.1.(3) o 6.1.(5) es válida tanto para  $\mathcal{V}_1$  como para  $\mathcal{V}_2$  por separado.

## 6.3. SISTEMA CON SUPERFICIE INTERFAZ

Sea un sistema material bifásico  $\mathcal{V}_m$  formado por dos volúmenes  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$ , no necesariamente materiales, y una superficie interfaz  $\mathcal{A}_i$ , también no necesariamente material, ubicada entre los dos volúmenes. Para este caso, las expresiones B.2.4.(50) hasta B.2.4.(58) son igualmente válidas, particularizadas para dominios materiales inmersos en un espacio en  $\mathbb{R}^3$ , y donde las velocidades definidas son de los puntos materiales correspondientes en cada caso, como se hizo en la Sección I.2.2. Fíjese que las expresiones planteadas en 6.2.(1) son todas válidas, exceptuando a la primera ecuación de 6.2.(1.a) y de 6.2.(1.c), las cuales tienen en este caso una modificación debido a que la superficie interfaz tiene una personalidad propia con funciones definidas sobre ella.

### 6.3.1. Ecuación Integral

Aplicando los resultados mencionados antes a la función  $\rho\varphi$  en 6.1.(2), al igual como se hizo en I.2.2.(21), queda que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho\varphi d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_*} \rho\varphi d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_i} \left( \frac{d\rho_i\varphi_i}{dt} + \rho_i\varphi_i \nabla \cdot \mathbf{v}_p \right) d\mathcal{A} = - \int_{\mathcal{A}_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\varphi d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{S}_\varphi d\mathcal{V} \quad (1.a)$$

donde

$$\int_{\mathcal{A}_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\varphi \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}_o} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\varphi \, d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{C}_i} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{j}_{\varphi i} \, d\mathcal{L} \quad \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{S}_\varphi \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_*} \mathbf{S}_\varphi \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_i} \mathbf{S}_{\varphi i} \, d\mathcal{A} \quad (1.b)$$

con dominios y velocidades definidas como

$$\mathcal{V}_* = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_m - \mathcal{A}_i \quad \mathcal{A}_o = \mathcal{A}^+ \cup \mathcal{A}^- = \mathcal{A}_m - \mathcal{C}_i \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{ni} + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_{ni} = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad (2.a)$$

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2} \quad \mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad \mathbf{v}_{t2} = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad (2.b)$$

y donde  $\mathbf{n}_i$  se debe interpretar que es el vector unitario normal a la superficie interfaz  $\mathcal{A}_i$ , dirigiéndose de  $\mathcal{V}_1$  a  $\mathcal{V}_2$ , y  $\boldsymbol{\eta}$  es el vector unitario normal a la curva  $\mathcal{C}_i$  y tangente a la superficie interfaz  $\mathcal{A}_i$ . La curva cerrada  $\mathcal{C}_i$  denominada la *línea interfaz* tiene el mismo significado que en 6.2.(1.c), es decir, es la frontera de la superficie interfaz  $\mathcal{A}_i$ . Los conjuntos  $\mathcal{V}_*$  y  $\mathcal{A}_o$  son, correspondientemente en cada caso, la unión de dos conjuntos disjuntos. Fíjese que existe una diferencia sutil entre los conjuntos  $\mathcal{A}_o$  y  $\mathcal{A}_*$ . Las funciones  $\mathbf{j}_{\varphi i}$  y  $\mathbf{S}_{\varphi i}$ , usadas para tomar en cuenta la parte de las integrales (14.b) y (14.c) correspondientes a la línea interfaz y la superficie interfaz, están definidas por unidad de longitud y de área, respectivamente, y son llamadas el flujo y la fuente en la superficie interfaz.

La expresión equivalente a 6.2.(3), pero para una superficie interfaz, se obtiene cuando al primer término del miembro de la derecha de (1) se calcula como en B.2.4.(49) (pero suponiendo para simplificar que la métrica es constante,  $g = 1$  y  $\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ ), por lo que resulta la misma expresión I.2.2.(22.e)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_*} \rho \varphi \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_*} \left[ \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varphi \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{A}_i} [\rho \varphi (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})] \cdot \mathbf{n}_i \, d\mathcal{A} \quad (3)$$

donde se ha vuelto a aplicar la definición 6.2.(4).

### 6.3.2. Ecuación Diferencial

Aplicáense las expresiones (1) y (3) a un volumen material donde se hace colapsar las superficies  $\mathcal{A}^-$  y  $\mathcal{A}^+$  con la superficie singular  $\mathcal{A}_i$ . Aplicando el Teorema de la Divergencia para superficies curvas A.2.5.(75), y anulando las integrales de volumen de este caso en el límite, se obtiene

$$\int_{\mathcal{A}_i} \left\{ [\rho \varphi (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) - \mathbf{j}_\varphi^t] \cdot \mathbf{n}_i - \nabla \cdot \mathbf{j}_{\varphi i} + (\nabla \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{j}_{\varphi i} + \mathbf{S}_{\varphi i} - \left( \frac{d\rho_i \varphi_i}{dt} + \rho_i \varphi_i \nabla \cdot \mathbf{v}_p \right) \right\} d\mathcal{A} = 0 \quad (4)$$

Como este resultado es válido para cualquier porción de la superficie singular, entonces el integrando es nulo, resultando la siguiente expresión

$$[\rho \varphi (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) - \mathbf{j}_\varphi^t] \cdot \mathbf{n}_i - \nabla \cdot \mathbf{j}_{\varphi i} + (\nabla \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{j}_{\varphi i} + \mathbf{S}_{\varphi i} = \frac{d\rho_i \varphi_i}{dt} + \rho_i \varphi_i \nabla \cdot \mathbf{v}_p \quad (5)$$

conocida como la *condición de salto para una superficie interfaz*. En esta expresión el factor  $-(\nabla \cdot \mathbf{n}_i)$  es igual al doble de la curvatura media  $\kappa$ , la cual es positiva si  $\mathbf{n}_i$  apunta hacia el centro medio de curvatura, en caso contrario es negativa.

Ahora, sumando el resultado (4) al segundo miembro de (1), teniendo en cuenta (3) y la igualdad

$$\int_{\mathcal{A}_i} [\mathbf{j}_\varphi^t] \cdot \mathbf{n}_i \, d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_o} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\varphi \, d\mathcal{A} = - \int_{\mathcal{A}_*} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\varphi \, d\mathcal{A} = - \int_{\mathcal{V}_*} \nabla \cdot \mathbf{j}_\varphi \, d\mathcal{V} \quad (6)$$

similar a 6.2.(7), finalmente, luego de reagrupar los términos, se obtiene

$$\int_{\mathcal{V}_*} \left[ \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varphi \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{j}_\varphi - \mathbf{S}_\varphi \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (7)$$



Este resultado es válido para cualquier porción de los volúmenes  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$  que incluya a una porción de la superficie interfaz  $\mathcal{A}_i$ . Por consiguiente, el integrando se anula en cada subdominio a uno y otro lado de la superficie interfaz, y la ecuación 6.1.(3) o 6.1.(5) continúa siendo válida tanto para  $\mathcal{V}_1$  como para  $\mathcal{V}_2$  por separado.

### 6.3.3. Leyes de Conservación

Las Leyes de Conservación que son bien conocidas son: Masa, Cantidad de Movimiento Lineal, Cantidad de Movimiento Angular, Energía y Entropía. Basándose en las Ecuación General de Conservación, en su forma integral 6.1.(2.a) y en su forma diferencial 6.1.(3.a), válidas para cada fase, y en la Condición de Salto (5), todas estas leyes pueden ser resumidas en la siguiente tabla [Delhay, (1974); Drew & Wood, 1985], tanto para el volumen de cada fase como para la superficie interfaz:

**Tabla.** Variables para la Ecuación General de Conservación: Volúmenes de las Fases y Superficie Interfaz.

$\varphi$	$\mathbf{j}_\varphi$	$\mathbf{S}_\varphi$	$\varphi_i$	$\mathbf{j}_{\varphi_i}$	$\mathbf{S}_{\varphi_i}$
1	0	0	1	0	0
$\mathbf{v}$	$-\mathbf{T}$	$\rho \mathbf{g}$	$\mathbf{v}_p$	$-\sigma \mathbf{I}$	$\rho_i \mathbf{g}_i$
$\mathbf{r} \times \mathbf{v}$	$-(\mathbf{r} \times \mathbf{T}^t)^t$	$\rho \mathbf{r} \times \mathbf{g}$	$\mathbf{r} \times \mathbf{v}_p$	$-\sigma \mathbf{r} \times \mathbf{I}$	$\rho_i \mathbf{r} \times \mathbf{g}_i$
$\epsilon$	$\mathbf{q} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$	$\rho \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{v} + \Phi_r$	$\epsilon_i$	$-\sigma \mathbf{v}_p$	$\rho_i \mathbf{g}_i^* \cdot \mathbf{v}_p + \Phi_{ri}$
$s$	$\mathbf{q}/T$	$\Phi_r/T + \Psi$	$s_i$	$\mathbf{q}_i/T_i$	$\Phi_{ri}/T_i + \Psi_i$

En el grupo de las tres primeras columnas,  $\mathbf{v}$  es la velocidad material,  $\mathbf{T}$  es el tensor de esfuerzo,  $\mathbf{g}$  es la fuerza de cuerpo,  $\mathbf{r}$  es el vector de posición,  $\epsilon = e + \mathbf{v}^2/2 + \varphi$  es la energía total específica,  $e$  es la energía interna,  $\varphi$  es la energía potencial,  $\mathbf{q}$  es el vector flujo de calor,  $\mathbf{g}^*$  es la parte no conservativa de las fuerzas de cuerpo,  $s$  es la entropía,  $T$  es la temperatura absoluta,  $\Phi_r$  es el término de fuente de energía debido a la radiación o a reacciones químicas, y  $\Psi$  es el término de fuente de la entropía para evitar el uso de desigualdades.

En el segundo grupo de tres columnas referidas a la superficie interfaz,  $\mathbf{v}_p$  es la velocidad definida por (2.a),  $\sigma$  es la tensión superficial,  $\mathbf{g}_i$  es la fuerza de cuerpo,  $\mathbf{r}$  es el vector de posición,  $\epsilon_i = e_i + \mathbf{v}_p^2/2 + \varphi_i$  es la energía total específica,  $e_i$  es la energía interna,  $\varphi_i$  es la energía potencial,  $\mathbf{q}_i$  es el vector flujo de calor,  $\mathbf{g}_i^*$  es la parte no conservativa de las fuerzas de cuerpo,  $s_i$  es la entropía,  $T_i$  es la temperatura absoluta,  $\Phi_{ri}$  es el término de fuente de energía debido a la radiación o a reacciones químicas, y  $\Psi_i$  es el término de fuente de la entropía para evitar el uso de desigualdades. Lo que está expresado por unidad de volumen o área en el primer grupo de columnas, en el segundo grupo está expresado por unidad de área o longitud, respectivamente. Todas las funciones en el segundo grupo están exclusivamente definidas para la superficie interfaz.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Aris, R. **Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics**. Prentice-Hall, 1962.
- [2] Astarita, G. **An Introduction to Non-Linear Continuum Thermodynamics**. Società Editrice di Chimica, Milano, 1975.
- [3] Beran, M. J. **Statistical Continuum Theories**. Interscience Publishers, 1968.
- [4] Chorin, A. J.; Marsden, J. E. **A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics**, Third Edition. Springer-Verlag (New York), 1993.
- [5] Chung, T. J. **Continuum Mechanics**. Prentice-Hall International, 1988. Cambridge University Press, 1996.

- [6] Coleman, B. D.; Markovitz, H.; Noll, W. **Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids, Theory and Experiment**. Springer-Verlag, 1966.
- [7] Drew, D. A.; Wood, R. T. "Overview and Taxonomy of Models and Methods". **Workshop on Two-Phase Flow Fundamentals**. National Bureau of Standards, Gaithersburg, Maryland, U.S.A., Sept.22-27, 1985.
- [8] Eringen, A. C. **Mechanics of Continua**. John Wiley & Sons, 1967.
- [9] Eringen, C. (Ed.) **Continuum Physics**. Vol.I: "Mathematics". Vol.II: "Continuum Mechanics of Single Substance Bodies". Vol.III: "Mixtures and EM Field Theories". Vol.IV: "Polar and Nonlocal Field Theories". Academic Press (New York), 1971.
- [10] Fox, E. A. **Mechanics**. Harper International - Harper & Row - John Weatherhill, 1967.
- [11] Granados M., A. L. "Reynolds Transport Theorems as a Special Application of Leibniz Rule". **Proceedings of The Third Caribbean Congress on Fluid Dynamics and The Third Latin-American Symposium on Fluid Mechanics**. Universidad Simón Bolívar, Sartenejas, del 5 al 9 de Febrero de 1995. Caracas, Venezuela.
- [12] Granados M., A. L. "Aplicaciones de la Regla de Leibniz: Teoremas del Transporte de Reynolds y Principios de Conservación". **Boletín Técnico IMME** (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales - Universidad Central de Venezuela), Vol.34, No.3, pp.1-31, Octubre, (1996).
- [13] Granados, A. "Mecánica de Sistemas Materiales Continuos Desde Marcos de Referencia No Inerciales". Revista **Boletn Técnico IMME** (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales - Universidad Central de Venezuela), Vol.40, No.1, pp.59-94, Marzo de (2002).
- [14] Gurtin, M. E. **An Introduction to Continuum Mechanics**. Academic Press, 1981.
- [15] Jaunzemis, W. **Continuum Mechanics**. The McMillan Company, 1967.
- [16] Kotchine, N. E. "Sur la Théorie des Ondes de Choc dans un Fluide". **Rend. Circ. Mat. Palermo**, Vol.50, pp.305-344, (1926).
- [17] Lai, W. M.; Rubin, D.; Krempf, E. **Introduction to Continuum Mechanics**, Revised Edition in SI/ Metric Units. Pergamon Press, 1974/1978. Third Edition, 1993/1996. Butterworth-Heinemann (Elsevier), 1999. Fourth Edition, 2010.
- [18] Leigh, D. C. **Non Linear Continuum Mechanics**. McGraw-Hill, 1968.
- [19] León L., J. **Mecánica**. Editorial Limusa, 1979.
- [20] Lodge, A.S. **Body Tensor Fields in Continuum Mechanics with Applications to Polymer Rheology**. Academic Press, 1974.
- [21] Malvern, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Prentice-Hall, 1969.
- [22] Mase, G.E. **Theory and Problems of Continuum Mechanics**. McGraw-Hill, 1970.
- [23] Meriam, J. L. **Dinámica**. Editorial Reverté, S.A., 1990.
- [24] Narasimhan, M. N. L. **Principles of Continuum Mechanics**. John Wiley & Sons (New York), 1993.
- [25] Noll, W. "Lectures on the Foundations of Continuum Mechanics and Thermodynamics". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.52, pp.62-92, (1973). Reproducido en [Noll,1974].
- [26] Noll, W. **The Foundations of Mechanics and Thermodynamics**, Selected Papers. Springer-Verlag, 1974.
- [27] Roy, M. **Mecánica**. Vol.I: "Cuerpos Rígidos". Vol.II: "Medios Continuos". Marcombo, 1970.
- [28] Sedov, L. I. **Foundations of The Non-Linear Mechanics of Continua**. Pergamon Press, 1966.
- [29] Sedov, L. I. **A Course in Continuum Mechanics**. Vol.I: "Basic Equations and Analytical Techniques". Vol.II: "Physical Foundations and Formulations of Problems". Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971-1972.
- [30] Serrin, J. "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.VIII/1, pp.125-263. Springer-Verlag, 1959.

- [31] Slattery, J. C. **Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua**. McGraw-Hill, 1972.
- [32] Slattery, J. C. **Advanced Transport Phenomena**. Cambridge University Press, 1999.
- [33] Sommerfeld, A. **Mechanics of Deformable Bodies**. Lectures on Theoretical Physics, Vol.**II**. Academic Press, 1950. Fourth Printing, 1964.
- [34] Temam, R.; Miranville, A. **Mathematical Modeling in Continuum Mechanics**. Cambridge University Press, 2001.
- [35] Truesdell, C. A. **The Elements of Continuum Mechanics**. Springer-Verlag, 1966.
- [36] Truesdell, C. A. **Continuum Mechanics I: The Mechanical Foundation of Elasticity and Fluid Dynamics**. Gordon and Breach Science Publishers, 1966.
- [37] Truesdell, C. A. **A First Course in Rational Continuum Mechanics**. Vol.1: "General Concepts". Academic Press, 1977.
- [38] Truesdell, C. A.; Noll, W. "The Non-Linear Field Theories of Mechanics". **Encyclopedia of physics**. Ed. S. Flügge. Vol.**III/3**. Springer-Verlag, 1965.
- [39] Truesdell, C. A.; Toupin, R. A. "The Classical Field Theories". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.**III/1**, pp.226-793. Springer-Verlag, 1960.
- [40] Wang, C.- C. **Mathematical Principles of Mechanics and Electromagnetism**. Part A: Analytical and Continuum Mechanics. Part B: Electromagnetism and Gravitation. Plenum Press (New York), 1979.



# CAPITULO IV

## PRINCIPIOS VARIACIONALES

### CONTENIDO

1. PRINCIPIO DE HAMILTON.	113
2. SISTEMAS DISCRETOS.	114
2.1. Energía Cinética.	114
2.2. Fuerza y Trabajo.	114
2.3. Restricciones y Vínculos.	115
2.4. Ecuaciones de Lagrange.	116
3. SISTEMAS CONTINUOS.	116
3.1. Continuidad.	117
3.2. Energía Cinética.	117
3.3. Fuerzas y Esfuerzos.	117
3.4. Restricciones.	119
3.5. Ecuación de Cauchy.	119
BIBLIOGRAFIA.	120

### 1. PRINCIPIOS DE HAMILTON

Toda la mecánica variacional se basa fundamentalmente en el *principio de Hamilton*, el cual se puede enunciar de dos formas equivalente. La primera forma del principio de Hamilton expresa: Dentro de los movimientos admisibles de un sistema, el movimiento actual que éste sigue es aquel para el cual el valor de la integral

$$I = \int_{t_a}^{t_b} \mathfrak{S} dt = \int_{t_a}^{t_b} (\mathcal{K} + \mathcal{W} + \mathcal{R}) dt \quad (1)$$

es estacionaria en comparación con otros movimientos admisibles cercanos al actual. En (1),  $\mathcal{K}$  es la energía cinética del sistema,  $\mathcal{W}$  es el trabajo de las fuerzas externas,  $\mathcal{R}$  es la restricción al movimiento, y la suma de estas tres cantidades,  $\mathfrak{S}$ , es lo que se denomina el *lagrangeano expandido*. El langrangeano  $\mathcal{L} = \mathcal{K} + \mathcal{W}^o$ , que excluye el trabajo de las fuerzas no conservativas  $\mathcal{W}^*$  y el trabajo de las fuerzas generadas por las restricciones  $\mathcal{W}^\circ$ , es lo que tradicionalmente se ha llamado el *lagrangeano*.

La segunda forma del principio de Hamilton expresa: Dentro de los movimientos admisibles de un sistema, el movimiento actual que éste sigue es aquel para el cual se satisface

$$\delta I = \delta \int_{t_a}^{t_b} (\mathcal{K} + \mathcal{W} + \mathcal{R}) dt = \int_{t_a}^{t_b} \delta(\mathcal{K} + \mathcal{W} + \mathcal{R}) dt = \int_{t_a}^{t_b} (\delta\mathcal{K} + \delta\mathcal{W} + \delta\mathcal{R}) dt = 0 \quad (2)$$

En otras palabras, el movimiento actual del sistema es la solución o trayectoria extremal de (1).

Hasta ahora se han enunciado las dos formas del principio de Hamilton y se destaca que la segunda forma requiere de las expresiones para las variaciones de los componentes de la integral (1). Las formas de dichas componentes y el cálculo de sus variaciones se harán en las próximas secciones, primero para los sistemas discretos, y luego para los sistemas continuos.

## 2. SISTEMAS DISCRETOS

Para los sistemas discretos la formulación apropiada es la de Euler-Lagrange, tal como se describió de manera genérica en la sección D.8.2, y particularmente, para variaciones evolutivas en la sección D.8.4. Muchos de los resultados de esas secciones se evocarán de nuevo aquí.

### 2.1. ENERGIA CINETICA

Normalmente la energía cinética  $\mathcal{K}$  es una forma bilinear de la velocidad. En el caso de sistemas discretos, se tiene que la energía cinética  $\mathcal{K}$  se puede expresar como

$$\mathcal{K}[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)] = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}(t) \cdot \mathbf{II}[t, \mathbf{q}(t)] \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{2} \dot{q}^i \mathbf{II}_{ij} \dot{q}^j \quad (1)$$

donde  $\mathbf{q}(t)$  es la *coordenada generalizada*,  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  es la *velocidad generalizada* y  $\mathbf{II}$  es el *tensor de inercia generalizado*, el cual es simétrico y definido positivo.

La variación de la energía cinética en sistemas discretos se obtiene como

$$\delta \mathcal{K} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{II}_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{d \mathbf{II}_{ik}}{dt} \dot{q}^i - \mathbf{II}_{ik} \ddot{q}^i \right) \delta q^k \quad (2)$$

donde se ha empleado el resultado D.8.4.(1) solamente para  $\mathcal{K}$ . La derivada en el tiempo del tensor de inercia se calcula como

$$\frac{d \mathbf{II}_{ik}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{II}_{ik}}{\partial t} + \dot{q}^j \frac{\partial \mathbf{II}_{ik}}{\partial q^j} \quad (3)$$

### 2.2. FUERZA Y TRABAJO

El trabajo de las fuerzas externas  $\mathcal{W} = \mathcal{W}^o + \mathcal{W}^*$  puede ser descompuesto en trabajo de fuerzas conservativas  $\mathcal{W}^o$  y en trabajo de fuerzas no conservativas  $\mathcal{W}^*$ . Para sistemas discretos, las fuerzas conservativas  $\mathbf{Q}^o$  se definen siempre en función de un potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  en la forma

$$\mathbf{Q}^o = -\nabla \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad Q_i^o = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q^i} \quad (1.a)$$

y la potencia del trabajo realizado por estas fuerzas se calcula como

$$\dot{\mathcal{W}}^o = \mathbf{Q}^o \cdot \dot{\mathbf{q}} = Q_i^o \dot{q}^i = -\frac{d \mathcal{U}}{dt} \quad (1.b)$$

de manera que

$$\int_{t_a}^{t_b} \dot{\mathcal{W}}^o dt = \int_{\mathbf{q}_a}^{\mathbf{q}_b} \mathbf{Q}^o \cdot d\mathbf{q} = - \int_a^b d \mathcal{U} = \mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b \quad d \mathcal{W}^o = \mathbf{Q}^o \cdot d\mathbf{q} = Q_i^o dq^i = -d \mathcal{U} \quad (2)$$

En estas expresiones,  $\mathcal{U}$  también recibe el nombre de *energía potencial*.

Para sistemas discretos, las fuerzas no conservativas  $\mathbf{Q}^*$  generan una potencia y un trabajo determinados por

$$\dot{\mathcal{W}}^* = \mathbf{Q}^* \cdot \dot{\mathbf{q}} = Q_i^* \dot{q}^i \quad \int_{t_a}^{t_b} \dot{\mathcal{W}}^* dt = \int_{\mathbf{q}_a}^{\mathbf{q}_b} \mathbf{Q}^* \cdot d\mathbf{q} \quad d\mathcal{W}^* = \mathbf{Q}^* \cdot d\mathbf{q} = Q_i^* dq^i \quad (3)$$

donde la integración y derivación son de líneas, debido a que estas cantidades son dependientes del camino recorrido.

Las variaciones de los trabajos arriba descritos para sistemas discretos tienen la forma

$$\delta \mathcal{W}^o = \mathbf{Q}^o \cdot \delta \mathbf{q} = Q_i^o \delta q^i = -\delta \mathcal{U} \quad \delta \mathcal{W}^* = \mathbf{Q}^* \cdot \delta \mathbf{q} = Q_i^* \delta q^i \quad (4)$$

Estas formas se han derivado de (2) y (3), al interpretar los diferenciales como variaciones de las mismas cantidades.

### 2.3. RESTRICCIONES Y VINCULOS

Las restricciones  $\mathcal{R}$  al movimiento para sistemas discretos pueden expresarse de forma genérica como

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= g^j \lambda_j(t) & g^j[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)] &= \phi^j[t, \mathbf{q}(t)] + \dot{q}^i(t) \varphi_i^j[t, \mathbf{q}(t)] = 0 & i &= 1, 2, 3, \dots, n \\ \text{ó} \quad \dot{\mathcal{R}} &= g^j \dot{\lambda}_j(t) & & & j &= 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

para un sistema con  $n$  coordenadas generalizadas y  $m$  restricciones. Es decir, un sistema con  $n - m$  grados de libertad. Esto concuerda con la expresión D.8.2.(11) y su variante D.8.2.(22).

Las variaciones de las restricciones para sistemas discretos se expresan a partir de (1.a) como

$$\delta \mathcal{R} = \left\{ \left[ \frac{\partial \phi^j}{\partial q^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial t} + \left( \frac{\partial \varphi_l^j}{\partial q^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial q^l} \right) \dot{q}^l \right] \lambda_j + \varphi_i^j \dot{\lambda}_j \right\} \delta q^i \quad (2.a)$$

o a partir de (1.b) como

$$\delta \mathcal{R} = \lambda_j(t) \varphi_i^j[t, \mathbf{q}(t)] \delta q^i \quad (2.b)$$

Estos resultados concuerdan con aquellos obtenidos en D.8.2.(17) y D.8.2.(23), respectivamente.

Las restricciones (1), denominadas a veces como vínculos, pueden aparecer de varias formas. Cuando en (1.a)  $\varphi_i^j = 0$  el vínculo se denomina *holónomo*. De los vínculos holónomos, se pueden distinguir dos tipos: *reónomos*, si son independientes del tiempo, y *esclerónomos*, si lo contienen explícitamente. Cuando el vínculo es holónomo, las fuerzas internas generadas por los vínculos o *reacciones de vínculos* se calculan como

$$Q_i^\circ = \frac{\partial \phi^j}{\partial q^i} \lambda_j \quad (\text{vínculo holónomo}) \quad (3)$$

donde se ha considerado el parecido con 2.2.(4.b) al observar (2.a). Cuando el vínculo es no holónomo, entonces es conveniente expresar las reacciones de vínculos como

$$Q_i^\circ = \left[ \frac{\partial \phi^j}{\partial q^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial t} + \left( \frac{\partial \varphi_l^j}{\partial q^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial q^l} \right) \dot{q}^l \right] \lambda_j + \varphi_i^j \dot{\lambda}_j \quad (\text{vínculo no holónomo}) \quad (4)$$

$$\text{ó} \quad Q_i^\circ = \varphi_i^j \dot{\lambda}_j$$

donde se ha considerado el parecido con 2.2.(4.b) al observar (2.a) ó (2.b), respectivamente.

De acuerdo a lo expuesto en las expresiones anteriores, es conveniente escoger las coordenadas generalizadas de forma que las reacciones de vínculos (4) sean las más sencillas posibles. En el caso de vínculos

holónomos esto se establece definiendo las coordenadas generalizadas de manera que sean perpendiculares a las reacciones de vínculos. En otras palabras, las coordenadas generalizadas se escogen de forma que sean consistente a las reacciones de vínculos. De esta forma las reacciones de vínculos no aparecerán en las ecuaciones diferenciales finales para las coordenadas de los grados de libertad, puesto que son perpendiculares a ellas ( $n - m$  variables restantes  $q^i$ ,  $i = n - m + 1, \dots, n$ , en D.8.2.(20) ó D.8.2.(26)). Si por el contrario, se requiere del cálculo de las reacciones de vínculos, se resolverán el resto de las ecuaciones ( $2m$  variables  $q^i$  y  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ , en D.8.2.(19, 21) ó D.8.2.(25, 27)).

## 2.4. ECUACIONES DE LAGRANGE

Substituyendo en 1.(2) los resultados 2.1.(2), 2.2.(4), 2.3.(2) y 2.3.(4), se obtiene

$$\delta I = \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}^i} \right) + Q_i^\bullet \right] \delta q^i dt = 0 \quad Q_i^\bullet = Q_i + Q_i^\diamond \quad Q_i = Q_i^o + Q_i^* \quad (1)$$

donde  $Q^\bullet$  es la fuerza generalizada global, que incluye las fuerzas externas  $Q_i$  y las reacciones de los vínculos  $Q_i^\diamond$ . A su vez las fuerzas externas están compuestas por fuerzas conservativas  $Q_i^o$  y fuerzas no conservativas  $Q_i^*$ .

Como la energía potencial  $\mathcal{U}$  no depende obligatoriamente de las velocidades generalizadas  $\dot{q}^i$ , entonces (1) también se puede expresar en función del lagrangeano  $\mathcal{L}$  como

$$\delta I = \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) + Q_i^* \right] \delta q^i dt = 0 \quad \mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} \quad Q_i^* = Q_i^* + Q_i^\diamond = Q_i^\bullet - Q_i^o \quad (2)$$

donde  $Q_i^*$  es la suma de las fuerzas externas no conservativas  $Q_i^*$  y las reacciones de los vínculos  $Q_i^\diamond$ . Las reacciones de los vínculos normalmente son del tipo no conservativo, y pueden considerarse como reacciones internas del sistema.

La aplicación del lema fundamental (lema 0) a (1) y (2) a los términos con las coordenadas independientes ( $i = m - n + 1, \dots, n$ ) e imponiendo la anulación del integrando para los términos dependientes restantes ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ) junto con las restricciones en los vínculos, da como resultado

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q^i} = Q_i^\bullet \quad \text{ó} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = Q_i^* \quad \phi^j(t, \mathbf{q}) + \dot{q}^i \varphi_i^j(t, \mathbf{q}) = 0 \quad (3)$$

con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  y  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , donde las fuerzas generalizadas  $Q_i^\bullet$  y  $Q_i^*$  están definidas en (1) y (2).

Finalmente la substitución de la energía cinética, observando el resultado 2.1.(2), da

$$\mathbb{I}_{ik} \ddot{q}^i + \frac{d\mathbb{I}_{ik}}{dt} \dot{q}^i - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{I}_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k^\bullet \quad (4)$$

que no es nada más que la *ley del movimiento de Euler* para sistemas inerciales, cuya inercia puede ser variable de la configuración del sistema en el tiempo. Simultáneamente también debe satisfacerse (3.c). Cuando la inercia es no variable, se puede hablar de la ecuación de Newton para sistemas de partículas, aunque esta designación es cuestionable.

## 3. SISTEMAS CONTINUOS

Para los sistemas continuos la formulación apropiada es la de Euler-Ostrogradski, tal como se describió de manera genérica en la sección D.8.3, y particularmente, para variaciones evolutivas en el sección D.8.4. Muchos de los resultados de esas secciones del Apéndice D se evocarán de nuevo aquí.



### 3.1. CONTINUIDAD

Por *volumen material*  $\mathcal{V}_m = V_m(t)$ , se designa aquel volumen el cual contiene materia de densidad  $\rho(t, \mathbf{q})$  y cuya masa  $m$  es invariante en el tiempo. Esto es,

$$m = \int_{\mathcal{V}_m} \rho(t, \mathbf{q}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_o} \rho_o(\tilde{\mathbf{q}}) d\mathcal{V}_o \quad \frac{dm}{dt} = 0 \quad (1)$$

donde se puede definir, sin pérdida de generalidad, una *configuración de referencia*  $\mathcal{V}_o = V_m(0)$  con  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}[0, \tilde{\mathbf{q}}(0, \tilde{\mathbf{q}})]$ , siendo  $\mathbf{q}(t, \tilde{\mathbf{q}})$  las coordenadas generalizadas en la *configuración actual*, donde se emplea  $\tilde{\mathbf{q}}$  como una etiqueta para mantener la identidad de los puntos materiales. Esta configuración de referencia se define para  $t = 0$ , sin embargo, puede ser cualquier configuración factible en cualquier instante. La descripción espacial mencionada indica que la *derivación material* con respecto al tiempo debe hacerse manteniendo  $\tilde{\mathbf{q}}$  constante, de manera que dicha derivación se hace siguiendo el recorrido de un punto material identificado o marcado con su coordenada en la configuración de referencia  $\mathcal{V}_o$ .

La densidad en la configuración de referencia  $\rho_o(\tilde{\mathbf{q}}) = \rho[0, \mathbf{q}(0, \tilde{\mathbf{q}})]$  es constante en el tiempo por lo que la función  $\rho$  en (1) se dice que es localmente conservativa.

La aplicación de la expresión D.8.4.(31.b) a la función localmente conservativa  $\rho$ , da la *ecuación de continuidad*

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2)$$

donde la derivación con respecto al tiempo debe entenderse que se ha hecho manteniendo constante  $\tilde{\mathbf{q}}$ . Es decir, conservando la identidad de los puntos materiales. El operador  $\nabla$  debe interpretarse como el operador diferencial en función de las coordenadas  $\mathbf{q}$ , en la configuración actual  $\mathcal{V}_m$ , tal como se indica en D.8.4.(31). El operador diferencia en función de las coordenadas  $\tilde{\mathbf{q}}$ , en la configuración de referencia  $\mathcal{V}_o$ , se indicará como  $\tilde{\nabla}$ .

### 3.2. ENERGIA CINETICA

En el caso de sistema continuos, la energía cinética se define como una forma bilineal convexa

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \dot{\mathbf{q}}(t, \tilde{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{II}[t, \mathbf{q}(t, \tilde{\mathbf{q}})] \cdot \dot{\mathbf{q}}(t, \tilde{\mathbf{q}}) d\mathcal{V} \quad (1)$$

donde la coordenada y velocidad generalizadas dependen no sólo del tiempo, sino también de  $\tilde{\mathbf{q}}$ , que es la coordenada generalizada en la configuración de referencia del volumen material  $\mathcal{V}_m = V(t)$ . El tensor de inercia  $\mathbf{II}$ , al igual que en los sistemas discretos, es de nuevo simétrico y definido positivo.

Para sistemas continuos la variación de la energía cinética se calcula como

$$\delta \mathcal{K} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \left( \frac{1}{2} \nabla \mathbf{II} : \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{II}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{II} \cdot \ddot{\mathbf{q}} \right) \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{V} \quad (2)$$

donde se han empleado los resultados D.8.4.(2) y D.8.4.(16.a), y el operador  $\nabla$  se sobreentiende que actúa sobre la variable  $\mathbf{q}$ .

### 3.3. FUERZAS Y ESFUERZOS

Para sistemas continuos, la potencia del trabajo de las fuerzas conservativas se calcula como

$$\dot{\mathcal{W}}^o = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{g}^o \cdot \dot{\mathbf{q}} d\mathcal{V} = - \frac{d\mathcal{U}}{dt} \quad \mathbf{g}^o = -\nabla \varphi(\mathbf{q}) \quad \mathcal{U} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \varphi d\mathcal{V} \quad (1)$$

donde  $\varphi$  es el potencial que genera la fuerza conservativa  $\mathbf{g}^o$ , la cual es una fuerza de cuerpo o a distancia. En las expresiones anteriores se ha empleado la regla de la cadena y el tercer teorema del transporte de

Reynolds. Las fuerzas no conservativas pueden ser de dos tipos: fuerzas de cuerpo o a distancia  $\mathbf{g}^*$  y fuerzas de superficie o de contacto  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ , siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario exterior y  $\mathbf{T}$  el el tensor de esfuerzo generalizado ( $\mathbf{g} = \mathbf{g}^o + \mathbf{g}^*$ ). Así que en este caso, la potencia del trabajo de las fuerzas mencionadas se calcula como

$$\dot{\mathcal{W}}^* = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{g}^* \cdot \dot{\mathbf{q}} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_m} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{q}} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}_m} [\dot{\mathbf{q}} \cdot (\rho \mathbf{g}^* + \nabla \cdot \mathbf{T}) + \nabla \dot{\mathbf{q}} : \mathbf{T}^t] d\mathcal{V} \quad \nabla \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}^{-t} \cdot \frac{d}{dt}(\tilde{\nabla} \mathbf{q}) \quad (2)$$

donde  $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(t)$  es la frontera de  $\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m(t)$ , por lo que se ha aplicado el teorema de la divergencia al segundo término, y se ha aplicado la identidad  $\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) + \nabla \mathbf{v} : \mathbf{T}^t$  (Nota:  $\nabla = \nabla_q$  y  $\tilde{\nabla} = \nabla_{\tilde{q}}$ ).

Para los sistemas continuos, es conveniente expresar las variaciones de los trabajos de las fuerzas externas en las formas

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^o &= \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{g}^o \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{V} = -\delta \mathcal{U} & \delta \mathcal{W}^* &= \int_{\mathcal{A}_o^+} \mathbf{s} \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{A}_o + \int_{\mathcal{V}_o} \rho_o \tilde{\mathbf{g}}^* \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{V}_o \\ & & &= \int_{\mathcal{A}_m^+} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{g}^* \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (3)$$

donde en la variación del trabajo no conservativo se han aplicado los resultados de la sección D.8.4.3 de restricciones evolutivas (expresiones D.8.4.(8)-D.8.4.(11)) y las relaciones D.8.4.(16) (cambiando  $\mathbf{N}$  por  $\tilde{\mathbf{n}}$  y subindicando  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{A}$  con  $m$ ). Aquí se ha asumido que  $\rho_o = J \rho$  no varía, puesto que es una función localmente conservativa. Las operaciones se han realizado sobre  $\mathbf{S}$ , el tensor de esfuerzo generalizado en la configuración de referencia ( $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ ) y luego se ha revertido el cambio a  $\mathbf{T}$  con la ayuda de las expresiones

$$J \rho = \rho_o \quad \mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \quad J \nabla \cdot \mathbf{T} = \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S} \quad (4)$$

La primera integral de (3.b) no incluye la porción  $\mathcal{A}_m^-$ , ya que  $\delta \mathbf{q}$  es nula allí. (Nota: el cambio de variable empleado en la sección D.8.4.3 es  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{q}$ ,  $\xi \cdot \boldsymbol{\lambda} = \rho_o \tilde{\mathbf{g}}^* + \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S}$ , y  $\psi \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{S}^t$ ).

Un ejemplo de un medio continuo es un fluido newtoniano, el cual posee la siguiente relación constitutiva para el esfuerzo  $\mathbf{T}$ , en función del tensor velocidad de deformación  $\mathbf{D}$ , de la forma

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^t) \quad \mathbf{G} = (\nabla \mathbf{v})^t \quad (5)$$

$$\mathbf{T} = (-P + \lambda \vartheta) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad \vartheta = \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr} \mathbf{D} \quad (6)$$

donde  $\mathbf{G}$  es el gradiente del campo de velocidades, y  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  si se satisface la *hipótesis de Stokes*.

Otro ejemplo de un medio continuo es un sólido elástico de Hook isótropo, el cual posee una relación constitutiva para el esfuerzo  $\mathbf{S}$ , en función del tensor de deformación infinitesimal  $\mathbf{E}$ , de la forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) \quad \mathbf{L} = (\nabla \mathbf{u})^t \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (7)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{L} = (\nabla \mathbf{x})^t \quad \varrho = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr} \mathbf{E} = \text{tr} \mathbf{L} \quad \mathbf{G} = \frac{\mathbf{E}}{2(1 + \nu)} \quad (8)$$

$$\mathbf{S} = \lambda_e \varrho \mathbf{I} + 2\mu_e \mathbf{E} = \left[ \left( \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{I} + 2\mathbf{G} \mathbf{E} \quad (9)$$

Aquí,  $\mathbf{F}$  es el tensor gradiente de deformación,  $\mathbf{L}$  es el tensor gradiente de desplazamiento,  $\mathbf{S}$  es el tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{G}$  es el módulo de corte,  $\mathbf{E}$  es el módulo de elasticidad de Young, y  $\nu$  es el módulo de Poisson. Los coeficientes

$$\lambda_e = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \quad \mu_e = G \quad (10)$$

son denominados coeficientes de Lamé.

### 3.4. RESTRICCIONES

Para sistemas continuos las restricciones se especifican imponiendo el movimiento de la frontera en una subregión  $\mathcal{A}_m^-$  de la frontera. Esto es equivalente a imponer que  $\delta \mathbf{q} = \mathbf{0}$  en esta subregión de la frontera. También se puede especificar una restricción imponiendo que la potencia del trabajo de las fuerzas internas es una función conocida. Esto es,

$$\dot{\mathcal{R}} = \int_{\mathcal{V}_m} [\Phi(t, \mathbf{q}) - \mathbf{T} : \mathbf{G}] d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_o} [\Phi_o(t, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{S} : \dot{\mathbf{F}}] d\mathcal{V}_o = 0 \quad \mathbf{G} = (\nabla_q \dot{\mathbf{q}})^t \quad \mathbf{F} = (\tilde{\nabla} \mathbf{q})^t \quad (1)$$

donde  $\mathbf{G}$  es el gradiente de la velocidad generalizado calculado en la configuración actual y  $\mathbf{F}$  es el gradiente de la deformación generalizado calculado en la configuración de referencia. El tensor de esfuerzo generalizado  $\mathbf{T}$  en la configuración actual puede transformarse a la configuración de referencia mediante 3.3.(4.b). De aquí se tiene que

$$J \mathbf{T} : \mathbf{G} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{F}} \quad J \Phi = \Phi_o \quad (2)$$

La derivada del tensor  $\mathbf{F}$  se puede calcular empleando la expresión D.8.4.(30.a).

Para sistemas continuos, las variaciones de las restricciones (1) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R} &= - \int_{\mathcal{V}_o} \mathbf{S} : \delta \mathbf{F} d\mathcal{V}_o = - \int_{\mathcal{A}_o^+} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{A}_o + \int_{\mathcal{V}_o} (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S}) \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{V}_o \\ &= - \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{T} : (\nabla_q \boldsymbol{\eta})^t d\alpha d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{A}_m^+} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}_m} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (3)$$

donde se ha empleado la expresión D.8.4.(28) y la integración por parte para la obtención del resultado en la configuración de referencia. Este resultado también se puede obtener aplicando la expresión D.8.4.(10), sin considerar el término con  $\dot{\mathbf{q}}$ . (Nota: el cambio de variable es  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{q}$ ,  $\phi \cdot \boldsymbol{\lambda} = \Phi_o$ , y  $\psi \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{S}^t$ ). Adicionalmente a la integración por parte y la expresión D.8.4.(28), se ha empleado la relación D.8.4.(30.a) para la obtención del resultado en la configuración actual.

### 3.5. ECUACION DE CAUCHY

Substituyendo los resultados de las variaciones 3.2.(2), 3.3.(3) y 3.4.(3) en el principio de Hamilton 1.(2), se obtiene en la configuración actual

$$\delta I = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_{\mathcal{V}_m} [\rho (\frac{1}{2} \nabla \mathbf{II} : \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{II}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{II} \cdot \ddot{\mathbf{q}}) + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T}] \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_m^+} (\mathbf{t} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{A}_m \right\} dt \quad (1)$$

donde  $\mathbf{g} = \mathbf{g}^o + \mathbf{g}^*$ . En la configuración de referencia se obtiene equivalentemente

$$\delta I = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_{\mathcal{V}_o} [\rho_o (\frac{1}{2} \mathbf{F}^{-t} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{II}} : \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\tilde{\mathbf{II}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{II}} \cdot \ddot{\mathbf{q}}) + \rho_o \tilde{\mathbf{g}} + \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S}] \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{V}_o + \int_{\mathcal{A}_o^+} (\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}) \cdot \delta \mathbf{q} d\mathcal{A}_o \right\} dt \quad (2)$$

donde  $\tilde{\mathbf{g}}(t, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{q})$  y  $\tilde{\mathbf{II}}(t, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{II}(t, \mathbf{q})$ , son los mismos valores de las funciones evaluadas en la configuración de referencia y en la configuración actual.

Aplicando finalmente los lemas para funciones de varias variables (lemas 1 y 2), se obtiene la *ecuación de Cauchy* en la configuración actual

$$\rho (\mathbf{II} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{II}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{II} : \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad \text{en } \mathcal{V}_m \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad \text{en } \mathcal{A}_m^+ \quad (3)$$

o en la configuración de referencia

$$\rho_o (\tilde{\mathbf{I}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\tilde{\mathbf{I}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-t} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{I}} : \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}) = \rho_o \tilde{\mathbf{g}} + \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S} \quad \text{en } \mathcal{V}_o \quad \mathbf{s} = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S} \quad \text{en } \mathcal{A}_o^+ \quad (4)$$

Para los sistemas continuos la derivada con respecto al tiempo del tensor de inercia es calculado como

$$\dot{\mathbf{I}} = \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla \mathbf{I} \quad \dot{\tilde{\mathbf{I}}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{I}}}{\partial t} \quad (5)$$

La expresión (5.a) es equivalente a 2.1.(3).

Para los sistemas continuos, se pueden obtener expresiones similares a 2.4.(3), si se introduce el concepto de energía cinética específica  $\kappa$  y el lagrangeano específico en la forma

$$\kappa = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad \ell = \kappa - \varphi \quad (6)$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \kappa) - \nabla_{\mathbf{q}} \kappa = \mathbf{g}^\bullet \quad \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \ell) - \nabla_{\mathbf{q}} \ell = \mathbf{g}^\star \quad \Phi(t, \mathbf{q}) = \mathbf{T} : (\nabla \dot{\mathbf{q}})^t \quad (7)$$

donde

$$\mathbf{g}^\bullet = \mathbf{g} + \mathbf{g}^\diamond \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}^o + \mathbf{g}^\star \quad \mathbf{g}^\star = \mathbf{g}^\star + \mathbf{g}^\diamond = \mathbf{g}^\bullet - \mathbf{g}^o \quad \mathbf{g}^\diamond = \frac{\nabla \cdot \mathbf{T}}{\rho} \quad (8)$$

En la configuración de referencia, esta descripción ya no es posible (ver el primer término de la ecuación (2)), al menos que se deje sin cambiar los miembros izquierdos de las dos primeras igualdades de (7). Sin embargo, si se desean hacer los cambios, por 3.3.(4) se debe cumplir que  $\mathbf{g}^\diamond = \nabla \cdot \mathbf{T} / \rho = \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S} / \rho_o = \tilde{\mathbf{g}}^\diamond$ . Adicionalmente, se deben tomar todas las demás fuerzas específicas  $\tilde{\mathbf{g}}$  como las mismas funciones (8), pero descritas en la configuración de referencia  $\mathcal{V}_o$ . Finalmente, la restricción (7.c) debe tomarse como  $\Phi_o(t, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{S} : \dot{\tilde{\mathbf{F}}}$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Arnold, V. I. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**, Second Edition. Springer-Verlag, 1989.
- [2] Bedford, A. **Hamilton's Principle in Continuum Mechanics**. Pitman Publishing, 1985.
- [3] Blanchard, Ph.; Brüning, E. **Variational Methods in Mathematical Physics**, A Unified Approach. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [4] Elliott, C. M.; Ockendon, J. R. **Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems**. Pitman Publishing, 1982.
- [5] Feijóo, R. A.; Taroco, E.; Pereira, N. Z. **II Curso de Mecánica Teórica y Aplicada. Módulo I: Principios Variacionales en Mecánica**. Laboratorio de Computação Científica LNCC/CNPq, 1991.
- [6] Goldstein, H. **Mecánica Clásica**. Aguilar S. A. de Ediciones, 1963/1969
- [7] Goldstein, H. **Mecánica Clásica**, 2<sup>da</sup> Edition, 3<sup>ra</sup> Reimpresión. Aguilar S. A. de Ediciones, 1977. Editorial Reverté, 1998.
- [8] Goldstein, H. **Classical Mechanics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Addison-Wesley, 1980.
- [9] Goldstein, H.; Poole, Ch.; Safko, J. **Classical Mechanics**, 3<sup>rd</sup> Edition. Addison-Wesley (San Francisco), 2002.

- [10] Granados M., A. L. *Principios Variacionales en la Mecánica del Continuo*. **Boletín Técnico IMME** (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales - Universidad Central de Venezuela), Vol.**36**, No.1, pp.19-42, Marzo de (1998).
- [11] Komkov, V. **Variational Principles of Continuum Mechanics With Engineering Applications**. Vol.1: "Critical Points Theory". Vol.2: "Introduction to Optimal Design Theory". D. Reidel Publishing Company (Dordrecht-Holland), 1986.
- [12] Lanczos, C. **The Variational Principles of Mechanics**, Fourth Edition. University of Toronto Press (Toronto), 1970. Dover Publications, 1986.
- [13] Langhaar, H. L. **Energy Methods in Applied Mechanics**. John Wiley & Sons, 1962.
- [14] Lovelock, D.; Rund, H. **Tensors, Differential Forms, and Variational Principles**. John Wiley & Sons, 1975.
- [15] Serrin, J. "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.**VIII/1**, pp.125-263. Springer-Verlag, 1959.
- [16] Washizu, K. **Variational Methods in Elasticity and Plasticity**. Pergamon Press, 1968.



# CAPITULO V

## DINAMICA DE LOS SISTEMAS MATERIALES

### CONTENIDO

1. ECUACIONES UNIVERSALES DE LA MECANICA.	124
1.1. Cantidad de Movimiento Lineal.	124
1.1.1. Masa.	124
1.1.2. Momento Lineal.	125
1.1.3. Cantidad de Movimiento.	125
1.1.4. Primera Ley Diferencial.	126
1.1.5. Primera Ley Integral.	126
1.2. Cantidad de Movimiento Angular.	127
1.2.1. Cantidad de Movimiento Absoluto.	127
1.2.2. Cantidad de Movimiento Relativo.	127
1.2.3. Segunda Ley Diferencial.	128
1.2.4. Segunda Ley Integral.	130
1.2.5. Primer Teorema de König.	130
1.2.6. Teorema de Steiner.	131
1.2.7. Transporte del Tensor de Inercia.	131
1.3. Energía.	133
1.3.1. Energía Cinética.	133
1.3.2. Trabajo de las Fuerzas.	133
1.3.3. Energía Potencial.	134
1.3.4. Energía Mecánica Total.	135
1.3.5. Tercera Ley.	135
1.3.6. Segundo Teorema de König.	136
2. SIMPLIFICACION PARA FUNCIONES UNIFORMES.	137
2.1. Fluidos Incompresibles.	137
2.1.1. Masa.	138
2.1.2. Cantidad de Movimiento Lineal.	138
2.1.3. Cantidad de Movimiento Angular.	139
2.2. Fluidos Compresibles.	139
2.2.1. Masa.	139

2.2.2. Cantidad de Movimiento Lineal.	140
2.2.3. Cantidad de Movimiento Angular.	140
BIBLIOGRAFIA.	140

## 1. ECUACIONES UNIVERSALES DE LA MECANICA

Las ecuaciones universales de la mecánica para sistemas de  $N$  partículas son prácticamente las mismas que para sistemas materiales continuos. La analogía entre estos dos puntos de vista se puede observar al analizar las siguientes expresiones:

$$B = \sum_{i=1}^N m_i b_i \quad B = \int_{V_m} \rho b \, dV \quad (1)$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i b_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{db_i}{dt} \quad \frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho b \, dV = \int_{V_m} \rho \frac{db}{dt} \, dV \quad (2)$$

Nótese que en la expresión (2) en la parte derecha se ha aplicado el Tercer Teorema del Transporte de Reynolds, que es lo que hace válida la analogía mencionada. En este capítulo trataremos con las Ecuaciones Universales de la Mecánica desde el punto de vista de los sistemas materiales continuos, en donde las propiedades integrales del sistema se establecen mediante una integral de volumen y no mediante una sumatoria para todas las partículas.

### 1.1. CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

La cantidad de movimiento lineal se puede medir desde un punto de vista inercial o desde un punto de vista relativo a un sistema de coordenadas no inercial, basándose en sus respectivos vectores de posición que están relacionados de acuerdo a I.1.4.(1.a) donde

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{R} \quad (1)$$

A estos dos puntos de vista los llamaremos de ahora en adelante como “Absoluto” y “Relativo”.

#### 1.1.1. Masa

La masa de un sistema material continuo se define como

$$m = \int_{V_m} \rho \, dV \quad (2)$$

y cumple con la propiedad de que es invariante en el tiempo. Esto es,

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (3)$$

de acuerdo al principio de la conservación de la masa III.1.1.

El centro de masa del sistema material se define como aquel punto del espacio cuyo vector de posición viene dado por

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \int_{V_m} \rho \mathbf{r} \, dV = \frac{1}{m} \mathbf{r}_o + \mathbf{R}_c \quad (4)$$

donde

$$\mathbf{R}_c = \frac{1}{m} \int_{V_m} \rho \mathbf{R} \, dV = \frac{\mathbf{L}_o}{m} \quad (5)$$



es la posición relativa del centro de masa. Las cantidades  $\mathbf{l}$  y  $\mathbf{L}_o$  que son los momentos lineales absoluto y relativo, respectivamente, se definen en la siguiente sección.

Es interesante hacer notar que el centro de masa no necesariamente debe quedar dentro del sistema material, hay casos donde puede quedar afuera.

### 1.1.2. Momento Lineal

Los momentos lineales para los dos puntos de vista inercial y relativo se definen como

$$\mathbf{l} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{r} d\mathcal{V} = m \mathbf{r}_c \quad \mathbf{L}_o = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{R} d\mathcal{V} = m \mathbf{R}_c \quad (6)$$

respectivamente.

Estas dos cantidades están relacionadas por

$$\mathbf{l} = m\mathbf{r}_o + \mathbf{L}_o \quad (7)$$

donde  $m$  es la masa del sistema. Aquí podemos ver entonces como se obtuvieron las últimas partes de las expresiones (4) y (5).

### 1.1.3. Cantidad de Movimiento

La velocidad de un sistema material en cada punto se define, de acuerdo a las expresiones I.1.4.(1.b) y (2.a), como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \mathbf{V} \quad (8)$$

y la velocidad del centro de masa como

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} \quad (9)$$

La cantidad  $\mathbf{p}$  de la expresión anterior es denominada cantidad de movimiento lineal y se define como

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{v} d\mathcal{V} = m \mathbf{v}_c = m \mathbf{v}_o + \mathbf{p}_o \quad (10)$$

donde

$$\mathbf{p}_o = \frac{d\mathbf{L}_o}{dt} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \mathbf{V}) d\mathcal{V} = \mathbf{IP}_o + \mathbf{P}_o \quad (11)$$

en cuya expresión también se definen

$$\mathbf{IP}_o = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} d\mathcal{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_o \quad (12)$$

y

$$\mathbf{P}_o = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} = m \mathbf{V}_c \quad (13)$$

que son la cantidad de movimiento lineal debida a la rotación del sistema de coordenadas no inercial y la cantidad de movimiento lineal relativa a dicho sistema.

### 1.1.4. Primera Ley Diferencial

La Primera Ley Universal de la Mecánica en su forma diferencial, suponiendo que la suma de todas las fuerzas internas es nula, esto es

$$\sum_{int} \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (14)$$

puede ser expresada de la siguiente manera

$$\sum_{ext} \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int_{V_m} \rho \mathbf{a} \, dV = m \mathbf{a}_c = m \mathbf{a}_o + \frac{d\mathbf{P}_o}{dt} \quad (15)$$

donde la aceleración  $\mathbf{a}_o$  se define de acuerdo a la expresión I.1.4.(2.b) como

$$\mathbf{a}_o = \frac{d\mathbf{v}_o}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}_o}{dt^2} \quad (16)$$

y donde el último término se puede deducir de la expresión (11) derivándola respecto al tiempo

$$\frac{d\mathbf{P}_o}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{L}_o + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{L}_o}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_o}{dt} \quad (17)$$

con

$$\frac{d\mathbf{P}_o}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}_o + \int_{V_m} \rho \mathbf{A} \, dV \quad (18)$$

Nótese que la expresión (18) se ha generado de aplicar el Tercer Teorema del Transporte de Reynolds a la derivada con respecto al tiempo de la definición (13) y mediante el uso de la identidad I.1.4.(2.c).

Finalmente, si se substituyen las definiciones (6), (11), (13) y (17) en la Primera Ley diferencial (15), se obtiene una expresión más completa

$$\begin{aligned} \sum_{ext} \mathbf{F} &= m \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{L}_o + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_o) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}_o + \frac{d\mathbf{P}_o}{dt} \\ &= m [\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_c] + \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{V} \, dV \\ &= m [\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_c] + \frac{\delta}{\delta t} \int_{V_m} \rho \mathbf{V} \, dV \end{aligned} \quad (19)$$

la cual puede ser usada fácilmente empleando el Segundo Teorema del Transporte de Reynolds. Nótese que esta última expresión es equivalente a la expresión III.2.1.(3), extrayendo la masa del sistema material como factor común en la primera integral. Esta última expresión será usada más adelante en la Sección 2., debido a su simplicidad y al hecho de que para funciones uniformes las cantidades involucradas tienen un cálculo muy sencillo. Nótese que el último término de las expresiones (18) y (19.c) es  $m \mathbf{A}_c$ .

### 1.1.5. Primera Ley Integral

La Primera Ley Universal de la Mecánica en su forma integral se obtiene de integrar con respecto al tiempo la Primera Ley diferencial. Esto es,

$$\mathcal{F}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{ext} \mathbf{F} \, dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \quad (20)$$

Esta forma de la Primera Ley lo que expresa es que el impulso de una fuerza en un lapso de tiempo (miembro de la izquierda) es igual a la variación de la cantidad de movimiento lineal (miembro de la derecha).

## 1.2. CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Similar a la cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular se define con base a dos sistemas de coordenadas uno inercial y el otro no inercial, cuya relación mutua está establecida por las relaciones I.1.4.(1) y (2). Desde el punto de vista de cada uno de estos dos sistemas se pueden definir una cantidad de movimiento angular absoluta y una cantidad de movimiento angular relativa que se describen a continuación.

### 1.2.1. Cantidad de Movimiento Absoluto

La cantidad de movimiento angular absoluta o inercial,  $\mathbf{h}$ , se define con el vector de velocidad  $\mathbf{v}$  visto desde un sistema de coordenadas inercial y con el vector de posición  $\mathbf{r}$  también visto desde el mismo sistema de coordenadas. De esta forma se tiene que

$$\mathbf{h} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, d\mathcal{V} \quad (1)$$

De manera similar se define una cantidad de movimiento pseudo inercial donde, a diferencia de (1), se emplea un vector de posición  $\mathbf{R}$  visto desde un sistema de referencia no inercial. Esto es

$$\mathbf{h}_o = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{v} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{R} \times (\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \mathbf{V}) \, d\mathcal{V} = \mathbf{L}_o \times \mathbf{v}_o + \mathbf{IH}_o + \mathbf{H}_o \quad (2)$$

donde  $\mathbf{IH}_o$  y  $\mathbf{H}_o$  se definen en la siguiente sección.

Las dos cantidades de movimiento angulares  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{h}_o$  se relacionan mediante la siguiente expresión

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}_o \times \mathbf{p} + \mathbf{h}_o \quad (3)$$

siendo  $\mathbf{p}$  la cantidad de movimiento lineal definida por 1.1.(10).

### 1.2.2. Cantidad de Movimiento Relativo

La cantidad de movimiento angular relativa se define de una manera muy similar a la cantidad de movimiento angular absoluta (1), con la diferencia de que ahora se hace en función de cantidades relativas al sistema de coordenadas no inercial. Esto es,

$$\mathbf{H}_o = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} \, d\mathcal{V} \quad (4)$$

También se considera una cantidad de movimiento angular  $\mathbf{IH}_o$  debida a la rotación del sistema de coordenadas no inercial de la forma

$$\mathbf{IH}_o = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \, d\mathcal{V} = \mathbf{II}_o \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{II}_o$  que es el tensor del momento de inercia se define como

$$\mathbf{II}_o = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{I}_o \, d\mathcal{V} \quad (6)$$

siendo

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{R}^2 \mathbf{I} - \mathbf{R} \mathbf{R} \quad (7)$$

donde el tercer miembro de la expresión (5) se ha obtenido al aplicar la identidad

$$\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R}^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{R}^2 \mathbf{I} - \mathbf{R} \mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_o \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (8)$$

la cual a su vez fue obtenida de emplear el resultado de la Sección A.1.5.5 del triple producto vectorial.

Es recomendable hacer notar en esta parte que no debe confundirse el tensor identidad  $\mathbf{I}$  de la definición (7) con ningún tensor de momento de inercia. Adicionalmente, cabe señalar que la identidad (8) también es válida si en vez de  $\boldsymbol{\omega}$  se substituye  $\boldsymbol{\alpha}$ . Esto es,

$$\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R}^2 \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{R}^2 \mathbf{I} - \mathbf{R} \mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{I}_o \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (9)$$

Para el caso particular donde el sistema de coordenadas no inercial es cartesiano donde se tiene que  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ , y las componentes del tensor  $\mathbf{I}_o$  se calculan como

$$[\mathbf{I}_o] = \begin{bmatrix} (Y^2 + Z^2) & -XY & -XZ \\ -YX & (X^2 + Z^2) & -YZ \\ -ZX & -ZY & (X^2 + Y^2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

### 1.2.3. Segunda Ley Diferencial

En la Segunda Ley Universal de la Mecánica, de manera similar que en la Primera Ley, se asume que las fuerzas internas no producen momentos torcionales de las fuerzas. Esto es,

$$\sum_{int} \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (11)$$

Con esta base entonces la Segunda Ley Diferencial se enuncia como

$$\sum_{ext} \mathbf{M} = \sum_{ext} \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \int_{V_m} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{a} \, dV = \mathbf{v}_o \times \mathbf{p} + \mathbf{r}_o \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{h}_o}{dt} \quad (12)$$

donde

$$\frac{d\mathbf{h}_o}{dt} = \mathbf{p}_o \times \mathbf{v}_o + \mathbf{L}_o \times \mathbf{a}_o + \frac{d\mathbf{H}_o}{dt} + \frac{d\mathbf{H}_o}{dt} \quad (13)$$

$$\frac{d\mathbf{H}_o}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_o + \int_{V_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{A} \, dV = \int_{V_m} \rho [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + \mathbf{R} \times \mathbf{A}] \, dV \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}_o}{dt} &= \mathbf{H}_o \cdot \boldsymbol{\alpha} + \frac{d\mathbf{H}_o}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \int_{V_m} \rho [\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R})] \, dV \\ &\quad + \int_{V_m} \rho \{ \mathbf{V} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + \mathbf{R} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})] \} \, dV \end{aligned} \quad (15)$$

El último miembro de la Segunda Ley (12) se ha deducido derivando la relación (3). Sin embargo, el penúltimo miembro se ha deducido aplicando el Tercer Teorema del Transporte y derivando el producto, reconociendo que uno de los términos producido es nulo, de igual forma como se hizo en la sección III.3.1. El segundo miembro de expresión (14) se obtuvo aplicando las relaciones de Poisson y el Tercer Teorema del Transporte de Reynolds para sistemas no inerciales.

La expresión (13) se ha obtenido de la definición (2) para  $\mathbf{h}_o$ . La expresión (14) se ha obtenido de aplicar el Tercer Teorema del Transporte y las relaciones I.1.4.(2) a la definición (4). La expresión (15) de igual manera que la expresión (14) puede obtenerse del mismo procedimiento aplicado a la integral de la definición (5), pero aquí vamos a seguir un camino diferente derivando al último miembro de esta misma definición, lo cual se ha expresado en el segundo miembro de (15).

El segundo miembro de la expresión (15) posee dos términos, el primero de los cuales se puede obtener directamente si se aplica la identidad (9). El segundo término se deduce aplicando el Tercer Teorema del Transporte en la forma

$$\frac{d\mathbf{I}_o}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \frac{d\mathbf{I}_o}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} d\mathcal{V} \quad (16)$$

y aplicando la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}_o}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} &= 2(\mathbf{R} \cdot \mathbf{V})\boldsymbol{\omega} - \mathbf{R}(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{V}(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \mathbf{V} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \mathbf{V} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + \mathbf{R} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})] \end{aligned} \quad (17)$$

que se origina a su vez de esta otra identidad

$$\frac{d\mathbf{I}_o}{dt} = 2 \left( \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) \mathbf{I} - \mathbf{R} \frac{d\mathbf{R}}{dt} - \frac{d\mathbf{R}}{dt} \mathbf{R} \quad (18)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{V} \\ \mathbf{R} \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{R}\mathbf{V} \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} \mathbf{R} &= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})\mathbf{R} + \mathbf{V}\mathbf{R} \end{aligned} \quad (19)$$

Aquí vamos a hacer un paréntesis para destacar que la Segunda Ley Universal de la Mecánica (12) se puede reformular de una forma diferente si los momentos de fuerza se calculan con brazos de palanca relativos al sistema de coordenadas no inercial (e.g. ver el artículo de Eke & Wang [(1994)]), de modo que

$$\sum_{ext} \mathbf{M}_o = \sum_{ext} \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \sum_{ext} \mathbf{M} - \mathbf{r}_o \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v}_o \times \mathbf{p} + \frac{d\mathbf{h}_o}{dt} \quad (20)$$

Finalmente, si se toman en cuenta la definición 1.1.(10) de  $\mathbf{p}$ , la definición 1.1.(5) de  $\mathbf{R}_c$ , la Primera Ley en su forma diferencial 1.1.(15) y se substituyen las definiciones (4) y (6), la expresión (13) y la primera parte de la expresión (15), en la Segunda Ley diferencial (12), se obtiene una expresión más completa

$$\begin{aligned} \sum_{ext} \mathbf{M} &= \mathbf{r}_o \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{L}_o \times \mathbf{a}_o + \mathbf{I}_o \cdot \boldsymbol{\alpha} + \frac{d\mathbf{I}_o}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{d\mathbf{H}_o}{dt} \\ &= \mathbf{r}_o \times \sum_{ext} \mathbf{F} + m \mathbf{R}_c \times \mathbf{a}_o + \mathbf{I}_o \cdot \boldsymbol{\alpha} + \frac{d\mathbf{I}_o}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} d\mathcal{V} \\ &= \mathbf{r}_o \times \sum_{ext} \mathbf{F} + m \mathbf{R}_c \times \mathbf{a}_o + \mathbf{I}_o \cdot \boldsymbol{\alpha} + \frac{d\mathbf{I}_o}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_o + \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (21)$$

la cual puede ser usada fácilmente empleando el Segundo Teorema del Transporte de Reynolds para el cálculo del último término y los resultados de la Sección 1.2.7. para el cálculo del penúltimo término con la derivada del tensor de inercia. Nótese que la expresión (21) es equivalente a la expresión III.3.1.(4), si se substituyen las expresiones involucradas junto con la expresión (15). Así mismo, esta última expresión será usada más adelante en la Sección 2. debido a su simplicidad y al hecho de que para funciones uniformes las cantidades involucradas tienen un cálculo muy sencillo. Para el cálculo del último término de la expresión (21) también se puede usar el segundo miembro de (14).

### 1.2.4. Segunda Ley Integral

La Segunda Ley Universal de la Mecánica en su forma integral se obtiene de integrar con respecto al tiempo la Segunda Ley diferencial. Esto es,

$$\mathcal{M}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{ext} \mathbf{M} dt = \mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1 \quad (22)$$

Esta forma de la Segunda Ley lo que expresa es que el impulso de un momento torcional en un lapso de tiempo (miembro de la izquierda) es igual a la variación de la cantidad de movimiento angular (miembro de la derecha).

### 1.2.5. Primer Teorema de König

El Primer Teorema de König se establece ubicando en el centro de masa un nuevo sistema de coordenadas no inercial paralelo al sistema no inercial  $OXYZ$ . Relativo a este nuevo sistema de coordenadas se define un vector de posición  $\mathbf{IR}$  que está relacionado con los otros vectores de posición relativos mediante

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + \mathbf{IR} \quad (23)$$

Substituyendo este cambio de variables en la definición 1.2.(2) de  $\mathbf{h}_o$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_o &= \int_{V_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{v} dV = \int_{V_m} \rho \mathbf{R}_c \times \mathbf{v} dV + \int_{V_m} \rho \mathbf{IR} \times \mathbf{v} dV \\ &= \mathbf{R}_c \times \int_{V_m} \rho \mathbf{v} dV + \int_{V_m} \rho \mathbf{IR} \times \mathbf{v} dV \\ &= \mathbf{R}_c \times m\mathbf{v}_c + \mathbf{h}_c = \mathbf{R}_c \times \mathbf{p} + \mathbf{h}_c = \mathbf{L}_o \times \mathbf{v}_c + \mathbf{h}_c \end{aligned} \quad (24)$$

donde

$$\mathbf{h}_c = \mathbf{IH}_c + \mathbf{H}_c \quad \mathbf{IH}_c = \mathbf{II}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (25)$$

debido a que  $\mathbf{L}_c = 0$  por 1.1.(5). Nótese que en la definición anterior se ha hecho uso de la expresión (2) pero ubicando el centro de la cantidad de movimiento angular en el centro de masa.

De manera muy similar se puede obtener otra expresión parecida a la (24), pero con velocidades relativas, siguiendo el mismo procedimiento. Resultando de esto que

$$\mathbf{H}_o = \mathbf{R}_c \times \mathbf{P}_o + \mathbf{H}_c = \mathbf{L}_o \times \mathbf{V}_c + \mathbf{H}_c \quad (26)$$

Las expresiones (24) y (26) en conjunto son las que componen el Primer Teorema de König.

Es interesante aquí saber que la relación (20) se puede reescribir de manera diferente empleando la expresión (24) si se considera que

$$\frac{d\mathbf{h}_o}{dt} = \mathbf{p}_o \times \mathbf{v}_c + \mathbf{L}_o \times \mathbf{a}_c + \frac{d\mathbf{h}_c}{dt} = -\mathbf{v}_o \times \mathbf{p} + \mathbf{L}_o \times \mathbf{a}_c + \frac{d\mathbf{h}_c}{dt} \quad (27)$$

Nótese que se ha empleado la expresión 1.1.(10) para obtener el último resultado. Finalmente, substituyendo la ecuación (27) en en (12) y (20) queda

$$\sum_{ext} \mathbf{M} = \mathbf{r}_o \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \sum_{ext} \mathbf{M}_o = \mathbf{r}_o \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{L}_o \times \mathbf{a}_c + \frac{d\mathbf{h}_c}{dt} = m \mathbf{r}_c \times \mathbf{a}_c + \frac{d\mathbf{h}_c}{dt} \quad (28.a)$$

$$\sum_{ext} \mathbf{M}_o = \mathbf{L}_o \times \mathbf{a}_c + \frac{d\mathbf{h}_c}{dt} = m \mathbf{R}_c \times \mathbf{a}_c + \frac{d\mathbf{h}_c}{dt} = \mathbf{R}_c \times \sum_{ext} \mathbf{F} + \frac{d\mathbf{h}_c}{dt} \quad (28.b)$$

### 1.2.6. Teorema de Steiner

El Teorema de Steiner plantea la relación que existe entre el tensor de inercia respecto al sistema de coordenadas  $OXYZ$  y el tensor de inercia relativo al sistema de coordenadas  $CXYZ$  paralelo al anterior. Veamos como se deduce a partir del Primer Teorema de König.

Substituyendo la expresión (26) en la definición (2), y si esta a su vez es substituida en la expresión (24), resulta que

$$\mathbf{L}_o \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c) = \mathbf{I}\mathbf{H}_o - \mathbf{I}\mathbf{H}_c \quad (29)$$

En este resultado se ha tenido en cuenta que

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c + \mathbf{V}_c \quad (30)$$

Considerando ahora las definiciones 1.1.(5), (5) y (25.b) se puede expresar la relación (29) como

$$m \mathbf{R}_c \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c) = (\mathbf{I}\mathbf{I}_o - \mathbf{I}\mathbf{I}_c) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (31)$$

Se puede establecer una relación parecida a la expresión (8), pero para  $\mathbf{R}_c$ , quedando esta de la forma

$$\mathbf{R}_c \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c) = \mathbf{I}_{oc} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (32)$$

donde

$$\mathbf{I}_{oc} = \mathbf{R}_c^2 \mathbf{I} - \mathbf{R}_c \mathbf{R}_c \quad (33)$$

Finalmente, definiendo

$$\mathbf{I}\mathbf{I}_{oc} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{I}_{oc} d\mathcal{V} = m \mathbf{I}_{oc} \quad (34)$$

y considerando la relación (32), luego de eliminar  $\boldsymbol{\omega}$ , la expresión (31) queda como el Teorema de Steiner

$$\mathbf{I}\mathbf{I}_o = \mathbf{I}\mathbf{I}_c + \mathbf{I}\mathbf{I}_{oc} \quad (35)$$

Observe que el Teorema de Steiner predice que de todos los tensores que pueda haber, aquel calculado para un sistema de coordenadas, cuyo origen pasa por el centro de masa, es el que menores momentos de inercia va a tener. No se puede decir nada respecto a los productos de inercia.

El resultado del Teorema de Steiner se hubiera obtenido de una forma menos elegante si se substituye la expresión (23) en la definición (7) y a su vez en la definición (6), considerando la definición 1.1.(5), y realizando una manipulación algebraica un poco tediosa.

### 1.2.7. Transporte del Tensor de Inercia

Comparando la expresión (18) con la relaciones (19) substituidas, con la aplicación de la derivación 1.1.4.(11), se obtiene que

$$\frac{d\mathbf{I}_o}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_o - \mathbf{I}_o \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\delta\mathbf{I}_o}{\delta t} \quad (36)$$

donde resulta ser

$$\frac{\delta\mathbf{I}_o}{\delta t} = 2 (\mathbf{R} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} - \mathbf{R} \mathbf{V} - \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (37)$$

La expresión antes obtenida puede ser empleada para calcular la derivada del tensor de inercia en la forma

$$\frac{d\mathbf{I}\mathbf{I}_o}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\mathbf{I}_o - \mathbf{I}\mathbf{I}_o \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\delta\mathbf{I}\mathbf{I}_o}{\delta t} \quad (38)$$

donde

$$\frac{\delta\mathbf{I}\mathbf{I}_o}{\delta t} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \frac{\delta\mathbf{I}_o}{\delta t} d\mathcal{V} \quad (39)$$

Observese que se ha empleado de nuevo la derivación I.1.4.(11) para obtener (36) y se ha empleado el Tercer Teorema del Transporte de Reynolds en un sistema no inercial, I.2.3.(13), para obtener (37).

De los análisis hechos se concluye que

$$\frac{d\mathbf{II}_o}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{II}_o \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{\delta\mathbf{II}_o}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (40)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathbf{II}_o}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \int_{\mathcal{V}_m} \rho \frac{\delta\mathbf{I}_o}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho [2 \mathbf{R} \cdot \mathbf{V} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{R} \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{V} \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}] \, d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}_m} \rho [\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})] \, d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}_m} \rho [2 \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{V})] \, d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (41)$$

Estas dos últimas relaciones substituidas en la expresión (21) facilitan en gran medida la aplicación de la Segunda Ley Universal de la Mecánica.

La derivada del tensor de inercia se puede calcular también de otra forma aplicándole al miembro de la izquierda de (39) el Segundo Teorema del Transporte de Reynolds I.2.3.(10) para sistemas de coordenadas no inerciales. Con esto resulta

$$\frac{\delta\mathbf{II}_o}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{I}_o \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \mathbf{I}_o (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (42)$$

y multiplicando por  $\boldsymbol{\omega}$

$$\frac{\delta\mathbf{II}_o}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta\mathbf{II}_{oa}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho [\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})] (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (43)$$

donde

$$\mathbf{II}_{oa} = \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{I}_o \, d\mathcal{V} \quad (44)$$

y se ha considerado la identidad (8).

Substituyendo la ecuación (40) y (41.c, 43) en (21) y aplicando al último término el tercer Teorema del Transporte de Reynolds, tanto para sistemas inerciales como no inerciales, se obtiene la forma final del Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento Angular para un sistema de coordenadas no inercial

$$\begin{aligned} \sum_{ext} \mathbf{M} &= \mathbf{r}_o \times \sum_{ext} \mathbf{F} + m \mathbf{R}_c \times \mathbf{a}_o + \mathbf{II}_o \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{II}_o \cdot \boldsymbol{\omega} + 2 \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) \, d\mathcal{V} + \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} \, d\mathcal{V} \\ &= \mathbf{r}_o \times \sum_{ext} \mathbf{F} + m \mathbf{R}_c \times \mathbf{a}_o + \mathbf{II}_o \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{II}_o \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{\delta\mathbf{II}_{oa}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_o \\ &\quad + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho [\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \mathbf{V})] (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} + \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} \, d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (45)$$

donde

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} \, d\mathcal{V} = \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} \, d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (46)$$

y donde se ha usado la identidad

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{V}) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) \quad (47)$$



para establecer la equivalencia entre (41.b) y (41.c).

Para el instante de análisis se han hecho coincidir los volúmenes  $\mathcal{V}_m$  y  $\mathcal{V}_a$ , como siempre. Es por eso que algunas integrales provenientes de las ecuaciones (41.b), (43) o (21) cambiaron su dominio al pasar a la ecuación (45).

En las dos formas de la expresión (45), la segunda permite hacer el cálculo del momento cuando se conoce como varía el tensor de inercia del volumen  $\mathcal{V}_a$  como un cuerpo ficticio visto desde el sistema de coordenadas no inercial. La primera forma de esta expresión permite hacer el mismo cálculo cuando no se posee la información antes mencionada.

### 1.3. ENERGIA

En esta sección solamente vamos a tratar el área de la energía referente a la parte mecánica. La energía total y la parte térmica ha sido ya tratada en el Capítulo III y será tratada con más detalle en el Capítulo VI.

#### 1.3.1. Energía Cinética

La energía cinética de un sistema material continuo se define como

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{V}_m} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 d\mathcal{V} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{v}^2 \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ .

#### 1.3.2. Trabajo de las Fuerzas

El trabajo de las fuerzas se clasifica de acuerdo a las fuerzas que actúan. Por consiguiente, el trabajo de las fuerzas puede ser debido a las fuerzas internas y debido a las fuerzas externas. Así se tiene que

$$\mathcal{W}_{12}^i = \sum_{int} \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

$$\mathcal{W}_{12}^e = \sum_{ext} \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3)$$

El trabajo de las fuerzas totales es entonces la suma de los trabajos de cada una de las fuerzas

$$\mathcal{W}_{12} = \sum_{total} \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathcal{W}_{12}^i + \mathcal{W}_{12}^e \quad (4)$$

debido a que

$$\sum_{total} \mathbf{F} = \sum_{int} \mathbf{F} + \sum_{ext} \mathbf{F} \quad (5)$$

Las expresiones (2), (3) y (4) se han escrito con el símbolo de sumatoria afuera para indicar que cada fuerza por separado debe multiplicarse escalarmente por su propio desplazamiento y luego sumarse (ó integrarse) estos productos parciales.

La derivada de la energía cinética con respecto al tiempo viene dada por su definición como

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} = \sum_{total} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (6)$$

En esta expresión se ha tomado en consideración la observación hecha al final del párrafo anterior y se considera que  $\mathbf{f}$  resume el total de todas las fuerzas específicas por unidad de volumen que actúan sobre los

puntos materiales como en la expresión III.2.2.(2) y que cumple con la ecuación de movimiento  $\rho \mathbf{a} = \mathbf{f}$ . Una deducción más completa que la expresión (6) podrá encontrarse en la Sección III.4.2. que trata de la conservación de la energía mecánica.

Basados en la expresión (6), la variación de la energía cinética puede calcularse y obtenerse que es igual a (4), empleando para ello un análisis muy parecido al expuesto en la Sección I.2.2.2. para deducir la relación I.2.2.(5) (Algo similar puede encontrarse en el Apéndice B para deducir la relación B.2.4.(23)). Esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1 &= \int_1^2 d\mathcal{K} = \int_1^2 \frac{d\mathcal{K}}{dt} dt = \int_1^2 \left( \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} \right) dt = \int_1^2 \left( \int_{\mathcal{V}_m^o} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} J d\mathcal{V}^o \right) dt \\ &= \int_{\mathcal{V}_m^o} \left( \int_1^2 \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} J dt \right) d\mathcal{V}^o = \int_{\mathcal{V}_m^o} \left( \int_1^2 \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} J dt \right) d\mathcal{V}^o \\ &= \int_{\mathcal{V}_m^o} \left( \int_1^2 J \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \right) d\mathcal{V}^o = \sum_{total} \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathcal{W}_{12} \end{aligned} \quad (7)$$

Aquí también sigue siendo válida la observación hecha antes con respecto a la sumatoria. Nótese que en la última línea de la deducción (7) no se puede intercambiar el orden de las derivadas para extraer  $d\mathbf{r}$  porque esta variable depende del  $d\mathcal{V}^o$  sobre el cual se está realizando el trabajo. El jacobiano  $J$  produce el efecto de lograr que el diferencial de trabajo  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  siempre se realice sobre la misma porción  $d\mathcal{V}^o$  del volumen material de referencia, de manera que las fuerzas específicas siempre sigue a su punto de aplicación identificado con un punto material específico. Es prudente recordar que la configuración de referencia  $\mathcal{V}_m^o$  con su respectivo sistema de coordenadas de referencia conforman un conjunto de etiquetas para los puntos materiales. Esto evita la vaguedad que pueda tener el recorrido de la fuerza y el trabajo realizado por ella.

### 1.3.3. Energía Potencial

Se puede hacer la clasificación del trabajo, a diferencia de la sección anterior, dependiendo si la fuerza es conservativa o no conservativa. Esto es,

$$\mathcal{W}_{12} = \mathcal{W}_{12}^o + \mathcal{W}_{12}^* \quad (8)$$

donde los superíndices  $o$  y  $*$  sirven para indicar si el trabajo fue realizado por una fuerza conservativa o no, respectivamente. En esta sección veremos como calcular el trabajo de estas fuerzas conservativas.

Las fuerzas conservativas son aquellas que se originan del gradiente de un potencial en la forma

$$\mathbf{F}^o = -\nabla \mathcal{U} \quad (9)$$

De esta forma el trabajo de una fuerza conservativa es independiente del camino seguido por dicha fuerza. Esto es

$$\mathcal{W}_{12}^o = \int_1^2 \mathbf{F}^o \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 \nabla \mathcal{U} \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 d\mathcal{U} = -(\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1) \quad (10)$$

Además se tiene que el trabajo realizado por la fuerza conservativa en un camino cerrado es nulo como lo indica la expresión (10). Si se le aplica el Teorema de Stokes a esta última afirmación queda que

$$\mathcal{W}_{1-1'}^o = \oint_1^{1'} \mathbf{F}^o \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \mathbf{F}^o) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = 0 \quad (11)$$

donde  $\mathcal{A}$  es cualquier área soportada por la curva cerrada y  $\mathbf{n}$  es la normal a dicha área en cada uno de sus puntos. Si la expresión (11) es válida para una curva cerrada cualquier entonces se tiene que

$$\nabla \times \mathbf{F}^o = \mathbf{0} \quad (12)$$

### 1.3.4. Energía Mecánica Total

La energía mecánica total se define en presencia de fuerzas conservativas como

$$\mathcal{E}^M = \mathcal{K} + \mathcal{U} \quad (13)$$

### 1.3.5. Tercera Ley

Si se substituyen las expresiones (7) y (10) en la expresión (8), teniendo en cuenta la definición anterior, se obtiene la Ley de Conservación de la Energía Mecánica Total que conforma la Tercera Ley Universal de la Mecánica

$$\mathcal{E}_2^M - \mathcal{E}_1^M = \mathcal{W}^* \quad (14)$$

Esta ley de conservación también se puede expresar en su forma diferencial como

$$\frac{d\mathcal{E}^M}{dt} = \dot{\mathcal{W}}^* \quad (15)$$

donde  $\mathcal{E}$  se define según (13) y la energía cinética y potencial se pueden suponer como

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} d\mathcal{V} \quad \mathcal{U} = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \varphi d\mathcal{V} \quad (16)$$

siendo  $\varphi$  el potencial que genera la fuerza conservativa  $\mathbf{g}^o$ , es decir,  $\mathbf{g}^o = -\nabla\varphi$ . La potencia del trabajo no conservativo en la expresión (15) se define en dos porciones

$$\dot{\mathcal{W}}^* = \dot{\mathcal{W}}_g^* + \dot{\mathcal{W}}_t^* \quad (17.a)$$

donde

$$\dot{\mathcal{W}}_g^* = \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} \quad (17.b)$$

$$\dot{\mathcal{W}}_t^* = \int_{\mathcal{V}_m} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} = \dot{\mathcal{W}}_t^+ + \dot{\mathcal{W}}_t^- \quad (17.c)$$

y donde a su vez se tiene que

$$\dot{\mathcal{W}}_t^+ = \int_{\mathcal{V}_m} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{A}_m} \mathbf{T} : \mathbf{v} \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (18.a)$$

es la potencia del trabajo realizado por las fuerzas de contacto que actúan sobre el área material y

$$\dot{\mathcal{W}}_t^- = - \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} d\mathcal{V} \quad (18.b)$$

es la potencia del trabajo realizado por las fuerzas de contacto que actúan internamente en el material. Parte de esta última potencia de trabajo se convierte en fuente de calor generado internamente debido a esfuerzos viscosos que no es más que la integral sobre el volumen material de la función de disipación viscosa  $\Phi_\mu$ .

Es conveniente en este momento hacer la reseña de que la ecuación (15), substituyéndole las expresiones (16), (17) y (18), no es más que la misma expresión obtenida en la Sección III.4.2. para la conservación de la energía mecánica, en donde la identidad  $(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v}$  debe tenerse presente.

Las relaciones constitutivas pueden expresarse siempre para un fluido en la forma

$$\mathbf{T} = -P \mathbf{I} + \mathcal{T} \quad (19.a)$$

donde son válidas las expresiones

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) &= -\nabla \cdot (P\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{v}) \\ \mathbf{T} : \mathbf{v}\mathbf{n} &= -P\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \mathcal{T} : \mathbf{v}\mathbf{n} \\ \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} &= -P\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathcal{T} : \nabla \mathbf{v}\end{aligned}\tag{19.b}$$

Entonces las definiciones (18) se pueden descomponer para las fuerzas de contacto actuando en el área material como

$$\dot{\mathcal{W}}_t^+ = \dot{\mathcal{W}}_p^+ + \dot{\mathcal{W}}_\mu^+ \tag{20.a}$$

$$\dot{\mathcal{W}}_p^+ = - \int_{\mathcal{V}_m} \nabla \cdot (P\mathbf{v}) \, d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{A}_m} P\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \tag{20.b}$$

$$\dot{\mathcal{W}}_\mu^+ = \int_{\mathcal{V}_m} \nabla \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{A}_m} \mathcal{T} : \mathbf{v}\mathbf{n} \, d\mathcal{A} \tag{20.c}$$

y para las fuerzas de contacto actuando internamente como

$$\dot{\mathcal{W}}_t^- = \dot{\mathcal{W}}_p^- + \dot{\mathcal{W}}_\mu^- \tag{21.a}$$

$$\dot{\mathcal{W}}_p^- = \int_{\mathcal{V}_m} P\nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{V} \tag{21.b}$$

$$\dot{\mathcal{W}}_\mu^- = - \int_{\mathcal{V}_m} \mathcal{T} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}_m} \Phi_\mu \, d\mathcal{V} = -\dot{\mathcal{Q}}_\mu \tag{21.c}$$

Obsérvese que la última definición expresa de manera manifiesta la equivalencia que existe entre la potencia  $-\dot{\mathcal{W}}_\mu^-$  de las fuerzas viscosas actuando internamente y el calor  $\dot{\mathcal{Q}}_\mu$  generado internamente debido a los esfuerzos viscosos.

### 1.3.6. Segundo Teorema de König

Suponiendo el mismo sistema de coordenadas auxiliar cuyo origen está en el centro de masa del sistema de material y es paralelo al sistema de coordenadas no inercial  $OXYZ$ , se tiene que las velocidades absolutas y relativas están relacionadas mediante la expresión

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \mathbf{W} \tag{20}$$

Teniendo esto en cuenta se puede realizar el siguiente cálculo

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_c + 2\mathbf{v}_c \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{W} + 2\mathbf{W} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} \tag{21}$$

En este cálculo las integrales con respecto a  $\rho \, d\mathcal{V}$  de los términos segundo y tercero del miembro de la derecha son nulos debido a que

$$\mathbf{L}_c = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, \mathbf{R} \, d\mathcal{V} = \mathbf{0} \tag{22}$$

$$\mathbf{P}_c = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \, \mathbf{W} \, d\mathcal{V} = m \, \mathbf{W}_c = \mathbf{0} \tag{23}$$

Considerando lo que se ha dicho antes y empleando las siguientes identidades obtenidas de las propiedades del triple producto escalar (Sección A.1.5.4)

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})] = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{24}$$

$$\mathbf{W} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{W}) \quad (25)$$

se obtiene el Segundo teorema de König

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_c + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_c \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_c + \tilde{\mathcal{K}} \quad (26)$$

donde

$$\mathbf{I}_c = \int_{\mathcal{V}_m} \rho (\mathbf{R}^2 \mathbf{I} - \mathbf{R} \mathbf{R}) d\mathcal{V} \quad \mathbf{H}_c = \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{W} d\mathcal{V} \quad \tilde{\mathcal{K}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} d\mathcal{V} \quad (27)$$

son respectivamente el tensor de momento inercia, la cantidad de movimiento angular relativa, y la energía cinética relativa total (relativas al sistema de referencia no inercial), todas ellas con respecto al centro de masa.

## 2. SIMPLIFICACION PARA FUNCIONES UNIFORMES

En esta sección se va a simplificar las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento lineal y angular para los casos donde el volumen arbitrario  $\mathcal{V}_a$ , aunque puede no ser rígido, tiene una forma muy particular. Esta forma del volumen arbitrario debe poseer una entrada y una salida al sistema material, pero al mismo tiempo debe ser un volumen generado mediante una área haciendo un recorrido sobre una línea formada por los centroides de ella, y siempre de forma perpendicular. Consecuentemente, para este tipo de volumen se puede aplicar el teorema de Pappus y algunos cálculos se simplifican enormemente. Adicionalmente, se supondrá que en la entrada y la salida las propiedades y velocidades tiene un perfil uniforme, de manera que el flujo se calcule multiplicando directamente por el área, sin tener que evaluar la integral involucrada. Esto aproximadamente se puede interpretar como que se están usando cantidades promedio en la entrada y la salida.

Para la descripción de las trayectorias, velocidades y aceleraciones se dispondrá de un marco de referencia no inercial formado por una sistema de coordenadas, cuyo origen  $\mathbf{r}_o$  se desplaza con una cierta velocidad  $\mathbf{v}_o$  y aceleración  $\mathbf{a}_o$ , y al mismo tiempo, gira con una velocidad  $\boldsymbol{\omega}$  y aceleración  $\boldsymbol{\alpha}$  angulares, todas estas cantidades observadas desde un marco de referencia inercial. Las cantidades absolutas, observadas desde el marco de referencia inercial se denotarán con minúsculas, y las cantidades relativas al marco de referencia no inercial se denotarán con mayúsculas, como es ya costumbre del Capítulo I de Cinemática.

Dada esta descripción se debe entender que existe una función continua, desde la entrada a la salida, de caudal volumétrico  $Q$  o másico  $\dot{m}$ , relativos ambos al marco de referencia no inercial. Este marco de referencia se va a considerar solidario al volumen arbitrario  $\mathcal{V}_a$ , solamente en el caso de que éste sea rígido. En caso contrario que es más general, el volumen arbitrario  $\mathcal{V}_a$  y el marco de referencia, van cada uno por su lado.

Debe entenderse que cualquier volumen de control que se pueda formar con la unión finita o infinita de volúmenes como los descritos antes son susceptible de poder aplicárseles las simplificaciones que se describen a continuación. Esto es potencialmente cierto, ya que las reacciones internas se cancelan unas de un cierto volumen con las otras del volumen contiguo.

### 2.1. FLUIDOS INCOMPRESIBLES

Primero se obtendrán los resultados con las simplificaciones propuestas para los sistemas materiales incompresibles, por lo que la densidad involucrada en algunas integrales se podrá extraer como una constante. En esta parte, por supuesto, será más conveniente trabajar con el caudal volumétrico relativo  $Q$ .

### 2.1.1. Masa

El principio de conservación de masa junto con el segundo teorema del transporte de Reynolds para marcos de referencia no inercial se enuncia como

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \rho d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = 0 \quad (1)$$

Bajo las condiciones impuestas este principio de conservación se simplifica como

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \rho d\mathcal{V} = \rho \frac{\delta \mathcal{V}_a}{\delta t} \quad \oint_{\mathcal{A}_a} \rho (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \rho (Q_s - Q_e) \quad (2)$$

Cuando adicionalmente se tiene que el volumen  $\mathcal{V}_a$  es rígido entonces

$$\frac{\delta \mathcal{V}_a}{\delta t} = 0 \quad Q_s = Q_e = Q \quad (3)$$

### 2.1.2. Cantidad de Movimiento Lineal

El principio de conservación de cantidad de movimiento lineal junto con el segundo teorema del transporte de Reynolds para marcos de referencia no inercial se enuncia como

$$\sum_{ext} \mathbf{F} = m [\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_c) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_c] + \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (4)$$

Este principio de conservación se simplifica con los siguientes resultados

$$\int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} = \rho \oint_{\mathcal{L}_c} \frac{Q}{\mathcal{A}_c} \mathbf{n} \mathcal{A}_c d\mathcal{L} = \rho \oint_{\mathcal{L}_c} Q d\mathbf{R} \quad \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \rho (Q_s \mathbf{V}_s - Q_e \mathbf{V}_e) \quad (5)$$

donde  $\mathcal{A}_c$  es la función de área que genera el sólido recorriendo un camino  $\mathcal{L}_c$  con su centroide, y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario tangente a la curva de los centroides y normal al área  $\mathcal{A}_c$  en todo el recorrido desde la entrada hasta la salida. De esta forma se tiene que  $\mathbf{V} = Q \mathbf{n} / \mathcal{A}_c$  y  $d\mathcal{V} = \mathcal{A}_c d\mathcal{L}$ .

Adicionalmente, se satisface también que

$$m = m_a = \int_{\mathcal{V}_a} \rho d\mathcal{V} = \rho \mathcal{V}_a \quad \mathbf{R}_c = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{R} d\mathcal{V} \quad \mathbf{V}_c = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} \quad (6)$$

Cuando adicionalmente se tiene que el volumen  $\mathcal{V}_a$  es rígido entonces

$$\int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} = \rho Q [\mathbf{R}]_e^s = \rho Q \Delta \mathbf{R} \quad \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \rho Q (\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_e) \quad (7)$$

En lo que se refiere a las fuerzas externas, se tienen básicamente las fuerzas de presión  $\mathbf{F}_p$  en la entrada y la salida, la fuerza de cuerpo  $\mathbf{F}_g$  y la fuerzas de reacción  $\mathbf{F}_r$  entre las paredes del volumen  $\mathcal{V}_a$  (excluyendo la entrada y la salida) y el sistema material. Estas fuerzas se calculan como

$$\sum_{ext} \mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_r \quad \mathbf{F}_p = -(P_s \mathcal{A}_s \mathbf{n}_s + P_e \mathcal{A}_e \mathbf{n}_e) \quad \mathbf{F}_g = \rho \mathcal{V}_a \mathbf{g} \quad (8)$$

donde  $\mathbf{n}_e$  y  $\mathbf{n}_s$  son las normales exteriores a  $\mathcal{A}_a$  en las porciones de áreas de entrada  $\mathcal{A}_e$  y de salida  $\mathcal{A}_s$ , respectivamente. Obviamente, la fuerza global de reacción  $\mathbf{F}_r$  representa una incógnita en las expresiones

de conservación de la cantidad de movimiento lineal, y el permitir su cálculo es la razón de ser de estas expresiones.

### 2.1.3. Cantidad de Movimiento Angular

El principio de conservación de cantidad de movimiento angular junto con el segundo teorema del transporte de Reynolds para marcos de referencia no inercial se enuncia como

$$\begin{aligned} \sum_{ext} \mathbf{M} = \mathbf{r}_o \times \sum_{ext} \mathbf{F} + m \mathbf{R}_c \times \mathbf{a}_o + \mathbf{I}_o \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_o \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{\delta \mathbf{I}_{oa}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_{oa} \\ + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho [\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \mathbf{V})] (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} + \frac{\delta \mathbf{H}_{oa}}{\delta t} \end{aligned} \quad (9)$$

Este principio de conservación se simplifica con los siguientes resultados

$$\mathbf{H}_{oa} = \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} d\mathcal{V} = \rho \oint_{\mathcal{L}_c} \mathbf{R} \times \frac{Q}{\mathcal{A}_c} \mathbf{n} \mathcal{A}_c d\mathcal{L} = \rho \oint_{\mathcal{L}_c} Q \mathbf{R} \times d\mathbf{R} \quad (10.a)$$

$$\oint_{\mathcal{A}_a} \rho [\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{R} \times \mathbf{V}] (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \rho \{ Q_s [\mathbf{R}_s \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_s + \mathbf{V}_s)] - Q_e [\mathbf{R}_e \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_e + \mathbf{V}_e)] \} \quad (10.b)$$

Cuando adicionalmente se tiene que el volumen  $\mathcal{V}_a$  es rígido entonces

$$\mathbf{H}_{oa} = \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} d\mathcal{V} = \rho \oint_{\mathcal{L}_c} \mathbf{R} \times \frac{Q}{\mathcal{A}_c} \mathbf{n} \mathcal{A}_c d\mathcal{L} = \rho Q \oint_{\mathcal{L}_c} \mathbf{R} \times d\mathbf{R} \quad (11.a)$$

$$\oint_{\mathcal{A}_a} \rho [\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{R} \times \mathbf{V}] (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \rho Q [\mathbf{R}_s \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_s + \mathbf{V}_s) - \mathbf{R}_e \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_e + \mathbf{V}_e)] \quad (11.b)$$

En lo que se refiere a los momentos de las fuerzas externas, se tienen básicamente los momentos de la fuerzas de presión  $\mathbf{M}_p$  en la entrada y la salida, el momento de la fuerza de cuerpo  $\mathbf{M}_g$  y el momento de las fuerzas de reacción  $\mathbf{M}_r$  entre las paredes del volumen  $\mathcal{V}_a$  (excluyendo la entrada y la salida) y el sistema material. Estos momentos de las fuerzas se calculan como

$$\sum_{ext} \mathbf{M} = \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_r \quad \mathbf{M}_p = -(P_s \mathcal{A}_s \mathbf{r}_s \times \mathbf{n}_s + P_e \mathcal{A}_e \mathbf{r}_e \times \mathbf{n}_e) \quad \mathbf{M}_g = \rho \mathcal{V}_a \mathbf{r}_c \times \mathbf{g} \quad (12)$$

## 2.2. FLUIDOS COMPRESIBLES

En segunda instancia se obtendrán ahora los resultados con las simplificaciones propuestas para los sistemas materiales compresibles, por lo que la densidad involucrada en algunas integrales ya no se puede extraer como una constante. En esta parte, por lo tanto, será más conveniente trabajar con el caudal másico relativo  $\dot{m}$ , en lugar del caudal volumétrico  $Q$ . Como se verá más adelante, para flujo incompresible los resultados obtenidos son sumamente sencillos, al igual que para los flujos incompresibles. Se podría decir que hasta más sencillos.

### 2.2.1. Masa

El principio de conservación de masa 2.1.(1) se simplifica con los siguientes resultados

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{V}_a} \rho d\mathcal{V} = \frac{\delta m_a}{\delta t} \quad \oint_{\mathcal{A}_a} \rho (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = (\dot{m}_s - \dot{m}_e) \quad (1)$$

El caso del volumen  $\mathcal{V}_a$  rígido no produce ningún resultado especial para este principio de conservación, ni para los siguientes. Sin embargo, una simplificación substancial se obtiene cuando el flujo es relativamente estacionario, es decir, cuando los términos con la derivada  $\delta/\delta t$  se anulan.

### 2.2.2. Cantidad de Movimiento Lineal

El principio de conservación de cantidad de movimiento lineal 2.1.(4) se simplifica con los siguientes resultados

$$\int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} = \oint_{\mathcal{L}_c} \frac{\dot{m}}{\mathcal{A}_c} \mathbf{n} \mathcal{A}_c d\mathcal{L} = \oint_{\mathcal{L}_c} \dot{m} d\mathbf{R} \quad \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = (\dot{m}_s \mathbf{V}_s - \dot{m}_e \mathbf{V}_e) \quad (2)$$

De las fuerzas, la única que cambia es la fuerza de cuerpo la cual ahora se calcula como

$$\mathbf{F}_g = m_a \mathbf{g} \quad (3)$$

Las fuerzas de presión se calculan igual que en 2.1.(8).

### 2.2.3. Cantidad de Movimiento Angular

El principio de conservación de cantidad de movimiento angular 2.1.(9) se simplifica con los siguientes resultados

$$\mathbf{H}_{oa} = \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{V} d\mathcal{V} = \oint_{\mathcal{L}_c} \mathbf{R} \times \frac{\dot{m}}{\mathcal{A}_c} \mathbf{n} \mathcal{A}_c d\mathcal{L} = \oint_{\mathcal{L}_c} \dot{m} \mathbf{R} \times d\mathbf{R} \quad (4.a)$$

$$\oint_{\mathcal{A}_a} \rho [\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{R} \times \mathbf{V}] (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \dot{m}_s [\mathbf{R}_s \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_s + \mathbf{V}_s)] - \dot{m}_e [\mathbf{R}_e \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_e + \mathbf{V}_e)] \quad (4.b)$$

De los momentos de fuerza, el único que cambia el de fuerzas de cuerpo, el cual ahora se calcula como

$$\mathbf{M}_g = m_a \mathbf{r}_c \times \mathbf{g} \quad (5)$$

Los momentos debido a las fuerzas de presión se calculan igual que en 2.1.(12).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Abraham, R.; Marsden, J. E. **Foundation of Mechanics**, Second Edition. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978. Third Printing, 1981.
- [2] Birkhoff, G. D. **Relativity and Modern Physics**. Harvard University Press, 1923.
- [3] Brand, L. **Mecánica Vectorial**. Compañía Editorial Continental S.A. (CECSA), 1959. 9<sup>na</sup> Impresión, 1969.
- [4] Eddington, A. S. **The Mathematical Theory of Relativity**, Second Edition. Cambridge University Press, 1924.
- [5] Einstein, A. "Zur elektrodynamik bewegter Körper". **Annalen der Physik**, Vol.17, pp.891-921, (1905).
- [6] Einstein, A. "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". **Annalen der Physik**, Vol.49, pp.769- , (1916).
- [7] Einstein, A. **The Meaning of Relativity**, Fifth Edition. Princeton University Press, 1953. Fourth Printing, 1974.
- [8] Eke, F. O.; Wang, S.-M. "Equations of Motion of Two-Phase Variable Mass Systems with Solid Base". **Journal of Applied Mechanics**, Vol.61, No.4, pp.855-860, (1994).
- [9] Fox, R. W.; McDonald, A. **Introduction to Fluid Mechanics** S. I., Fourth Edition. John Wiley & Sons, 1994.



- [10] Granados M., A. L. "Mechanics of Continuous Material Systems". **Applied Mechanics in the Americas**. Vol.5: Mechanics of Fluids, Thermal Problems, Optimization and Control, Experimental and Numerical Methods, Biomechanics, Applications. edited by M. Rysz, L. A. Godoy, L. E. Suárez, College of Engineering, University of Puerto Rico at Mayagüez, pp.87-90, August 1996. *Proceedings of the Fifth Pan-American Congress of Applied Mechanics, PACAM V*. Hotel San Juan Marriott, San Juan of Puerto Rico, January 2-4, 1997.
- [11] Hale, J. K.; Kocak, H. **Dynamics and Bifurcations**. Springer-Verlag, 1991
- [12] Hirsch, M. W.; Smale, S. **Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra**. Academic Press, 1974.
- [13] Kane, T. R.; Levinson, D. A. **Dynamics: Theory and Applications**. McGraw-Hill, New York, 1985.
- [14] Land, N. S. **A Compilation of Nondimensional Numbers**. NASA Report No. SP-274, 1972.
- [15] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **The Classical Theory of Fields**. 1951
- [16] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **Teoría Clásica de los Campos**, Segunda Edición. Editorial Reverté, 1981
- [17] León L., J. **Mecánica**. Editorial Limusa, 1979.
- [18] Levi, E. **Elementos de Mecánica del Medio Continuo**. Editorial Limusa, 1971. Tercera Reimpresión, 1977.
- [21] Meriam, J. L. **Dinámica**. Editorial Reverté, S.A., 1990.
- [23] Noll, W. "Lectures on the Foundations of Continuum Mechanics and Thermodynamics". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.52, pp.62-92, (1973). Reproducido en [Noll,1974].
- [24] Noll, W. **The Foundations of Mechanics and Thermodynamics**, Selected Papers. Springer-Verlag, 1974.
- [26] Rasband, S. N. **Dynamics**. John Wiley & Sons, 1983.
- [28] Synge, J. L. "Classical Dynamics". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.III/1, pp.1-225. Springer-Verlag, 1960.
- [31] Synge, J. L.; Griffith, B. A. **Principles of Mechanics**. McGraw-Hill, 1959.
- [32] Truesdell, C. A. **The Elements of Continuum Mechanics**. Springer-Verlag, 1966.
- [33] Truesdell, C. A. **A First Course in Rational Continuum Mechanics**. Vol.1: "General Concepts". Academic Press, 1977.



# CAPITULO VI

## TERMODINAMICA DE LOS SISTEMAS MATERIALES

### CONTENIDO

1. PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA.	144
1.1. General.	144
1.1.1. Sistemas Cerrados.	144
1.1.2. Sistemas Abiertos.	146
1.2. Trabajo y Calor.	147
1.2.1. Procesos Irreversibles.	147
1.2.2. Procesos Reversibles.	147
1.2.3. Procesos Cuasi-Estáticos.	147
1.2.4. Procesos Adiabáticos.	148
2. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA.	148
2.1. General.	148
2.1.1. Sistemas Cerrados.	148
2.1.2. Sistemas Abiertos.	149
2.2. Procesos.	149
2.2.1. Cíclicos.	149
2.2.2. Isotérmicos.	150
2.2.3. Adiabáticos.	150
2.2.4. Isoentrópicos.	151
3. RELACIONES TERMODINAMICAS.	151
3.1. Formulación Matemática.	151
3.1.1. Diferenciales Exactas.	151
3.1.2. Sistemas de Dos Variables.	152
3.1.3. Transformación de Legendre.	152
3.2. Sustancias Puras.	153
3.2.1. Relaciones de Transformación.	153
3.2.2. Ecuaciones de Maxwell.	154
3.2.3. Relaciones de Calores Específicos.	154
3.3. Sistemas Multicomponentes.	155
3.3.1. Relaciones de Transformación.	156

3.3.2. Potencial Químico.	156
3.3.3. Ecuaciones de Maxwell.	156
3.3.4. Relaciones para Composición Constante.	157
BIBLIOGRAFIA.	157

## 1. PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

### 1.1. GENERAL

La Primera Ley de la Termodinámica para Sistemas Cerrados desde un punto de vista general viene dada por el Principio de conservación de la Energía Térmica III.4.3.(7)

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}^+ - \dot{W}_p^- \quad (1)$$

donde se ha cambiado la notación de  $\mathcal{E}^T$  por  $E$  para efectos de simplificar (ver ecuación III.4.1.(2.a)). Aquí deben entenderse como sinónimos los términos de Energía Térmica y Energía Interna.

El término de Sistema Cerrado se emplea en termodinámica normalmente para referirse a un volumen de materia cuya masa no varía con el tiempo, por lo que se identifica claramente con el volumen material que se ha empleado en el desarrollo de los capítulos anteriores.

La primera Ley de la Termodinámica para Sistemas Abiertos desde un punto de vista general se desarrolla a partir del Principio de Conservación de la Energía Total III.4.1.(5)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}_t^+ + \dot{W}_g^* \quad (2)$$

en donde la energía total  $\mathcal{E}$  se define según III.4.1.(6) como

$$\mathcal{E} = E + \mathcal{K} + \mathcal{U} = \int_{V_m} \rho \epsilon \, dV \quad \epsilon = e + \frac{v^2}{2} + \varphi \quad (3)$$

Fíjese que se ha agrupado dentro del símbolo  $\epsilon$  la energía total específica.

El término de Sistema Abierto se emplea en termodinámica normalmente para referirse a la aplicación del Principio de Conservación de la Energía Total sobre un volumen material  $V_m$ , empleando el Segundo Teorema del Transporte de Reynolds. Al hacer esto se utiliza un volumen espacial arbitrario  $V_a$  como un dominio auxiliar de integración que permite la simplificación del análisis. A este volumen espacial auxiliar se le denomina en termodinámica el Sistema Abierto. Algunos otros textos de Termodinámica también acostumbran a denominar a este volumen espacial el Volumen de Control, porque en la aplicación del Segundo Teorema del Transporte de Reynolds, todos los cálculos se realizan sobre dicho volumen.

#### 1.1.1. Sistemas Cerrados

Para los Sistemas Cerrados la integral de línea del principio de conservación (1) multiplicado por  $dt$  da como resultado la variación neta de la energía interna  $E$  (antes también denominada energía térmica). Realizando esto se obtiene que

$$\int_1^2 dE = \oint_1^2 \dot{Q}^+ \, dt - \oint_1^2 \dot{W}_p^- \, dt \quad (4)$$

La integral del miembro izquierdo posee un diferencial exacto por lo que su resultado no depende del camino recorrido en la integración. Por esta razón no se denotó como integral de línea. La integrales del miembro de la derecha son integrales de línea y, por consiguiente, su resultado depende del camino recorrido. Las cantidades involucradas en estas dos últimas integrales se han denotado con un punto sobre ellas simplemente

para significar que se tratan de tasa de flujo de calor y de potencia de trabajo mecánico, respectivamente, pero no son derivadas exactas. Con esta aclaratoria, entonces (4) puede reescribirse como

$$E_2 - E_1 = \Delta E = \mathcal{A}Q^+ - \mathcal{A}W_p^- \quad (5)$$

donde se han definido

$$\mathcal{A}Q^+ = \int_1^2 \dot{Q}^+ dt \quad \mathcal{A}W_p^- = \int_1^2 \dot{W}_p^- dt \quad (6)$$

La ecuación (5) representa la Primera Ley de la Termodinámica para Sistemas Cerrados, y, para caminos de integración diferenciales, también puede escribirse como

$$dE = d\mathcal{Q}^+ - d\mathcal{W}_p^- \quad (7)$$

donde

$$d\mathcal{Q}^+ = \dot{Q}^+ dt \quad d\mathcal{W}_p^- = \dot{W}_p^- dt \quad (8)$$

Se debe recordar que la cantidad de calor  $d\mathcal{Q}^+$  recibida por el volumen materia contiene, aparte del calor recibido en la superficie por conducción y el calor generado por radiación, una porción de calor generado por el trabajo de las fuerzas viscosas internas, estando este determinado por la función de disipación viscosa descrita en la Sección III.4.2.3. Esto quiere decir que

$$\dot{Q}^+ = \dot{Q} + \dot{Q}_\mu \quad \dot{Q} = \dot{Q}_k + \dot{Q}_r \quad \dot{Q}_\mu = -\dot{W}_\mu^- \quad (9)$$

siendo los calores mencionados descritos con detalle en la Sección III.4.

Basados en la definición de  $\dot{W}_p^-$

$$\dot{W}_p^- = \int_{V_m} P \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV \quad (10)$$

dada por la expresión III.4.2.(16.a), su integral de línea definida por (6.b) puede calcularse empleando para ello un análisis muy parecido al expuesto en el apéndice A para deducir la relación B.2.4.(23) o al expuesto en la deducción V.1.3.(7). Esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}W_p^- &= \int_1^2 \dot{W}_p^- dt = \int_1^2 \left( \int_{V_m} P \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV \right) dt = \int_1^2 \left( \int_{V_m^o} P \nabla \cdot \mathbf{v} \, J \, dV^o \right) dt \\ &= \int_{V_m^o} \left( \int_1^2 P \nabla \cdot \mathbf{v} \, J \, dt \right) dV^o = \int_{V_m^o} \left( \int_1^2 P \frac{dJ}{dt} dt \right) dV^o \\ &= \int_{V_m^o} \left( \int_1^2 P \, dJ \right) dV^o = \int_1^2 P \, dV_m \end{aligned} \quad (11)$$

En la deducción mostrada se ha aplicado la Fórmula de Expansión de Euler descrita en la Sección I.2.1.3. Con respecto a la última línea nótese que no se puede intercambiar el orden de las derivadas para extraer  $dJ$  porque esta variable depende del  $dV^o$  sobre el cual se está ejerciendo la presión  $P$ . El jacobiano  $J$  produce el efecto de lograr que el diferencial de trabajo  $P \, dJ \, dV^o$  siempre se realice sobre la misma porción  $dV^o$  del volumen material de referencia, de manera que las fuerzas específicas siempre sigue a su punto de aplicación identificado con un punto material específico. Es prudente recordar que la configuración de referencia  $V_m^o$  con su respectivo sistema de coordenadas de referencia conforman un conjunto de etiquetas para los puntos materiales. Esto evita la vaguedad que pueda tener el recorrido de la fuerza de presión y el trabajo realizado por ella, tal cual como se ha colocado en la última parte de la deducción. Fíjese que el último miembro de (11) se ha colocado allí para representar la integral de al lado de una forma representativa o simbólica. Sin embargo, este último miembro solamente es válido si la presión  $P$  y el jacobiano  $J$  son uniforme en todo el

volumen material para cada instante, y, por consiguiente, las integrales de evolución y la integral sobre el volumen de referencia se pueden intercambiar.

Con esta aclaratoria, entonces el diferencial (8.b) también se puede expresar de manera representativa o simbólica como

$$d\mathcal{W}_p^- = P d\mathcal{V}_m \quad (12)$$

donde debe considerarse el comentario hecho antes para la igualdad de la última línea de (11) como sobreen-tendida,  $d\mathcal{V}_m$  se debe interpretar como la evolución de todo el volumen material y  $P$  se debe interpretar como una presión promedio actuando sobre el mismo.

### 1.1.2. Sistemas Abiertos

Como se dijo antes, la Primera Ley de la Termodinámica para Sistemas Abiertos o, como también se les llama, Volúmenes de Control se deriva de aplicar el Segundo Teorema del Transporte de Reynolds I.2.2.(4) con  $b = \epsilon$ . Haciendo en (2) se obtiene que

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \epsilon d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \epsilon d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \epsilon (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \dot{\mathcal{Q}} + \dot{\mathcal{W}}_t^+ + \dot{\mathcal{W}}_g^* \quad (13)$$

Considerando la definición de la entalpía  $h = e + P/\rho$  y substituyendo las expresiones V.1.3.(20) en (13), resulta

$$\dot{\mathcal{E}}_a + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \left( h + \frac{v^2}{2} + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \dot{\mathcal{Q}} + \dot{\mathcal{W}}_{pa}^+ + \dot{\mathcal{W}}_\mu^+ + \dot{\mathcal{W}}_g^* \quad (14)$$

donde se han definido

$$\dot{\mathcal{E}}_a = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a} \rho \epsilon d\mathcal{V} \quad \dot{\mathcal{W}}_{pa}^+ = - \int_{\mathcal{A}_a} P \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (15)$$

Recuérdese que en la deducción del Segundo Teorema del Transporte se ha supuesto que para el instante de análisis el volumen material y el volumen arbitrario coinciden.

Tomando en cuenta lo último dicho y definiendo las cantidades

$$\dot{\mathcal{W}}_a^+ = \dot{\mathcal{W}}_{pa}^+ + \dot{\mathcal{W}}_{\mu a}^+ \quad \dot{\mathcal{W}}_{\mu a}^+ = \int_{\mathcal{A}_a} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{v}_a \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (16)$$

$$\dot{\mathcal{Q}}_a = - \int_{\mathcal{A}_a} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}_a} \Phi_r d\mathcal{V} \quad \dot{\mathcal{W}}_{ga}^* = \int_{\mathcal{V}_a} \rho \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} \quad (17)$$

se puede obtener una expresión equivalente a (14) que solamente es válida cuando  $\dot{\mathcal{W}}_{\mu a}^+ = \dot{\mathcal{W}}_\mu^+$ . Esta expresión es

$$\dot{\mathcal{E}}_a + \oint_{\mathcal{A}_a} \rho \left( h + \frac{v^2}{2} + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \dot{\mathcal{Q}}_a + \dot{\mathcal{W}}_a^+ + \dot{\mathcal{W}}_{ga}^* \quad (18)$$

Sin embargo, se tiene que  $\dot{\mathcal{W}}_{\mu a}^+ = \dot{\mathcal{W}}_\mu^+$  sólo cuando:

- $\mathcal{A}_a$  coincide con paredes sólidas y no existe deslizamiento ( $\mathbf{v} = \mathbf{v}_a$ ).
- $\mathcal{A}_a$  es inmóvil y permite un flujo perpendicular al área, y, además, las fuerzas viscosas son tangenciales a la misma ( $\dot{\mathcal{W}}_{\mu a}^+ = \dot{\mathcal{W}}_\mu^+ = 0$ ).
- $\mathcal{A}_a$  es móvil, su movimiento es paralelo al flujo, el cual es perpendicular al área, y, además, las fuerzas viscosas son tangenciales a la misma ( $\dot{\mathcal{W}}_{\mu a}^+ = \dot{\mathcal{W}}_\mu^+ = 0$ ).
- $\mathcal{A}_a$  es móvil y la potencia del trabajo realizado por las fuerzas viscosas es la misma sobre el volumen material y sobre el volumen arbitrario ( $\dot{\mathcal{W}}_{\mu a}^+ = \dot{\mathcal{W}}_\mu^+$ ).

- $\mathcal{A}_a$  está formada por trozos, para cada uno de los cuales se cumple al menos una de las condiciones anteriores.

## 1.2. TRABAJO Y CALOR

Se describirán a continuación varios procesos termodinámicos: irreversibles, reversibles y adiabáticos, describiendo los aspectos más importantes en cada uno de ellos. Sin embargo, se pueden tener combinaciones de procesos haciendo la combinación también de las características de los mismos.

### 1.2.1. Procesos Irreversibles

En los procesos irreversibles el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas tiene influencia en la Primera Ley de la Termodinámica para Sistemas Cerrados 1.1.(5) en los dos siguientes aspectos. En primer lugar, el calor que recibe el volumen material  $\dot{Q}$  se ve incrementado por el trabajo interno de las fuerzas viscosas  $\dot{W}_\mu^-$ , como lo indica las expresiones 1.1.(9). En segundo lugar, el trabajo interno de las fuerzas de presión debe interpretarse como la suma de todos los trabajo que producen presiones diferentes sobre porciones diferenciales de volúmenes diferentes, tal como se describió en la deducción 1.1.(11).

Con respecto a la Primera Ley de la Termodinámica para Sistemas Abiertos 1.1.(13), los procesos irreversibles se reflejan en que el trabajo de las fuerzas no conservativas  $\dot{W}_t^+$  y  $\dot{W}_g^*$  son no nulos. Lo mismo ocurre para la Primera Ley de la Termodinámica expresada en 1.1.(18), con respecto a los trabajos  $\dot{W}_a^+$  y  $\dot{W}_{ga}^*$ .

### 1.2.2. Procesos Reversibles

En los procesos reversibles la evolución de los sistemas materiales debe hacerse de una forma muy lenta de manera que las velocidades de deformación sean despreciables y los trabajos de las fuerzas viscosas sean todos nulos ( $\dot{W}_\mu^- = \dot{W}_\mu^+ = \dot{W}_{\mu a}^+ = 0$ ), y, por consiguiente, el calor generado por disipación viscosa también se anula ( $\dot{Q}_\mu = -\dot{W}_\mu^- = 0$ ). Evidentemente, cuando un fluido es no viscoso, entonces su evolución siempre cumple con las características anteriores, sin necesidad de que el proceso sea lento. En un proceso reversible, tampoco se tienen fuerzas de cuerpo no conservativas ( $\dot{W}_g^* = \dot{W}_{ga}^* = 0$ ), puesto que estas producen un trabajo que depende del camino recorrido, y, por consiguiente, no se puede nunca alcanzar de nuevo las condiciones iniciales, sin haber producido un trabajo neto.

### 1.2.3. Procesos Cuasi-Estáticos

Un proceso cuasi-estático es aquel que evoluciona tan lento, que prácticamente es reversible, y además, posee una presión y una temperatura uniformes en el volumen material. Esta última característica se presenta debido a que, la evolución es tan lenta, que no permite la existencia de gradientes de presión y de temperatura.

Con respecto a las fuerzas de presión, se pueden analizar tanto la fuerza interna, como la externa. Las fuerza de presión interna producen un trabajo dado por la expresión 1.1.(11), pero con la particularidad de que en una evolución cuasi-estática la presión  $P$  y el jacobiano  $J$  son uniformes en todo el volumen material para cada instante. Por consiguiente, las integrales de evolución y sobre el volumen de referencia se pueden intercambiar, y la última línea de la expresión mencionada es válida de manera exacta y no simbólica, como se había mencionado allí.

Las fuerza de presión externa produce una potencia de trabajo dada por V.1.3.(20.b) en la forma

$$\dot{W}_p^+ = - \int_{\mathcal{V}_m} \nabla \cdot (P \mathbf{v}) \, d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{A}_m} P \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (1)$$

Si se considera que la evolución del sistema es cuasi-estática, entonces se puede considerar que la presión  $P$  es uniforme en todo el volumen material para cada instante. Aplicando esta suposición a la definición (1) se obtiene que, para procesos cuasi-estáticos, se cumple

$$\dot{W}_p^+ = -\dot{W}_p^- = -P \int_{\mathcal{V}_m} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{V} = -P \int_{\mathcal{A}_m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = -P \frac{d\mathcal{V}_m}{dt} \quad (2)$$

en donde se ha aplicado la Regla de Leibniz al volumen material, con una función constante  $f = 1$ . Lo mismo ocurre con  $\dot{W}_{pa}^+$

$$\dot{W}_{pa}^+ = -P \int_{V_a} \nabla \cdot \mathbf{v}_a \, dV = -P \int_{A_a} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n} \, dA = -P \frac{dV_a}{dt} \quad (3)$$

en donde se ha aplicado la Regla de Leibniz, al igual que el caso anterior, pero al volumen arbitrario.

Con respecto a la temperatura, se tiene que un proceso cuasi-estático no posee gradiente de temperaturas, es decir, su temperatura es uniforme en el volumen material, sin embargo, esta puede evolucionar en el tiempo. En la Sección 2.2.2. se analizará como se reducen las ecuaciones de la Segunda Ley de la Termodinámica cuando la temperatura es uniforme.

#### 1.2.4. Procesos Adiabáticos

En todo proceso adiabático la cantidad de calor que recibe el volumen material  $\dot{Q}$  es nula y, por consiguiente, de acuerdo a 1.1.(9)

$$\dot{Q}^+ = \dot{Q}_\mu = -\dot{W}_\mu^- = \int_{V_m} \Phi_\mu \, dV \quad \dot{Q} = 0 \quad (4)$$

Un proceso adiabático, no necesariamente es reversible, pero si lo es, se denomina isoentrópico.

## 2. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA

### 2.1. GENERAL

La Segunda Ley de la Termodinámica para Sistemas Cerrados desde un punto de vista general se desarrolla a partir de la Desigualdad Integral de la Entropía III.5.1.(1)

$$\frac{dS}{dt} \geq - \oint_{A_m} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{V_m} \frac{\Phi_r}{T} \, dV \quad (1)$$

donde

$$S = \int_{V_m} \rho s \, dV \quad (2)$$

se define sólo para simplificar la notación.

La Segunda Ley de la Termodinámica para Sistemas Abiertos desde un punto de vista general se deriva de aplicar el Segundo Teorema del Transporte de Reynolds al miembro de la izquierda de (1), es decir, sobre la integral (2).

#### 2.1.1. Sistemas Cerrados

La Segunda Ley de la Termodinámica se deduce de aplicar a la Desigualdad Integral de la Entropía (1), el Teorema de la Divergencia y substituir luego la derivación III.5.2.(2). De esta forma se obtiene

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{V_m} \frac{1}{T} \left( -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \Phi_r \right) \, dV \quad (3)$$

Esta expresión se puede integrar en una cierta evolución del volumen material de manera que

$$S_2 - S_1 = \Delta S = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{dS}{dt} \, dt \geq \int_1^2 \left[ \int_{V_m} \frac{1}{T} \left( -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \Phi_r \right) \, dV \right] dt \quad (4)$$

Nótese que la integración del miembro de la izquierda de (3) dió el resultado mostrado, por ser una diferencial exacta.



Analizando el integrando de (3) se puede observar que todos los terminos son positivos (en caso de estar recibiendo calor el volumen material), excepto el segundo que es negativo siempre según se estudió en la Sección V.5.5. Sin embargo, este término negativo está dividido por el cuadrado de la temperatura, lo que lo hace prácticamente despreciable frente a los otros términos. Por esta razón, se puede decir que el lado derecho de la desigualdad (4) es siempre positiva, y, en caso de estarse recibiendo calor en la evolución de un volumen material, la entropía siempre crece.

A veces conviene expresar la Primera Ley de la Termodinámica en forma local, y esto se hace empleando la desigualdad de Clausius-Duhem III.5.2.(1)

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \frac{1}{T} \left( -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \Phi_r \right) \quad (5)$$

Dividiendo esta expresión entre la densidad e integrando en una evolución cualquiera entre dos puntos, se obtiene

$$s_2 - s_1 = \Delta s = \int_1^2 ds = \int_1^2 \frac{ds}{dt} dt \geq \int_1^2 \frac{1}{\rho T} \left( -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \Phi_r \right) dt \quad (6)$$

donde se puede observar que la densidad actúa como factor integrante al igual que la temperatura, en el caso de un análisis local.

### 2.1.2. Sistemas Abiertos

La Segunda Ley de la Termodinámica para Sistemas Abiertos se deriva de aplicar el Segundo Teorema del Transporte de Reynolds al miembro de la izquierda de (3), es decir,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a} \rho s \, dV + \oint_{A_a} \rho s (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} \, dA \geq \int_{V_a} \frac{1}{T} \left( -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \Phi_r \right) dV \quad (7)$$

donde se ha considerado que en el miembro de la derecha la integración se hace sobre el volumen arbitrario debido a que este coincide con el volumen material para el instante de análisis.

Sin embargo, para los efectos de hacer que la expresión (7) refleje un balance de la entropía, se acostumbra a expresarla como una igualdad, haciendo uso de la Función Fuente de Generación de Entropía descrita en III.5.4. Esto es,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a} \rho s \, dV + \oint_{A_a} \rho s (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{V_a} \left[ \frac{1}{T} \left( -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \Phi_r \right) + \Psi \right] dV \quad (8)$$

o, lo que es lo mismo, empleando la ecuación integral de la entropía III.5.3.(5), con lo que resulta

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a} \rho s \, dV + \oint_{A_a} \rho s (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{V_a} \frac{1}{T} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi) \, dV \quad (9)$$

## 2.2. PROCESOS

En esta parte se analizarán los diferentes procesos con los que se modifican las expresiones de la entropía tal como se explicaron en la sección anterior. Estos tipos de procesos son: cíclicos, isotérmicos, adiabáticos e isoentrópicos.

### 2.2.1. Cíclicos

Cuando los procesos son cíclicos los sistemas cerrados evolucionan de manera tal que regresan al estado termodinámico inicial. Según esto, entonces las expresiones 2.1.(4) y 2.1.(6) se reducen a

$$0 \geq \oint \left[ \int_{V_m} \frac{1}{T} \left( -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \Phi_r \right) dV \right] dt \quad (1)$$

$$0 \geq \oint \frac{1}{\rho T} \left( -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla T \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \Phi_r \right) dt \quad (2)$$

respectivamente. Estas dos expresiones no son más que dos versiones distintas de la Desigualdad de Carnot para procesos cíclicos.

### 2.2.2. Isotérmicos

Existen procesos para los cuales los sistemas cerrados evolucionan de manera tal que la temperatura es uniforme en todo el volumen material para cada instante. Es decir, que en las expresiones 2.1.(4) y 2.1.(6) se asume  $\nabla T = \mathbf{0}$  y la temperatura absoluta  $T$  se puede extraer fuera de la integral sobre el volumen material. Haciendo esto resulta que

$$S_2 - S_1 = \Delta S \geq \oint_1^2 \frac{1}{T} \left[ \int_{V_m} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi_r) dV \right] dt = \oint_1^2 \frac{\dot{Q}}{T} dt = \oint_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (3)$$

o también

$$s_2 - s_1 = \Delta s \geq \oint_1^2 \frac{1}{\rho T} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi_r) dt \quad (4)$$

A estos procesos de temperatura uniforme se les puede denominar también procesos isotérmicos en la materia, y pueden tener la posibilidad de evolucionar. Normalmente estos procesos se presentan cuando la evolución del sistema cerrado es cuasi-estática. Sin embargo, existen también procesos que son isotérmicos en el tiempo, es decir que no evolucionan en la temperatura a medida que transcurre el tiempo, y no necesariamente tienen que ser procesos de temperatura uniforme. Por último, pueden haber procesos de temperatura uniforme y que no evolucionan en el tiempo. A estos últimos procesos les denominaremos simplemente isotérmicos.

En los sistemas abiertos se puede hacer para las expresiones 2.1.(7), 2.1.(8) y 2.1.(9), las mismas simplificaciones para procesos con temperatura uniforme que se han hecho con los sistemas cerrados, obteniéndose

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho s dV = \frac{d}{dt} \int_{V_a} \rho s dV + \oint_{A_a} \rho s (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} dA \geq \frac{1}{T} \int_{V_a} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi_r) dV = \frac{\dot{Q}}{T} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a} \rho s dV + \oint_{A_a} \rho s (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} dA = \frac{1}{T} \int_{V_a} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi_r) dV + \int_{V_a} \Psi dV = \frac{\dot{Q}}{T} + \int_{V_a} \Psi dV \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a} \rho s dV + \oint_{A_a} \rho s (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{n} dA = \frac{1}{T} \int_{V_a} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi) dV = \frac{\dot{Q}^+}{T} \quad (7)$$

### 2.2.3. Adiabáticos

En todo proceso adiabático la cantidad de calor que recibe el volumen material  $\dot{Q}$  es nula y, por consiguiente, de acuerdo a 1.1.(9)

$$\dot{Q}^+ = \dot{Q}_\mu = -\dot{W}_\mu^- = \int_{V_m} \Phi_\mu dV \quad \dot{Q} = 0 \quad (8)$$

En estos procesos globalmente adiabáticos caracterizados por (8), no necesariamente se tiene que cumplir que  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  y  $\Phi_r = 0$ . Sin embargo si esto ocurre, los procesos se denominan localmente adiabáticos.

Para procesos localmente adiabáticos se tiene que la ecuación integral de la entropía III.5.3.(5) se reduce a

$$\frac{dS}{dt} = \int_{V_m} \frac{\Phi_\mu}{T} dV \quad (9)$$

o de manera diferencia a partir de III.5.3.(7) se obtiene

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\Phi_\mu}{T} \quad (10)$$

En estas dos simplificaciones se ha empleado la definición de  $\Phi$  III.4.3.(3).

La Segunda Ley de la Termodinámica 2.1.(3) y 2.1.(5) para un proceso localmente adiabático, por su parte, se reduce a

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 \quad \frac{ds}{dt} \geq 0 \quad (11)$$

la cual expresa que para un proceso localmente adiabático, la entropía siempre crece global y localmente, o en el caso ideal que veremos en la siguiente sección permanece constante.

De los resultados de la sección anterior también se infiere que un proceso globalmente adiabático y con temperatura uniforme verifica la expresión (11.a), pero no necesariamente la expresión (11.b). Es decir, que un proceso globalmente adiabático no implica que lo sea localmente. Ver la igualdad de la expresión 2.2.(5) donde se observa que la integral es nula en un proceso globalmente adiabático y, sin embargo, el integrando puede no serlo.

#### 2.2.4. Isoentrópicos

Un proceso isoentrópico es aquel que evoluciona sin cambiar su entropía global. Para que esto ocurra un proceso tiene que ser localmente adiabático y reversible ( $\Phi_\mu = 0$ ), o globalmente adiabático, con temperatura uniforme y reversible. Un proceso para que sea reversible normalmente tiene que ser cuasi-estático como se explicó en la sección 1.2.2, lo que conlleva a que sea un proceso con temperatura uniforme, por lo que, finalmente, se puede decir que un proceso adiabático y reversible es isoentrópico, global y localmente (ver ecuaciones (9) y (10)).

### 3. RELACIONES TERMODINAMICAS

#### 3.1. FORMULACION MATEMATICA

Todas las relaciones termodinámicas derivadas en esta parte se basan en el hecho de que existen ciertas diferenciales exactas, al menos para los procesos reversibles, las cuales permiten el uso de las transformaciones parciales de Legendre. Desde un punto de vista matemático general estas transformaciones están bien descritas en la sección 9 del Apéndice D, para funciones de varias variables. Sin embargo, para las relaciones termodinámicas de sustancias puras sólo serán útiles las expresiones generales particularizadas para funciones dependientes de dos variables de estado, es decir, para sistemas de dos grados de libertad. Para sistemas multicomponentes con  $m$  especies químicas la particularización se hará para funciones dependientes de  $2 + m$  variables de estados, donde las dos primeras variables son las mismas que para el caso de una sustancia pura, y las  $m$  restantes están relacionadas con las composiciones molares y los potenciales químicos de las distintas especies químicas presentes en el compuesto.

##### 3.1.1. Diferenciales Exactas

Básicamente se van a distinguir dos casos: sustancias puras y sistemas multicomponentes. Para sustancias puras el diferencial exacto viene dado por la ecuación de equilibrio térmico local III.5.2.(5) válida para procesos reversibles e irreversibles

$$de = T ds - P dv \quad (1)$$

de donde se puede inferir que  $e$  es una función de  $s$  y  $v$ , es decir,  $e = e(s, v)$ . La aplicación inmediata de las relaciones D.9.6.(7, 9) dan como resultado las siguientes expresiones

$$T = \left( \frac{\partial e}{\partial s} \right)_v \quad -P = \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_s \quad \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s = - \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_v \quad (2)$$

Para sistemas multicomponentes la ecuación de equilibrio global es

$$dE = T dS - P d\mathcal{V} + \mu_i dn_i \quad (3)$$

válida sólo para procesos reversibles donde existen gradientes de la composición (composición variable). En (3) debe interpretarse que la globalidad del sistema es una suma de sus partes, por lo que

$$n_i e_i = ne = E \quad n_i s_i = ns = S \quad n_i v_i = nv = \mathcal{V} \quad (4)$$

donde  $e$ ,  $s$  y  $v$  son las cantidades específicas promedio y  $E$ ,  $S$  y  $\mathcal{V}$  son las mismas cantidades pero globales. Las cantidades  $\mu_i$  se definen como los *potenciales químicos* de las especies, las cuales son nulos en caso de composición constante (tanto en el espacio como en el tiempo). Del hecho de que la ecuación de equilibrio (3) sea un diferencial exacto, se deriva, mediante el uso de la relación D.9.6.(7), las siguientes expresiones

$$T = \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_{\mathcal{V}, n} \quad -P = \left( \frac{\partial E}{\partial \mathcal{V}} \right)_{S, n} \quad \mu_i = \left( \frac{\partial E}{\partial n_i} \right)_{S, \mathcal{V}, n_j} \quad (5)$$

donde el subíndice  $n$  indica que todos los  $n_i$  se mantienen constante durante la derivación. El subíndice  $n_j$  indica que todos los  $n_j$  se mantienen constantes durante la derivación, excepto  $n_i$ .

### 3.1.2. Sistemas de Dos Variables

Los sistemas dependientes de dos variables son analizados como un ejemplo en la sección 9.8 del Apéndice D. Un ejemplo adaptado a la termodinámica surge cuando se adaptan los desarrollo hecho en el Apéndice D, mediante la substitución de variables  $x = v$ ,  $y = T$  y  $z = P$ . De esta forma se obtiene, después de usar la expresión D.9.8.(8), la siguientes relaciones

$$dv = \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T dP = v(\beta dT - \kappa dP) \quad \left( \frac{\partial \beta}{\partial P} \right)_T = - \left( \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right)_P \quad \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{\beta}{\kappa} \quad (6)$$

donde

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \quad \kappa = - \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \quad (7)$$

son el coeficiente de expansión volumétrica y el coeficiente de compresibilidad isotérmica, respectivamente.

Otro ejemplo resulta de colocar  $x = T$ ,  $y = v$ ,  $z = s$  y  $w = e$ . De esta forma se obtiene, después de usar la expresión D.9.8.(13), la siguiente relación termodinámica

$$\left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s = \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_e - \frac{P}{C_v} \quad (8)$$

donde se ha considerado que

$$\left( \frac{\partial T}{\partial e} \right)_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v^{-1} = \frac{1}{C_v} \quad \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_s = -P \quad (9)$$

recordando D.9.8.(6) y (2.b). Relaciones termodinámicas parecidas a (6) y (9) también se pueden obtener para sistemas multicomponentes.

### 3.1.3. Transformación de Legendre

Las transformaciones de Legendre permiten, dada una cierta dependencia termodinámica con respecto a ciertas variables, por ejemplo  $e = e(v, s)$ , obtener otras funciones termodinámicas importantes, como la entalpía, la energía libre de Helmholtz y la energía libre de Gibbs. El procedimiento matemático general que se emplea en este caso se denomina particularmente transformaciones parciales de Legendre y está descrito

de forma generalizada en la sección 9.7 del Apéndice D. Un ejemplo sencillo particularizado a una función que depende de tres variables está descrito en las expresiones D.9.8.(14–20).

Las expresiones D.9.7.(1) particularizada para el ejemplo termodinámico de la función  $e = e(v, s)$  permiten, salvo el signo (el cual es opuesto), obtener las otras funciones termodinámicas antes mencionadas. Esto se hará de forma separada en las siguientes secciones para las sustancias puras y los sistemas multicomponentes.

### 3.2. SUSTANCIAS PURAS

Las sustancias puras quedan descritas por la ecuación de equilibrio local 3.1.(1). Esta ecuación junto con la dependencia funcional  $e(v, s)$  y las transformaciones de Legendre generan los resultados que se describen a continuación para sustancia puras.

#### 3.2.1. Relaciones de Transformación

La relación fundamental de propiedades 3.1.(1) relaciona  $e = e(v, s)$  a las dos variables  $v$  y  $s$

$$de = T ds - P dv \quad \implies \quad -de = P dv - T ds \quad (1)$$

Si se aplica D.9.7.(1), considerando que  $x_1 = v$ ,  $x_2 = s$ ,  $p_1 = P$  y  $p_2 = -T$ , se obtiene  $2^2 - 1 = 3$  posibles transformadas de Legendre relacionadas con  $f = -e$ . Estas transformadas son:

$$h(P, s) = e + P v \quad a(v, T) = e - T s \quad g(P, T) = e + P v - T s \quad (2)$$

La primera de estas funciones es la *entalpía*, ya ampliamente usada. Las funciones  $a$  y  $g$  son las funciones de Helmholtz y de Gibbs, respectivamente. A estas funciones a veces se les denominan *energía libre de Helmholtz* y *entalpía (o energía) libre de Gibbs*.

Como un resultado de la definición de la entalpía ya se había derivado la expresión

$$dh = T ds + v dP \quad (3)$$

Claramente,  $T$  y  $v$  deben ser identificados con los coeficientes de los diferenciales parciales  $ds$  y  $dP$ . Así,

$$T = \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_P \quad v = \left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_s \quad (4)$$

De estas relaciones se observa que si conocemos que  $h$  es una función de  $s$  y  $P$ , esto permite, mediante el uso de la transformada de Legendre, obtener de nuevo la ecuación primitiva 3.1.(1).

Las propiedades  $T$ ,  $s$ ,  $P$ ,  $v$  asumen el rol de variables naturales en la termodinámica clásica. Es evidente que este resultado proviene del hecho de haber empleado la relación (1) ó 3.1.(1), lo que forma la base (junto con las transformadas parciales de Legendre) de las definiciones de  $h$ ,  $a$  y  $g$ . Se puede, sin embargo, proceder diferentemente reorganizando convenientemente la relación (1) como

$$ds = \frac{P}{T} dv + \frac{1}{T} de \quad (5)$$

Esta ecuación diferencial expresa la dependencia de la variable  $s$  como una función de  $v$  y  $e$ .

Como en el caso de (2), existen tres transformadas de Legendre

$$\Omega = \left( \frac{P}{T}, e \right) = s - \frac{P}{T} v \quad \Psi = \left( v, \frac{1}{T} \right) = s - \frac{1}{T} e \quad \Phi = \left( \frac{P}{T}, \frac{1}{T} \right) = s - \frac{P}{T} v - \frac{1}{T} e \quad (6)$$

Estas nuevas funciones definidas por (2) son llamadas las *funciones de Massieu* y  $\Phi$  es frecuentemente llamada *función de Planck*. Una serie de nuevas relaciones termodinámicas puede generarse a partir de esta formulación, sin embargo, las variables intensivas naturales en este sistema son  $1/T$  y  $P/T$ . Estas variables, así

como también las funciones de Massieu, aparecen naturalmente en la mecánica estadística y la termodinámica irreversible, pero están menos relacionadas con la experiencia y son menos útiles en la descripción de procesos reales que  $T$  y  $P$ , las variables intensivas más comúnmente empleadas [Abbot & Van Ness, 1972].

Similarmente, se puede tomar el diferencial de las relaciones (2), empleando (1) para eliminar  $de$ , de forma que se obtiene

$$da = -s dT - P dv \quad dg = -s dT + v dP \quad (7)$$

Cada una de estas relaciones puede generar de nuevo una termodinámica basada en nuevos pares de variables independientes intensivas.

### 3.2.2. Ecuaciones de Maxwell

Se pueden aplicar los criterios para diferenciales exactas D.9.6.(5b) a las relaciones (1), (3) y (7), con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} T &= \left( \frac{\partial e}{\partial s} \right)_v = \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_P & P &= - \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_s = - \left( \frac{\partial a}{\partial v} \right)_T \\ v &= \left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_s = \left( \frac{\partial g}{\partial P} \right)_T & s &= - \left( \frac{\partial a}{\partial T} \right)_v = - \left( \frac{\partial g}{\partial T} \right)_P \end{aligned} \quad (8)$$

y, adicionalmente, se puede aplicar el criterio D.9.6.(9), resultando las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s &= - \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_v & \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_s &= \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)_P \\ \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v &= \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T & \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P &= - \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T \end{aligned} \quad (9)$$

Las relaciones (9) son denominadas las *ecuaciones de Maxwell* y pueden escribirse también en función de propiedades específicas molares.

Otra procedimiento con el cual se pueden obtener otras relaciones termodinámicas se ilustra mediante las expresiones (1) y (3)

$$de = T ds - P dv \quad dh = T ds + v dP \quad (10)$$

Dividiendo la primera por  $dv$  y la segunda por  $dP$ , respectivamente, considerando la temperatura constante, resulta

$$\left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T = T \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T - P \quad \left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = T \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T + v \quad (11)$$

Mediante la substitución de las relaciones (9.c, d) se obtiene

$$\left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - P \quad \left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = -T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P + v \quad (12)$$

Similarmente, dividiendo las expresiones (10) por  $dT$ , considerando respectivamente  $v$  y  $P$  constantes, da inmediatamente

$$\left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v \quad \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P \quad (13)$$

### 3.2.3. Relaciones de Calores Específicos

Los calores específicos  $C_p$  y  $C_v$ , a presión y volumen constante, respectivamente, tal como fueron definidos en C.4.3.(14), vienen expresados por

$$C_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v \quad C_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P \quad (14)$$

en donde se ha aplicado las relaciones (13).

Si se considera  $e$  como una función de  $T$  y  $v$ , y se considera  $h$  como función de  $T$  y  $P$ , entonces

$$de = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv \quad dh = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_T dP \quad (15)$$

La substitución de las expresiones (12) da

$$de = C_v dT + \left[ T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - P \right] dv \quad dh = C_p dT - \left[ T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P - v \right] dP \quad (16)$$

Dos expresiones equivalentes pueden ser derivadas para el diferencial total de la entropía, dependiendo bien de  $T$  y  $v$  o de  $T$  y  $P$ . En estos caso se tiene que

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv \quad ds = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T dP \quad (17)$$

y mediante la substitución de (14) y de (9.c, d) se obtiene

$$ds = \frac{C_v}{T} dT + \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dv \quad ds = \frac{C_p}{T} dT - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P dP \quad (18)$$

La sustracción de las expresiones en (18) y la restricción a procesos con volumen o presión constante provee una ecuación para la diferencia de los calores específicos

$$C_p - C_v = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = \frac{T\beta^2}{\rho \kappa} \quad (19)$$

donde se ha empleado las definiciones 3.1.(7).

Una expresión para la relación entre los calores específicos se deriva directamente de la división de las expresiones (14). Así

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_v = \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_s \quad (20)$$

en donde se ha aplicado repetidamente D.9.8.(8) para obtener la última parte. La expresiones (19) y 20) provee dos formas alternativas de relacionar  $C_p$  y  $C_v$ .

La aplicación del criterio de diferencial exacta D.9.6.(9) a (18) provee fórmulas para el cálculos de las derivadas de los calores específicos

$$\left( \frac{\partial C_v}{\partial v} \right)_T = T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_v \quad \left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = -T \left( \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_P \quad (21)$$

### 3.3. SISTEMAS MULTICOMPONENTES

Los sistemas multicomponentes quedan descritos por la ecuación de equilibrio global para procesos reversible y composición variable 3.1.(3). Esta ecuación junto con la dependencia funcional  $E(\mathcal{V}, S, n_i)$  y las transformaciones de Legendre generan los resultados que se describen a continuación para sistemas multicomponentes. En los procesos reversibles se asume que todos los componentes del sistema perciben la misma temperatura y la misma presión en cada instante, por lo que el estudio de tales sistemas, cuya evolución es reversible, es muy sencillo. En el caso de procesos irreversibles la suposición anterior deja de ser válida y se

debe considerar que cada componente puede percibir una temperatura y una presión distinta a los restantes en cada punto del espacio y a cada instante.

### 3.3.1. Relaciones de Transformación

Hay  $m + 2$  variables independientes en 3.1.(3),

$$dE = T dS - P dV + \mu_i dn_i \quad (1)$$

y por lo tanto existen  $2^{m+2} - 1$  posibles transformadas de Legendre relacionadas con  $E$ . Sin embargo, existen sólo tres de estas transformación que se emplean naturalmente. Ellas son la entalpía  $H$ , la función de Helholtz  $A$  y la función de Gibbs  $G$  definidas como

$$n_i h_i = nh = H \quad n_i a_i = na = A \quad n_i g_i = ng = G \quad (2)$$

Como el sistema multicomponente con composición variable se asume en equilibrio térmico y mecánico (temperatura y presión homogéneas) debido a que el proceso se ha supuesto reversible en 3.1.(3), entonces las relaciones 3.2.(2) se pueden aplicar a cada componente y, multiplicando por  $n_i$  toda la ecuación en cada caso y considerando (2), se obtiene

$$H = E + PV \quad A = E - TS \quad G = E + PV - TS \quad (3)$$

Esto da el mismo resultado que obtener las primeras transformadas de Legendre relacionadas con  $E$  a partir de (1). Considerando los diferenciales de (3) y empleando (1) para eliminar  $dE$ , se pueden obtener expresiones para  $dH$ ,  $dA$  y  $dG$  en la forma en que muestran sus variables canónicas

$$dH = T dS + V dp + \mu_i dn_i \quad dA = -S dT - P dV + \mu_i dn_i \quad dG = -S dT + V dP + \mu_i dn_i \quad (4)$$

Un número de relaciones termodinámicas se pueden obtener a partir de (4) considerando que contiene diferenciales exactos.

### 3.3.2. Potencial Químico

Considerando que las expresiones de (4) son diferenciales exactas, y aplicando el criterio D.9.6.(5) a los últimos términos, se llega a que el *potencial químico*, ya definido antes en 3.1.(5.c), se puede expresar de varias formas

$$\mu_i = \left( \frac{\partial E}{\partial(n_i)} \right)_{S,V,n_j} = \left( \frac{\partial H}{\partial(n_i)} \right)_{S,P,n_j} = \left( \frac{\partial A}{\partial(n_i)} \right)_{V,T,n_j} = \left( \frac{\partial G}{\partial(n_i)} \right)_{T,P,n_j} \quad (5)$$

donde el subíndice  $n_j$  indica que, en la derivación parcial, todos los  $n_j$  con  $j \neq i$  se mantienen constantes.

Debido a la definición del potencial químico (5), éste tiene una connotación subordinada a la fracción  $n_i$ . Es decir, si  $n_i$  está definida de forma global para el sistema multicomponentes, entonces de igual manera lo está  $\mu_i$ . Si  $n_i$  está definida para cada punto del espacio y a cada instante, entonces también lo estará  $\mu_i$ .

### 3.3.3. Ecuaciones de Maxwell

Al igual como se hizo para una sustancia pura, de nuevo se pueden aplicar los criterios D.9.6.(5) para diferenciales exactos a los primeros términos de (1) y (4), lo cual resulta en las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} T &= \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V,n} = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_{P,n} & P &= - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,n} = - \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_{T,n} \\ V &= \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_{S,n} = \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T,n} & S &= - \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_{V,n} = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,n} \end{aligned} \quad (6)$$



similares a las relaciones 3.2.(8), pero expresadas para la globalidad del sistema. El subíndice  $n$  significa que en la derivación parcial la composición, es decir todas la  $n_i$ , se mantienen constantes.

Adicionalmente, se puede aplicar el criterio D.9.6.(9) a (l) y (4), resultando las siguientes relaciones para las variables primaria

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathcal{V}}\right)_{S,n} &= -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{\mathcal{V},n} & \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,n} &= \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S}\right)_{P,n} \\ \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mathcal{V},n} &= \left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{V}}\right)_{T,n} & \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T}\right)_{P,n} &= -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,n} \end{aligned} \quad (7)$$

similares a las ecuaciones de Maxwell 3.2.(9), pero expresadas para la globalidad del sistema. Para los potenciales químicos se obtiene

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{P,n} = -\left(\frac{\partial S}{\partial n_i}\right)_{T,P,n_j} \quad \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial P}\right)_{T,n} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_i}\right)_{T,P,n_j} \quad \left(\frac{\partial \mu_l}{\partial n_k}\right)_{T,P,n_j} = \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial n_l}\right)_{T,P,n_j} \quad (8)$$

De las doce posibles ecuaciones de la forma D.9.6.(9) e involucrando los potenciales químicos  $\mu_i$ , se han sólo escrito tres de ellas usando la dependencia funcional  $E(S, \mathcal{V})$  en (1). Tres grupos de tres ecuaciones adicionales se pueden obtener empleando las dependencias funcionales  $H(S, P)$  en (4.a),  $A(T, \mathcal{V})$  en (4.b) y  $G(T, P)$  en (4.c).

### 3.3.4. Relaciones para Composición Constante

Cuando se tiene composición constante, en virtud de (2), las relaciones (6) y (7) se reducen a las relaciones para una sustancia pura 3.2.(8) y 3.2.(9), respectivamente. Habría que agregar a las derivadas parciales de la sección 3.2 el subíndice  $n$  para indicar que la composición es constante.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Abbot, M. M.; Van Ness, H. C. **Theory and Problems of Thermodynamics**. McGraw-Hill (Schaum's Outline Series), 1972.
- [2] Astarita, G. **An Introduction to Non-Linear Continuum Thermodynamics**. Società Editrice di Chimica, Milano, 1975.
- [3] Bauman, R. P. **Modern Thermodynamics with Statistical Mechanics**. Macmillan Publishing Company, 1992.
- [4] Beck, Ch.; Schlögl, F. **Thermodynamics of Chaotic Systems**. Cambridge University Press, 1993.
- [5] Bejan, A. **Advanced Engineering Thermodynamics**. John Wiley & Sons, 1988.
- [6] Day, W. A. **The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory**. Springer-Verlag, 1972.
- [7] Duhem, P. **Traité d'Energétique**. Gauthier-Villars, Paris, 1911.
- [8] Flügge, S. (Ed.). **Encyclopedia of Physics**. Vol.III/2: Principles of Thermodynamics and Statistics. Springer-Verlag, 1959.
- [9] Germain, P.; Nguyen, Q. S.; Suquet, P. "Continuum Thermodynamics". **Transactions of the ASME**, Vol.50, pp.1010-1020, Dec., (1983).
- [10] Kestin, J. **A Course in Thermodynamics**, Vol.I-II. Hemisphere Publishing Corporation - McGraw-Hill, 1979. Revised Printing.
- [11] Kirillin, V. A.; Sychev, V. V.; Sheindlin, A. E. **Engineering Thermodynamics**. MIR Publisher-Moscow, 1976. Reprint, 1981.
- [12] Kondepudi D. K.; Prigogine I. **Modern Thermodynamics, From Heat Engines to Dissipative Structures**. John Wiley & Sons, 1998.

- [13] LaCalle, J. M.; Turet, J.; Nieto, R.; Honduvilla, J.; Teijeiro, A.; González, M. C.; Herrero, F. **Termodinámica**, Segunda Edición. Sección de Publicaciones, E. T. S. Ing. Industriales (Madrid), 1997.
- [14] Land, N. S. **A Compilation of Nondimensional Numbers**. NASA Report No. SP-274, 1972.
- [15] Lee, J. F.; Sears, F. W.; Turcotte, D. L. **Statistical Thermodynamics**. Addison-Wesley, 1963.
- [16] Noll, W. "Lectures on the Foundations of Continuum Mechanics and Thermodynamics". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.52, pp.62-92, (1973). Reproducido en [Noll,1974].
- [17] Noll, W. **The Foundations of Mechanics and Thermodynamics**, Selected Papers. Springer-Verlag, 1974.
- [18] Planck, M. **Eight Lectures on Theoretical Physics**. Columbia University Press, 1915. Dover Publications (New York), 1998.
- [19] Planck, M. **Treatise on Thermodynamics**, Third Edition. Dover Publications (New York), 1945
- [20] Schrödinger, E. **Statistical Thermodynamics**. Cambridge University Press (Cambridge), 1952. Dover Publication (New York), 1989
- [21] Sedov, L. I. (Ed.) **Macroscopic Theories of Matter and Fields: A Thermodynamic Approach**. MIR Publishers, Moscow, 1983.
- [22] Šilhavý, M. **The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media**. Springer-Verlag, 1996.
- [23] Slattery, J. C. **Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua**. McGraw-Hill, 1972.
- [24] Smith, J. M.; Van Ness, H. C. **Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics**, 4<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill, 1987.
- [25] Sommerfeld, A. **Thermodynamics and Statistical Mechanics**. Lectures on Theoretical Physics, Vol.V. Academic Press, 1950.
- [26] Sychev, V. V. **The Differential Equations of Thermodynamics**. MIR Publisher-Moscow, 1983.
- [27] Sychev, V. V. **Complex Thermodynamic Systems**, Third Edition. MIR Publisher-Moscow, 1981.
- [28] Truesdell, C. A. **The Elements of Continuum Mechanics**. Springer-Verlag, 1966.
- [29] Truesdell, C. A. **Rational Thermodynamics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Springer-Verlag, 1984.
- [30] Valanis, K. C. **Irreversible Thermodynamics of Continuous Media**, Internal Variable Theory. Springer-Verlag, 1972.
- [31] Van Wylen, G. J.; Sonntag, R. E. **Fundamentals of Classical Thermodynamics**. John Wiley & Sons, 1965. Second Printing, 1966.
- [32] Wark, R. **Thermodynamics**, 4<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill, 1983.
- [33] Woods, L. C. **The Thermodynamics of Fluid Systems**. Clarendon Press - Oxford University Press, 1975.
- [34] Yao, Y. L. **Irreversible Thermodynamics**. Science Press - Van Nostrand Reinhold Company - Litton Educational Publishing, 1981.
- [35] Zemansky, A. C.; Dittman, M. M. **Heat and Thermodynamics**, 6<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill, 1981.

# CAPITULO VII

## RELACIONES CONSTITUTIVAS

### CONTENIDO

1. INTRODUCCION.	159
1.1. Definición de Relación Constitutiva.	160
1.2. Axiomas de Noll.	160
1.2.1. Determinismo.	160
1.2.2. Acción Local.	161
1.2.3. Indiferencia del Marco de Referencia.	161
1.2.4. Consistencia.	162
1.2.5. Indiferencia del Sistema de Coordenadas.	162
1.2.6. Isotropía.	163
1.2.7. Planteamiento Correcto.	163
1.2.8. Invarianza Dimensional.	163
1.2.9. Equipresencia.	163
2. MATERIALES SIMPLES.	163
2.1. Definición de Material Simple.	163
2.1.1. Fundamentos.	163
2.1.2. Fórmula Recursiva.	164
2.1.3. Cálculo de la Deformación.	165
2.2. Material Tixotrópico.	165
2.3. Material Reopéctico.	165
2.4. Material de Rivlin-Ericksen.	166
2.5. Material de Segundo Orden de Complejidad.	166
2.6. Material Viscoelástico.	167
2.7. Flujo Viscométrico.	167
2.7.1. Flujo Generalizado.	168
2.7.2. Flujo Plano.	168
2.7.3. Flujo Cilíndrico.	169
2.7.4. Consolidación.	170
2.8. Modelos No Newtonianos Generalizados	170
BIBLIOGRAFIA.	171

## 1. INTRODUCCION

Las *relaciones constitutivas* siempre han sido para las ciencias físicas un asertijo difícil de descifrar. Dentro de estas relaciones se encuentran ejemplos que van desde las características elásticas y viscosas de ciertos materiales, pasando por las ecuaciones de ciertos estados (gases, líquidos, sólidos), hasta llegar a relaciones que describen el comportamiento termo-mecánico de materiales especiales o en situaciones especiales. Se ve claramente que la definición de un sólido elástico de Hooke, de un fluido newtoniano, la ecuación de estado para gases ideales, la ley de Fourier, la ley de Fick, la fricción de Coulomb, la ley de Ohm, etc. son sólo ejemplos sencillos de relaciones constitutivas.

### 1.1. DEFINICION DE RELACION CONSTITUTIVA

Las *relaciones constitutivas* son aquellas relaciones entre cantidades fundamentales que completan un problema de la física matemática para que esté bien planteado. No son condiciones para un instante determinado ni para un punto en particular. Normalmente son relaciones de uso general que tratan de representar matemáticamente el comportamiento mecánico, termodinámico o electromagnético (o combinaciones de estos) de un material, completando así la formulación general de un problema de la física matemática. Su formulación debe ligar precisamente aquellas variables fundamentales que ligán al problema con sus partes y hacen que tenga una solución determinística.

### 1.2. AXIOMAS DE NOLL

Los Axiomas de Noll para las relaciones constitutivas son en total nueve principios denominados:

1. Determinismo.
2. Acción Local.
3. Indiferencia del Marco de Referencia Material.
4. Consistencia.
5. Indiferencia del sistema de Coordenadas.
6. Isotropía.
7. Planteamiento Correcto.
8. Invarianza Dimensional.
9. Equipresencia.

Todos estos axiomas excepto el número 2 están descritos en [Truesdell & Toupin,1960;§.293] y [Aris,1962;§.8.4]. Los tres primeros axiomas están descritos de manera muy formal en [Noll,(1958);Noll,1974] y [Truesdell,1977;§.IV.2], aunque la primera vez que fue enunciado el axioma 3, con el formalismo mencionado, fue en [Noll,1955]. Se pasará a continuación a describir cada uno de estos axiomas.

#### 1.2.1. Determinismo

El principio del determinismo establece que el esfuerzo  $\mathbf{T}$  en el lugar ocupado por el punto material  $X$  del cuerpo  $\mathcal{B}$  en el tiempo  $t$ , está determinado por la historia del movimiento  $\mathcal{V}_m = \mathbf{x}(t', \mathcal{B})$  para  $-\infty < t' \leq t$ . Esto es,

$$\mathbf{T}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{T}[t, \mathbf{x}(t, X)] = \mathbf{N}_{t'=-\infty}^{t'=t}[\mathbf{x}(t', X)] \quad (1)$$

Aquí  $\mathbf{N}_{t'=-\infty}^{t'=t}$  denota un funcional de todos los mapas  $\mathbf{x}(t', X)$  factibles del movimiento del cuerpo  $\mathcal{B}$  hasta el tiempo  $t$ , y el resultado es un tensor de segundo orden, con una descripción espacial. La relación (1) se denomina la relación constitutiva, y el funcional  $\mathbf{N}_{t'=-\infty}^{t'=t}[\mathbf{x}(t', X)]$  no es más que una regla que, para cada punto material  $X$  y a cada instante  $t$ , asigna a la historia hasta el tiempo  $t$  de cada movimiento concebible de  $\mathcal{B}$ , un único tensor  $\mathbf{T}(t, \mathbf{x})$  en el lugar  $\mathbf{x}$  ocupado por  $X$  en el instante  $t$ . Como los  $X$  cubren  $\mathcal{B}$ , el valor de  $\mathbf{N}_{t'=-\infty}^{t'=t}$  en el instante  $t$  da el campo de esfuerzo que actúa sobre  $\mathbf{x}(t, \mathcal{B})$ . En otras palabras, el desplazamiento

en al pasado y en el presente dado por el movimiento de  $\mathcal{B}$  a los puntos materiales, de forma comprimida determina el campo de esfuerzo  $\mathbf{T}$  sobre la configuración actual  $\mathcal{V}_m = \mathbf{x}(t, \mathcal{B})$ .

El concepto de material aquí definido, representa la común observación de que muchos cuerpos naturales exhiben memoria de su experiencia pasada, y algunas veces continúan respondiendo a los efectos de cambio de forma, mucho tiempo después que el cambio tuvo lugar. Por supuesto, aquellos  $\mathfrak{N}$  especiales que dependen de  $\mathbf{x}$  sólo a través de su valor presente, los cuales modelan materiales sin memoria, o que dependen del valor presente de su derivada en el tiempo, los cuales modelan materiales con un rango de memoria pequeño, no están excluidos.

Sólo los marcos de referencia que preservan el sentido del tiempo son permitidos en mecánica. En este sentido se debe tener en cuenta que la relación constitutiva (1) respeta el sentido del tiempo. Mientras que el movimiento del pasado y del presente determina los esfuerzos del presente, por ningún motivo se tendrá que el movimiento del futuro y del presente determinarán los esfuerzos del presente. En los materiales de la naturaleza, el pasado de un espécimen no puede generalmente ser reconstruido de sus condiciones en el presente y en el futuro, y las irreversibilidades de este tipo están permitidas por las teorías matemáticas desde el principio. En verdad, la irreversibilidad es la regla, no la excepción, en la mecánica de los sistemas materiales continuos, y el estudio de varias interpretaciones precisas de esta palabra es el principal objetivo de la teoría. En este sentido, la mecánica de medios continuos se aleja enormemente de la tradición de la mecánica analítica clásica, en la cual, en casos típicos, el pasado y el presente son intercambiables [Truesdell,1977].

Es posible que (1) sea invertible en el sentido que el movimiento  $\mathbf{x}$  de un cuerpo  $\mathcal{B}$  esté determinado, inversamente, por la historia del campo tensorial  $\mathbf{T}$  de los esfuerzos definidos sobre él. Sin embargo, tal situación no es el caso general, ya que en la hidrodinámica euleriana, definida por la relación constitutiva de un fluido elástico, descrita más adelante, el conocimiento del campo de presiones para todo tiempo, no determina acerca de su desplazamiento  $\mathbf{x}(t, \cdot)$ , sino tan sólo su densidad  $\rho$ . Así, una relación invertida que de  $\mathbf{x}$  en función de la historia de  $\mathbf{T}$  posiblemente no puede ser general.

### 1.2.2. Acción Local

En el principio del determinismo se permite que el movimiento de un punto material  $Y$ , que está lejos de  $X$ , afecte el esfuerzo en  $X$ . La noción de fuerza de contacto hace natural excluir acciones a distancia como una propiedad de la materia. De acuerdo a esto, se asume el siguiente axioma: El movimiento de los puntos materiales a una distancia finita de  $X$  en alguna configuración del cuerpo  $\mathcal{B}$ , puede ser ignorada en el cálculo del esfuerzo en  $X$  [Truesdell,1977]. Por supuesto que, por la suavidad asumida para el mapa  $\mathbf{x}$ , los puntos materiales una vez que están alejados a una cierta distancia finita aparte, continuarán más adelante también a una distancia finita aparte. Formalmente, si  $\mathbf{x}$  y  $\tilde{\mathbf{x}}$  son dos movimientos del cuerpo  $\mathcal{B}$ , tales que para una vecindad  $\mathcal{N}(X)$  de un punto material  $X$  se cumple que

$$\mathbf{x}(t', Y) = \tilde{\mathbf{x}}(t', Y) \quad -\infty < t' \leq t \quad \forall Y \in \mathcal{N}(X) \quad (2)$$

entonces

$$\mathfrak{N}_{t'=-\infty}^{t'=t}[\mathbf{x}(t', X)] = \mathfrak{N}_{t'=-\infty}^{t'=t}[\tilde{\mathbf{x}}(t', X)] \quad (3)$$

### 1.2.3. Indiferencia del Marco de Referencia

Este axioma también se le conoce como el *Axioma de Objetividad*. Se ha dicho que se consideran dos procesos dinámicos equivalentes, como siendo realmente el mismo fenómeno, visto desde dos marcos de referencia distintos, como respaldo. También se consideran las propiedades materiales como indiferentes a la escogencia del marco de referencia. Puesto que las ecuaciones constitutivas son diseñadas para expresar las propiedades materiales idealizadas, se requiere que sean indiferentes al marco de referencia empleado. Esto es, si la relación constitutiva (1) se satisface por el proceso dinámico formado por el par  $\{\mathbf{x}, \mathbf{T}\}$  en un marco de referencia  $\sharp$ , también se debe satisfacer para cualquier proceso dinámico equivalente  $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{T}^*\}$ , definido en otro marco de referencia  $\sharp^*$  [Truesdell,1977]. Formalmente, el mapa constitutivo  $\mathfrak{N}$  en (1) debe satisfacer la identidad

$$\mathbf{T}^*(t^*, \mathbf{x}^*(t^*, X)) = \mathfrak{N}_{s=-\infty}^{s=t^*}[\tilde{\mathbf{x}}^*(s, X)] \quad (4)$$

para todo  $\mathbf{T}^*$ ,  $\mathbf{x}^*$  y  $t^*$  que puedan ser obtenidos de  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{x}$  y  $t$ , mediante las transformaciones de la forma

$$t^* = t + t_o \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t, X) = \mathbf{x}_o^*(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{x}(t, X) - \mathbf{x}_o) \quad (5)$$

siendo  $t_o$ ,  $\mathbf{x}_o$ ,  $\mathbf{x}_o^*(t)$  y  $\mathbf{Q}(t)$  cantidades pre-establecidas. En (5) le asignamos  $t^*$  y  $\mathbf{x}_o^*(t)$  como el tiempo y el lugar en el marco de referencia  $\sharp^*$  que corresponde al evento al cual en el marco de referencia  $\sharp$  le hemos asignado  $t$  para el tiempo y  $\mathbf{x}_o$  para el lugar.

De manera similar, el tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$  y la fuerza de cuerpo  $\mathbf{g}$  son cantidades indiferentes al cambio del marco de referencia en la forma

$$\mathbf{T}^*(t^*, \mathbf{x}^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{Q}^t(t) \quad \mathbf{g}^*(t^*, \mathbf{x}^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \quad (6)$$

donde  $t^*$  y  $\mathbf{x}^*$  son determinados de  $t$  y  $\mathbf{x}$  con (5). Finalmente, si el proceso dinámico formado por el par  $\{\mathbf{x}, \mathbf{T}\}$  determina una fuerza de cuerpo  $\mathbf{g}$  en  $\sharp$ , entonces  $\mathbf{g}^*$  sirve para balancear  $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{T}^*\}$  en  $\sharp^*$ , y, por supuesto, la Primera Ley del Movimiento de Cauchy se debe mantener indiferente al cambio del marco de referencia (6) en la forma

$$\mathbf{a}^{\sharp^*} = \rho \mathbf{g}^* + \nabla^* \cdot \mathbf{T}^* \quad (7.a)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{\sharp^*} &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^* - \mathbf{a}_o^* - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{v} - \dot{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_o^*) - \dot{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o^*) \\ &= \mathbf{a}^* - \mathbf{a}_o^* - 2\dot{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_o^*) - (\dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{Q}}^2) \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o^*) \end{aligned} \quad \mathbf{Q} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^t = -\dot{\mathbf{Q}}^t \quad (7.b)$$

con

$$\mathbf{v}^* = \frac{d\mathbf{x}^*}{dt^*} \quad \mathbf{a}^* = \frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} \quad \mathbf{v}_o^* = \frac{d\mathbf{x}_o^*}{dt} \quad \mathbf{a}_o^* = \frac{d\mathbf{v}_o^*}{dt} \quad (8)$$

y

$$\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o^* = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \quad (9.a)$$

$$\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_o^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o^*) \quad (9.b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* - \mathbf{a}_o^* &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} + 2\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{v} + \ddot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^t \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o^*) \\ &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o^*) + \dot{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_o^*) \\ &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} + 2\dot{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_o^*) + (\dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{Q}}^2) \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o^*) \end{aligned} \quad (9.c)$$

El tensor anti-simétrico  $\dot{\mathbf{Q}}$  es el *Tensor de Giro* de  $\sharp$  con respecto a  $\sharp^*$ . El término central al final es la *Aceleración de Coreolis*, que corresponde por (9.b) a la velocidad  $\mathbf{v}^*$  de un punto material con respecto a  $\mathbf{x}_o^*$  en  $\sharp^*$  y al giro  $\dot{\mathbf{Q}}$ . El último término al final contiene dos partes. La primera denominada *Aceleración de Euler*, corresponde a la tasa de cambio de la velocidad angular. La segunda denominada *Aceleración Centrípeta*, expresa la aceleración causada por el puro transporte del punto material con respecto a  $\sharp^*$ .

De esta forma, no sólo  $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{T}^*\}$  es un proceso dinámico definido en término de  $\sharp^*$ , sino también la fuerza de cuerpo  $\mathbf{g}^*$  correspondiente a él es la misma, en el sentido de la indiferencia al marco de referencia, como la fuerza de cuerpo requerida para equilibrar  $\{\mathbf{x}, \mathbf{T}\}$  en  $\sharp$ . Así, la definición de un proceso dinámico es indiferente al marco de referencia, y el proceso  $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{T}^*\}$  en  $\sharp^*$  puede ser considerado como describiendo el mismo fenómeno de la naturaleza, tal como lo hace  $\{\mathbf{x}, \mathbf{T}\}$  en  $\sharp$ . Se dirá formalmente que  $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{T}^*\}$  es un proceso en  $\sharp^*$  que es equivalente al proceso  $\{\mathbf{x}, \mathbf{T}\}$  en  $\sharp$ , si los dos están relacionados por las expresiones (6) y (7) [Truesdell, 1977].

#### 1.2.4. Consistencia

Las relaciones constitutivas deben ser consistente con los principios generales de conservación de masa, cantidad de movimiento lineal y angular, energía y entropía.

#### 1.2.5. Indiferencia del Sistema de Coordenadas

Las relaciones constitutivas deben poder ser expresadas en una notación simbólica o indicial, de modo que se asegure que la relación es la misma en todos los sistemas de coordenadas, aunque estos sean curvilíneos, aunque sean variantes en el tiempo.

### 1.2.6. Isotropía

Un material es isótropo si cualquier rotación de los sistemas de coordenadas deja las relaciones constitutivas invariantes. El material es *aeolotrópico* si es invariante sólo bajo un cierto subgrupo del grupo de las rotaciones.

### 1.2.7. Planteamiento Correcto

Cuando las ecuaciones constitutivas son combinadas con las ecuaciones del movimiento, de la energía, de continuidad, etc., ellas deberían tener una solución única para las condiciones iniciales y de contorno físicamente sensibles. Este requerimiento ha sólo sido completado en los casos más simples. Una condición necesaria, y lejos de ser suficiente, es que el número de las incógnitas debe ser igual al número de ecuaciones involucradas.

### 1.2.8. Invarianza Dimensional

Las constantes materiales (tales como módulo de elasticidad, viscosidad, etc.) sobre las cuales depende el comportamiento del material deben ser especificadas en una forma que debe ser consistente con el clásico teorema  $\pi$  del análisis dimensional.

### 1.2.9. Equipresencia

En el acercamiento más simple a la mecánica de medios continuos los efectos acoplados normalmente son ignorados o simplemente obviados. Por ejemplo, se asocia el tensor de esfuerzo con el tensor de deformación o velocidad de deformación y el flujo de calor con el gradiente de temperatura, pero no se cruzan los efectos. Desde un punto de vista general, tal separación es completamente arbitraria, y una variable independiente presente en una ecuación constitutiva debería aparecer en todas ellas. En la práctica, este acercamiento olímpico a la teoría de las relaciones constitutivas ha sido rara vez posible, y más comúnmente uno o dos efectos acoplados han sido tomados en cuenta para explicar algún fenómeno en particular. Ejemplo de esto lo tenemos en el llamado fluido de Maxwell, en el cual los tensores de esfuerzos y el flujo de la energía térmica dependen de las derivadas de las variables termodinámicas y la velocidad, para las cuales son definidas una viscosidad, una conductividad térmica y una temperatura. De consideraciones muy generales de invarianza, puede ser demostrado que sólo ciertas combinaciones de términos pueden ocurrir en los tensores de esfuerzos y el flujo de la energía térmica. Esta discriminación de efectos no es más arbitraria, sino que surge naturalmente de los requerimientos de invarianza.

## 2. MATERIALES SIMPLES

### 2.1. DEFINICION DE MATERIAL SIMPLE

#### 2.1.1. Fundamentos

Esta definición es original de Noll [1972], aunque se venía acuñando desde mucho antes, como él mismo lo referencia [Noll,1955;Noll,1958]. La definición de *material simple* se basa principalmente en el axioma de determinismo (Sec.1.2.1), pero la dependencia funcional 1.2.(1) se establece con respecto al tensor de Cauchy en la forma

$$\mathbf{T}(t, \mathbf{x}) = \mathfrak{N}_{t'=-\infty}^{t'=t}[\mathbf{C}_t(t', \mathbf{x})] \quad (1)$$

donde el funcional  $\mathfrak{N}_{t'=-\infty}^{t'=t}$  indica que los valores de  $\mathbf{T}$  depende de la historia del tensor de Cauchy  $\mathbf{C}_t$  desde  $\mathbf{C}_t(-\infty, \mathbf{x})$  hasta  $\mathbf{C}_t(t, \mathbf{x})$ . En otras palabras el tensor de esfuerzo para un material simple depende de toda la historia (pasada) de deformación.

Tal como se mostró en la sección I.3.4.7, la expansión en series de Taylor del Tensor de Cauchy alrededor del tiempo actual  $t$ , permite obtener la siguiente serie infinita

$$\mathbf{C}_t(t', \mathbf{x}) = \mathbf{I} + (t' - t)\mathbf{A}_1 + \frac{(t' - t)^2}{2!}\mathbf{A}_2 + \cdots + \frac{(t' - t)^n}{n!}\mathbf{A}_n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t' - t)^k}{k!}\mathbf{A}_k \quad (2)$$

la cual expresa que toda la historia de deformación depende de los tensores de Rivlin-Ericksen  $\mathbf{A}_n$  y de las potencial del diferencial de tiempo  $(t' - t)$ . O sea que los tensores de Rivlin-Ericksen  $\mathbf{A}_n$  determinan la historia  $\mathfrak{N}_{t'=-\infty}^{t'=t}[\mathbf{C}_t(t', \mathbf{x})]$  del tensor de Cauchy. Esta conclusión introducida en la expresión (1) la convierte en

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n, \dots) \quad \mathbf{A}_n(t, \mathbf{x}) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathbf{C}_\tau(t, \mathbf{X}_\tau) \right|_{\tau=t} \quad (3)$$

con las derivadas de la derecha siendo así por ser (2) una expansión en series de Taylor alrededor de  $t$ , y donde la función  $\mathbf{H}$ , además de depender de los infinitos tensores de Rivlin-Ericksen  $\mathbf{A}_n$ , debe satisfacer el axioma de indiferencia del marco de referencia (Sec.1.2.3). Esto es, debe satisfacerse la relación

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n, \dots) \cdot \mathbf{Q}^t = \mathbf{H}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{Q}^t, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{Q}^t, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{Q}^t, \dots, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{Q}^t, \dots) \quad (4)$$

para cualquier tensor  $\mathbf{Q}$  ortogonal [Tuesdell-Noll,1965;p.44].

Para el caso específico de los fluidos, la expresión (1) se prefiere expresar separando la parte reversible, que incluye la presión como esfuerzo isótropo a compresión, y la parte irreversible en la forma

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \mathcal{T} \quad \text{donde} \quad \mathcal{T}(t, \mathbf{x}) = \mathfrak{N}_{t'=-\infty}^{t'=t}[\mathbf{C}_t(t', \mathbf{x})] \quad (5)$$

Todo el análisis subsecuente es similar. La parte isótropa satisface el axioma de indiferencia del marco de referencia de manera trivial.

Cuando se emplea una descripción de tipo material, en lugar de (1), se debe definir el material simple con la siguiente dependencia funcional

$$\mathbf{S}(t, \mathbf{X}_\tau) = \tilde{\mathfrak{N}}_{t'=-\infty}^{t'=t}[\mathbf{C}_\tau(t', \mathbf{X}_\tau)] \quad (6)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff (Ver la sección II.2.7). El tensor  $\mathbf{C}_\tau$  continúa siendo el tensor de Cauchy, pero en esta oportunidad referido a la configuración de referencia  $\mathbf{X}_\tau$ .

### 2.1.2. Fórmula Recursiva

Para la descripción de tipo espacial, sucesivas derivaciones materiales respecto al tiempo actual  $t$  de la expresión I.3.2.(11.a) dan como resultado

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} (dl)^2 \right|_{\tau=t} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}_n \cdot d\mathbf{X} \quad (7)$$

donde los tensores de Rivlin-Ericksen  $\mathbf{A}_n$  satisfacen las siguientes relaciones recursivas

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{I} \quad \mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D} \quad \mathbf{A}_2 = \frac{d\mathbf{A}_1}{dt} + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G}^t \cdot \mathbf{A}_1 \quad (8)$$

y de allí en adelante en general (ver ecuación I.3.4.(22.a))

$$\mathbf{A}_{n+1} = \frac{d\mathbf{A}_n}{dt} + \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G}^t \cdot \mathbf{A}_n = \frac{\delta \mathbf{A}_n}{\delta t} \quad (9)$$



donde  $\mathbf{G} = [\nabla \mathbf{v}]^t$  es el tensor gradiente de velocidad y  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^t)$  es el tensor velocidad de deformación. En realidad (9) es válida a partir de  $n = 0$ . La derivada final  $\delta/\delta t$  es la derivada convectiva baja (ver Sección I.3.4.8).

Estas fórmulas recursivas ha sido obtenidas de las diferentes derivadas materiales temporales de I.3.2.(11.b) y teniendo en cuentas las relaciones (7), I.3.2.(5) y I.3.2.(6). Al derivar cada factor por separado, y luego de sacar como factor común  $d\mathbf{x} \cdot [\quad] \cdot d\mathbf{x}$ , se obtiene el resultado esperado [Lai, Rubin & Krempl, 1978].

### 2.1.3. Cálculo de la Deformación

El tensor de Cauchy establecido para un tiempo  $t$  y referido a una configuración de referencia en un tiempo  $\tau$  se puede calcular de la forma (ver sección I.3.2.3)

$$\mathbf{C}_\tau(t) = [\mathbf{F}_\tau(t)]^t \cdot \mathbf{F}_\tau(t) \quad (10)$$

donde el tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  se define como (ver sección I.3.2.1)

$$\mathbf{F}_\tau(t) = [\tilde{\nabla} \mathbf{x}]^t \quad (11)$$

Si asignamos  $\mathbf{x}$  a la configuración espacial para el tiempo  $t$  y asignamos  $\mathbf{X}$  a la configuración de referencia para el tiempo  $\tau$ , siendo este último el sistema en el que se realizan las derivadas de  $\tilde{\nabla}$ , entonces el tensor gradiente de deformación se puede calcular de la siguiente manera

$$[\mathbf{F}_\tau(t)]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{F}_\tau(t)]_{r,\theta,z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r \frac{\partial \theta}{\partial R} & r \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r \frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (12.a, b)$$

$$[\mathbf{F}_\tau(t)]_{r,\theta,\phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial r}{\partial \Phi} \\ r \frac{\partial \theta}{\partial R} & r \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & \frac{r}{R \sin \Theta} \frac{\partial \theta}{\partial \Phi} \\ r \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial R} & r \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \Theta} & \frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial z}{\partial \Phi} \end{bmatrix} \quad (12.c)$$

en los sistemas cartesiano, cilíndrico y esférico, respectivamente. Las minúsculas representan a las coordenadas en la configuración espacial  $\mathbf{x}$  en el tiempo actual  $t$ . Las mayúsculas representan a las coordenadas en la configuración de referencia  $\mathbf{X}$  en el tiempo  $\tau$ .

## 2.2. MATERIAL TIXOTROPICO

El término de *tixotropía* es frecuentemente confundido con el término de *adelgazamiento por corte* (shear thinning), a causa de que ambos se refieren al decremento aparente de la viscosidad. Sin embargo, tixotropía es un efecto que depende del tiempo, más que un efecto dependiente de la tasa de corte, y se refiere a un proceso reversible de disminución de la viscosidad aparente al transcurrir el tiempo, durante la imposición de una tasa de corte constante [Darby, 1976]. Esto es generalmente debido a un cambio reversible en la estructura de la materia con el tiempo al ser sometida a corte, con una viscosidad limitante inferior, a la cual se acerca indefinidamente la forma asintótica. Este resultado se puede también obtener mediante una serie de histéresis de esfuerzo cortante versus tasa de corte, cuando la tasa de corte se cicla repetidamente. El criterio de reversibilidad es una condición necesaria para esta definición (la estructura se recupera después de que dejan de actuar los esfuerzos cortantes), ya que una irreversibilidad en la disminución de la viscosidad es denominada *degradación por corte*. Ciertos materiales como algunas arcillas, geles, soluciones coloidales y polímeros pueden exhibir un comportamiento tixotrópico.

## 2.3. MATERIAL REOPECTICO

La *reopexia* es esencialmente lo inverso que la tixotropía en que ella representa el incremento de la viscosidad aparente con el tiempo bajo una tasa de corte constante. Una diferencia es que el término de

reopexia es usado frecuentemente con referencia a los cambios irreversibles, más que a los cambios reversibles, los cuales podrían ser llamado tixotropía negativa [Darby,1976]. Las curvas de histéresis se pueden también observar bajo la acción de una tasa de corte cíclica, pero en la dirección opuesta de aquella descrita para la tixotropía. Algunos materiales, como la pasta de polvo de yeso, exhiben este tipo de comportamiento, y es frecuentemente asociado con un sistema metaestable el cual se revierte a un gel permanente cuando se somete a esfuerzos de corte.

## 2.4. MATERIAL DE RIVLIN-ERICKSEN

Los materiales de Rivlin-Ericksen son materiales simples dependiendo de un número finito de tensores de Rivlin-Ericksen. Cuando se tiene que la función  $\mathbf{H}$  en 2.1.(3) tiene  $n$  argumentos

$$\mathbf{T} \text{ ó } \mathcal{T} = \mathbf{H}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n) \quad (1)$$

se dice que el material es del tipo Rivlin-Ericksen de complejidad  $n$ .

## 2.5. MATERIAL DE SEGUNDO ORDEN DE COMPLEJIDAD

Los materiales de Rivlin-Ericksen de segundo orden de complejidad tienen en la expresión 2.4.(1) el valor  $n = 2$ . Esto es, para los sólidos

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \quad (1.a)$$

y para los fluidos

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \mathbf{H}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \quad (1.b)$$

Particularmente (con  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ ),

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = & c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_1^2 + c_3\mathbf{A}_2 + c_4\mathbf{A}_2^2 \\ & + c_5(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1) + c_6(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \cdot \mathbf{A}_1) \\ & + c_7(\mathbf{A}_1^2 \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1^2) + c_8(\mathbf{A}_1^2 \cdot \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \cdot \mathbf{A}_1^2) \end{aligned} \quad (2)$$

donde los coeficientes  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_8$  pueden ser funciones materiales escalares de los siguientes invariantes

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\mathbf{A}_1^2), \text{tr}(\mathbf{A}_1^3), \text{tr}(\mathbf{A}_2), \text{tr}(\mathbf{A}_2^2), \text{tr}(\mathbf{A}_2^3), \\ & \text{tr}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2), \text{tr}(\mathbf{A}_1^2 \cdot \mathbf{A}_2), \text{tr}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2^2), \text{tr}(\mathbf{A}_1^2 \cdot \mathbf{A}_2^2) \end{aligned} \quad (3)$$

para el caso donde  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$  son simétricos. Las expresiones (2) y (3) son el resultado del Teorema de Representación [Lai et al.,1978]. Este teorema establece que, bajo la restricción de 2.1.(4), la forma polinómica más general que se puede tener de  $\mathbf{H}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$  es la expresión (2).

Aparte de lo dicho antes, los coeficientes  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_8$  pueden también depender de las condiciones de estado termodinámico, como presión  $P$  y temperatura  $T$ .

Un caso especial de (2) es el llamado *Material de Segundo Orden* definido por la relación constitutiva

$$\mathbf{H}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_1^2 + c_3\mathbf{A}_2 \quad (4)$$

donde  $c_1, c_2, c_3$  son constantes o funciones materiales para un estado termodinámico determinado y/o dependientes de los invariantes de  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$ .

Un caso particular de este tipo de material son los fluidos de segundo orden cuando el flujo está desarrollado (término convectivo nulo) y es estacionario (término transitorio nulo), debido a que la derivada material en 2.1.(8.c) se anula. Esto conlleva a que los términos con  $\mathbf{A}_1^2$  y  $\mathbf{A}_2$ , aunque difieren entre sí, se puedan

reagrupar en un único término con  $\mathbf{D}^2$ . De esta forma, y extendiendo el modelo de los fluidos newtonianos incompresibles, la expresión (4) se reduce a

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + 4\eta\mathbf{D}^2 + \frac{1}{2}c\mathbf{A}_2 \quad (5)$$

siendo  $\eta$  una segunda viscosidad que contempla la complejidad de orden dos [Serrin,1959;§65] y  $c$  otra viscosidad que afecta el tensor de Rivlin-Ericksen de complejidad dos.

## 2.6. MATERIAL VISCOELASTICO

Los materiales viscoelásticos como su nombre lo indica poseen un comportamiento compartido entre elástico y viscoso. Por lo tanto, este comportamiento es en parte conservativo (reversible) y disipativo (irreversible), respectivamente.

Existen materiales viscoelásticos, tanto en sólidos (por ejemplo los polímeros), como en los líquidos (por ejemplo soluciones coloidales). Convenientemente es costumbre emplear una descripción de tipo material para las relaciones constitutivas de sólidos y de tipo espacial para las relaciones constitutivas de líquidos. No obstante, en estas relaciones constitutivas no siempre el tensor de esfuerzo vendrá dado de forma explícita como en 2.1.(1) ó 2.1.(6).

De forma generalizada la relación constitutiva lineal para los materiales viscoelásticos [Frederick-Chang,1972] expresada con una descripción de tipo material es

$$\cdots + \mathbf{B}'' : \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} + \mathbf{B}' : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \mathbf{B} : \mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{I} + \mathbf{C}' : \mathbf{E} + \mathbf{C}'' : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{C}''' : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \cdots \quad (1)$$

Utilizando una descripción espacial la relación constitutiva es

$$\cdots + \mathbf{B}'' : \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta t^2} + \mathbf{B}' : \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta t} + \mathbf{B} : \mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{I} + \mathbf{C}' : \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{C}'' : \frac{\delta \tilde{\mathbf{E}}}{\delta t} + \mathbf{C}''' : \frac{\delta^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\delta t^2} + \cdots \quad (2)$$

En la expresión (1) las derivadas parciales significan derivaciones materiales por razones obvias. En la expresión (2) la derivada  $\delta/\delta t$  puede muy bien interpretarse como una derivada convectiva [Joseph,1990] de cualquiera de los tipos que existen, excepto las mixtas alta-baja o baja alta cuando los tensores son simétricos (ver Sección I.3.4.8), o simplemente como una derivación material (Utilizar derivadas parciales respecto al tiempo no satisface el Axioma 1.2.3 de objetividad). Las diferentes variables  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son tensores de cuarto orden que se contraen dos veces con las diferentes derivadas de los esfuerzos y deformaciones, respectivamente. Estos tensores, en los casos lineales, poseen elementos escalares que pueden ser únicamente función de las condiciones de estado termodinámico. En los casos no lineales, dichos tensores pueden depender adicionalmente de los tensores de esfuerzos o deformación y sus respectivos invariantes.

En ambas relaciones constitutivas se puede hacer el cambio de deformaciones infinitesimales por deformaciones finitas. Es decir, se puede cambiar  $\mathbf{E}$  por  $\mathbf{IE}$  en (1) y también se puede cambiar  $\tilde{\mathbf{E}}$  por  $\tilde{\mathbf{IE}}$  en (2). En estos casos se debe interpretar que se obtienen nuevas relaciones constitutivas.

## 2.7. FLUJO VISCOMETRICO

El término *Flujo Viscométrico* es un calificativo acuñado por Coleman, Markovitz & Noll [1966]. Significa que es un flujo dependiente de un único parámetro. Normalmente este parámetro es una tasa de deformación al corte. Principalmente, para satisfacer los axiomas de Noll de indiferencia respecto al marco de referencia y al sistema de coordenadas de las secciones 1.2.3 y 1.2.5, dicho parámetro se define en función de un invariante del tensor  $\mathbf{D}$  de velocidad de deformación. Para efectos de que el parámetro sea una cantidad positiva, para el flujo incompresible ( $\text{tr}\mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ), se acostumbra a escoger dicho parámetro como

$$\dot{\gamma} = \sqrt{-4\mathbb{I}_D} = \sqrt{2\text{tr}(\mathbf{D}^2)} = \sqrt{2\mathbf{D} : \mathbf{D}} \quad (1)$$

que coincide con el valor absoluto de la tasa de deformación en el caso de flujo a corte simple como lo son, por ejemplo, el flujo de Couette y el flujo de Poiseuille.

### 2.7.1. Flujo Generalizado

Luego con el parámetro (1) se puede formular un modelo no newtoniano generalizado con una relación constitutiva para los esfuerzos viscosos, similar al fluido newtoniano, en la forma

$$\mathcal{T} = 2\eta \mathbf{D} \quad \eta = \eta(\dot{\gamma}) \quad (2)$$

donde  $\eta$  es una viscosidad no constante dependiente del parámetro  $\dot{\gamma}$  del flujo viscométrico. La ecuación del movimiento, una vez sustituido el esfuerzo (2), queda como

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + 2\mathbf{D} \cdot \nabla \eta \quad (3)$$

que es similar a la ecuación de Navier-Stokes con viscosidad variable (ver ecuación X.1.1.(4) con  $\lambda = 0$  y  $\vartheta = 0$ ).

### 2.7.2. Flujo Plano

Un flujo viscométrico plano puede representarse en un sistema de coordenadas cartesiano con base  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  como [Lai, Rubin & Krempl, 1978]

$$\mathbf{v} = U(y) \mathbf{e}_x \quad \mathbf{x} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z = [X_\tau + U(Y_\tau)(t - \tau)] \mathbf{e}_x + Y_\tau \mathbf{e}_y + Z_\tau \mathbf{e}_z \quad (4)$$

Entonces los tensores gradiente de deformación y el tensor de Cauchy se calculan como

$$[\mathbf{F}_\tau(t)] = [\tilde{\nabla} \mathbf{x}]^t = \begin{bmatrix} 1 & k(t - \tau) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{C}_\tau(t)] = [\mathbf{F}_\tau(t)]^t \cdot [\mathbf{F}_\tau(t)] = \begin{bmatrix} 1 & k(t - \tau) & 0 \\ k(t - \tau) & 1 + k^2(t - \tau)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde el parámetro  $k = \partial v_x(y)/\partial y = \partial U(Y_\tau)/\partial Y_\tau$  es la tasa de deformación de corte. Consecuentemente, los tensores de Rivlin-Ericksen son

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

con  $[\mathbf{A}_n] = [\mathbf{0}]$  para  $n \geq 3$ .

Introduciendo las expresiones anteriores en la ecuación constitutiva 2.5.(5) se obtiene

$$[\mathbf{T}]_{x,y,z} = -P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \eta k^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c k^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

las cuales introducidas a su vez en la ecuación de Cauchy III.2.2.(1) ó X.1.1.(1) (también Tabla 1, Sec.X.1.1), asumiendo las viscosidades constantes en un flujo estacionario ( $\partial \mathbf{v}/\partial t = \mathbf{0}$ ) y desarrollado ( $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ), resultan en el siguiente par de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial k}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial y} + (\eta + c) \frac{\partial k^2}{\partial y} \end{aligned} \quad (8)$$

cuya solución simétrica, en el dominio  $y \in [-h, h]$  y subordinada a las condiciones de contorno  $U(h) = k(0) = 0$  e inicial  $P(0, 0) = P_o$ , es definitivamente

$$P(x, y) = -\beta(x - x_o) + (\eta + c)k^2 + P_o \quad \frac{U(y)}{U_m} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad k(y) = -3 \frac{U_m}{h^2} y \quad U_m = \frac{\beta h^2}{3\mu} \quad (9)$$

para un conducto de semi-ancho  $h$  conduciendo una velocidad media de  $U_m$  impulsada por un gradiente axial de presión de  $\beta = -\partial P / \partial x$ .

### 2.7.3. Flujo Cilíndrico

Un flujo viscométrico con simetría cilíndrica puede representarse en un sistema de coordenadas cilíndrico con base  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  como

$$\mathbf{v} = U(r) \mathbf{e}_z \quad \mathbf{x} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z = R_\tau \mathbf{e}_r + [Z_\tau + U(R_\tau)(t - \tau)] \mathbf{e}_z \quad (10)$$

Entonces los tensores gradiente de deformación y el tensor de Cauchy se calculan como

$$[\mathbf{F}_\tau(t)] = [\tilde{\mathbf{\nabla}} \mathbf{x}]^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k(t - \tau) & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{C}_\tau(t)] = [\mathbf{F}_\tau(t)]^t \cdot [\mathbf{F}_\tau(t)] = \begin{bmatrix} 1 + k^2(t - \tau)^2 & 0 & k(t - \tau) \\ 0 & 1 & 0 \\ k(t - \tau) & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde el parámetro  $k = \partial v_z(r) / \partial r = \partial U(R_\tau) / \partial R_\tau$  es la tasa de deformación de corte. Consecuentemente, los tensores de Rivlin-Ericksen son

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 2k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

con  $[\mathbf{A}_n] = [\mathbf{0}]$  para  $n \geq 3$ .

Introduciendo las expresiones anteriores en la ecuación constitutiva 2.5.(5) se obtiene

$$[\mathbf{T}]_{r,\theta,z} = -P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \eta k^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c k^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

las cuales introducidas a su vez en la ecuación de Cauchy III.2.2.(1) ó X.1.1.(1) (también Tabla 1, Sec.X.1.1), asumiendo las viscosidades constantes en un flujo estacionario ( $\partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{0}$ ) y desarrollado ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{\nabla} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ), resultan en el siguiente par de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial P}{\partial r} + (\eta + c) \frac{1}{r} \frac{\partial r k^2}{\partial r} \\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial r k}{\partial r} \end{aligned} \quad (14)$$

cuya solución axi-simétrica, en el dominio  $r \in [0, R]$  y subordinada a las condiciones de contorno  $U(R) = k(0) = 0$  e inicial  $P(0, 0) = P_o$ , es definitivamente

$$P(r, z) = -\beta(z - z_o) + f(r) + P_o \quad \frac{U(r)}{U_m} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad k(r) = -4 \frac{U_m}{R^2} r \quad U_m = \frac{\beta R^2}{8\mu} \quad (15)$$

donde

$$f(r) = (\eta + c) \int_0^r \frac{1}{r} \frac{\partial r k^2}{\partial r} dr = 24(\eta + c) \left( \frac{U_m}{R^2} \right)^2 r^2 = \frac{3}{8} (\eta + c) \left( \frac{\beta}{\mu} \right)^2 r^2 \quad (16)$$

para un conducto de radio  $R$  conduciendo una velocidad media de  $U_m$  impulsada por un gradiente axial de presión de  $\beta = -\partial P/\partial z$ . Se satisfacen para los esfuerzos que

$$\frac{\mathcal{T}_{rr}}{\eta + c} = \frac{\mathcal{T}_{zz}}{\eta} = k^2 = \left(\frac{4U_m}{R^2}\right)^2 r^2 = \left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 r^2 \quad (17)$$

Estos esfuerzos son los causantes del fenómeno de hichamiento del flujo al salir de un conducto, denominado *efecto Merrington*, y del fenómeno de trepamiento del flujo en contacto con un eje giratorio, denominado *efecto Wiesseberg*, que no es este caso.

#### 2.7.4. Consolidación

Se puede demostrar que para estos tipos de flujo viscométricos los tensores de Rivlin-Ericksen siempre se pueden expresar generalmente de la siguiente forma

$$\mathbf{A}_1 = k (\mathbf{N}^t + \mathbf{N}) \quad \mathbf{A}_2 = 2k^2 \mathbf{N}^t \cdot \mathbf{N} \quad (18)$$

donde el tensor  $\mathbf{N}$  se expresa en cada sistema de manera diferente, por ejemplo,

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Cartesiano}) \quad [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Cilíndrico}) \quad (19)$$

### 2.8. MODELOS NO NEWTONIANOS GENERALIZADOS

En la sección precedente se ha visto una forma generalizada de tratar las relaciones constitutiva del tipo 2.7.(2) y la ecuación del movimiento 2.7.(3) a través de un único parámetro 2.7.(1). En esta sección se presentarán algunos modelos con las características mencionadas.

El modelo más simple es el de *Ostwald-de Waele*, también conocido como el modelo de *Ley de Potencia* por la forma de su expresión

$$\eta(\dot{\gamma}) = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad \begin{cases} n > 1 & \text{Dilatante} \\ n = 1 & \text{Newtoniano} \\ n < 1 & \text{Pseudoplástico} \end{cases} \quad (1)$$

El factor  $K$  se le denomina el módulo de consistencia y  $n$  es el exponente de comportamiento. Mientras el exponente se aleja de la unidad el comportamiento del flujo es menos parecido al newtoniano. La forma que tiene este modelo le da un comportamiento de  $\tau$  vs.  $\dot{\gamma}$  de tipo monótono.

Otro modelo que posee también un comportamiento de tipo monótono es el *Modelo de Prandtl-Eyring* caracterizado por la siguiente ecuación

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_o \frac{\text{arcsenh}(\lambda \dot{\gamma})}{\lambda \dot{\gamma}} \quad (2)$$

Presenta la siguiente tendencia  $\eta \rightarrow \eta_o$  cuando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ . El coeficiente  $\lambda$  de la el carácter no newtoniano al modelo. Mientras este valor es más grande el comportamiento se aparta más del newtoniano.

Un modelo que ya no presenta un comportamiento monótono es el *Modelo de Powell-Eyring* caracterizado por siguiente ecuación

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_o - \eta_\infty) \frac{\text{arcsenh}(\lambda \dot{\gamma})}{\lambda \dot{\gamma}} \quad (3)$$

donde se presentan dos viscosidades asintóticas con la siguiente tendencia  $\eta \rightarrow \eta_o$  cuando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  y  $\eta \rightarrow \eta_\infty$  cuando  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ .

Modelos que predigan un comportamiento general de la curva  $\tau$  vs.  $\dot{\gamma}$  necesita de una formulación que dependa de al menos cuatro parámetros. Uno de estos modelo es el *Modelo de Cross* (1965) dado por la siguiente ecuación

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_o - \eta_\infty) \frac{1}{1 + (\lambda \dot{\gamma})^m} \quad (4)$$

donde  $\eta_o$  y  $\eta_\infty$  son de nuevo los valores asintóticos de la viscosidad a muy baja o muy alta tasa de corte  $\dot{\gamma}$ , respectivamente. El coeficiente  $\lambda$  es un parámetro constante con dimensiones de tiempo y  $m$  es una constante adimensional. El modelo de Cross es equivalente al modelo de Ellis.

Una alternativa popular al modelo anterior es el *Modelo de Carreau* (1972)

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_o - \eta_\infty) \frac{1}{[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{m/2}} \quad (5)$$

donde  $\lambda$  y  $m$  tienen similar significado que el modelo de Cross.

Es de importancia informativa hacer ciertas aproximaciones al modelo de Cross, porque haciendo esto, se pueden obtener otros modelo de viscosidad bien conocidos. Por ejemplo, para  $\eta \ll \eta_o$  y  $\eta \gg \eta_\infty$ , el modelo de Cross se reduce a

$$\eta = \frac{\eta_o}{(\lambda \dot{\gamma})^m} \quad m = 1 - n \quad K = \eta_o / \lambda^m \quad (6)$$

el cual con una simple redefinición de los parámetros nos vuelve a dar el modelo de Ostwald-de Waele. Adicionalmente, si se tiene que  $\eta \ll \eta_o$ , entonces se obtiene que

$$\eta = \eta_\infty + \frac{\eta_o}{(\lambda \dot{\gamma})^m} = \eta_\infty + K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (7)$$

conocido como el *Modelo de Sisko* (1958). Si en este modelo se asume  $n = 0$  resulta el siguiente modelo

$$\eta = \eta_\infty + K \frac{1}{\dot{\gamma}} \quad (8)$$

el cual con una simple redefinición de los parámetros y para el caso unidimensional se reduce a

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_y + \eta_b \dot{\gamma} \quad \mathcal{T}_y = K \quad \eta_b = \eta_\infty \quad (9)$$

bien conocido como el *Modelo de Bingham*, donde  $\mathcal{T}_y$  es un esfuerzo cortante de fluencia y  $\eta_b$  es la viscosidad plástica (ambas constantes) [Barnes et al.,1991,pp.18-20].

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Aris, R. **Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics**. Prentice-Hall, 1962.
- [2] Astarita, G.; Marrucci, G. **Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics**. McGraw-Hill, 1974.
- [3] Barnes, H. A.; Hutton, J. F.; Walters, K. **An Introduction to Rheology**. Elsevier Science Publisher Company, 1989. Second Printing, 1991.
- [4] Chung, T. J. **Continuum Mechanics**. Prentice-Hall International, 1988. Cambridge University Press, 1996.
- [5] Coleman, B. D.; Markovitz, H.; Noll, W. **Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids, Theory and Experiment**. Springer-Verlag, 1966.

- [6] Darby, R. **Viscoelastic Fluids: An Introduction to their Properties and Behavior** (Chemical Processing and Engineering, Vol.9, Editors: Lyle F. Albright, R. N. Maddox, John J. McKetta). Marcel Dekker, 1976.
- [7] Fabrizio, M.; Morro, A. **Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity**. Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM (Philadelphia), 1992.
- [8] Frederick, D.; Chang, T. S. **Continuum Mechanics**. Scientific Publishers (Cambridge), 1965. Reprint, 1972.
- [9] Hutton, J. F.; Pearson, J. R. A.; Walkers, K. (Eds.). **Theoretical Rheology**. Applied Science Publishers, 1975.
- [10] Joseph, D. D. **Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids**. Springer-Verlag, 1990.
- [11] Lai, W. M.; Rubin, D.; Krempl, E. **Introduction to Continuum Mechanics**, Revised Edition in SI/ Metric Units. Pergamon Press, 1974/1978. Third Edition, 1993/1996. Butterworth-Heinemann (Elsevier), 1999. Fourth Edition, 2010.
- [12] Levi, E. **Elementos de Mecánica del Medio Continuo**. Editorial Limusa, 1971. Tercera Reimpresión, 1977.
- [13] Lodge, A. S. **Body Tensor Fields in Continuum Mechanics with Applications to Polymer Rheology**. Academic Press, 1974.
- [14] Noll, W. **Journal of Rational Mechanics Analysis**, Vol.4, pp.3-81, (1955).
- [15] Noll, W. "A Mathematical Theory of Mechanical Behavior of Continuous Media". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.2, pp.197-226, (1958). Reproducido en [Noll,1974].
- [16] Noll, W. "A New Mathematical Theory of Simple Materials". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.48, pp.1-50, (1972). Reproducido en [Noll,1974].
- [17] Noll, W. "Lectures on the Foundations of Continuum Mechanics and Thermodynamics". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.52, pp.62-92, (1973). Reproducido en [Noll,1974].
- [18] Noll, W. **The Foundations of Mechanics and Thermodynamics**, Selected Papers. Springer-Verlag, 1974.
- [19] Oldroyd, J. G. "On the Formulation of Rheological Equations of State". **Proceedings of the Royal Society**, Vol.A200,(1950).
- [20] Reiner, M. **Selected Papers on Rheology**. Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.
- [21] Schowalter, W. R. **Mechanics of Non-Newtonian Fluids**. Pergamon Press, 1978.
- [22] Sedov, L. I. **A Course in Continuum Mechanics**. Vol.I: "Basic Equations and Analytical Techniques". Vol.II: "Physical Foundations and Formulations of Problems". Vol.III: "Fluids, Gases, and The Generation of Thrust". Vol.IV: "Elastic and Plastic Solid and The Formation of Cracks". Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971-1972.
- [23] Serrin, J. "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.VIII/1, pp.125-263. Springer-Verlag, 1959.
- [24] Truesdell, C. A. **A First Course in Rational Continuum Mechanics**. Vol.1: General Concepts. Academic Press, 1977.
- [25] Truesdell, C. A.; Noll, W. "The Non-Linear Field Theories of Mechanics". **Encyclopedia of physics**, Ed. S. Flügge. Vol.III/3. Springer-Verlag, 1965.
- [26] Truesdell, C. A.; Toupin, R. A. "The Classical Field Theories". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.III/1, pp.226-793. Springer-Verlag, 1960.



MECANICA Y TERMODINAMICA DE  
SISTEMAS MATERIALES CONTINUOS

# APLICACIONES



# CAPITULO VIII

## SOLIDOS RIGIDOS

### CONTENIDO

1. ECUACIONES ESPECIALES.	175
1.1. Relación Constitutiva.	175
1.2. Ecuaciones del Movimiento.	176
1.3. Ecuaciones de la Energía.	176
1.4. Derivación Convectiva Corrotacional.	177
2. FORMULACION DE EULER.	177
2.1. Angulos de Euler.	178
2.2. Ecuaciones de Euler.	178
BIBLIOGRAFIA.	178

### 1. ECUACIONES ESPECIALES

Los cuerpos rígidos por definición deben ser sólido. Un fluido jamás será un cuerpo rígido, al menos que se encuentre en un recipiente bajo condiciones hidrostáticas. Sin embargo, su relación constitutiva será diferente (Ver Capítulo IX).

Presentaremos a continuación las simplificaciones que se tienen para el caso de un sólido rígido.

#### 1.1. RELACION CONSTITUTIVA

Los sólidos rígidos se caracterizan por satisfacer la condición de que cualquier par de puntos materiales del cuerpo material mantienen invariante la distancia que los separa. Esto, expresado en términos de una relación constitutiva sería

$$\mathbf{T} \iff \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Lo que significa que un sólido rígido tendrá un estado de esfuerzo compatible con el movimiento del cuerpo material, pero en todo instante se debe garantizar que no exista deformación alguna. En otras palabras, independiente del estado del esfuerzo, la deformación siempre es nula.

La relación (1) implica que el tensor gradiente de desplazamiento es puramente rotacional y por lo tanto antisimétrico. Esto es

$$\mathbf{L} = \mathbf{K} \quad \text{Antisimétrico} \quad (2)$$

También implica que, aunque  $\mathbf{IE} \neq \mathbf{0}$ , su derivada  $\dot{\mathbf{IE}}$  si se anula. Así se tiene que

$$\mathbf{IE} = \mathbf{L}^t \cdot \mathbf{L} \quad \dot{\mathbf{IE}} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3)$$

Por consiguiente, la velocidad de deformación  $\mathbf{D}$  de igual manera se anula. De aquí que el tensor gradiente de velocidad sea puramente de giro y por lo tanto antisimétrico. Esto es

$$\mathbf{G} = \mathbf{W} \quad \text{Antisimétrico} \quad (4)$$

siendo su vector axial  $\mathbf{W}_x$  expresado como

$$\mathbf{W}_x = -2\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{w} \quad (5)$$

O sea, el opuesto del doble de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  o el opuesto de la vorticidad. Esta velocidad angular es la misma que tendría un sistema de coordenadas fijo al cuerpo rígido. Mediante este razonamiento, entonces las funciones establecidas para un sólido rígido en las expresiones (1) hasta (5) son uniformes en todo el cuerpo material, incluida la velocidad angular.

## 1.2. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

De la sección anterior se concluyó que existe una velocidad angular producto de la relación constitutiva para un sólido rígido. Esta velocidad angular la podemos hacer coincidir con la velocidad angular de un sistema de coordenadas de origen  $o$  fijo al cuerpo material, formando un marco de referencia. De acuerdo a esto, entonces seían válidas las expresiones de transformación de velocidades y aceleraciones de la sección I.1.4.1, pero donde los términos dependientes de la velocidad y aceleración relativas se eliminarían. Esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_o + \mathbf{R} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}_o + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (1)$$

donde las variables subindicadas con  $o$  representan esas cantidades para el origen del sistema de coordenadas y  $\mathbf{R}$  es el vector de posición de cualquier punto del cuerpo material visto desde este mismo origen. El vector  $\boldsymbol{\alpha}$  es la aceleración angular definida como la derivada material de la velocidad angular.

Los principios de conservación de cantidad de movimiento lineal V.1.1.(15) y angular V.1.2.(45) se simplifican para un cuerpo rígido como

$$\sum_{ext} \mathbf{F} = m\mathbf{a}_c \quad (2)$$

$$\sum_{ext} \mathbf{M} = m \mathbf{r}_c \times \mathbf{a}_c + \mathbf{I}_c \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

donde se ha escogido el origen  $o$  del sistema de coordenadas como el centro de masa  $c$  del cuerpo material. Los brazos de palanca de los momentos de fuerzas son medidos desde el origen del sistema de referencia inercial desde el que se observan las velocidades y las aceleraciones. Si este origen se escoge también igual que el centro de masa  $c$ , entonces  $\mathbf{r}_c = \mathbf{0}$  y se elimina el primer término del miembro de la derecha de la ecuación (3).

## 1.3. ECUACIONES DE LA ENERGIA

La ecuación de la energía cinética V.1.3.(26) del Segundo Teorema de König se simplifica como

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}m \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_c + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

La energía potencial en un campo de fuerzas conservativas de potencial  $\varphi$  se simplifica como

$$\mathcal{U} = m \varphi_c \quad \text{donde} \quad \varphi_c = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}_m} \rho \varphi \, d\mathcal{V} \quad (2)$$

Para el caso de un sólido rígido no existe intercambio entre la energía mecánica

$$\mathcal{E}^M = \mathcal{K} + \mathcal{U} \quad (3)$$

y la energía térmica  $\mathcal{E}^T$ . Por eso la energía mecánica se conserva separadamente de la energía térmica que también se conserva por su lado. Esto ocurre así, porque en un cuerpo rígido no existen trabajo realizado por la presión ni trabajo debido a los esfuerzos viscosos.

La energía térmica se conserva siguiendo la ecuación diferencial de la temperatura III.4.3.(20)

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi_r \quad \mathbf{q} = -k \nabla T \quad (4)$$

donde se ha eliminado el efecto del coeficiente de expansión volumétrica  $\beta$  y el término de fuente de disipación viscosa  $\Phi_\mu$ . El coeficiente  $k$  es el coeficiente de conductividad térmica, el cual puede ser substituido en (4.b) de la forma

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T \quad (4)$$

por un tensor  $\mathbf{k}$  de segundo orden de conductividades, en el caso de que el material sea térmicamente anisótropo.

#### 1.4. DERIVACION CONVECTIVA CORROTACIONAL

Debido a que el material no se deforma porque es rígido, la única derivación convectiva de la que se puede hablar en la derivación convectiva corrotacional. Cuando para el cuerpo rígido se ha definido un sistema de coordenadas también rído solidario al cuerpo, entonces para este sistema se puede definir un vector angular  $\boldsymbol{\omega}$ , cuyo valor se puede calcular con base al campo de velocidades  $\mathbf{v}$  de la forma

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{w}}{2} \quad \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} = -\mathbf{W}_x \quad (1)$$

donde  $\mathbf{w}$  es el vector vorticidad del campo de velocidades y  $\mathbf{W}_x$  es el vector axial del tensor  $\mathbf{W}$  de velocidad de giro, que satisface

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} \quad \mathbf{W} \cdot \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \mathbf{W} = \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

para cualquier vector  $\mathbf{b}$  y cualquier tensor de segundo orden  $\mathbf{B}$ .

Bajo la consideración hecha antes, entonces la derivación convectiva corrotacional definida en la sección I.3.4.8 es equivalente a la derivación relativa definida con anterioridad en la sección I.1.4.3. Esto es, para un vector cualquiera  $\mathbf{b}$

$$\frac{\delta \mathbf{b}}{\delta t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta \mathbf{b}}{\delta t} + \frac{\hat{\delta} \mathbf{b}}{\delta t} \right) = \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} = \frac{\delta \mathbf{b}}{\delta t} \quad (3)$$

y para un tensor cualquiera  $\mathbf{B}$

$$\frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} + \frac{\hat{\delta} \mathbf{B}}{\delta t} \right) = \frac{d\mathbf{B}}{dt} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{W} \equiv \frac{d\mathbf{B}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} \quad (4)$$

siendo  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{W}$  valores homogéneos para todo el cuerpo.

## 2. FORMULACION DE EULER

La formulación de Euler para el movimiento de los cuerpos rígidos se basa en el hecho de que, siendo el tensor de inercia un tensor simétrico, siempre se puede encontrar una base ortogonal de autovectores

(Ver sección A.1.7.12 de descomposición espectral) que definen un sistema de coordenadas principales. Este sistema de coordenadas, que se denotará como  $cXYZ$  y con origen en el centro de masa  $c$ , convierte la matriz de inercia en una matriz diagonal con elementos  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$ , con respecto a este sistema solidario al cuerpo rígido. Los ángulos entre este sistema  $cXYZ$ , que gira con la velocidad angular  $\omega$  del cuerpo rígido, y un sistema de coordenadas convencional  $xyz$ , con los ejes  $cx$  y  $cy$  siempre horizontales y el eje  $cz$  siempre vertical, se denominan los *Ángulos de Euler* y se describirán detalladamente a continuación.

## 2.1. ANGULOS DE EULER

La intersección entre los planos  $cXY$  y  $cxy$  es una línea recta que se denominará la *línea de nodos* y la cual se denotará como  $cn$ . El ángulo desde la línea de nodos  $cn$  hasta el eje  $cX$  se denotará como  $\psi$  y se medirá positivo siguiendo la regla de la mano derecha apuntando el pulgar en la dirección de positiva del eje  $CZ$ . El ángulo desde el eje  $cx$  hasta la línea de nodos  $cn$  se denotará como  $\varphi$  y se medirá positivamente en la dirección positiva del eje  $cz$ . El ángulo desde el eje  $cz$  hasta el eje  $cZ$  se denotará como  $\theta$  y se medirá positivamente en la dirección positiva del eje de la línea de nodos  $cn$ .

La transformación de coordenadas entre los sistemas de coordenadas  $cXYZ$  y  $xyz$  viene dado por la siguiente transformación

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

La transformación inversa se obtiene simplemente transponiendo la matriz, puesto que es ortogonal.

## 2.2. ECUACIONES DE EULER

La transformación entre las diferentes rapidezces angulares  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  y las componentes de la velocidad angular del cuerpo rígido vista desde el sistema de coordenadas  $cXYZ$  es

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Esta expresión cuando se separa en componentes es conocida como *Ecuaciones Geométricas de Euler* [Goldstein, 1980].

La expresión de los momentos de fuerza en la ecuación 1.2.(3) del movimiento angular, empleando los ejes principales se reduce a

$$\begin{aligned} M_x &= I_{xx} \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_{yy} - I_{zz}) \\ M_y &= I_{yy} \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_{zz} - I_{xx}) \\ M_z &= I_{zz} \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy}) \end{aligned} \quad (2)$$

Estas son las llamadas *Ecuaciones del Movimiento de Euler* para los cuerpos rígidos [Goldstein, 1980].

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Arpaci, V. S. **Conduction Heat Transfer**. Addison-Wesley, 1966.
- [2] Carslaw, H. S.; Jaeger, J. C. **Conduction of Heat in Solids**, Second Edition. Oxford University Press, 1959.
- [3] Goldstein, H. **Classical Mechanics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Addison-Wesley, 1980.
- [4] Gray, A. **A treatise on Gyrostatics and Rotational Motion**, Theory and Application. Dover Publications, 1959.

- [5] Özisik, N. Necati **Heat Conduction**, 2<sup>nd</sup> Edition. John Wiley & Sons, 1993.
- [6] Routh, E. J. **A treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies**. Part I: The Elementary Part. Part II: The Advanced Part. 7<sup>th</sup>/6<sup>th</sup> Editions. Dover Publications, 1960/1955.
- [7] Roy, M. **Mecánica**. Vol.I: “Cuerpos Rígidos”. Marcombo, 1970.





# CAPITULO IX

## FLUIDOS PERFECTOS

### CONTENIDO

1. FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO.	182
1.1. Ecuación de Hidrostática.	182
1.1.1. Fundamentos.	182
1.1.2. Fuerza Sobre Superficies Planas.	183
1.1.3. Fuerza Sobre Superficies Curvas.	184
1.1.4. Fuerza de Flotación y Boyantez.	185
1.1.5. Equilibrio Relativo.	185
1.2. Ecuación de Euler.	186
1.3. Teorema de Kelvin.	186
1.4. Teorema de Bernoulli.	187
1.4.1. Línea de Corriente.	188
1.4.2. Tubo de Corriente.	190
1.4.3. Flujo en una Tubería.	196
1.5. Ecuación de Crocco.	197
1.6. Flujo Potencial (Laplace).	198
2. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (INCOMPRESIBLES).	201
2.1. Flujo Potencial.	201
2.1.1. Flujo Uniforme.	201
2.1.2. Fuente y Sumidero.	201
2.1.3. Vórtice Simple.	202
2.1.4. Nariz de un Proyectil.	202
2.1.5. Dipolo.	203
2.1.6. Ovalo de Rankine.	203
2.1.7. Doblete.	203
2.1.8. Flujo Alrededor de un Cilindro.	204
2.1.9. Flujo Alrededor de un Cilindro Giratorio.	204
2.1.10. Potencial Complejo.	205
2.2. Flujo Alrededor de un Perfil Aerodinámico.	205
2.2.1. Transformación de Joukowski.	205

2.2.2. Perfil de Joukowski.	206
2.2.3. Fuerzas Sobre el Perfil.	206
2.3. Flujo Con Superficie Libre.	207
2.3.1. Propagación y Número de Froude.	207
2.3.2. Ecuación de Chézy-Manning.	208
2.3.3. Flujo Normal y Crítico.	209
2.3.4. Flujo Sobre un Montículo.	210
2.3.5. Resalto Hidráulico.	210
2.3.6. Canales Graduales.	211
2.3.7. Modelo Bidimensional.	211
2.4. Equivalencia Entre Conductos.	212
2.4.1. Conductos en Régimen Laminar.	212
• Conducto Cerrado.	212
• Conducto Abierto.	213
2.4.2. Conductos en Régimen Turbulento.	213
• Conducto Cerrado.	213
• Conducto Abierto.	214
3. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (COMPRESIBLES).	216
3.1. Flujo Isoentrópico.	216
3.1.1. Velocidad del Sonido y Número de Mach.	216
3.1.2. Flujo en Toberas.	217
• Tobera Convergente.	219
• Tobera Convergente-Divergente.	219
3.1.3. Onda de Choque.	219
3.2. Flujo No Isoentrópico.	220
3.2.1. Flujo Adiabático con fricción.	221
3.2.2. Flujo Isotérmico con fricción.	222
3.2.3. Flujo Politrópico.	224
3.2.4. Flujo con Transferencia de Calor.	224
BIBLIOGRAFIA.	225

En este capítulo se presentan los fluidos perfectos como aquellos que no tienen viscosidad o para los cuales los efectos de la fricción viscosa se incluye mediante términos de pérdida calculados con una formulación integral global, para cada sección del flujo dentro de un tubo de corriente, basados en resultados experimentales y estimados a través de coeficientes o factores correlacionados con parámetros adimensionales. Estos coeficientes se pueden despreciar u obviar en los casos no marcadamente viscosos.

## 1. FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO

### 1.1. ECUACION DE HIDROSTATICA

#### 1.1.1. Fundamentos

La *ecuación de la hidrostática* es la ecuación diferencial de un fluido sin movimiento ( $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ). Considerando como relación constitutiva que los esfuerzos son puramente debido a la presión, es decir

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} \quad (1)$$

entonces la primera ley del movimiento de Cauchy III.2.2.(1) sin aceleración ( $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ) se simplifica como

$$\mathbf{0} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \quad \nabla P = \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

Esta relación expresa que el gradiente de la presión es proporcional a la densidad  $\rho$  y a las fuerzas de cuerpo  $\mathbf{g}$ , y adicionalmente también expresa que la presión aumenta en aquella dirección en la que apunta el vector deslizante  $\mathbf{g}$ .

Cuando la fuerza de cuerpo se derivan de un potencial, tal que  $\mathbf{g} = -\nabla\varphi$ , por lo que constituye una fuerza conservativa, y la densidad  $\rho$  es constante, entonces la expresión (2) se puede expresar como

$$\nabla \tilde{P} = \nabla(P + \rho\varphi) = \mathbf{0} \quad \tilde{P} = P + \rho\varphi \quad (3)$$

donde la cantidad  $\tilde{P}$  es lo que se denomina *presión piezométrica* cuando se está en un campo gravitatorio vertical, descendente y uniforme con  $\varphi = gz$  ( $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ ). En este caso, la ecuación diferencial (3) integrada en la única dependencia con respecto a  $z$  da

$$P = P_o + \rho gh \quad (4)$$

donde  $h$  es la profundidad (asumida en la dirección opuesta a la dirección de  $z$ ) medida a partir de donde existe la presión  $P_o$ . Es frecuente ver denominada la ecuación (4) como la *ecuación general de la hidrostática*, que como se ve no es tan general.

La presión  $\tilde{P}$  recibe también el nombre de *presión reducida* en el caso más general o universal (ver Sección X.1.3.1). No obstante, para cualquier campo de fuerza  $\mathbf{g}$  (no necesariamente derivada de un potencial) la ecuación diferencial (2) recibe el nombre de la *ecuación universal de la hidrostática*. Esta última ecuación si incluye el efecto de la variación de la densidad debido a la compresibilidad del fluido por lo que se puede utilizar en el caso de gases sometido a gravedades fuertes.

### 1.1.2. Fuerza Sobre Superficies Planas

Las fuerzas de presión siempre dan resultantes que actúan a compresión. Recordemos que la presión se define como el escalar  $P$  positivo que define el tensor de esfuerzo isótropo negativo, en este caso como  $\mathbf{T} = -P\mathbf{I}$ . Artificialmente la escala de presión se puede desplazar en su origen y sigue satisfaciendo la ecuación (2), (3) y (4), pero esa medida de presión dan fuerzas resultantes que son ficticias sobre una cara de la superficie. Cuando se suman las fuerzas por ambas caras el desplazamiento de la escala se anula. Un caso tradicional es la *presión manométrica*  $\hat{P} = P - P_a$ , siendo  $P_a$  la *presión atmosférica*. El instrumento utilizado para medir dicha presión  $\hat{P}$  manométrica es el *manómetro*. Dada estas observaciones, haremos el cálculo de la fuerza de presión sobre una de las caras de una superficie plana sumergida en un líquido (suponiendo  $\rho$  constante) empleando la ecuación general de la hidrostática (4).

Sea una superficie plana sumergida en un líquido bajo la acción de un campo gravitatorio, vertical, descendente y uniforme. Esta superficie, si se prolonga virtualmente hasta la superficie libre horizontal con presión  $P_o$ , forma un ángulo agudo  $\alpha$ . La línea colineal con la superficie sumergida y con origen sobre dicha superficie libre define un eje coordenado  $l$  tal que la profundidad  $h$  se relaciona como  $h = l \sin \alpha$ . Integrando la presión  $P$  (como una fuerza distribuida por unidad de área) en un diferencial de área  $dA$ , teniendo en cuenta (4), obtenemos la fuerza resultante actuando perpendicularmente (y contra dicha cara) a la superficie sumergida como

$$\begin{aligned} F &= \int_A P dA = \int_A (P_o + \rho gh) dA = \int_A P_o dA + \rho g \sin \alpha \int_A l dA = P_o A + \rho g \sin \alpha l_c A \\ &= (P_o + \rho gh) A = P_c A \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $l_c$  es la ubicación del centroide de área de la superficie sumergida sobre el eje  $l$ . La superficie sumergida no tiene porque llegar a la superficie libre horizontal para que este resulta sea igualmente válido. Resumiendo la fuerza se reduce a la presión que existe en el centroide del área de la superficie sumergida multiplicado por

el área global de dicha superficie. Este resultado es casi evidente si vemos que la distribución de la fuerza de presión en (4) es de tipo lineal. Cada franja diferencial de área se considere perpendicular al eje  $l$  tiene la misma presión en toda su extensión y su diferencial de fuerza resultante en cada una debe quedar en todo el medio de esa franja diferencial.

No obstante, aunque la fuerza la calculamos con la presión en el centroide, el punto de aplicación de la fuerza resultante en (5) no queda en ese punto sino un poco más abajo como veremos. Para encontrar el punto de aplicación  $l_p$  de la fuerza resultante  $F$  calculamos el momento de la fuerza de presión distribuida con los brazos de palanca medidos a partir del origen de  $l$

$$\begin{aligned} M = l_p F &= \int_{\mathcal{A}} l P d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} l (P_o + \rho g h) d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} l P_o d\mathcal{A} + \rho g \sin \alpha \int_{\mathcal{A}} l^2 d\mathcal{A} \\ &= l_c P_o \mathcal{A} + \rho g I_o \sin \alpha = l_c F + \rho g I_c \sin \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

donde en la última parte hemos aplicado el teorema de Steiner  $I_o = I_c + l_c^2 \mathcal{A}$  (ver Sección V.1.2.6). Una vez despejado  $l_p$ , que es el *centro de presión*, queda

$$l_p = l_c + \frac{\rho g I_c \sin \alpha}{F} \quad (7)$$

donde se observa que dicho centro de presión  $l_p$  está un poco por debajo del centroide de área  $l_c$  y entre más profundo esté la superficie más cercano están esos dos puntos.

### 1.1.3. Fuerza Sobre Superficies Curvas

Cuando se tiene una superficie curva la dirección en la que actúa cada diferencial de fuerza sobre cada diferencial de área de la superficie sumergida es distinta. Eso se tiene en cuenta si realizamos el cálculo de forma vectorial de la forma

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = - \int_{\mathcal{A}} \mathcal{A} P \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (8)$$

Separando ahora la componente horizontal de la vertical se obtiene

$$-F_x = \int_{\mathcal{A}} P d\mathcal{A}_x = P_o \mathcal{A}_x \quad \mathcal{A}_x = n_x d\mathcal{A} \quad (9.a)$$

$$-F_y = \int_{\mathcal{A}} P d\mathcal{A}_y = \int_{\text{calA}} (P_o + \rho g h) d\mathcal{A}_y = P_o \mathcal{A}_y + \rho g \int_{\mathcal{A}} h d\mathcal{A}_y = P_o \mathcal{A}_y + \rho g \mathcal{V}_y \quad \mathcal{A}_y = n_y d\mathcal{A} \quad (9.b)$$

donde  $\mathcal{A}_x$  y  $\mathcal{A}_y$  son las áreas proyectadas horizontal y vertical, respectivamente.

Las expresiones (9) tienen un significado preciso. La fuerza horizontal se calcula como una superficie plana vertical ( $\sin \alpha = 1$ ) de área  $\mathcal{A}_x$  con su respectivo centroide  $l_c$  e inercia de área  $I_c$ , y para calcular su centro de presión  $l_p$ , correspondiente a dicha área habría que usar en la ecuación (7) dichas cantidades y  $|F_x|$ . La dirección de esta fuerza la determina la dirección opuesta a la proyección del área dirigida por la componente  $n_x$  de la normal exterior a la correspondiente cara. La fuerza vertical diferenciadamente se calcula como la suma de la fuerza de la presión  $P_o$  sobre el área proyectada  $\mathcal{A}_y$  y del peso del volumen  $\mathcal{V}_y$  de líquido sobre la superficie curva sumergida. La dirección de esta fuerza igualmente la determina la dirección opuesta a la proyección del área dirigida por la componente  $n_y$ . El volumen  $\mathcal{V}_y$  siempre es el que está por encima de la superficie curva, independientemente de la proyección que se utilice. El punto de aplicación de esta fuerza vertical sería la combinación de la primera fuerza de la presión  $P_o$  sobre el centroide de la superficie  $\mathcal{A}_y$  y la fuerza del peso del volumen  $\mathcal{V}_y$  sobre el centro de masa de dicho volumen.

Finalmente, la fuerza resultante global sería la composición vectorial de ambas fuerzas  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$  y el punto de aplicación sería la intersección de las líneas de los deslizamiento de ambas componentes en sus respectivas líneas de acción, recordando que son vectores deslizantes.

#### 1.1.4. Fuerza de Flotación y Boyantez

La *fuerza de flotación*, o como también se le conoce con el nombre de *boyantez*, se calcula sobre cuerpos sumergidos que ocupen algún volumen  $\mathcal{V}$ . Este volumen tiene una frontera que se descompone en dos porciones una superficie superior  $\mathcal{S}_1$  y otra superficie inferior  $\mathcal{S}_2$ . Sobre la superficie  $\mathcal{S}_1$  existe hasta la superficie libre un volumen  $\mathcal{V}_1$ . Sobre la superficie  $\mathcal{S}_2$ , también hasta la superficie libre existe un volumen  $\mathcal{V}_2$ . Estos volúmenes producen fuerzas sobre las superficies curvas mencionadas. Sobre la superficie de arriba la fuerza va hacia abajo. Sobre la superficie de abajo la fuerza, mayor que la anterior, va hacia arriba. Las fuerzas producidas por  $P_o$  se cancelan en uno y otro caso. El líquido contenido en el volumen  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1$  produce entonces un peso que se iguala con la suma algebraica de la fuerza de abajo menos la de arriba. Esta fuerza es la fuerza de flotación  $F_B$ . O sea,

$$F_B = \rho g \mathcal{V} = \rho g (\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1) \quad (10)$$

donde la densidad que interviene es la del líquido, pero en volumen  $\mathcal{V}$  es el que desplaza el cuerpo sumergido. Esta expresión (10) se le conoce como el *Principio de Arquímedes* y reza así: “La fuerza de flotación es igual al peso del líquido desplazado por el cuerpo sumergido”. Es importante destacar que es la porción del cuerpo que esté sumergida la que produce flotación. Un cuerpo flota si la fuerza de flotación y su peso completo (incluyendo la parte no sumergida) se equilibran.

#### 1.1.5. Equilibrio Relativo

La ecuación de Euler descrita adelante en la Sección 1.2 produce resultados de equilibrio hidrostático relativo a un marco de referencia no inercial, cuando la aceleración de dicho marco es justamente  $\mathbf{a}$ . En algunos textos se le denomina movimiento de cuerpo rígido, aunque esta designación es errónea porque en el cuerpo rígido no existe un campo de presiones (esfuerzo isótropo) de variación gradual como en los líquidos o gases. Aparte de esto, el sólido rígido desliza en contacto con otras paredes sólidas, y no se comporta como los fluidos que satisfacen la condición de no deslizamiento.

De esta forma, la mencionada ecuación de Euler se puede colocar como

$$\nabla P = \rho (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \quad (11)$$

con lo adquiriría la misma forma que la ecuación universal de la hidrostática (2), sólo que con una fuerza de volumen  $(\mathbf{g} - \mathbf{a})$  equivalente observada desde el marco de referencia no inercial. Recordemos que las fuerzas inerciales  $-\rho\mathbf{a}$  (con signo negativo) aparecen si observamos el movimiento desde un marco de referencia no inercial que se mueva con una aceleración  $\mathbf{a}$ .

Esta aceleración en la ecuación de Euler puede ser uniforme, pero puede variar de punto a punto. En el caso uniforme, supongamos que la aceleración  $a$  está inclinada en un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal. Si el sistema de coordenadas está alineado tal que el eje  $x$  es horizontal entonces

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho (g_x - a_x) \quad g_x = 0 \quad a_x = a \cos \alpha \quad (12.a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho (g_y - a_y) \quad g_y = -g \quad a_y = a \sin \alpha \quad (12.b)$$

Por el contrario, si el eje  $x$  está alineado con la aceleración, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho (g_x - a_x) \quad g_x = -g \sin \alpha \quad a_x = a \quad (13.a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho (g_y - a_y) \quad g_y = g \cos \alpha \quad a_y = 0 \quad (13.b)$$

En cualquier caso, la solución general de los sistemas de ecuaciones diferenciales anteriores es

$$P(x, y) = \rho [(g_x - a_x)(x - x_o) + (g_y - a_y)(y - y_o)] + P_o \quad (14)$$

donde  $(x_o, y_o)$  son las coordenadas de un punto cualquiera (puede ser sobre la superficie libre) donde la presión es  $P_o$  conocida. Las líneas isobáricas son todas paralelas y tienen pendientes  $(g_x - a_x)/(g_y - a_y) = \tan \beta$  con respecto al sistema de coordenadas. En el caso de la solución (13), la pendiente sería  $\tan(\alpha + \beta) = (\tan \alpha + \tan \beta)/(1 - \tan \alpha \tan \beta)$  con respecto a la horizontal.

En los sistemas giratorios con una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{k}}$ , teniendo simetría axial en coordenadas cilíndricas, aparece la aceleración centrípeta  $\mathbf{a} = -\omega^2 r \mathbf{e}_r$  para cada posición  $r$  genérica. Esto substituido en la ecuación de Euler, combinado junto con la gravedad vertical descendente ( $\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{k}}$ ), plantea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (15)$$

cuya solución general es

$$P(r, z) = \frac{\rho \omega^2}{2} r^2 - \rho g(z - z_o) + P_o \quad (16)$$

donde  $z_o$  es la cota vertical del vértice ( $r = 0$ ) de la superficie (esta puede ser la superficie libre) donde la presión  $P_o$  es conocida. En este caso las superficies isobáricas son todas paraboloides de revolución paralelos, incluyendo a la superficie libre. En este último problema las fuerzas inerciales se observarían desde el marco de referencia no inercial giratorio como fuerzas centrífugas. La presión no sólo crece con la profundidad  $H = h + z_o - z$ , con  $h = \omega^2 r^2 / (2g)$  la altura de la superficie libre sobre el vértice para un radio  $r$ , sino también crece con la lejanía  $r$  al eje de rotación.

## 1.2. ECUACION DE EULER

La *ecuación de Euler* es la ecuación diferencial del movimiento de un fluido sin viscosidad. Considerando como relación constitutiva que los esfuerzos son puramente debido a la presión, es decir

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} \quad (1)$$

pero a diferencia de la hidrostática ahora existe movimiento del fluido, entonces la primera ley del movimiento de Cauchy III.2.2.(1) se simplifica como

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2)$$

Nótese que la aceleración en la expresión anterior contiene no sólo el término transitorio, sino también el término convectivo.

## 1.3. TEOREMA DE KELVIN

El *teorema de Kelvin* enuncia que para un fluido no viscoso y de densidad constante, o que su presión dependa exclusivamente de la densidad, y para el cual sólo existen fuerzas de cuerpo del tipo conservativa, la vorticidad de cada partícula de fluido se preserva. El teorema de Kelvin cubre aquellos casos no contemplados en el teorema de Helmholtz de la sección I.1.3.4. Aunque el teorema de Kelvin parece ser un teorema de naturaleza cinemática, las ecuaciones de la dinámica del movimiento se requieren para su demostración.

Supóngase que en la ecuación de Euler 1.2.(2) la fuerza de cuerpo es conservativa, por lo que se puede decir que se deriva de un potencial  $\varphi$  en la forma  $\mathbf{g} = -\nabla \varphi$ . De esta substitución resulta que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \varphi \quad (1)$$

Ahora de la definición de la circulación I.1.2.(9) se tratará de obtener su derivada material considerando que la curva cerrada  $\mathcal{L}$  donde se calcula es invariante en el tiempo. De esta forma se tiene

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{L}} \left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{r}) \right] \quad (2)$$

En el último término se pueden intercambiar los símbolos de derivación

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{r}) = d\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{r}\right) = d\mathbf{v} \quad (3)$$

Aquí la derivada material ha sido convertida en su equivalente euleriano, en la cual  $t$  y la coordenada espacial son independientes entre sí. Así  $\partial \mathbf{r} / \partial t = \mathbf{0}$  y  $\nabla \mathbf{r} = \mathbf{I}$ , por lo que el resultado (3) es correcto, aunque la curva cerrada  $\mathcal{L}$  sea invariante en el tiempo. De esta forma y substituyendo (1) se tiene que la expresión para la tasa de cambio de la circulación (2) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_{\mathcal{L}} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \right) = \oint_{\mathcal{L}} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{2} d\mathbf{v}^2 \right) \\ &= \oint_{\mathcal{L}} \left( -\frac{1}{\rho} \nabla P \cdot d\mathbf{r} - \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{2} d\mathbf{v}^2 \right) = \oint_{\mathcal{L}} \left( -\frac{1}{\rho} dP - d\varphi + \frac{1}{2} d\mathbf{v}^2 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

donde se debe observar que los diferenciales exactos dan un resultado nulo para la integral de línea debido a que la curva  $\mathcal{L}$  es cerrada. Entonces,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{\mathcal{L}} \frac{dP}{\rho} \quad (5)$$

Ahora, si  $\rho = \text{constante}$ , la integral remanente en (5) se anula por la misma razón que los otros términos en (4). Sin embargo, esta integral es nula bajo una condición menos restrictiva. Supóngase que la presión es considerada una función exclusiva de la densidad, como por ejemplo en el flujo isoentrópico. Entonces, para alguna función  $P = \varphi(\rho)$ , tal que  $dP = \varphi'(\rho) d\rho$ , la expresión (5) se convierte en

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_{\mathcal{L}} \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} d\rho = 0 \quad (6)$$

Esta integral de línea también se anula al igual que las otras integrales para la curva cerrada  $\mathcal{L}$ , debido a que se considera que la función primitiva del integrando en (6) existe. Este resultado es el conocido como el teorema de Kelvin. La interpretación de su consecuencia en el campo de vorticidades se hace mediante el uso del teorema de Stokes

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (7)$$

donde  $\mathcal{A}$  es la superficie abierta sustentada por la curva cerrada  $\mathcal{L}$  y  $\mathbf{n}$  es la normal exterior a dicha superficie. El teorema de Kelvin predice que las integrales (7) se preservan bajo las condiciones impuesta por el teorema. Adicionalmente, como la curva cerrada  $\mathcal{L}$  y la superficie sustentada en ella  $\mathcal{A}$  son arbitrarias, esto implica que el campo de la vorticidad  $\mathbf{w}$  también se preserva.

#### 1.4. TEOREMA DE BERNOULLI

El teorema de Bernoulli (Daniel Bernoulli, 1738), tal como es conocido en la actualidad, se basa en la integración de las ecuaciones del movimiento de un fluido no viscoso a lo largo de una línea de corriente. Sin embargo, en esta oportunidad se hará la deducción del mismo teorema sin despreciar, en principio, los efectos viscosos y considerando el recorrido por otros caminos.

### 1.4.1. Línea de Corriente

Las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso (no necesariamente newtoniano) se expresa a través de la ecuación de Cauchy como sigue

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad \mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \mathcal{T} \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (1)$$

considerando que los esfuerzos tienen un componente debido a la presión y otro debido a la viscosidad. Uniendo todas las expresiones de (1) en una sola expresión queda que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\nabla \cdot \mathcal{T}}{\rho} \quad (2)$$

El teorema de Bernoulli también se basa en el hecho de que todas las fuerzas de cuerpo o a distancia  $\mathbf{g}$  son del tipo conservativo, dependiendo de una función potencial  $\varphi$ . Se emplea también una identidad para el campo de velocidades que involucra los conceptos de energía cinética específica  $\mathbf{v}^2/2$  y de la vorticidad  $\mathbf{w}$ . Estas consideraciones se resumen en las siguientes expresiones

$$\mathbf{g} = -\nabla \varphi \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (3)$$

Al substituir todas estas expresiones en (2) y, luego de reorganizar los términos, se obtiene que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \nabla \varphi + \frac{\nabla P}{\rho} = \frac{\nabla \cdot \mathcal{T}}{\rho} - \mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad (4)$$

Multiplicando ahora toda la ecuación (4) por el diferencial  $d\mathbf{r}$  de un recorrido cualquiera del dominio de flujo para un instante  $t$  dado, resulta

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} + \nabla \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \cdot d\mathbf{r} + \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{\rho} \nabla P \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathcal{T}) \cdot d\mathbf{r} - (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} \quad (5)$$

donde, al considerar que los términos con gradientes se convierten en diferenciales exactos, resulta

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} + d \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + d\varphi + \frac{dP}{\rho} = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathcal{T}) \cdot d\mathbf{r} - (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} \quad (6)$$

Nótese que hemos aplicado que para un campo escalar  $\phi$  se satisface que  $\nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = d\phi$ . Luego, al integrar entre el punto  $\mathbf{o}$  que es origen del recorrido y un punto genérico  $\mathbf{x}$ , queda que

$$\int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} d \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} d\varphi + \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} \frac{dP}{\rho} = \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathcal{T}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} \quad (7)$$

Las integrales definidas de diferenciales exactas depende sólo de los valores del integrando en los puntos extremos. El resto de las integrales se convierten en integrales de línea, es decir, dependen del camino recorrido. De acuerdo a esto, la ecuación (7) se puede expresar convenientemente como

$$B(t, \mathbf{x}) - B_o(t) = R(t, \mathbf{x}) - W(t, \mathbf{x}) \quad B(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi + \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} \frac{dP}{\rho} \quad B_o(t) = \frac{\mathbf{v}_o^2}{2} + \varphi_o \quad (8)$$



donde  $B(t, \mathbf{x})$  se denomina el *bernoulliano* y  $B_o(t) = B(t, \mathbf{o})$  es el valor del bernoulliano en el punto  $\mathbf{o}$ . Los términos con los esfuerzos viscosos y con la vorticidad se han substituido con la siguiente definición de variables

$$R(t, \mathbf{x}) = \oint_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot d\mathbf{r} \quad W(t, \mathbf{x}) = \oint_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} \mathbf{w} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (9)$$

donde  $R(t, \mathbf{x})$  se denomina el *término de pérdidas viscosas* y  $W(t, \mathbf{x})$  se denomina el *término de vorticidad*. El término de pérdidas viscosas se anula cuando se satisfacen algunos de los siguientes casos

$$R(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{Hidrostática} \\ \nabla \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{Flujo Uniforme o Simetría} \\ \mu = \lambda = 0 & \text{Fluido Perfecto} \\ \nabla \cdot \mathbf{T} \perp d\mathbf{r} & \text{Perpendicularidad} \end{array} \right. \quad (10)$$

El término de vorticidad se anula cuando se satisfacen algunos de los siguientes casos

$$W(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{Hidrostática} \\ \mathbf{w} = \mathbf{0} & \text{Flujo Irrotacional} \\ \mathbf{w}, \mathbf{v}, d\mathbf{r} & \text{Coplanares} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{v} \parallel \mathbf{w} & \text{líneas de corriente y torbellino coinciden} \\ \mathbf{v} \parallel d\mathbf{r} & d\mathbf{r} \text{ forma parte de una línea de corriente} \\ \mathbf{w} \parallel d\mathbf{r} & d\mathbf{r} \text{ forma parte de una línea de torbellino} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (11)$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema

**Teorema 1.** Teorema de Bernoulli.

Si para un instante determinado  $t$  se satisface que  $R(t, \mathbf{x}) = W(t, \mathbf{x}) = 0$  en un subdominio cualquiera del flujo, entonces el Bernoulliano  $B(t, \mathbf{x})$  es uniforme, e igual a  $B_o(t)$ , para dicho subdominio.

*Demostración.* La demostración de este teorema está conformada por la deducción hecha en las expresiones (1)-(11). El recíproco de este teorema no es válido. Como puede observarse, el caso planteado al principio, con un fluido perfecto y haciendo un recorrido sobre la línea de corriente, es un caso particular del teorema de Bernoulli tal como está expuesto aquí[Serrin,1959].  $\triangle$

El caso hidrostático ( $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) también es un caso particular del teorema de Bernoulli donde

$$\varphi + \oint_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} \frac{dP}{\rho} = \varphi_o \quad (12)$$

Esto es equivalente a la ecuación general de la hidrostática

$$\nabla P = -\rho \nabla \varphi \quad (13)$$

obtenida de eliminar de la ecuación (4) los términos no válidos para este caso.

El caso de un fluido viscoso y haciendo el recorrido sobre una línea de corriente es factible sólo cuando existe la condición de perpendicularidad entre la divergencia del tensor de esfuerzo viscoso y el recorrido. Esta situación, por ejemplo, se presenta en los flujos de Couette y de Poiseuille.

### 1.4.2. Tubo de Corriente

Se denomina *tubo de corriente* a la superficie que recubre a un manajo de líneas de corriente. Llamemos a la superficie  $\mathcal{A}$  que es siempre perpendicular a las líneas de corriente *superficie normal*. El vector normal unitario a dicha superficie en la dirección del campo de velocidades se denotará  $\mathbf{n}$ . En un tubo de corriente se puede definir entonces una superficie normal de entrada  $\mathcal{A}_e$  y una superficie normal de salida  $\mathcal{A}_s$ . La superficie normal posee una frontera perimetral que denotaremos  $\mathcal{S} = \partial\mathcal{A}$ , cuya normal exterior, la cual es tangente a  $\mathcal{A}$ , se denotará  $\boldsymbol{\eta}$ .

Para obtener la expresión de la ecuación de Bernoulli válida para un tubo de corriente es necesario establecer las siguientes hipótesis:

- El fluido es incompresible.
- El tubo de corriente es rígido.
- Los cambios sobre la superficie normal son puramente hidrostáticos.

La primera hipótesis se establece para poder considerar que los resultados incluyen el esfuerzo cortante (viscoso) en la pared del tubo de corriente. De otra forma tendrían que aparecer las potencias de estos mismos esfuerzos como en la primera ley de la termodinámica para sistemas abiertos (Cap.VI). Por otro lado, esta hipótesis facilita la manipulación de las ecuaciones de forma conveniente, puesto que el flujo volumétrico a través de las superficies normales es siempre constante. Adicionalmente, esta hipótesis ofrece una manipulación más sencilla para el término de presión sin tener que considerar las variaciones de la densidad sobre las superficies normales. Finalmente, esta hipótesis permite eliminar la forma bilinear  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}$  por ser  $\boldsymbol{\mathcal{T}}$  un tensor puramente desviatorio.

La segunda hipótesis se establece para no tener que considerar los cambios que pueden haber en las superficies normales dentro del término transitorio. Esto cambios harían las expresiones resultantes difíciles de calcular, puesto que se tendrían que calcular las velocidades relativas del flujo a través de las paredes del tubo de corriente, el flujo neto a través de las superficies normales de entrada y de salida, y la acumulación del fluido dentro del tubo. Adicionalmente, esta hipótesis hace más factible la tercera hipótesis, la cual sería prácticamente imposible de cumplir sin satisfacer la segunda. En los casos no establecidos por estas hipótesis, es preferible emplear el principio de conservación de la energía total (Cap.III) o, equivalentemente, la primera ley de la termodinámica para sistemas abiertos (Cap.VI).

La tercera hipótesis se establece para poder extraer de la integral sobre la superficie normal los términos hidrostáticos  $d\varphi + dP/\rho$ . Esto es posible si se considera que la variación de los términos hidrostáticos a lo largo de las líneas de corriente es independiente de la posición de estas a través de la superficie normal. Esto último se demuestra considerando que no existe aceleración ni efectos viscosos sobre las superficies normales y se aplica la ecuación de Euler sobre las mismas.

Multiplíquese ahora la expresión (4) por el vector normal  $\mathbf{n}$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{w} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (14)$$

Nótese que se ha aplicado la regla  $\boldsymbol{\nabla} \varphi \cdot \mathbf{n} = \partial \varphi / \partial r$ , donde  $r$  es la coordenada longitudinal sobre una línea de corriente. El término con la vorticidad  $\mathbf{w}$  se elimina por ser  $\mathbf{n}$  paralelo a  $\mathbf{v}$ . Vamos a integrar a lo ancho de la superficie normal  $\mathcal{A}$  y a lo largo de la línea de corriente que pasa por los centroides  $c$  de área de todas las superficies normales. Así se obtienen para los diferentes términos de (14) los siguientes resultados. El primer término de (14) da

$$\oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} dl = \oint_e^s \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} dl = \int_e^s \mathcal{A} \frac{\partial U}{\partial t} dl \quad U = \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (15)$$

donde  $U$  es la velocidad de flujo promedio en la superficie normal. El segundo término de (14) da

$$\oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) d\mathcal{A} dl = \alpha_l \oint_e^s \frac{d}{dl} \int_{\mathcal{A}} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) d\mathcal{A} dl = \alpha_l \oint_e^s \frac{d}{dl} \left( \frac{\alpha_v U^2 \mathcal{A}}{2} \right) dl = \alpha_l \left( \frac{\alpha_v U^2 \mathcal{A}}{2} \right)_e^s \quad (16)$$

donde  $\alpha_l$  es un coeficiente de corrección para poder intercambiar el orden de integración entre las superficies normales y las líneas de corriente, siendo un valor medio para todo el recorrido. El coeficiente  $\alpha_v$ , definido como

$$\alpha_v = \frac{1}{U^2 \mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{v}^2 d\mathcal{A} \quad (17)$$

corrige el efecto del perfil de velocidades en la sección del tubo de corriente, puesto que al final aparece el cuadrado de la velocidad promedio  $U$  y no el promedio de la velocidad al cuadrado. El tercer término de (14) da

$$\oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \right) d\mathcal{A} dl = \oint_e^s \left( \frac{d\varphi}{dl} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dl} \right) \mathcal{A} dl = \oint_e^s \mathcal{A} \left( d\varphi_{c'} + \frac{dP_{c'}}{\rho_{c'}} \right) \quad (18)$$

donde los valores de los términos hidrostáticos se han evaluado en  $c'$ , punto cercano a los centroides  $c$  de las superficies normales en la medida que el comportamiento del integrando sea más lineal en la sección  $\mathcal{A}$ . El penúltimo término, que está en el miembro de la derecha de (14), da

$$\begin{aligned} \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} dl &= \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A} dl - \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{n} d\mathcal{A} dl \\ &= \oint_e^s \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} dl + \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} dl - \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{n} d\mathcal{A} dl \\ &= - \oint_e^s \frac{\tau_w \mathcal{S}}{\rho_{c'}} dl + \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : [\mathbf{nn}(\nabla \cdot \mathbf{n}) - \nabla \mathbf{n}] d\mathcal{A} dl \end{aligned} \quad (19)$$

donde a la primera integral se le ha aplicado el teorema de la divergencia A.2.5.(75), siendo  $\tau_w$  el módulo del esfuerzo cortante promedio en la pared del tubo de corriente, y el cual se opone perimetralmente al movimiento.

En el caso de flujo incompresible, el producto  $\mathbf{T} : \mathbf{nn}$  se anula debido a que el tensor de esfuerzo posee solamente parte desviatoria. En el caso de que  $\mathcal{A}$  sea plana, toda la segunda integral de la derecha se anula. Cuando los desarrollos de todos los términos (15)-(19) se colocan juntos, entonces finalmente se obtiene

$$\oint_e^s \frac{\partial U}{\partial t} \mathcal{A} dl + \alpha_l \left( \frac{\alpha_v U^2 \mathcal{A}}{2} \right)_e^s + \oint_e^s \mathcal{A} \left( d\varphi_{c'} + \frac{dP_{c'}}{\rho_{c'}} \right) = - \oint_e^s \frac{\tau_w \mathcal{S}}{\rho_{c'}} dl \quad (20)$$

Veremos ahora cual sería el resultado obtenido en el caso de haber multiplicado la expresión (4) por el vector velocidad  $\mathbf{v} = \mathbf{vn}$ . Primeramente, la expresión (14) cambiaría a la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \mathbf{v} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \quad (21)$$

Nótese que se ha aplicado la regla  $\nabla \varphi \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \partial \varphi / \partial r$ , donde  $r$  es de nuevo la coordenada longitudinal sobre una línea de corriente, siendo  $\mathbf{v}$  el módulo del vector velocidad. El término con la vorticidad de nuevo se eliminó por ser  $\mathbf{n}$  paralelo a  $\mathbf{v}$ . Vamos a integrar a lo ancho de la superficie normal  $\mathcal{A}$  y a lo largo de la línea de corriente que pasa por los centroides  $c$  de área de todas las superficies normales. Así se obtienen para los diferentes términos de (21) los siguientes resultados. El primer término da

$$\oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{A} dl = \oint_e^s \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{A}} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) d\mathcal{A} dl = \oint_e^s \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\alpha_v U^2}{2} \right) dl = \oint_e^s U \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_v U) dl \quad (22)$$

donde  $U$  es de nuevo la velocidad de flujo promedio en la superficie normal y  $\alpha_v$  al igual que antes corrige el efecto que produce tener el la velocidad promedio al cuadrado y no el promedio de la velocidad al cuadrado. El segundo término da

$$\begin{aligned} \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \mathbf{v} d\mathcal{A} dl &= \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{v}^3}{3} \right) d\mathcal{A} dl = \alpha'_l \oint_e^s \frac{d}{dl} \int_{\mathcal{A}} \left( \frac{\mathbf{v}^3}{3} \right) d\mathcal{A} dl \\ &= \alpha'_l \oint_e^s \frac{d}{dl} \left( \frac{\alpha_c U^3 \mathcal{A}}{3} \right) dl = \alpha'_l \left( \frac{\alpha_c U^3 \mathcal{A}}{3} \right)_e^s \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $\alpha'_l$  es un coeficiente de corrección para poder intercambiar el orden de integración. Este coeficiente es en general diferente a  $\alpha_l$  en el desarrollo (16), pero cuando el tubo de corriente tiene área constante se tiene que  $\alpha_l = \alpha'_l = 1$ . El coeficiente  $\alpha_c$ , definido como

$$\alpha_c = \frac{1}{U^3 \mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{v}^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (24)$$

corrige el efecto del perfil de velocidades en la sección del tubo de corriente, puesto que aparece el cubo de la velocidad promedio y no el promedio de la velocidad al cubo. El tercer término da

$$\oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \mathbf{v} d\mathcal{A} dl = \oint_e^s \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{c'} U \mathcal{A} dl = \oint_e^s U \mathcal{A} \left( d\varphi_{c'} + \frac{dP_{c'}}{\rho_{c'}} \right) \quad (25)$$

donde los valores de los términos hidrostáticos se han evaluado en los centroides  $c$  de las superficies normales. El último termino, que está en el miembro de la derecha da

$$\begin{aligned} \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{A} dl &= \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) d\mathcal{A} dl - \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} d\mathcal{A} dl \\ &= \oint_e^s \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{S} dl + \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{A} dl - \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} d\mathcal{A} dl \\ &= - \oint_e^s \frac{\tau_w v_w \mathcal{S}}{\rho_{c'}} dl + \oint_e^s \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : [\mathbf{v} \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n}) - \nabla \mathbf{v}] d\mathcal{A} dl \end{aligned} \quad (26)$$

donde a la primera integral se le ha aplicado de nuevo el teorema de la divergencia A.2.5.(75), siendo  $\tau_w$  y  $v_w$  los módulos de los promedios del esfuerzo cortante y la velocidad tangencial en la pared del tubo de corriente, respectivamente, estando ambas cantidades definidas en la dirección que se opone al movimiento.

En el caso de flujo incompresible, el producto de la segunda integral  $\mathbf{T} : \mathbf{v} \mathbf{n}$  se anula debido a que el tensor de esfuerzo posee sólo parte desviatoria y además  $\mathbf{v}$  posee la misma dirección que  $\mathbf{n}$ . En el caso de que  $\mathcal{A}$  sea plana, dicho término también se anula. Cuando los desarrollos de todos los términos (22)-(26) se colocan juntos, entonces finalmente se obtiene

$$\oint_e^s \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_v U) dl + \alpha'_l \left( \frac{\alpha_c U^2}{3} \right)_e^s + \oint_e^s \left( d\varphi_{c'} + \frac{dP_{c'}}{\rho_{c'}} \right) = - \oint_e^s \frac{1}{\rho_{c'}} \left( \frac{\tau_w \mathcal{S}}{\mathcal{A}} \right) \left( \frac{v_w}{U} + C_\mu \right) dl \quad (27)$$

donde se ha eliminado el factor común  $U \mathcal{A}$  por ser esta cantidad constante a lo largo del tubo de corriente a causa de que el fluido es incompresible. La integración de la función de disipación viscosa  $\Phi_\mu$  se substituye por la potencia del trabajo viscoso  $\tau_w \mathcal{S} U$  mediante el uso del coeficiente  $C_\mu$ , definido como

$$C_\mu = \frac{1}{\tau_w \mathcal{S} U} \int_{\mathcal{A}} \Phi_\mu d\mathcal{A} \quad \Phi_\mu = \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} = \mathbf{T} : \mathbf{D} \geq 0 \quad (28)$$

El término con  $C_\mu$  en (27) integrado dentro de todo el tubo de corriente entre la entrada  $e$  y la salida  $s$  representa la potencia del trabajo  $\dot{W}_\mu^-$  cedido por el sistema material en forma de calor  $\dot{Q}_\mu$ , como lo indica la siguiente expresión

$$\dot{W}_\mu^- = - \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}_m} \Phi_\mu d\mathcal{V} = - \dot{Q}_\mu \quad (29)$$

La relación  $v_w/U$  entre la velocidad en la pared y la velocidad promedio representa un factor del deslizamiento ocurrido en la superficie lateral del tubo de corriente.

La tabla 1 presenta las expresiones válidas para una tubería de sección circular constante, por lo que el flujo está desarrollado, y donde se cumple la condición de no deslizamiento en la pared de la misma. El régimen

del flujo puede ser laminar o turbulento. Para el régimen laminar se ha usado el perfil de velocidades parabólico que se obtiene al integrar las ecuaciones de Navier-Stokes con las condiciones de borde correspondientes. Para el régimen turbulento se ha empleado el perfil de velocidades que sigue una *ley de potencia*. La tabla 2 presenta valores característicos de las variables mostradas en la tabla 1. La velocidad en el eje  $U_c$  es siempre la máxima en toda la tubería.

En las tablas 1 y 2 se ha empleado para el esfuerzo cortante  $\tau$ , en el caso de una tubería con un flujo en régimen turbulento, un valor ofrecido para el factor de fricción  $f$  a través del esfuerzo cortante en la pared  $\tau_w$ . Esto se ha hecho así debido a que el perfil de velocidad que sigue la ley de potencia posee una derivada de la velocidad que es infinita en la pared de la tubería ( $r = R$ ) y no posee una derivada nula en el eje de la tubería ( $r = 0$ ).

El factor de fricción en una tubería con perfiles de ley de potencia se puede correlacionar mediante la correlación de Colebrook para tuberías lisas ( $k_s = 0$ ) ó mediante la fórmula simplificada  $f = C/n^2$  ( $C = (12\sqrt{2}C_t)^2$ ,  $C_t = \mu_t/(\rho U_\tau R) \approx 0.058 - 0.070$ ), cuyos resultados son estimativos de la mencionada correlación, la cual se supone más precisa. El factor  $C_t$ , con características del inverso de un número de Reynolds, aunque no es constante en toda la tubería, si lo es en gran parte de ella, excepto en la zona cercana a la pared, por eso se ha supuesto aquí como un factor con un valor constante. Un factor de  $C_t = 0.07$  ( $C = 1.4112$ ) es el que multiplica la expresión de la velocidad de fricción para el flujo turbulento, lo cual se comprueba fácilmente si se trata de encontrar el factor de fricción  $f$  a través de la velocidad de fricción y la velocidad promedio, despreciando los términos de orden inferior.

La fórmula estimativa  $f = 1/n^2$  ( $C_t = \sqrt{2}/24 \approx 0.058926$ ) fué la que se empleó para obtener los valores de  $C_\mu$  en la tabla 2, sin incluir la influencia del factor con  $r_o$  ( $\tau_t \approx \tau$  para  $r < r_o$  y  $\tau_t \approx 0$  para  $r > r_o$ ). El factor de fricción  $f$ , tradicionalmente denominado factor de Darcy-Weisbach, es cuatro veces el factor de fricción de Fanning  $c_f$ , el cual se define como un coeficiente de arrastre del esfuerzo cortante en la pared de la tubería, o sea,  $f = 4c_f$ .

La tabla 2 no presenta los valores de  $Re$  ni de  $C_\mu$  para  $n = 5$ , puesto que este valor de  $n$  no existe físicamente en régimen turbulento para ningún valor del número de Reynolds. Obviamente, para este caso no se ha podido obtener el valor de  $C_\mu$ , ya que este depende del número de Reynolds como se indica al final de la tabla 1.

**Tabla 1.** Fórmulas para el flujo en un sección circular constante.

Variables		Laminar	Turbulento
Perfil de Velocidades	$v = v(r)$	$\frac{v}{U_c} = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$	$\frac{v}{U_c} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$
Velocidad Promedio	$U = \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A}$	$\frac{U}{U_c} = \frac{1}{2}$	$\frac{U}{U_c} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$
Velocidad de Fricción	$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{f}{8}} U$	$\frac{U_\tau}{U_c} = \sqrt{\frac{2}{Re}}$	$\frac{U_\tau}{U_c} \approx \frac{4(3n+1)0.07}{(n+1)(2n+1)}$
Coficiente de Velocidad	$\alpha_v = \frac{1}{U^2 \mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} v^2 \, d\mathcal{A}$	$\alpha_v = \frac{4}{3}$	$\alpha_v = \frac{(n+1)(2n+1)^2}{4n^2(n+2)}$
C. Energía Cinética	$\alpha_c = \frac{1}{U^3 \mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} v^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A}$	$\alpha_c = 2$	$\alpha_c = \frac{(n+1)^3(2n+1)^3}{4n^4(n+3)(2n+3)}$
Esfuerzo Cortante	$\tau(r) = \mu \left  \frac{dv}{dr} \right  + \tau_t$	$\tau = 4\mu \frac{U}{R} \left(\frac{r}{R}\right) \quad \tau_t = 0$	$\tau = \tau_w \left(\frac{r}{R}\right) \quad \tau_t = \rho  \overline{v'_r v'_z} $
Esfuerzo de Pared	$\tau_w = \mu \left  \frac{dv}{dr} \right _{r=R} = \rho U_\tau^2$	$\tau_w = 4\mu \frac{U}{R}$	$\tau_w = \frac{f}{8} \rho U^2$
Factor de Fricción	$f = \frac{4\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 8 \left(\frac{U_\tau}{U}\right)^2$	$f = \frac{64}{Re}$	$f = \left[ \log \left( \frac{Re \sqrt{f}}{2.52} \right)^2 \right]^{-2} \approx \frac{1}{n^2}$
Función de Disipación	$\Phi_\mu(r) = \tau \left  \frac{dv}{dr} \right $	$\Phi_\mu = 16\mu \frac{U^2}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)$	$\Phi_\mu = \frac{\tau(\tau - \tau_t)}{\mu}$
Coficiente de Disipación	$C_\mu = \frac{1}{\tau_w U \mathcal{S}} \int_{\mathcal{A}} \Phi_\mu \, d\mathcal{A}$	$C_\mu = 1$	$C_\mu \approx \frac{f Re}{64} \left[1 - \left(\frac{r_o}{R}\right)^4\right]$

Para tuberías rugosas en régimen turbulento ( $Re > 2000$ ) se utiliza de forma bastante generalizada en fluidos incompresible (líquidos), pero también inclusive para fluidos compresibles (gases), la correlación de Colebrook, mostrada a continuación

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{a}{Re \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon/D}{b} \right) \quad \begin{matrix} a = 2.52 \\ b = 3.71 \end{matrix} \quad (30)$$

donde la rugosidad  $\varepsilon = k_s$  no es una rugosidad real de la superficie, sino una rugosidad equivalente a la usada por Nikuradse para correlacionar el factor de fricción  $f$ , pero adaptada a tuberías comerciales. Como se habrá notado, la ecuación (30) es implícita, pero se puede resolver de manera prácticamente segura usando el método de punto fijo, puesto que ya está despejada de forma apropiada, a partir del valor inicial

$$f_t = \lim_{Re \rightarrow \infty} f = \left[ \log \left( \frac{b}{\varepsilon/D} \right)^2 \right]^{-2} \quad (31)$$

que es el valor del factor de fricción para número de Reynolds infinito.

**Tabla 2.** Factores para el flujo promedio en una sección circular constante.

	Laminar	Turbulento					
$Re$	$< 2 \times 10^3$		$4.0 \times 10^3$	$1.1 \times 10^5$	$3.5 \times 10^5$	$10^6$	$3.2 \times 10^6$
$n$		5	6	7	8	9	10
$U/U_c$	0.500	0.758	0.791	0.817	0.837	0.853	0.866
$\alpha_v$	1.333	1.037	1.027	1.020	1.016	1.013	1.011
$\alpha_c$	2.000	1.106	1.077	1.058	1.046	1.037	1.031
$C_\mu$	1		1.736	35.076	85.449	192.901	500.0

Para las expresiones de las tablas mencionadas se ha convenido en emplear el número de Reynolds que típicamente se define en estos casos, basado en el diámetro interior de la tubería

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu} \quad D = 2 R \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (32)$$

siendo  $R$  el radio interior de la tubería. La propiedad  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido y la propiedad  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido.

Vamos a aplicar las expresiones (20) y (27) para el caso particular de sección circular constante, con lo cual se obtiene

$$\int_e^s \frac{\partial U}{\partial t} dl + \alpha_v \left( \frac{U^2}{2} \right)_e^s + \int_e^s \left( d\varphi_{c'} + \frac{dP_{c'}}{\rho_{c'}} \right) = - \int_e^s \frac{1}{\rho_{c'}} \left( \frac{\tau_w \mathcal{S}}{\mathcal{A}} \right) dl \quad (33)$$

$$\alpha_v \int_e^s \frac{\partial U}{\partial t} dl + \frac{2}{3} \alpha_c \left( \frac{U^2}{2} \right)_e^s + \int_e^s \left( d\varphi_{c'} + \frac{dP_{c'}}{\rho_{c'}} \right) = - C_\mu \int_e^s \frac{1}{\rho_{c'}} \left( \frac{\tau_w \mathcal{S}}{\mathcal{A}} \right) dl \quad (34)$$

donde, debido a que el flujo es incompresible ( $\rho_{c'} = \rho = \text{cte}$ ), los términos hidrostático y de pérdidas viscosas son

$$\int_e^s \left( d\varphi_c + \frac{dP_c}{\rho_c} \right) = \left( \varphi_{c'} + \frac{P_{c'}}{\rho_{c'}} \right)_e^s \quad \int_e^s \frac{1}{\rho_{c'}} \left( \frac{\tau_w \mathcal{S}}{\mathcal{A}} \right) dl = \frac{\tau_w \mathcal{S} \mathcal{L}}{\rho \mathcal{A}} \quad (35)$$

respectivamente. Nótese que se ha supuesto que el esfuerzo cortante en la pared  $\tau_w$  es constante a lo largo de la tubería de longitud  $\mathcal{L}$ . Esto concuerda con el hecho de que, en una tubería de sección constante con flujo incompresible, el gradiente de presión en la dirección del eje de la tubería es constante en la dirección espacial. Esta propiedad también se considera igualmente válida para el perfil de velocidades.

Comparando las expresiones (33) y (34) se observa que los coeficiente que afectan a los términos transitorio, de energía cinética y de pérdida viscosa no son iguales para una expresión y para la otra, con la excepción del término de energía cinética para el régimen laminar, donde si se cumple que  $\alpha_v = 2\alpha_c/3$ . Sin embargo, para régimen turbulento se tiene que  $\alpha_v \approx \alpha_c \approx 1$ . El valor del coeficiente  $C_\mu$  en la expresión (34) coincide con la expresión (33) en el régimen laminar. Sin embargo, difiere enormemente de la unidad en la medida que el número de Reynolds aumenta.

Aunque las expresiones (33) o (34), cualquiera de las dos se considere válida, se desarrollaron para el flujo incompresible, se han escrito en la forma expuesta para poderlas usar como un aproximación del flujo

compresible. Esto se justifica si consideramos que localmente el flujo es incompresible en una tubería de longitud  $d\mathcal{L}$  y luego realizamos la integración a lo largo de la línea de corriente que recorre los centroides de las superficies normales.

### 1.4.3. Flujo en una tubería

La ecuación de Bernoulli, aplicada al flujo de un líquido newtoniano de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ , dentro de una tubería de sección constante con área  $\mathcal{A}$  y perímetro mojado  $\mathcal{S}$ , se expresa más apropiadamente en función del caudal volumétrico  $Q = U \mathcal{A}$ , siendo  $U$  la velocidad media. Simplificadamente se expresa como

$$F(Q) = P_B - P_A + \rho C_f Q |Q| + K_g (Z_B - Z_A) = 0 \quad (36)$$

donde los coeficientes de pérdida  $C_f$  y del energía potencial  $K_g$  involucrados son

$$C_f = \frac{\rho K_f}{2 \mathcal{A}^2} \quad K_f = \sum_i K_i + f (L + \sum_j L_j) \frac{\mathcal{S}}{4 \mathcal{A}} \quad K_g = \rho g \quad (37)$$

El primer término de  $K_f$ , donde involucra las  $K_i$ , se denomina *pérdidas localizadas* e incluye las pérdidas de presión ocasionadas por accesorios (codos, tees, yees, reducciones, expansiones, válvulas, etc.) a lo largo de la tubería. El segundo término de  $K_f$  son las *pérdidas distribuidas* ocasionadas por la fricción viscosa con la pared de la tubería a lo largo de la longitud  $L$  real de la misma tubería. Las longitudes  $L_j$  son pérdidas menores (localizadas), pero expresada como longitud equivalente de tubería que produciría la misma pérdida de la presión, que si se reemplaza por dicha longitud equivalente adicionada a la longitud original de la tubería.

El factor de fricción de Darcy-Weisbach  $f$  interviene como una función del tipo

$$f = f(\mathcal{R}e, \varepsilon/D) \quad \mathcal{R}e = \frac{\rho |Q| D}{\mu \mathcal{A}} \quad D = 4 R_h \quad R_h = \mathcal{A}/\mathcal{S} \quad \tau_w = \frac{f}{8} \rho U^2 = \frac{c_f}{2} \rho U^2 \quad (38)$$

dependiente del número de Reynolds  $\mathcal{R}e$  y la rugosidad relativa  $\varepsilon/D$  mediante, por ejemplo, la correlación de Colebrook (30). La longitud  $D$  es el denominado *Diámetro Hidráulico* y en el caso de una tubería de sección circular coincide con su propio diámetro. El esfuerzo cortante en la pared de la tubería  $\tau_w$  expresa básicamente la ecuación de Darcy-Weisbach  $h_f = f(L/D)U^2/(2g)$ , que para la ecuación (36) coincide con  $h_f = C_f Q^2/g$ . El coeficiente clásico  $c_f = f/4$ , denominado coeficiente de fricción de Fanning, es un número adimensional de Euler. Cuando el tramo de la tubería es recto y forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, entonces  $(Z_B - Z_A) = L \sin \alpha$ . La fracción  $R_h$  se denomina *Relación Hidráulica* y expresa el balance entre las fuerzas inerciales de flujo en la sección  $\mathcal{A}$  y las fuerzas viscosas en la pared del conducto en el perímetro  $\mathcal{S}$  por la condición de no deslizamiento. Por eso dicho perímetro se denomina “mojado”, porque si no lo está (mojado), no produce esfuerzo viscoso en dicha pared.

Particularmente, cuando la tubería es de sección circular las siguientes variables se reducen a

$$C_f = \frac{8 \rho K_f}{\pi^2 D^4} \quad \mathcal{R}e = \frac{4 \rho |Q|}{\pi \mu D} \quad (39)$$

El valor absoluto que aparece en  $Q$  en las ecuaciones de arriba es para contemplar que, si el flujo no va del punto  $A$  al Punto  $B$ , sino al contrario, las ecuaciones conservan de igual manera su signo correcto. Si  $Q$  es positivo entonces la presión  $P_B$  es menor que  $P_A$  en una tubería horizontal. Si  $Q$  es negativo, entonces ocurre lo contrario. El coeficiente  $K_g$  en la ecuación (36) interviene para considerar que siempre haya una reducción de la presión piezométrica hacia donde se dirige el líquido, sin importar el sentido del flujo y las diferencias de cotas  $Z$ . Dicha ecuación se ha colocado igualada a cero para formar, en caso de una red de tuberías, un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales del tipo homogénea  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .



### 1.5. ECUACION DE CROCCO

La ecuación de Crocco relaciona la vorticidad de un campo de velocidades con la entropía del fluido. Bajo ciertas condiciones se puede mostrar que un flujo isoentrópico es irrotacional, y viceversa. Luego, si se conoce que un flujo es esencialmente isoentrópico, las simplificaciones matemáticas asociadas con el movimiento irrotacional pueden ser empleadas.

Con la finalidad de establecer la ecuación de Crocco, considérese un flujo no viscoso ( $\mathcal{T} = \mathbf{0}$ ) para el cual no existen las fuerzas de cuerpo ( $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ ). Entonces la ecuación de Euler 1.2.(2) se reduce a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1)$$

El término convectivo de la aceleración, el cual es no lineal, puede ser expandido mediante la siguiente identidad

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (2)$$

De aquí que la ecuación de Euler (1) se convierte en

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (3)$$

Esta forma de la ecuación de Euler es el punto de partida para la obtención de la ecuación de Crocco.

Con la finalidad de relacionar la dinámica del flujo con su termodinámica, se propone eliminar la presión  $P$  y la densidad  $\rho$ , las cuales aparecen en el miembro de la derecha de (3), en favor de la entalpía  $h$  y la entropía  $s$ . Para hacer esto se usará la ecuación de equilibrio térmico local III.5.2.(5) junto con la definición de la entalpía III.4.3.(8). De acuerdo a esto se obtiene

$$-\frac{1}{\rho} dP = T ds - dh \quad -\frac{1}{\rho} \nabla P = T \nabla s - \nabla h \quad (4)$$

donde la segunda expresión se establece a partir de la primera sabiendo que se satisface que  $d\mathbf{r} \cdot \nabla(\cdot) = d(\cdot)$ , tal como se ha planteado en la secciones previas.

La substitución de la ecuación de equilibrio térmico local (4.b) en la ecuación de Euler modificada (3) permite, después de reorganizar los términos, obtener finalmente la ecuación de Crocco

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( h + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + T \nabla s \quad (5)$$

Esta ecuación es válida para flujos en los cuales los efectos viscosos son despreciables y en los cuales no existen fuerzas de cuerpo [Currie,1993].

Adicionalmente, para un flujo adiabático ( $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ), despreciando los esfuerzos viscosos ( $\Phi_\mu = 0$ ) y la generación de calor ( $\Phi_r = 0$ ), la ecuación de la energía térmica (o de la entalpía) III.4.3.(12) se reduce a

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P \quad (6)$$

Por otro lado, la ecuación de Euler sin fuerzas de cuerpo es

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P \quad (7)$$

Multiplicando escalarmente esta ecuación por la velocidad  $\mathbf{v}$  y sumándose el resultado a (6) resulta

$$\rho \frac{d}{dt} \left( h + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (8)$$

Entonces para el flujo estacionario ( $\partial/\partial t = 0$ ) y adiabático de un fluido no viscoso en el cual no existen fuerzas de cuerpo, la cantidad  $h_o = h + \mathbf{v}^2/2$ , denominada *entalpía de estancamiento*, se conserva cuando se sigue a las partículas, o sea, a lo largo de las líneas de corriente. Cuando  $h_o$  es igual para todas las líneas de corriente, lo cual representa la situación usual, la ecuación de Crocco (5) predice que un flujo irrotacional es también isoentrópico o viceversa.

### 1.6. FLUJO POTENCIAL (LAPLACE)

El *flujo potencial* se presenta cuando se tiene un fluido incompresible para el cual el campo de velocidades se genera de un potencial. De la primera condición se establece por medio de la ecuación de continuidad que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

De la segunda condición se tiene que, si la *función potencial de velocidad* es denotada  $\phi(t, \mathbf{x})$ , entonces

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (2)$$

Obsérvese que la función potencial de velocidad puede depender del tiempo, lo que no es posible en el caso del potencial de una fuerza conservativa. La tabla 1 presenta la divergencia de la velocidad en distintos sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales.

**Tabla 1.** Divergencia de la velocidad  $\vartheta = \text{tr} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

La condición (2) substituida en la condición (1) implica que la función potencial satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3)$$

con las correspondientes condiciones de frontera. Resolviendo esta ecuación en el dominio del flujo y empleando (2) se puede obtener el campo de velocidades sin necesidad de resolver la ecuación de movimiento. La tabla 2 ofrece las distintas formas de calcular el operador laplaciano  $\nabla^2$  en los sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales típicos.

**Tabla 2.** Operador laplaciano  $\nabla^2$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$

Se conoce que el rotacional de cualquier gradiente es siempre nulo, por lo tanto se tiene para la función potencial de velocidad que

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0} \quad (4)$$

y el flujo potencial es siempre un flujo irrotacional, o sea, con vorticidad nula. La tabla 3 muestra la vorticidad (rotacional de la velocidad) calculada en distintos sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales, expresada en las diferentes bases ortonormales.

**Tabla 3.** Vorticidad, rotacional de la velocidad  $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (r v_\phi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r v_\theta) \right] \mathbf{e}_r$ $+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi \sin \theta) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi$

La propiedad (4) antes mencionada justifica el uso de la ecuación de Bernoulli 1.4.(8) (sin incluir los efectos viscosos) para la obtención del campo de presiones en un flujo irrotacional no viscoso

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \varphi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_o + \frac{P_o}{\rho} + B_o(t) = \tilde{B}_o(t) \quad B_o(t) = \frac{\mathbf{v}_o^2}{2} + \varphi_o \quad (5)$$

En la obtención de esta expresión se han intercambiado la derivación parcial en el tiempo y el operador nabla, y la regla ya bastante usada que establece que  $d\mathbf{r} \cdot \nabla ( \cdot ) = d( \cdot )$ . Habiendo determinado el potencial de velocidad con (3), la ecuación de Bernoulli (5) resulta en una expresión algebraica en donde la presión se puede despejar directamente.

La primera ventaja de este tipo de flujo y su método de resolución es que es mucho más sencillo resolver la ecuación diferencial lineal (3) y encontrar  $\mathbf{v}$  con (2), que resolver completamente la ecuación de

Euler 1.2.(2), la cual es de tipo no lineal. La segunda ventaja importante es que se puede aplicar técnicas de superposición de las funciones potenciales de los flujos debido a la linealidad de (3). Con esta ventaja entonces se puede obtener la solución de un flujo complicado con la superposición de flujos conocidos y sencillos cuyas soluciones son conocidas previamente.

En el caso de un flujo potencial plano existe una segunda función denotada  $\psi$  y denominada *función de corriente*, que permite la aplicación de un procedimiento complementario. Esta función de corriente debe ser definida de tal forma que el campo de velocidades obtenido con ella cumpla con la condición de incompresibilidad (campo solenoidal) y la condición de irrotacionalidad (campo irrotacional).

Vamos a introducir ahora la función de corriente, la cual está definida en el sistema de coordenadas cartesiano como

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.a)$$

En coordenadas cilíndricas (polares realmente) estas mismas expresiones se modifican de la siguiente manera

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (6.b)$$

La ecuación de continuidad se satisface naturalmente para esta definición de la función de corriente, cuando se substituye (6) en (1). El carácter del flujo irrotacional se establece substituyendo la definición (6) en  $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} = 0$ , con lo cual se obtiene que la ecuación de corriente debe satisfacer la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

En coordenadas cilíndricas el laplaciano está presentado en la tabla 2, pero no incluir la derivada en  $z$  porque el flujo potencial siempre es plano. De acuerdo a esto, las funciones  $\psi$  y  $\phi$  parecieran del mismo tipo. Para ambas se satisfacen las condiciones de continuidad y de flujo irrotacional. La ecuación de Laplace se origina para  $\phi$  haciendo cumplir la condición de continuidad, para  $\psi$  la ecuación de Laplace se origina por cumplirse la condición de flujo irrotacional. En ambas, la otra condición faltante se satisface naturalmente de su definición. Sin embargo, la principal diferencia entre la función de corriente  $\psi$  y la función de potencial de velocidad  $\phi$ , es que la primera se aplica exclusivamente a flujos planos, la segunda se puede aplicar a flujos planos y tridimensionales.

Considérese que se definen las funciones  $\phi(x, y)$  y  $\psi(x, y)$  dependientes espacialmente de las coordenadas  $(x, y)$  del plano cartesiano. La obtención de los diferenciales totales de ellas junto con la substitución de las definiciones (6) permite obtener las *líneas equipotenciales* con  $\phi = \text{constante}$  y las *líneas de corriente* con  $\psi = \text{constante}$ , ambas a partir del campo de velocidades  $\mathbf{v} = (u, v)$ . Esto es

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_\phi = -\frac{1}{(dy/dx)_\psi} = -\frac{u}{v} \quad (8)$$

Esta expresión permite afirmar que las líneas equipotenciales y las líneas de corriente son ortogonales entre sí.

Otra propiedad de las líneas de corriente es que el caudal por unidad de profundidad entre dos líneas de corriente es constante a lo largo de las líneas. Sean dos líneas de corriente con valores de la función de corriente  $\psi_a$  y  $\psi_b$  y pasando por los puntos **a** y **b**. El caudal volumétrico por unidad de profundidad en la dirección en la que  $\phi$  se incrementa y atravesando una línea curva cualquiera  $\mathcal{L}$ , la cual une los puntos arbitrarios **a** y **b**, se calcula como

$$Q = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{L} = \int_{y_a}^{y_b} u(x, y) \, dy - \int_{x_a}^{x_b} v(x, y) \, dx = \int_{\psi_a}^{\psi_b} d\psi = \psi_b - \psi_a \quad (9)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal a la curva  $\mathcal{L}$  en la dirección en la que  $\phi$  se incrementa. O sea que  $\mathbf{n}_x d\mathcal{L} = dy$  y  $\mathbf{n}_y d\mathcal{L} = -dx$ .

## 2. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (INCOMPRESIBLE)

### 2.1. FLUJO POTENCIAL

En esta parte se van a describir brevemente los diferentes flujo de tipo potencia, cuya teoría ya se desarrollo en la Sección 1.6 anterior. Comenzaremos por los flujo básico y luego incluiremos combinariaciones variadas de ellos. El procedimiento en todos los casos será similar: Se plantearán las funciones potencial y de corriente, luego se mostrarán las soluciones para el campo de velocidades siguiendo las ecuaciones diferenciales (6) y, donde fuese el caso, se hallarán los puntos de estancamiento y los contornos representativos del flujo. Las líneas de corriente serán tangente al campo de velocidades y las líneas equipotenciales serán perpendiculares a aquellas.

#### 2.1.1. Flujo Uniforme

Para el *flujo uniforme* horizontal (izquierda-derecha) las funciones potencial y de corriente son

$$\phi = U_o x \quad \psi = U_o y \quad (1)$$

respectivamente. El campo de velocidad que de ello se deriva es en coordenadas cartesianas

$$v_x = U_o \quad v_y = 0 \quad (2)$$

Las líneas de corriente son horizontales, mientras que las de potencial son verticales.

Par el flujo uniforme vertical (abajo-arriba) las funciones potencial y de corriente son

$$\phi = V_o y \quad \psi = -V_o x \quad (3)$$

respectivamente. El campo de velocidad que de ello se deriva es en coordenadas cartesianas

$$v_x = 0 \quad v_y = V_o \quad (4)$$

donde se observa que el signo negativo en  $\psi$  es necesario para que el flujo sea ascendente. El caso opuesto en ambas funciones es descendente. Cambiar sólo el signo en  $\psi$  produce una contradicción. Las líneas de corriente son verticales, mientras que las de potencial son horizontales.

#### 2.1.2. Fuente y Sumidero

Para el flujo con una *fente* con intensidad  $\Lambda$  ubicada en el origen del sistema de coordenadas las funciones potencial y de corriente son

$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r \quad \psi = \frac{\Lambda}{2\pi} \theta \quad (5)$$

respectivamente. El campo de velocidad que de ello se deriva es en coordenadas polares

$$v_r = \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{1}{r} \quad v_\theta = 0 \quad (6)$$

El flujo con *sumidero* es similar, pero en las ecuaciones hay que colocar  $-\Lambda$ .

La intensidad del flujo  $\Lambda$  se divide entre  $2\pi$  para hacer que el flujo a través de cualquier curva cerrada que contenga el origen sea justamente la intensidad (ver Sección I.1.2.(5) con el área por unidad de longitud en  $z$ ). Si no contiene al origen el flujo es nulo, lo que le da a este flujo el carácter solenoidal que se mencionó

en la ecuación 1.6.(1). Las líneas de corriente son radiales, mientras que las líneas potenciales son círculos concéntricos con el origen.

### 2.1.3. Vórtice Simple

Para el flujo con un vórtice simple con intensidad  $\Gamma$  ubicada en el origen del sistema de coordenadas las funciones potencial y de corriente son

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (7)$$

respectivamente. El campo de velocidad que de ello se deriva es en coordenadas polares

$$v_r = 0 \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (8)$$

El vórtice positivo es el sentido anti-horario. El vórtice negativo (con  $-\Gamma$  en las ecuaciones de arriba) es horario.

La intensidad del flujo  $\Gamma$  se divide entre  $2\pi$  para hacer que la circulación del flujo a lo largo de cualquier curva cerrada que contenga el origen sea justamente la intensidad (ver Sección I.1.2.(9)). Si no contiene el origen la circulación es nula, lo que le da a este flujo el carácter irrotacional que se mencionó en la ecuación 1.6.(4). Este flujo, por supuesto, también es solenoidal por definición. Las líneas de corriente son círculos concéntricos, mientras que las líneas potenciales son radiales.

### 2.1.4. Nariz de Proyectoil

Todos los flujos potenciales se pueden superponer directamente, debido a que el operador diferencial laplaciano que define el flujo potencial es lineal completamente. La superposición del flujo uniforme (izquierda-derecha) con una fuente (centrada en el origen) origina un contorno interesante de analizar que denominaremos “Nariz de Proyectoil” por la forma que tiene. Las funciones potencial y de corriente de esta combinación dan

$$\phi = U_o r \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r \quad \psi = U_o r \sin \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} \theta \quad (9)$$

lo que origina el siguiente campo de velocidades

$$v_r = U_o \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{1}{r} \quad v_\theta = -U_o \sin \theta \quad (10)$$

correspondientemente.

El extremo de la nariz que enfrenta el flujo a la izquierda del origen es un punto de estancamiento, por lo que lo obtenemos anulando las componentes de la velocidad. La componente  $v_\theta = 0$  me da dos soluciones  $0$  y  $\pi$  para  $\theta_s$  (identificamos con el subíndice  $s$  a las cantidades del punto de estancamiento). La componente  $v_r = 0$  da también dos soluciones correspondientes  $r_s = \mp \Lambda/(2\pi U_o)$ , que en cualquier caso se refieren al mismo punto. Si evaluamos la función de corriente para este punto da el valor de  $\psi_s = \Lambda/2$ . Ahora siguiendo este valor constante con la ecuación de  $\psi$  en (9.b), encontramos la ecuación del contorno que comienza en el punto de estancamiento y que es simétrico respecto al eje  $x$ . Esta ecuación paramétrica respecto a  $\theta$  es

$$U_o r \sin \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} \theta = \frac{\Lambda}{2} \quad \implies \quad r = \frac{\Lambda}{2 U_o \sin \theta} (1 - \theta/\pi) \quad (11)$$

que tiene las características del frente de un proyectil. El flujo exterior a este contorno me da una idea de como se comporta el flujo alrededor de la la nariz de un proyectil, lo que le da el nombre. El semi-ancho de esta región en el límite cuando  $x \rightarrow \infty$  es  $y_{max} = \Lambda/(2 U_o)$ , que se deduce si pasamos el seno al otro miembro en (11.b), teniendo el valor de  $y$  y luego aplicando el límite. Vemos también que el mismo resultado se puede obtener del límite  $\theta \rightarrow \pi$  de la ecuación (11.b) y aplicando L'Hopital.

### 2.1.5. Dipolo

El *dipolo* de intensidad  $\Lambda$  consiste en una fuente de intensidad  $\Lambda$  ubicada sobre el eje de las  $x$  a una distancia  $a$  a la izquierda del origen ( $x = -a$ ) y un sumidero de intensidad  $-\Lambda$  ubicado a una distancia  $a$  a la dercha del origen ( $x = a$ ). Con estas características las funciones potencial y de corriente son

$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2) \quad \psi = \frac{\Lambda}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \quad (12)$$

donde las variables auxiliares  $r_1$  y  $r_2$  son los módulos de los radios vectores con origen en la fuente y el sumidero, respectivamente. Los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos respectivos de estos radios vectores con respecto al eje de la abscisas. La aplicación de la Regla del Coseno y la Regla del Seno

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r^2 + a^2 + 2ra \cos \theta} & \theta_1 &= \arcsen[(r/r_1) \sen \theta] \\ r_2 &= \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta} & \theta_2 &= \arcsen[(r/r_2) \sen \theta] \end{aligned} \quad (13)$$

permiten finalmente tener planteado el problema en función de las coordenada polares  $(r, \theta)$  únicas. El campo de velocidad que de ello se deriva es en coordenadas polares

$$v_r = \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{2a(a^2 - r^2) \cos \theta}{(r^2 + a^2)^2 - (2ra \cos \theta)^2} \quad v_\theta = -\frac{\Lambda}{2\pi} \frac{2a(a^2 + r^2) \sen \theta}{(r^2 + a^2)^2 - (2ra \cos \theta)^2} \quad (14)$$

Las líneas de corrientes son líneas curvadas que salen de la fuente y llegan al sumidero. Mientras más se alejan se pierde de vista la unión entre estos dos extremos. Las línea potenciales, perpendiculares a las anteriores son ovalos cerrado excentricos alrededor de la fuente y del sumidero y mientras más se alejan se pierde de vista el cierre de las curvas. Los óvalos están más cercanos entre sí cerca del origen.

### 2.1.6. Ovalo de Rankine

Un flujo interesante de analizar por el contorno que genera el la superposición del flujo del dipolo (centrado) y un flujo uniforme (izquierda-derecha). Es simple hallar sus características simplemente sumando los efectos. De manera que las funciones potencial y de corriente quedan como

$$\phi = U_o r \cos \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2) \quad \psi = U_o r \sen \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \quad (15)$$

El campo de velocidades resulta ser

$$\begin{aligned} v_r &= \cos \theta \left[ U_o + \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{2a(a^2 - r^2)}{(r^2 + a^2)^2 - (2ra \cos \theta)^2} \right] & v_\theta &= -\sen \theta \left[ U_o + \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{2a(a^2 + r^2)}{(r^2 + a^2)^2 - (2ra \cos \theta)^2} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Para obtner el punto de estancamiento hacemos  $v_\theta = 0$  con lo cual obtenemos la solución  $\theta_s = 0, \pm\pi$ . Haciendo  $v_r = 0$  se obtiene la solución para el radio  $r_s = \pm\sqrt{a^2 + \Lambda a/(\pi U_o)}$ , que corresponde a dos puntos de estancamiento a saber uno delante y otro atrás, con valor de  $\psi_s = 0$ . Las líneas de corriente en el flujo esterno asemejan al flujo alrededor de un cuerpo ovalado sumergido y en el flujo interno se asemeja al flujo dentro de un burbuja ovalada.

### 2.1.7. Doblete

Cuando en el dipolo acercamos hasta el límite la fuente y el sumidero, estos no se anulan entre sí, si hacemos crecer  $\lambda$  indefinidamente. En el límite  $a \rightarrow 0$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$  se obtiene la cantidad  $a\Lambda/\pi \rightarrow \chi$ . En estas circunstancia las funciones potencial y de corriente tienden a

$$\phi = \frac{\chi \cos \theta}{r} \quad \psi = -\frac{\chi \sen \theta}{r} \quad (17)$$

El campo de velocidades resulta ser

$$v_r = -\frac{\chi \cos \theta}{r^2} \quad v_\theta = -\frac{\chi \sin \theta}{r^2} \quad (18)$$

y se dice que el valor de  $\chi$  es la intensidad del *doblete*. Este tipo no tiene mucha utilidad excepto que lo sometamos a un flujo uniforme como haremos ahora.

### 2.1.8. Flujo Alrededor de un Cilindro

Cuando al flujo anterior lo sometemos a un flujo uniforme es equivalente aplicarle al óvalo de Rankine el límite  $a \rightarrow 0$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$  y  $a\Lambda/\pi \rightarrow \chi$ . Las funciones potencial y de corriente así superpuestas son

$$\phi = \left( U_o r + \frac{\chi}{r} \right) \cos \theta \quad \psi = \left( U_o r - \frac{\chi}{r} \right) \sin \theta \quad (19)$$

El campo de velocidades resulta ser

$$v_r = \left( U_o - \frac{\chi}{r^2} \right) \cos \theta \quad v_\theta = -\left( U_o - \frac{\chi}{r^2} \right) \sin \theta \quad (20)$$

Las condiciones de estancamiento arrojan las posiciones de los puntos de estancamiento en  $\theta_s = 0, \pm\pi$  y  $r_s = \sqrt{\chi/U_o}$ . El flujo externo simula el flujo alrededor de un cilindro.

### 2.1.9. Flujo Alrededor de un Cilindro Giratorio

Si adicionamos un vórtice horario con intensidad  $\Gamma$  al flujo alrededor de un cilindro, tenemos las siguientes funciones potencial y de corriente

$$\phi = \left( U_o r + \frac{\chi}{r} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad \psi = \left( U_o r - \frac{\chi}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (21)$$

El campo de velocidades resulta ser modificado sólo en  $v_\theta$

$$v_r = \left( U_o - \frac{\chi}{r^2} \right) \cos \theta \quad v_\theta = -\left( U_o - \frac{\chi}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (22)$$

Esto origina que los puntos de estancamiento, estando anteriormente en el centro se desvian hacia abajo con el mismo radio. Esto es

$$r_s = \sqrt{\frac{\chi}{U_o}} \quad \theta_s = \arcsen \left( \frac{-\Gamma}{4\pi\sqrt{\chi U_o}} \right) \quad (23)$$

Calculando las componentes verticales de las fuerzas de las presiones obtenidas con la ecuación de Bernoulli (despreciando los cambios de energía potencial, sin la intervención de  $v_r$  porque es nula)

$$P = P_o + \rho(U_o^2 - v_\theta^2)/2 \quad (24)$$

Realizando a posteriori la integración a todo el alrededor del cilindro por la parte exterior, obtenemos un resultado fascinante por lo simple

$$F_L = - \int_0^{2\pi} P \sin \theta \sqrt{\chi/U_o} d\theta = \rho U_o \Gamma \quad (25)$$

para la fuerza de sustentación  $F_L$ . Resultado conocido como el *Efecto Magnus*.



### 2.1.10. Potencial Complejo

Una forma más “compleja” de representar el flujo potencial, en el plano complejo  $(x, y)$ , es mediante el potencial complejo  $(\phi, \psi)$  y la velocidad compleja  $w$  definidos como

$$z = x + iy \quad \Phi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad w(z) = \frac{d\Phi}{dz} = u - iv \quad (26)$$

donde  $v_x = u(x, y)$  y  $v_y = v(x, y)$  son las componentes de la velocidad en el plano cartesiano  $(x, y)$ .

Un ejemplo representativo de como se aplica esta nueva descripción del flujo lo muestra la solución del problema de la Sección 2.2.9. No obstante lo vamos a resolver de manera más general haciendo el flujo uniforme de velocidad  $U_o$  incidir con un ángulo  $\alpha$  genérico respecto a la horizontal y el cilindro de radio  $R = \sqrt{\chi/U_o}$  no estando centrado en el origen del sistema de coordenadas, sino que está en una posición genérica indicada en el plano complejo como  $z_o$ . Esto da el siguiente potencial complejo

$$\Phi(z) = U_o \left[ (z - z_o) e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{(z - z_o)} e^{i\alpha} \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left[ \frac{(z - z_o)}{R} \right] \quad (27)$$

y la siguiente velocidad compleja

$$w(z) = U_o \left[ e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{(z - z_o)^2} e^{i\alpha} \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{1}{(z - z_o)} \right] \quad (28)$$

Los puntos de estancamientos ya no estarían en los ángulos  $-\theta_s$  y  $\pi + \theta_s$ , sino en los ángulos  $\alpha - \theta_s$  y  $\alpha + \pi - \theta_s$ , respecto a la horizontal (positiva) en el centro del cilindro (fíjense que hemos trasladado el signo negativo fuera del símbolo de  $\theta_s$ ), donde

$$\theta_s = \arcsen \left[ \frac{\Gamma}{4\pi U_o R} \right] \quad R = \left( \frac{\chi}{U_o} \right)^{1/2} \quad (29)$$

La fuerza de sustentación seguiría siendo

$$F_L = \rho U_o \Gamma \quad (30)$$

pero orientada ahora en la dirección perpendicular al flujo uniforme y del lado opuesto a los puntos de estancamiento, es decir en un ángulo  $\alpha + \pi/2$  respecto a la horizontal (positiva).

## 2.2. FLUJO ALREDEDOR DE UN PERFIL AERODINAMICO

### 2.2.1. Transformación de Joukowski

Por ser las líneas equipotenciales y las líneas de corriente perpendiculares entre sí, cualquier transformación “conforme” (que deja los ángulos invariantes) deja de igual forma esta perpendicularidad y se obtiene, por tanto, otro flujo potencial equivalente al primero, conservando inclusive las fuerzas globales obtenidas. Un caso emblemático es la *transformación de Joukowski* consistente en una traslación + una inversión de la forma

$$\zeta = z + \frac{c^2}{z} \quad (1)$$

donde el parámetro  $c \in \mathbb{C}$  deforma el plano complejo de forma diferente depende de su valor. Veamos ejemplos de esto para el flujo descrito en la Sección 2.1.10 alrededor de un cilindro que gira y está centrado ( $x_o = 0$ ,  $y_o = 0$ ):

Cuando  $c = a < R$  ( $a$  positivo) el círculo de radio  $R$  se deforma en una elipse de semi-ejes  $R - c^2/R$  y  $R + c^2/R$ , estando el semi-eje mayor en el eje  $x$ . En flujo alrededor sigue igualmente inclinado un ángulo  $\alpha$ .

Cuando  $c = ib$  ( $b < R$  positivo) el círculo se deforma en una elipse de semi-ejes igual que en el caso anterior pero con el semi-eje mayor en el eje  $y$ .

Cuando  $c = R$  la elipse del primer caso colapsa en una placa plana alineada en el eje  $x$  de longitud total igual a  $4R$  y centrada en el origen. Cuando  $c = iR$  la elipse del segundo caso colapsa en una placa plana, pero ahora alineada y centrada en el eje  $y$  y de igual longitud.

### 2.2.2. Perfil de Joukowski

Los *perfiles de Joukowski* se general de aplicar la transformación del mismo nombre a partir del flujo alrededor de un cilindro que gira. Veamos algunos ejemplos:

Cuando  $c = a < R$  ( $a$  positivo), pero el círculo está ahora descentrado en  $x_o < 0$  ( $y_o = 0$ ), entonces la elipse que se origina en el caso centrado se deforma de tal manera que origina una nariz redondeada del lado izquierdo y una cola apuntada en el lado izquierdo. Se forma así un perfil simétrico de longitud  $l \approx 4c$  (que en el ámbito aerodinámico se le denomina “cuerda”) y espesor global máximo de  $t = 3\sqrt{3}|x_o|$ .

Cuando  $c = R$ , pero el círculo está ahora descentrado en  $y_o > 0$  ( $x_o = 0$ ), entonces la placa plana que se origina en el caso centrado se deforma de tal manera que se comba en el centro formando un arco de altura  $h = 2y_o$ .

Cuando combinamos los dos efectos anteriores  $c < R$ ,  $x_o < 0$  y  $y_o > 0$ , entonces formamos los perfiles de Joukowski. Para que el flujo alrededor de estos perfiles sean aproximadamente reales se debe satisfacer que  $\theta_s = \alpha$ , lo que implica que el flujo en la cola da un punto de estancamiento justo allí. Esta imposición se llama la *condición de Kutta*. Por ello, los perfiles de Joukowski que la cumplen se denominan *perfiles de Kutta-Joukowski*.

### 2.2.3. Fuerzas Sobre un Perfil

Las fuerzas que se originan sobre un perfil son la de sustentación  $F_L$ , que actúa perpendicular al flujo uniforme, y la fuerza de arrastre  $F_D$  que actúa en la misma dirección del flujo uniforme. El ángulo  $\alpha$  descrito en el problema de la Sección 2.1.10 y que se ha conservado bajo la transformación de Joukowski viene a ser lo que en aerodinámica se denomina “ángulo de ataque”. Viene a ser el ángulo formado entre la “cuerda” (distancia o segmento entre la nariz y la cola) y el flujo uniforme.

En el ámbito de la aerodinámica a la “nariz” se le denomina *borde de ataque* y a la “cola” se le denomina el *borde de salida*. La superficie más convexa del perfil, entre el borde de entrada y de salida, se le denomina *extradós*. A la superficie menos convexa o cóncava se le denomina *intradós*.

La condición de Kutta obliga a una partícula de fluido, entrando por el borde de ataque, recorrer más distancia por el extradós que por el intradós, para alcanzar el borde de salida al mismo tiempo. Esto implica que el extradós las velocidades son mayores que en el intradós, lo que produce, siguiendo la ecuación de Bernoulli, que las presiones sean menores en el extradós que en el intradós. El efecto final es que se produce una fuerza de sustentación.

La fuerza de arrastre tiene en cierta medida algún componente del efecto Bernoulli que mencionamos antes, pero para ángulos de ataque grandes, por la configuración geométrica del flujo alrededor del perfil y la descomposición de fuerzas sustentación-Arrastre que es apriori convencional. No obstante, para ángulos de ataque pequeños el efecto más predominante es el de la viscosidad. La condición de no deslizamiento del fluido en contacto con la pared sólida hace que en la cercanía se produzcan gradientes de velocidad que con la viscosidad generan esfuerzos cortantes que se oponen al movimiento del fluido y por acción-reacción producen el arrastre.

Una forma de especificar las fuerzas de sustentación o de arrastre es mediante el análisis dimensional. Una fuerza por unidad de área  $F/A$  (Presión, esfuerzo, etc.) tiene las mismas dimensiones que la energía cinética específica del fluido por unidad de volumen ( $\rho U^2/2$ ). Su división producen lo que se denomina números adimensionales de Euler. Por ello se definen los siguientes coeficiente de sustentación y de arrastre

$$C_L = \frac{F_L/A}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad C_D = \frac{F_D/A}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (2)$$

Para los cuerpos sumergidos se ha convenido usar el área proyectada en la dirección paralela del flujo no perturbado (en el infinito con velocidad  $U_\infty$ ) o proyectada perpendicular a éste. En los perfiles aerodinámicos se ha convenido usar la misma área para los dos coeficiente anteriores y calculada como la  $\mathcal{A}$  = cuerda  $\times$  envergadura, siendo esta última cantidad la longitud total del ala en dirección perpendicular al perfil. Como nota curiosa se ha convenido para otros cuerpos sumergido usar el área proyectada que es perpendicular al flujo no perturbado (un cilindro y una esfera del mismo radio tienen la misma área proyectada, en un caso, o un cilindro y un rectángulo de lados dos radios y la altura, en otro caso, dependiendo de la dirección del flujo)

### 2.3. FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE

#### 2.3.1. Propagación y Número de Froude

La propagación de una perturbación en la superficie libre de un fluido en reposo se puede visualizar como una profundidad  $y$  del lado izquierdo de la perturbación con el fluido en reposo con velocidad  $U = 0$  y una profundidad  $y + \delta y$  del lado derecho de la perturbación con el fluido moviéndose hacia la izquierda con velocidad  $\delta U$ . La perturbación se tendría que mover hacia la izquierda con una velocidad  $c$ . Colocando un volumen de control justo alrededor de la perturbación y moviéndose con ésta se observaría del lado izquierdo una velocidad relativa  $U = c$  con el fluido en reposo se acerca a la perturbación hacia la derecha. del lado derecho del volumen de control observaríamos una velocidad relativa  $U = c - \delta U$  con la que el fluido ya perturbado se aleja de la perturbación.

Con esta descripción vamos a aplicar los principios de conservación comenzando con el de la masa. Para dicho volumen de control descrito no hay acumulación de masa sino sólo que el flujo que entra es igual al que sale. Esto es,

$$\rho c y, b = \rho (c - \delta U) (y + \delta y) b \quad (1)$$

siendo  $b$  el ancho perpendicular a las velocidades. De aquí resulta que la perturbación de la velocidad es

$$\delta U = c \frac{\delta y}{y + \delta y} \quad (2)$$

lo cual es muy parecido a la propagación de una onda sonora en un fluido compresible como se verá más adelante. El principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal da que la suma de las fuerzas de presión es igual al flujo que sale menos el que entra porque no hay tampoco acumulación de cantidad de movimiento. Esto es,

$$\frac{1}{2} \rho g y^2 b - \frac{1}{2} \rho g (y + \delta y)^2 b = \rho c y b [(c - \delta U) - c] \quad (3)$$

o reordenando

$$g \left( 1 + \frac{\frac{1}{2}\delta y}{y} \right) \delta y = c \delta U \quad (4)$$

Eliminando ahora  $\delta U$  substituyendo (2), queda

$$c^2 = g y \left( 1 + \frac{\delta y}{y} \right) \left( 1 + \frac{\frac{1}{2}\delta y}{y} \right) \quad (5)$$

El límite para perturbaciones pequeñas cuando  $\delta y \rightarrow 0$  es

$$c^2 = g y \quad c = \sqrt{g y} \quad (6)$$

El número de Froude se define como aquel número adimensional que divide la velocidad del flujo entre la velocidad característica (6) de propagación de una perturbación. Esto es,

$$Fr = \frac{U}{c} = \frac{U}{\sqrt{g y}} \quad (7)$$

Es el número adimensional que caracteriza el flujo en un punto de un canal. De acuerdo a su valor se denomina de distintas formas. Si  $Fr < 1$ , se dice que el flujo es sub-crítico. Si  $Fr > 1$ , se dice que el flujo es super-crítico. Si  $Fr = 1$ , se dice que el flujo es exactamente crítico. La criticidad del flujo, como se verá más adelante, determina el comportamiento del mismo. De igual manera, se corregirá su definición por la que sigue

$$Fr = \frac{U}{c} = \frac{Q/A}{\sqrt{gA/b}} \quad c = \sqrt{gA/b} \quad (8)$$

donde  $Q$  es el caudal volumétrico y donde  $b$  no es necesariamente el ancho del canal, como a simple vista se pudiese pensar.

### 2.3.2. Ecuación de Chézy-Manning

La ecuación de Bernoulli (dividida entre  $\rho g$ ), para un tubo de corriente establecida con las velocidades medias (sin factor de corrección) y con la presión ( $P = \rho g y$ ) y cota  $z$  de la energía potencial  $\rho g z$  en el fondo de un canal, incluyendo las pérdidas por fricción viscosa  $\rho g h_f$  es la siguiente

$$z_1 + y_1 + \frac{U_1^2}{2g} = z_1 + y_2 + \frac{U_2^2}{2g} + h_f \quad (9)$$

entre un punto de entrada 1 y otro aguas abajo 2. El término  $h_f$  se coloca en el miembro de la derecha para indicar que existe una pérdida de energía del punto 1 al 2, debido a que la fuerza viscosa se opone siempre al movimiento realizando un trabajo negativo y por ende pérdida de energía. Esta pérdida de energía cuando se coloca de forma específica por unidad de longitud horizontal  $x$  se expresa como

$$\frac{dh_f}{dx} = S \quad h_f = \int_0^L S dx \quad (10)$$

donde la fricción o pérdida específica se correlaciona con la ecuación de Chézy utilizando el coeficiente de fricción  $C$  de Manning

$$S = \frac{1}{R_h} \left( \frac{U}{C} \right)^2 \quad \text{Chézy} \quad C = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{g Re} = \sqrt{\frac{\rho g}{3\mu} R_h U} \quad (\text{Laminar}) \quad (11)$$

$$C = \alpha \frac{R_h^{1/6}}{n} \quad \text{Manning} \quad (\text{Turbulento})$$

donde  $U = Q/A$  es la velocidad media y la relación hidráulica  $R_h$  se define como el área de flujo  $A$  entre el perímetro  $\mathcal{S}$  mojado (porción de pared sólida en contacto con el fluido y donde se establece la condición de no deslizamiento. La superficie libre no cuenta) y el factor  $\alpha$  corrige la inconsistencia cuando se utiliza un sistema de unidades inconsistente. Esto es,

$$R_h = \frac{A}{\mathcal{S}} \quad \alpha = \begin{cases} 1 & \text{S.I. unidades} \\ 1.486 & \text{B.G. unidades} \end{cases} \quad (12)$$

El parámetro  $n$  involucra la rugosidad del fondo del canal por eso a veces se le menciona como la *rugosidad de Manning*, que va desde valores de 0.01 para canales de vidrio hasta valores de 0.15 en inundaciones con árboles. Es de hacer notar que la correlación de Manning para el coeficiente de fricción  $C$  es exclusivamente para régimen turbulento. La expresión de dicho factor para régimen laminar se ha hecho bajo la hipótesis de canal infinitamente ancho ( $R_h = y$ ) donde  $\tau_w = \rho g S R_h = 3\mu U/R_h$ , siendo  $Re = \rho U D/\mu$  ( $D = 4R_h$ ). El coeficiente  $C$  no es completamente adimensional como debería sino que involucra las dimensiones de  $\sqrt{g}$ .

Normalmente es conveniente expresar la ecuación (9) de forma diferente definiendo la *energía específica* denotada con la  $E$  de la siguiente manera

$$z_1 + E_1 = z_2 + E_2 + h_f \quad E = y + \frac{U^2}{2g} \quad (13)$$

teniendo en cuenta que la pendiente del canal  $S_o$  se puede calcular puntualmente como

$$S_o = -\frac{dz}{dx} \quad (14)$$

entonces la ecuación algebraica (13) se puede expresar de forma diferencial y sencilla como

$$\frac{dE}{dx} = S_o - S \quad (15)$$

lo que dictamina que en un canal con  $E=\text{constante}$ , entonces  $S = S_o$ . Esta fué la forma con la que Chézy encontró su correlación experimentando con canales con característica de flujo ( $y, U$ ) y pendiente ( $S_o$ ) constantes. La energía específica, cuando el flujo es subcrítico, tiende a la profundidad  $y$  para valores de  $E$  grandes ( $E \rightarrow \infty, y \rightarrow E$ ). Por el contrario, cuando el flujo es supercrítico, la profundidad  $y$  tiende a cero para valores de  $E$  grandes ( $E \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$ ).

Cuando la pendiente del canal es constante se puede especificar como  $S_o = \tan\theta = \Delta z_{100}\% = \Delta z_{1000}/1000$ , es decir como la tangente del ángulo que forma el fondo del canal con la horizontal, porcentualmente por la disminución de la cota cada 100 unidades de longitud o por la disminución de la cota cada 1000 unidades de longitud. Toda estas cantidades son adimensionales.

Una comparación de la ecuación de Chézy en un canal uniforme con la ecuación de Darcy-Weisbach para  $h_f$  en un conducto horizontal da los siguientes resultados

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = S L \quad \tau_w = \frac{f}{8} \rho U^2 = \rho g S R_h \quad D = 4 R_h \quad C = \sqrt{8g/f} \quad (16)$$

siendo  $D$  el diámetro hidráulico, que en el caso de la tubería circular coincide con su diámetro de igual manera.

Metiendo la correlación de Manning dentro de la de Chézy se obtiene la siguiente expresión final donde se ha preferido usar el caudal volumétrico  $Q$  en lugar de la velocidad

$$S = \frac{1}{R_h^{4/3}} \left( \frac{U n}{\alpha} \right)^2 = \frac{\$^{4/3}}{\mathcal{A}^{10/3}} \left( \frac{Q n}{\alpha} \right)^2 \quad Q = U \mathcal{A} = C \mathcal{A} (R_h S)^{1/2} = \frac{\alpha}{n} \frac{\mathcal{A}^{5/3} S^{1/2}}{\$^{2/3}} \quad (17)$$

### 2.3.3. Flujo Normal y Crítico

El flujo normal ocurre cuando el canal es uniforme, siendo constante  $y$  y  $S_o$  por lo que profundidad en este caso se haya simplemente colocando en la ecuación de Chézy  $S = S_o$  y calculando la profundidad denotada  $y_n$ . En otras palabra, introduciendo  $S = S_o$  y poniendo que el área  $\mathcal{A}(y)$  y el perímetro  $\$(y)$  ambas son funciones de  $y$ , entonces resolviendo la ecuación resultante obtenemos  $y_n$ .

El flujo crítico se obtiene cuando el número de Froude en la unidad o dicho de otra manera para ser más general, cuando se satisface la siguiente relación

$$\frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{Q=\text{cte}} = 0 \quad (18)$$

lo que da que la condición crítica es la condición de energía específica  $E$  mínima. Desarrollando (16), teniendo en cuenta (13.b), resulta que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( y + \frac{Q^2}{2g\mathcal{A}^2} \right) = 1 - \frac{Q^2 \mathcal{A}^{-3}}{g} \frac{d\mathcal{A}}{dy} = 0 \quad (19)$$

que es equivalente a decir

$$Fr = \frac{U}{c} = \frac{Q/\mathcal{A}}{\sqrt{g\mathcal{A}/b}} = 1 \quad b = \frac{d\mathcal{A}}{dy} \quad c = \sqrt{g\mathcal{A}/b} \quad (20)$$

En esta ecuación una vez dado el caudal y la forma del área la única incógnita es  $y$ , que al ser resuelta da el valor de  $y_c$ . El valor de  $b$  coincide con el ancho en la superficie libre en los canales rectangulares, triangulares y trapezoidales, pero no siempre es así.

### 2.3.4. Flujo Sobre un Montículo

Un montículo de altura  $\Delta h$  en el fondo del canal produce los siguientes efectos. Planteando las ecuaciones de conservación de masa y Bernoulli, resulta

$$U_1 y_1 = U_2 y_2 \quad \frac{U_1^2}{2g} + y_1 = \frac{U_2^2}{2g} + y_2 + \Delta h \quad (21)$$

Eliminando  $U_2$  entre estas dos ecuaciones da una ecuación polinómica de tercer grado para la profundidad  $y_2$  justo sobre el montículo

$$y_2^3 - E_2 y_2^2 + \frac{U_1^2 y_1^2}{2g} = 0 \quad E_2 = \frac{U_1^2}{2g} + y_1 - \Delta h \quad (22)$$

Definiendo las siguientes variables auxiliares

$$R = \frac{27 c - 2 E_2^3}{54} \quad T = \frac{E_2^2}{9} \quad c = \frac{U_1^2 y_1^2}{2g} \quad \Delta = R^2 - T^3 \quad (23)$$

Entonces las soluciones de (22) vienen dadas por (ver Sección E.1.1.2)

$$\begin{aligned} y_2^{(1)} &= w_1 + w_2 + E_2/3 \\ y_2^{(2)} &= \beta w_1 + \bar{\beta} w_2 + E_2/3 \\ y_2^{(3)} &= \bar{\beta} w_1 + \beta w_2 + E_2/3 \end{aligned} \quad (24)$$

con

$$w_1 = \sqrt[3]{-R + \sqrt{\Delta}} \quad w_2 = \sqrt[3]{-R - \sqrt{\Delta}} \quad \beta = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad (25)$$

Si una de las soluciones es negativa se descarta por ser físicamente imposible. La menor de las soluciones es para una entrada sub-crítica y la mayor para una entrada super-crítica.

### 2.3.5. Resalto Hidráulico

Las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento lineal, entre un punto 1 antes del resalto hidráulico y un punto 2 después del resalto hidráulico, son

$$U_1 y_1 = U_2 y_2 \quad \frac{1}{2} \rho g (y_1^2 - y_2^2) = \rho U_1 y_1 (U_2 - U_1) \quad (26)$$

Eliminando  $U_2$  de ambas ecuaciones, finalmente resulta

$$U_1^2 = \frac{1}{2} g y_1 \eta (\eta + 1) \quad \eta = \frac{y_2}{y_1} \quad (27)$$

Introduciendo el número de Froude quedan la solución y su respectiva función inversa

$$\mathcal{F}r_1^2 = \frac{1}{2} \eta (\eta + 1) \quad \eta = \frac{1}{2} [(1 + 8 \mathcal{F}r_1^2)^{1/2} - 1] \quad (28)$$

La soluciones recíprocas son igualmente válidas

$$\mathcal{F}r_2^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\eta} + 1 \right) \quad \frac{1}{\eta} = \frac{1}{2} [(1 + 8 \mathcal{F}r_2^2)^{1/2} - 1] \quad (29)$$

La pérdidas debidas al resalto hidráulico se estiman con la expresión

$$h_f = E_1 - E_2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2} \quad \dot{W} = \rho g h_f Q \quad (30)$$

donde  $\dot{W}$  es la potencia consumida en el proceso irreversible dentro del resalto hidráulico.

### 2.3.6. Canales Graduales

La conservación de la masa ( $Q = U\mathcal{A} = \text{constante}$ ) da como resultado

$$\frac{dQ}{dx} = \mathcal{A} \frac{dU}{dx} + U \frac{d\mathcal{A}}{dx} \quad (31)$$

La derivada de la energía específica da

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( y + \frac{Q^2}{2g\mathcal{A}^2} \right) = \frac{dy}{dx} - \frac{Q}{g} \frac{1}{\mathcal{A}^3} \frac{d\mathcal{A}}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{Q}{g} \frac{1}{\mathcal{A}^3} \frac{d\mathcal{A}}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{dy}{dx} \left( 1 - \frac{U^2}{g\mathcal{A}/b} \right) = \frac{dy}{dx} \left( 1 - Fr^2 \right) \end{aligned} \quad (32)$$

Despejando la variable de interés y substituyendo (15) se obtienen finalmente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S}{1 - Fr^2} \quad (33)$$

que permite obtener las variaciones graduales de  $y$  en función de la pendiente  $S_o$ , las pérdidas  $S$  y el número de Froude  $Fr$ .

### 2.3.7. Modelo Bidimensional

Un canal bidimensional se presenta cuando la profundidad  $h$  y el campo de velocidades medias en la profundidad es bidimensional  $\{\mathbf{U}\}_{xy} = \{U_x, U_y\}$  y dependiente de la posición  $(x, y)$ . La ecuación diferencial que aplica en este caso se puede expresar como una aceleración bidimensional  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -g \nabla h + g(\mathbf{S}_o - \mathbf{S}) \quad \mathbf{S} = \frac{1}{C^2} \frac{1}{R_h} \|\mathbf{U}\| \mathbf{U} = \left( \frac{n}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{R_h^{4/3}} \|\mathbf{U}\| \mathbf{U} \quad (34)$$

con su respectivo términos transitorio y convectivo, donde

$$R_h = h \quad \|\mathbf{U}\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} \quad \{\mathbf{S}_o\}_{xy} = \{S_{ox}, S_{oy}\} \quad \begin{aligned} S_{ox} &= \partial z / \partial x \\ S_{oy} &= \partial z / \partial y \end{aligned} \quad (35)$$

y donde  $h$  es la profundidad del canal (y la relación hidráulica) y  $z$  es la cota del fondo del canal. La generalización de la ecuación de Chézy se ha expresado de manera que siempre se oponga al movimiento y se le ha introducido al final directamente la correlación de Manning. Si en lugar de usar  $1/6$  en la correlación de Manning usamos un exponente genérico  $\beta$  (como se verá más adelante en la Sección 2.4), entonces en lugar de  $4/3$  debe aparecer  $2\beta + 1$  en la expresión (34.b).

Igualmente se satisface la ecuación de continuidad para un fluido incompresible

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{U}) = 0 \quad (36)$$

donde  $h$  funciona como una especie de densidad del flujo. Las ecuaciones (34) y (36) se resuelven acopladas para obtener las variables incógnitas  $h$  y  $\mathbf{U}$  sometidas a las correspondientes condiciones iniciales y de contorno. Cuando el campo de velocidades  $\mathbf{U}$  es solenoidal ( $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ ) y conocido, esto permite obtener el campo de profundidades  $h$  directamente de (36), ya que se tiene que la aceleración de  $h$ ,  $dh/dt = \partial h/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla h$ , es nula.

La ecuación (34) se acostumbra mejor expresarla en su forma conservativa. Esto se logra multiplicando por  $\mathbf{U}$  la ecuación de continuidad (36) y sumándole la ecuación (34.a) multiplicada por  $h$ . De allí resulta la siguiente expresión

$$\frac{\partial h \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{U} \mathbf{U}) = -g \nabla (h^2/2) + g h (\mathbf{S}_o - \mathbf{S}) = \mathbf{Q} \quad (37)$$

que permite resolver la ecuación de manera conservativa en la variable  $\mathbf{q} = h \mathbf{U}$ , las descargas por ancho unitario, en lugar de la velocidad  $\mathbf{U}$ . Finalmente se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{q} \mathbf{U}) = \mathbf{Q} \quad (38)$$

que se resuelve en las variables dependientes  $h$  y  $\mathbf{q}$ . El término de fuente  $\mathbf{Q}$  y las demás variables derivadas de aquellas (e.g.  $\mathbf{U} = \mathbf{q}/h$ ) se asumen conocidas en el punto de partida de cualquier método numérico que se utilice y se van adaptando o corrigiendo en la medida que evolucione la solución.

## 2.4. EQUIVALENCIA ENTRE CONDUCTOS

La idea de esta parte es la extender el concepto de pérdidas que incluyan conductos abiertos y cerrados manejando fluidos incompresibles y de cualquier sección de flujo. En el caso de conductos cerrados incluir el manejo de flujos compresibles e incompresibles de igual manera, con las extensiones y observaciones que se verán adelante en la Sección 3.2.

### 2.4.1. Conductos en Régimen Laminar

**Conductos Cerrados.** Para un conducto cerrado en régimen laminar de longitud  $L$  se establece que la pérdida de presión piezométrica  $\Delta \tilde{P}_f$  (para que no exista dependencia de la inclinación del conducto) por fricción viscosa se calcula como

$$\Delta \tilde{P}_f = \rho g h_f \quad h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (1)$$

siendo  $h_f$  las pérdidas distribuidas a lo largo del conducto y donde el factor de fricción  $f$  en función del número de Reynolds  $Re_D$  se estima como

$$f = \frac{64}{Re_D} \quad Re_D = \frac{\rho U D}{\mu} \quad (2)$$

con  $D$  denotando el diámetro hidráulico que es  $D = 4R_h$ , es cuatro veces la *relación hidráulica*  $R_h = \mathcal{A}/\mathcal{S}$  (área de flujo entre perímetro mojado).

Para este tipo de flujo del tipo axisimétrico circular la fuerza motriz  $\beta$  es el gradiente de presión piezométrica constante favorable al flujo

$$\beta = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} = -\frac{\Delta \tilde{P}_f}{L} \quad (3)$$

De la ecuación de Navier-Stokes sobrevive sólo el término axial en función de la posición radial  $r \in [0, R]$ , cuya solución  $v_z = u(r)$  es

$$0 = \beta + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad u(r) = \frac{\beta}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (4)$$



La velocidad media se obtiene integrando el caudal volumétrico  $Q$  como

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{\beta R^2}{8\mu} = \frac{\beta D^2}{32\mu} = \frac{\beta R_h^2}{2\mu} = \frac{1}{2} U_{max} \quad (5)$$

lo que confirma el valor de  $f$  arriba y lo que es conocida como la ecuación de Hagen-Poiseuille.

**Conductos Abiertos.** Para los conductos abiertos en régimen laminar se hace un desarrollo similar que para los cerrados sólo que en el caso particular de canales con ancho infinito ( $b \rightarrow \infty$ ). En un recorrido  $L$  horizontal del canal las pérdidas distribuidas se establecen como

$$h_f = L S_o \quad S_o = \tan \theta \quad (6)$$

siendo  $\theta$  el ángulo que forma el fondo del canal con la horizontal.

Para este tipo de flujo plano la fuerza motriz  $\beta$  es la componente específica de la fuerza de gravitación inclinada constante favorable al flujo

$$\beta = \rho g \sin \theta \quad (7)$$

De la ecuación de Navier-Stokes sobrevive sólo el término inclinado paralelo al fondo en función de la posición  $y \in [0, h]$  perpendicular al mismo, cuya solución  $v = u(y)$  es

$$0 = \beta + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad u(y) = \frac{\beta}{\mu} y \left( h - \frac{y}{2} \right) \quad (8)$$

La velocidad media paralela al flujo se obtiene integrando el caudal volumétrico  $Q$  como

$$\frac{Q}{b} = \bar{U} h = U Y = \frac{\beta h^3}{3\mu} = \frac{\rho g S_o Y^3 \cos^4 \theta}{3\mu} \quad \bar{U} = \frac{\beta h^2}{3\mu} = \frac{2}{3} U_{max} \quad (9)$$

con  $Y = D/4$  la profundidad vertical del canal ( $D = 4R_h$  es el diámetro hidráulico, con  $R_h = Y = h/\cos \theta$  la relación hidráulica para un canal de ancho infinito) y  $U = \bar{U} h/Y = \bar{U} \cos \theta$  la velocidad media horizontal.

De acuerdo a lo antes dicho y reordenando la expresión para la velocidad media, se obtiene que las pérdidas distribuidas por unidad de longitud horizontal es

$$\frac{h_f}{L} = S_o = f \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} \quad f = \frac{1}{\cos^4 \theta} \frac{96}{Re_D} \quad (10)$$

lo que da comparando con el caso de conducto cerrado circular la siguiente equivalencia en el régimen laminar

$$U_{canal} \approx (2/3) U_{tuberia} \quad f_{canal} \approx (3/2) f_{tuberia} \quad (11)$$

La igualdad se establece cuando se desprecia el efecto del  $\cos \theta \approx 1$ . El coeficiente 96 en (10.b) se convierte en 56 para un canal triangular simétrico de ángulo recto [Chow, 1959], por lo que el factor de 1.5 en (11.b) se reduce en 0.875.

#### 2.4.2. Conductos en Régimen Turbulento

**Conductos Cerrados.** Para conductos cerrados la expresión para pérdidas distribuidas es la ecuación de Darcy-Weisbach

$$\Delta \tilde{P}_f = \rho g h_f \quad h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (12)$$

exactamente la misma que el caso laminar por definición. Relamente esta ecuación no es más que la definición de un número de Euler  $C_f$

$$C_f = \frac{f}{4} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad \tau_w = \frac{R}{2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} \quad (13)$$

denominado coeficiente de fricción de Fanning con  $\tau_w$  siendo el esfuerzo cortante medio en la pared del conducto (para el caso circular en equilibrio  $R$  es el radio). En la ecuación de Darcy-Weisbach el factor de fricción se estima bastante bien con la correlación de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{a}{Re_D \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon/D}{b} \right) \quad \begin{matrix} a = 2.52 \\ b = 3.71 \end{matrix} \quad (14)$$

donde el valor  $\varepsilon = k_s$  es la rugosidad equivalente a la Nikuradse. Esta ecuación está representada en lo que se conoce como el diagrama de Moody mostrado a continuación

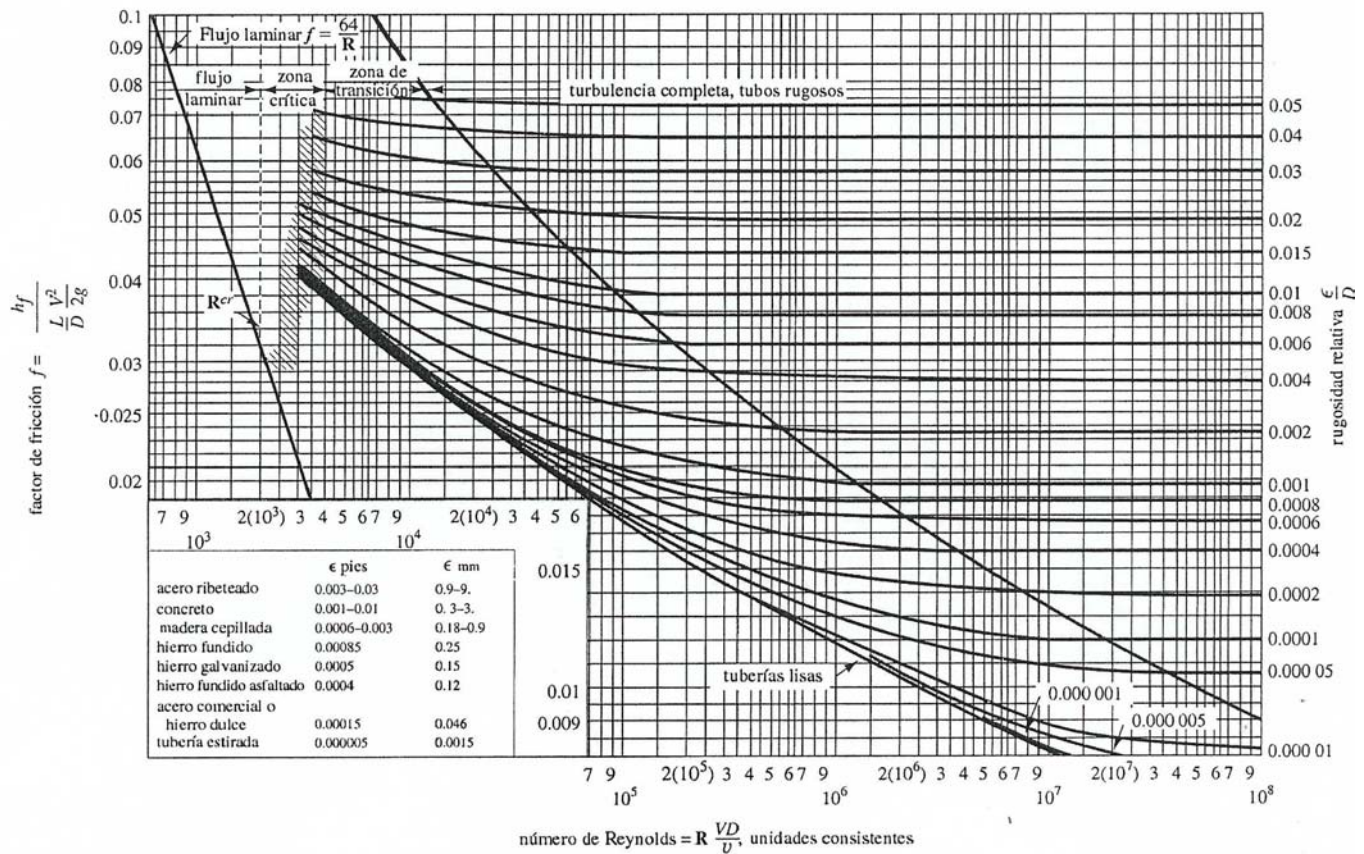


Figura 1. Diagrama de Moody.

La ecuación anterior es asintótica al valor

$$f_t = \lim_{Re_D \rightarrow \infty} f = \left[ \log \left( \frac{b}{\varepsilon/D} \right)^2 \right]^{-2} \quad (15)$$

que es el valor del factor de fricción cuando el número de Reynolds tiende al infinito.

**Conductos Abiertos.** Para los conductos abiertos uniforme en régimen turbulento es extensivo el uso de la ecuación de Chézy

$$S_o = \frac{1}{R_h} \left( \frac{U}{C} \right)^2 \quad (16)$$

acompañada de la correlación de Manning para el coeficiente de fricción  $C$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{g R_{\text{e}_D}} = \sqrt{\frac{\rho g}{3 \mu}} R_h U \quad (\text{Laminar})$$

$$C = \alpha \frac{R_h^{1/6}}{n} \quad \text{Manning} \quad (\text{Turbulento}) \quad (17)$$

donde  $n$  es una rugosidad equivalente del fondo del canal que oscila entre los valores 0.01 y 0.15 ( $\alpha = 1$  para el sistema métrico internacional = MKS). Para el régimen laminar faltaría un factor de  $\cos^2 \theta$  para que la expresión de arriba fuese idéntica a la que se analizó en el régimen laminar para canales abiertos. Existe correlación una correlación que afecta el exponente del número de Reynolds de la siguiente forma (Pavlovsky, 1925)

$$C = \alpha \frac{R_h^\beta}{n} \quad \beta = 2.5\sqrt{n} - 0.13 - 0.75\sqrt{R_h}(\sqrt{n} - 0.10) \quad (18)$$

dependiendo tanto de la rugosidad  $n$ , como de la relación hidráulica  $R_h$ . Esta expresión es ampliamente usada en lo que anteriormente era la U.R.S.S.

Una comparación entre la ecuación de Darcy-Weisbach y la ecuación de Chézy nos da la siguiente correspondencia entre el factor y el coeficiente de fricción

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = S_o L \quad \tau_w = \frac{f}{8} \rho U^2 = \rho g S_o R_h \quad D = 4 R_h \quad C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (19)$$

siendo  $D$  el diámetro hidráulico, que en el caso de la tubería circular coincide con su diámetro de igual manera. Metiendo la correlación de Manning dentro de la de Chézy se obtiene la siguiente expresión final donde se ha preferido usar el caudal volumétrico  $Q$  en lugar de la velocidad

$$S_o = \frac{1}{R_h^{4/3}} \left( \frac{U n}{\alpha} \right)^2 = \frac{\mathcal{S}^{4/3}}{\mathcal{A}^{10/3}} \left( \frac{Q n}{\alpha} \right)^2 \quad Q = U \mathcal{A} = C \mathcal{A} (R_h S_o)^{1/2} = \frac{\alpha}{n} \frac{\mathcal{A}^{5/3} \sqrt{S_o}}{\mathcal{S}^{2/3}} \quad (20)$$

En el caso general con el exponente  $\beta$  esto sería

$$S_o = \frac{1}{R_h^{2\beta+1}} \left( \frac{U n}{\alpha} \right)^2 = \frac{\mathcal{S}^{2\beta+1}}{\mathcal{A}^{2\beta+3}} \left( \frac{Q n}{\alpha} \right)^2 \quad Q = U \mathcal{A} = C \mathcal{A} (R_h S_o)^{1/2} = \frac{\alpha}{n} \frac{\mathcal{A}^{\beta+1.5} \sqrt{S_o}}{\mathcal{S}^{\beta+0.5}} \quad (21)$$

Insertando el factor  $f_t$  de la correlación de Colebrook dentro de la correlación de Manning se pueden establecer equivalencia entre ambas rugosidades como

$$C = 4\sqrt{2g} \log \left( \frac{b}{\varepsilon/D} \right) = \alpha \frac{D^{1/6}}{n \sqrt[3]{2}} \quad (22)$$

donde se hace evidente que el adimensionamiento de la rugosidad  $n/\alpha$  debe hacerse con  $D^{1/6}/\sqrt{g}$ . Esta equivalencia se ha hecho bajo la hipótesis de que la correlación de Manning, así como la de  $f_t$ , se han establecido para  $R_{\text{e}_D} \rightarrow \infty$ . Una vez hecha la mencionada equivalencia entre  $n$  y  $\varepsilon$  se puede especular sobre la validez de la ecuaciones de Darcy-Weisbach-Colebrook para canales abiertos.

### 3. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (COMPRESIBLES)

#### 3.1. FLUJO ISOENTROPICO

El flujo isoentrópico (entropía constante) debe ser adiabático y reversible. Adiabático es que el sistema abierto o cerrado no percibe (recibe o cede) calor de ninguna fuente. Esto se logra haciendo pasar el fluido por el sistema lo más breve posible o colocando aislamientos para evitar la transferencia de calor. Reversible es que todos los trabajos realizados por las fuerzas presentes son todos conservativos. Esto se logra obviando o despreciando las fuerzas no conservativas como son las viscosas. El cambio de la entropía  $s$  se puede establecer a partir del equilibrio termodinámico diferencial dado por la ecuación

$$Tds = de + Pdv = dh - vdP \quad h = e + pv \quad v = 1/\rho \quad (1)$$

con  $e$  como la energía interna específica y  $h$  como la entalpía específica. Para un gas ideal la ecuación de estado y relaciones termodinámicas establecidas son

$$P = \rho RT \quad R = C_p - C_v \quad k = \frac{C_p}{C_v} \quad C_p = \frac{k}{k-1}R \quad C_v = \frac{1}{k-1}R \quad (2)$$

siendo  $R = \bar{R}/M$ , donde  $\bar{R}=8.315 \text{ J}/(\text{kmol } ^\circ\text{K})$  es la constante universal para los gases y  $M$  su correspondiente peso molecular en  $\text{kg}/\text{kmol}$ . Integrando la ecuación (1) teniendo en cuenta (2) se obtiene la expresión para un cambio de la entropía en un gas ideal

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = C_v \ln \left[ \frac{P_2}{P_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right] \quad (3)$$

Los calores específicos a presión y volumen constantes son  $C_p$  y  $C_v$  (ver Sección III.4.3, ec.(14)).

Para un proceso isoentrópico  $s_1 = s_2$ , por lo que la ecuación (3) se reduce a

$$\frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k \quad (4)$$

por lo que a  $k$  a veces se le conoce como exponentes isoentrópico.

##### 3.1.1. Velocidad del Sonido y Número de Mach

La propagación de una perturbación en un medio compresible es lo que se le conoce como sonido. Sea una perturbación trasladándose con una velocidad  $c$  hacia la izquierda. Antes de alcanzar la perturbación el medio compresible tiene un estado  $P, T, \rho, U = 0$ . Luego de la perturbación el estado se altera a  $P + \Delta P, T + \Delta T, \rho + \Delta \rho, U = \Delta U$ . Una propagación trasladándose de esta forma puede analizarse con un volumen de control trasladándose con ella. De forma relativa desde el volumen de control trasladándose con la perturbación las velocidades son ahora antes de la perturbación a la izquierda  $U = c$  y después de la perturbación  $U = c - \Delta U$ . El principio de conservación de la masa da

$$\rho \mathcal{A} c = (\rho + \Delta \rho) \mathcal{A} (c - \Delta U) \quad (5)$$

El principio de conservación de cantidad de movimiento lineal da

$$P \mathcal{A} - (P + \Delta P) \mathcal{A} = \rho \mathcal{A} c [(c - \Delta U) - c] \quad (6)$$

Despejando  $\Delta U$  de (5)

$$\Delta U = c \frac{\Delta \rho}{\rho + \Delta \rho} \quad (7)$$

y substituyéndola en (6), se obtiene

$$c^2 = \frac{\Delta P}{\Delta \rho} \left( 1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \quad (8)$$

Por las hipótesis hecha para la propagación de esta perturbación, se puede decir que en límite para perturbaciones pequeñas ( $\Delta \rho \rightarrow 0$ ) para cualquier material

$$c^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = k \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \quad (9)$$

Para un gas ideal esto sería

$$c^2 = kRT \quad c = \sqrt{kRT} \quad (10)$$

No obstante, para un sólido o líquido/gas esto sería distinto

$$c^2 = \frac{K}{\rho} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad K = \frac{k}{\kappa} \quad (11)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad lineal,  $K$  es el módulo de elasticidad volumétrica,  $\nu$  es el módulo de Poisson del sólido y  $\kappa$  es la compresibilidad del líquido/gas (los líquidos tienen  $k = 1$ ).

Con esta velocidad  $c$  de propagación de una perturbación de presión (sonido) se define un número adimensional denominado Mach  $Ma = U/c$ , que es la velocidad relativa a la del sonido. Con el número de Mach se suele tradicionalmente clasificar los flujos compresibles de la siguiente forma:

$$\begin{cases} Ma < 0.3 & \text{Flujo Incompresible} \\ 0.3 < Ma \leq 0.8 & \text{Flujo Subsónico} \\ 0.8 < Ma \leq 1.2 & \text{Flujo Transónico} \\ 1.2 < Ma \leq 3.0 & \text{Flujo Supersónico} \\ 3.0 < Ma \leq 0.8 & \text{Flujo Hipersónico} \end{cases}$$

Esta clasificación es obedece a razones técnicas por la facilidad de trabajar con un fluido compresible como si fuese incompresible o por las dificultades que involucran romper la barrera del sonido ( $Ma \approx 1$ ), e incluso ir más allá. Aunque la distinción más sencilla es:

$$\begin{cases} Ma < 1 & \text{Flujo Subsónico} \\ Ma = 1 & \text{Flujo Sónico o Crítico} \\ Ma > 1 & \text{Flujo Supersónico} \end{cases}$$

y es la que usaremos de ahora en adelante.

### 3.1.2. Flujo en Toberas

Llamaremos tobera a cualquier conducto manejando flujo compresible donde la sección de flujo puede ir variando gradualmente. Además asumimos que el flujo es isoentrópico. Los principios de conservación en este caso son:

Masa

$$\dot{m} = \rho U A = \text{cte} \quad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (12)$$

Cantidad de Movimiento

$$\frac{dP}{\rho} + U dU = 0 \quad (13)$$

Ecuación de Estado

$$\frac{P}{\rho} = RT \quad (14)$$

Velocidad del Sonido

$$dP = c^2 d\rho \quad (15)$$

Energía

$$dh + U dU = 0 \quad (16)$$

Entropía

$$T ds = dh - \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (17)$$

La energía y la entropía originan la ecuación de cantidad de movimiento. Eliminando las variables adecuada finalmente se obtiene esta doble igualdad que relaciona todas las cantidades  $\mathcal{A}$ ,  $P$  y  $U$  involucradas en el flujo dentro de una tobera

$$\frac{dU}{U} = \frac{1}{Ma^2 - 1} \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = -\frac{dP}{\rho U^2} \quad (18)$$

La tabla 1 contiene resumido las tendencia de la evolución del flujo en un tobera para flujo subsónico y supersónico y para distintas variaciones del área. El cambio del comportamiento de subsónico a supersónico lo determina el denominador del término del centro que contiene  $Ma^2 - 1$  que pasa de ser negativo a positivo de forma abrupta alrededor de  $Ma = 1$ .

Tabla 1. Evolución del flujo en una tobera

	Subsónico - Supersónico	
Area	$Ma < 1$	$Ma > 1$
$d\mathcal{A} > 0$	$dU < 0$ $dP > 0$	$dU > 0$ $dP < 0$
$d\mathcal{A} < 0$	$dU > 0$ $dP < 0$	$dU < 0$ $dP > 0$

Las relaciones isoentrópicas se basa principalmente en las expresiones (4) y la conservación de la entalpía de estancamiento  $h_o$ . Recordemos que en un sistema abierto de una sóla entrada y salida, que es nuestro caso, sin agregar trabajo, ni extraer calor, sin acumulación, sin energía potencial se conserva el flujo de la entalpía de estancamiento (ver Sección VI.1.1.2). Esto es,

$$h_o = h_{o1} = h_{o2} \quad \frac{h_o}{C_p} = T_o = T_{o1} = T_1 + \frac{U_1^2}{2C_p} = T_2 + \frac{U_2^2}{2C_p} = T_{o2} \quad (19)$$

Si expresamos las velocidades en función del número de Mach aparece la temperatura como factor común. Relacionando un punto con el otro para la temperatura aparece la fracción  $\phi$ , que, luego de incluir las expresiones (4), hacen aparecer las siguientes relaciones isoentrópicas

$$\phi = \left[ \frac{1 + 0.5(k-1)Ma_1^2}{1 + 0.5(k-1)Ma_2^2} \right] \quad (20.a)$$

$$\left( \frac{T_2}{T_1} \right) = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1} = \phi \quad (20.b)$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{Ma_2}{Ma_1} \phi^{1/2} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{Ma_2}{Ma_1} \phi^{0.5 \frac{k+1}{k-1}} \quad (20.c, d)$$

Las relaciones anteriores son generales y se pueden aplicar a situaciones especiales a saber. Las *condiciones de estancamiento* son aquella donde la velocidad es nula y se han alcanzado luego de un proceso isoentrópico. Por lo que es suficiente en las expresiones (20) colocar para dicho punto  $Ma = 0$  y el subíndice “o” indicativo de estancamiento.

Las *condiciones críticas* son otras situaciones especiales que consisten en alcanzar las condiciones sónicas  $U = c$  mediante un proceso isoentrópico, lo que implica es particularizar para el punto en cuestión su número de Mach  $Ma = 1$ , indicando con un superíndice “\*” las cantidades correspondientes.

**Tobera Convergente.** Una *tobera convergente* se caracteriza porque siempre su área se va reduciendo paulatinamente a medida que el flujo avanza, siendo el flujo másico  $\dot{m}$  siempre el mismo en todas las secciones (porque estamos en régimen estacionario). A medida que la diferencia de presión se incremente entre la entrada y la salida, este flujo másico va creciendo, pero llega un punto donde el número de Mach no puede crecer más a medida que el área se reduce (en subsónico, porque en supersónico es lo contrario. Ver tabla 1) y necesariamente debe llegar a una condición crítica a la salida que denominamos “garganta”. En este caso decimos que la tobera está estrangulada y no puede hacer pasar más flujo másico y en la garganta  $Ma = 1$ . En una tobera convergente subsónica la presión siempre se reduce hacia la salida donde el flujo va más rápido.

**Tobera Convergente-Divergente.** Una *tobera convergente-divergente* se caracteriza por tener un área mínima intermedia en su recorrido gradual que denominamos igualmente “garganta”. El flujo si entra subsónico se mantiene subsónico a lo largo de toda la tobera (igual si es supersónico), salvo cuando se alcanzan las condiciones de estrangulamiento en la garganta. En este caso el flujo aguas abajo de la garganta presenta una bifurcación. Puede ser subsónico de nuevo o supersónico y seguirse acelerando. Si se sigue el camino subsónico en la parte divergente la presión se vuelve a restituir y en la misma área el flujo será idéntico que en la parte convergente. Si se sigue el camino supersónico el flujo se acelerará por encima de  $Ma = 1$  y la presión seguirá disminuyendo. Cuando las condiciones a la salida así lo imponen, pueden presentarse cualquiera de las siguientes situaciones: Flujo subsónico a la salida. Flujo supersónico a la salida. Entre estas dos puede ocurrir un fenómeno denominado onda de choque que en una cierta área de la parte divergente ocurre para ajustar las condiciones a la salida. Esta onda de choque puede ubicarse hasta la salida e inclusive puede salir de la tobera de forma oblicua. Para una presión de salida por debajo del comportamiento puramente supersónico pueden presentarse ondas de expansión oblicuas fuera de la tobera.

### 3.1.3. Onda de Choque

Un *onda de choque* es una superficie singular y perpendicular al flujo, donde se tiene un cambio abrupto de flujo supersónico a flujo subsónico (al revés es imposible porque viola el segundo principio de la termodinámica) y donde las condiciones y propiedades (con la sola excepción de  $T_o$ ) son discontinuas. Las relaciones que aplican en este fenómeno se derivan de aplica los mismos principios de conservación de siempre, entre un punto 1 antes de la onda de choque y un punto 2 después de la onda de choque:

Masa

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = G \quad (21)$$

Cantidad de Movimiento

$$P_1 - P_2 = G (U_2 - U_1) = \rho_2 U_2^2 - \rho_1 U_1^2 \quad (22)$$

Ecuación de Estado

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \quad h = C_p T = \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho} \quad (23)$$

Energía

$$h_1 + \frac{1}{2} U_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} U_2^2 = h_o \quad (24)$$

Entropía

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (s_2 > s_1) \quad (25)$$

Eliminando las variables necesarias y expresando todas las relaciones en función de los números de Mach, obtenemos

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + kMa_1^2}{1 + kMa_2^2} = \frac{1}{k+1} [2kMa_1^2 - (k-1)] \quad (26.a)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [2 + (k-1)Ma_1^2] \frac{2kMa_1^2 - (k-1)}{(k+1)^2 Ma_1^2} \quad (26.b)$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)Ma_1^2}{2 + (k-1)Ma_1^2} = \frac{1 + \frac{k+1}{k-1}(P_2/P_1)}{\frac{k+1}{k-1} + (P_2/P_1)} \quad (26.c)$$

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \frac{\rho_{o2}}{\rho_{o1}} = \left[ \frac{(k+1)Ma_1^2}{2 + (k-1)Ma_1^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \left[ \frac{k+1}{2kMa_1^2 - (k-1)} \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (26.d)$$

$$\frac{\mathcal{A}_2^*}{\mathcal{A}_1^*} = \frac{Ma_2}{Ma_1} \left[ \frac{2 + (k-1)Ma_1^2}{2 + (k-1)Ma_2^2} \right]^{0.5 \frac{k+1}{k-1}} \quad (26.e)$$

EL área crítica  $\mathcal{A}_1^*$  sería el área real de la garganta de la tobera convergente-divergente. El área crítica sería el área crítica si el flujo se revertiera isoentrópicamente a partir del punto 2. Las presiones de estancamiento pueden representar las presiones de sendos recipientes a uno y otro lado de la tobera convergente-divergente donde ocurra una onda de choque.

Para calcular la diferencia de entalpía uno y otro lado de la onda de choque se utiliza la relación de Rankine-Hugoniot

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(P_2 - P_1) \left( \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (27)$$

### 3.2. FLUJO NO ISOENTROPICO

En esta parte describiremos flujos, básicamente a través de conductos, donde la viscosidad del fluido se hace importante y por consiguiente se debe tener en cuenta a través de un factor de fricción viscosa. Puede tener también transferencia de calor por lo que hay que tenerla en cuenta en las ecuaciones. Todas las ecuaciones diferenciales se colocan de forma homogénea y estarán expresadas con derivadas respecto a la variable independiente  $x$  que es la coordenada longitudinal del conducto a lo largo de su eje. De nuevo aplicamos los principios de conservación:

Masa

$$\frac{\dot{m}}{\mathcal{A}} = \rho U = G \quad (\text{Cte}) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} = 0 \quad (28)$$

Cantidad de Movimiento Lineal

$$\begin{aligned} \rho U \frac{dU}{dx} &= -\frac{dP}{dx} - \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{A}} \tau_w & \rho U \frac{dU}{dx} + \frac{dP}{dx} + \frac{f}{D} \frac{\rho U^2}{2} &= 0 \\ \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{A}} &= \frac{4}{D} & \tau_w &= \frac{f}{8} \rho U^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Gas Ideal

$$P = \rho R T \quad \frac{1}{P} \frac{dP}{dx} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} = 0 \quad (30)$$

$$h = C_p T = \frac{k}{k-1} R T \quad \frac{dh}{dx} - \frac{k}{k-1} R \frac{dT}{dx} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{U}{c} = \frac{U}{\sqrt{kRT}} = Ma \quad \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} - \frac{1}{Ma} \frac{dMa}{dx} - \frac{1}{2} \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} = 0 \quad (32)$$



## Energía Térmica

$$\begin{aligned}
 h_o &= h + \frac{U^2}{2} & \dot{m} \frac{dh_o}{dx} &= \dot{Q}_w = \dot{m} q_w & \frac{dh}{dx} + U \frac{dU}{dx} - q_w &= 0 \\
 \dot{Q}_w &= H(T_\infty - T) & q_w &= \frac{\dot{Q}_w}{\dot{m}} = \frac{\dot{Q}_w}{A G} = \frac{4\dot{Q}_w}{\rho U D}
 \end{aligned} \tag{33}$$

## Entropía

$$T ds = dh - \frac{1}{\rho} dP \quad T \frac{ds}{dx} - \frac{dh}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = 0 \tag{34}$$

La variable  $\dot{Q}_w$  se utiliza cuando se tiene transferencia de calor a través de la pared del conducto mediante los mecanismos de conducción-convección. El coeficiente  $H$  es el global de la transferencia de calor e involucra todas las resistencias térmicas. La variable  $q_w$  se utiliza mejor cuando se tiene flujo reactivo con generación (exotérmico) o absorción de calor (endotérmico), o cuando se calienta o enfría directamente con una fuente o sumidero del cual se sabe cuánto cede o absorbe por unidad de masa de fluido.

**3.2.1. Flujo Adiabático con Fricción**

Las ecuaciones diferenciales anteriores involucran variables que se pueden desacoplar de la siguiente manera, todas en función de un número de Mach  $Ma$  genérico

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dx} = -k Ma^2 \left[ \frac{1 + (k-1) Ma^2}{2(1 - Ma^2)} \right] \frac{f}{D} \tag{35.a}$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} = -k Ma^4 \left[ \frac{(k-1)}{2(1 - Ma^2)} \right] \frac{f}{D} \tag{35.b}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -k Ma^2 \left[ \frac{1}{2(1 - Ma^2)} \right] \frac{f}{D} = -\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \tag{35.c}$$

$$\frac{1}{Ma} \frac{dMa}{dx} = k Ma^2 \left[ \frac{1 + 0.5(k-1) Ma^2}{2(1 - Ma^2)} \right] \frac{f}{D} \tag{35.d}$$

$$\frac{1}{P_o} \frac{dP_o}{dx} = -\frac{k Ma^2}{2} \frac{f}{D} = \frac{1}{\rho_o} \frac{d\rho_o}{dx} \tag{35.e}$$

$$\frac{ds}{dx} = - \left[ \frac{(Ma^2 - 1) R}{(1 + 0.5(k-1) Ma^2) Ma} \right] \frac{dMa}{dx} \tag{35.f}$$

La tabla 2 muestra cuales son las tendencias de las diferentes variables involucradas en el flujo adiabático con fricción, cuando es subsónico o supersónico.

Tabla 2. Tendencia del flujo adiabático con fricción

$Ma < 1$	$dP < 0$	$dU > 0$	$d\rho < 0$	$dT < 0$
$Ma > 1$	$dP > 0$	$dU < 0$	$d\rho > 0$	$dT > 0$

Las soluciones de las ecuaciones anteriores entre una posición genérica inicial donde se conoce  $Ma$  y una otra posición al final del conducto donde las condiciones son crítica  $Ma = 1$  dan los siguientes resultados

$$\frac{fL^*}{D} = \frac{1 - Ma^2}{k Ma^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \left[ \frac{(k+1) Ma^2}{2 + (k-1) Ma^2} \right] \tag{36.a}$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{Ma} \left[ \frac{k+1}{2+(k-1)Ma^2} \right]^{1/2} \quad (36.b)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{U^*}{U} = \frac{1}{Ma} \left[ \frac{2+(k-1)Ma^2}{k+1} \right]^{1/2} \quad (36.c)$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{c^2}{c^{*2}} = \left[ \frac{k+1}{2+(k-1)Ma^2} \right] \quad (36.d)$$

$$\frac{P_o}{P_o^*} = \frac{\rho_o}{\rho_o^*} = \frac{1}{Ma} \left[ \frac{2+(k-1)Ma^2}{k+1} \right]^{0.5 \frac{k+1}{k-1}} \quad (36.e)$$

La expresión (36.a) se aplica de forma diferencial como en

$$f \frac{\Delta L}{D} = \left( \frac{fL^*}{D} \right)_1 - \left( \frac{fL^*}{D} \right)_2 \quad \Delta L = L_1^* - L_2^* < L^*(Ma_1) \quad (37)$$

Mientras que las expresiones restantes se aplican de forma fraccionadas como en

$$\frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{P}{P^*} \right)_1 \left( \frac{P^*}{P} \right)_2 \quad (38)$$

La relación (36.a) en el límite  $Ma$  infinito tiene un valor acotado igual a

$$\lim_{Ma \rightarrow \infty} f \frac{L^*}{D} = -\frac{1}{k} + \frac{k+1}{2k} \ln \left( \frac{k+1}{k-1} \right) \quad (39)$$

que para el caso de aire  $k = 1.4$  da  $(6 \ln 6 - 5)/7 \approx 0.821508$ . Esto quiere decir que un flujo supersónico nunca existirá si su valor supera el límite indicado.

El flujo másico para el caso de flujo adiabático con fricción se calcula de forma integral con la siguiente ecuación

$$\dot{m}^2 = \frac{kRT_o A^2 \rho_2^2}{K_f} (\varphi^2 - 1) \quad K_f = kf \frac{L}{D} + (k+1) \ln \varphi \quad \varphi = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{P_1 T_2}{T_1 P_2} \quad (40)$$

Una forma de relacionar la entalpía vs. la entropía para este problema es lo que denomina en la bibliografía como la *Curva de Fanno* representada en la siguiente ecuación

$$s = s_1 + C_v \ln \left[ \frac{\rho_1^k}{P_1} \frac{R}{C_p} \left( \frac{\sqrt{2}}{G} \right)^{k-1} \right] + C_v \ln [h(h_o - h)^{(k-1)/2}] \quad (41)$$

aunque está de forma inversa.

### 3.2.2. Flujo Isotérmico con Fricción

El flujo isotérmico evoluciona con la temperatura constante. El flujo tiende hacia un flujo crítico determinado por el número de Mach  $Ma^+ = 1/\sqrt{k}$ , condición indicada en las variables con el superíndice “+”. Haciendo  $dT = 0$  en las ecuaciones diferenciales (28)-(34) finalmente quedan las siguientes ecuaciones algebraicas

$$\frac{dL^+}{D} = \frac{1 - kMa^2}{kMa^2} + \ln(kMa^2) \quad (42.a)$$

$$\frac{P}{P^+} = \frac{1}{Ma\sqrt{k}} \quad (42.b)$$

$$\frac{U}{U^+} = \frac{\rho^+}{\rho} = Ma\sqrt{k} \quad (42.c)$$

Las cuales se aplican de forma diferencia o fraccionada como en el caso anterior.

Para el cálculo del flujo másico del flujo isotérmico se puede usar la siguiente ecuación integral

$$\dot{m}^2 = \frac{\mathcal{A}^2 P_1^2}{RTK_f} \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2} \quad K_f = f \frac{L}{D} + 2 \ln \varphi \quad \varphi = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{U_2}{U_1} \quad (43)$$

Esta ecuación se puede colocar en función del caudal volumétrico  $\hat{Q}$  a condiciones estándares, tal que

$$\hat{Q}^2 = \mathcal{A}^2 \frac{\hat{T}_a}{\hat{P}_a \hat{\rho}_a} \frac{P_1^2 - P_2^2}{K_f T \hat{S}_g} \quad \dot{m} = \rho Q = \hat{\rho} \hat{Q} = \hat{\rho}_a \hat{S}_g \hat{Q} \quad \frac{P_1}{T \rho_1} = \frac{\hat{P}_a}{\hat{T}_a \hat{\rho}_a \hat{S}_g} \quad (44)$$

donde  $\hat{S}_g = \hat{\rho}/\hat{\rho}_a$  es la densidad relativa a la del aire  $\hat{\rho}_a$  a condiciones estándares de presión  $\hat{P}_a$  y temperatura  $\hat{T}_a$ .

La expresión para el caudal estándar en el flujo isotérmico se puede colocar en una forma similar a la expresión 1.4.(36)

$$F(Q) = P_B - P_A + \rho C_f Q |Q| + K_g (Z_B - Z_A) = 0 \quad (45)$$

donde los coeficientes de pérdida  $C_f$  y del energíapotencial  $K_g$  involucrados son

$$C_f = \frac{T_m}{\hat{T}_a} \frac{\hat{\rho}_a \hat{S}_g}{2 \mathcal{A}^2} \frac{\hat{P}_a}{P_m} K_f \quad K_f = \sum_i K_i / Y_i^2 + f (L + \sum_j L_j) \frac{\mathcal{S}}{4 \mathcal{A}} + 2 \left| \ln \frac{P_A}{P_B} \right| \quad K_g = \hat{\rho}_a g \hat{S}_g \frac{\hat{T}_a}{T_m} \frac{P_{\text{ms}}^2}{\hat{P}_a P_m} \quad (46)$$

donde

$$P_m = \frac{P_A + P_B}{2} \quad T_m = \frac{T_A + T_B}{2} \quad P_{\text{ms}}^2 = \frac{P_A^2 + P_B^2}{2} \quad (47)$$

El primer término de  $K_f$ , donde involucra las  $K_i$ , se denomina *pérdidas localizadas* e incluye las pérdidas de presión ocasionadas por accesorios (codos, tees, yeas, reducciones, expansiones, válvulas, etc.) a lo largo de la tubería, afectado por un factor  $Y_i$  de expansión neta que tiene en cuenta el efecto de la compresibilidad en los accesorios. El segundo término de  $K_f$  son las *pérdidas distribuidas* ocasionadas por la fricción viscosa con la pared de la tubería a lo largo de la longitud  $L$  real de la misma tubería. Las longitudes  $L_j$  son pérdidas menores (localizadas), pero expresada como longitud equivalente de tubería que produciría la misma pérdida de la presión, que si se reemplaza por dicha longitud equivalente adicionada a la longitud original de la tubería. El tercer término incluye el efecto de la diferencia de presión en la reducción del flujo másico y se ha encerrado entre valores absolutos por si el flujo se revierte ( $P_A$  debe ser siempre mayor que  $P_B$  cuando el sentido del flujo es el correcto).

El factor de fricción de Darcy-Weisbach  $f$  interviene como una función del tipo

$$f = f(\mathcal{R}e, \varepsilon/D) \quad \mathcal{R}e = \frac{\hat{\rho}_a \hat{S}_g |\hat{Q}| D}{\mu \mathcal{A}} \quad \begin{matrix} D = 4 R_h \\ R_h = \mathcal{A}/S \end{matrix} \quad \tau_w = \frac{f}{8} \rho U^2 = \frac{c_f}{2} \rho U^2 \quad (48)$$

dependiente del número de Reynolds  $\mathcal{R}e$  y la rugosidad relativa  $\varepsilon/D$  mediante, por ejemplo, la correlación de Colebrook 1.4.(30). La longitud  $D$  es el denominado *Diámetro Hidráulico* y en el caso de una tubería de sección circular coincide con su propio diámetro. El esfuerzo cortante en la pared de la tubería  $\tau_w$  expresa básicamente la ecuación de Darcy-Weisbach  $h_f = f(L/D)U^2/(2g)$ , que para la ecuación (36) coincide con  $h_f = C_f Q^2/g$ . El coeficiente cásico  $c_f = f/4$ , denominado coeficiente de fricción de Fanning, es un número adimensional de Euler. Cuando el tramo de la tubería es recto y forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, entonces  $(Z_B - Z_A) = L \sin \alpha$ . La fracción  $R_h$  se denomina *Relación Hidráulica* y expresa el balance entre las fuerzas

inerciales de flujo en la sección  $\mathcal{A}$  y las fuerzas viscosas en la pared del conducto en el perímetro  $\mathcal{S}$  por la condición de no deslizamiento. Por eso dicho perímetro se denomina “mojado”, porque si no lo está (mojado), no produce esfuerzo viscoso en dicha pared.

Particularmente, cuando la tubería es de sección circular las siguientes variables se reducen a

$$C_f = 8 \frac{T_m}{\hat{T}_a} \frac{\hat{\rho}_a \hat{S}_g}{\pi D^4} \frac{\hat{P}_a}{P_m} K_f \quad Re = 4 \frac{\hat{\rho}_a \hat{S}_g |\hat{Q}| D}{\mu \pi D} \quad (49)$$

El valor absoluto que aparece en  $Q$  en las ecuaciones de arriba es para contemplar que, si el flujo no va del punto  $A$  al Punto  $B$ , sino al contrario, las ecuaciones conservan de igual manera su signo correcto. Si  $Q$  es positivo entonces la presión  $P_B$  es menor que  $P_A$  en una tubería horizontal. Si  $Q$  es negativo, entonces ocurre lo contrario. El coeficiente  $K_g$  en la ecuación (45) interviene para considerar el efecto de la gravedad como se hizo en 1.4.(36). Dicha ecuación se ha colocado igualada a cero para formar, en caso de una red de tuberías, un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales del tipo homogénea  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

### 3.2.3. Flujo Politrópico

Se denomina *flujo politrópico* a aquel flujo con un fluido que tenga un comportamiento intermedio entre isotérmico e isentrópico. Debido a esto se puede suponer un exponente  $\gamma$  que tenga valores  $1 < \gamma < k$ . En la medida que el flujo pase más rápido a través del dispositivo, suponemos al flujo más parecido al isentrópico. En la medida que el flujo pase más lento a través del dispositivo, suponemos que al flujo le da tiempo de intercambiar calor de forma natural y por consiguiente se vuelve más isotérmico.

### 3.2.4. Flujo con Transferencia de Calor

Las ecuaciones de conservación en este flujo con transferencia de calor son  
Masa

$$G = \rho U = \text{cte} \quad (50)$$

Cantidad de Movimiento

$$B = P + \frac{G^2}{\rho} = \text{cte} \quad P_1 - P_2 = G(U_2 - U_1) \quad (51)$$

Energía Térmica

$$q_w l = h_{o2} - h_{o1} = C_p(T_{o2} - T_{o1}) \quad q_w L^* = C_p(T_o^* - T_o) \quad (52)$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtienen las siguientes relaciones

$$\frac{P}{P^*} = \frac{k+1}{1+kMa^2} \quad (53.a)$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{(k+1)^2 Ma^2}{(1+kMa^2)^2} \quad (53.b)$$

$$\frac{U}{U^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(k+1)Ma^2}{1+kMa^2} \quad (53.c)$$

$$\frac{P_o}{P_o^*} = \frac{k+1}{1+kMa^2} \left[ \frac{2+(k-1)Ma^2}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (53.d)$$

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{(k+1)Ma^2[2+(k-1)Ma^2]}{(1+kMa^2)^2} \quad (53.e)$$

Las tendencias de este tipo de flujo con transferencia de calor se muestra en la tabla 3 cuando existe calentamiento sin fricción y por consiguiente  $dT_o > 0$  y siempre es creciente. Algo levemente diferente ocurre con la temperatura en el flujo subsónico. Crece hasta  $Ma^+ = 1/\sqrt{k}$  y luego desde aquí hasta  $Ma^* = 1$  decrece.

Tabla 3. Tendencia del flujo no adiabático (Calentado,  $dT_o > 0$ ) sin fricción

$Ma < 1$	$dP < 0$	$dU > 0$	$d\rho < 0$	$dT > 0$ hasta $Ma = 1/\sqrt{k}$ luego $dT < 0$
$Ma > 1$	$dP > 0$	$dU < 0$	$d\rho > 0$	$dT > 0$

Una forma de relacionar la entalpía vs. la entropía para este problema es lo que denomina en la bibliografía como la *Curva de Rayleigh* representada en la siguiente ecuación

$$s = s_1 + C_v \ln\left(\frac{\rho_1^k}{P_1}\right) + C_v \ln\left(\frac{B - G^2/\rho}{\rho^k}\right) \quad h = \frac{C_p}{R} \frac{1}{\rho} \left(B - \frac{G^2}{\rho}\right) \quad (54)$$

aunque está de forma paramétrica utilizando el parámetro  $\rho$  ( $h(\rho)$  vs.  $s(\rho)$ ).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Boltzmann, L. **Lectures on Gas Theory**. University of California Press, 1964. Dover Publications, 1995.
- [2] Chow, V. T. **Open Channel Hydraulics**. McGraw-Hill (New York), 1959.
- [3] Courant, R.; Friedrichs, K. O. **Supersonic Flow and Shock Waves**. Interscience Publishers, 1948. Fifth Printing, 1967.
- [4] Currie, I. G. **Fundamental Mechanics of Fluids**, Second Edition. McGraw-Hill, 1993.
- [5] Flügge, S.; Truesdell, C. A.; (Eds.). **Encyclopedia of Physics**. Vol.IX: "Gas Dynamics III". Springer-Verlag, 1960.
- [6] Kumar, S. **Gas Production Engineering**. Gulf Publishing Company, 1987.
- [7] Lamb, H. **Statics**, Including Hydrostatics and the Elements of The Theory of Elasticity, Third Edition. Cambridge University Press, 1928. 6<sup>th</sup> Reprint, 1949.
- [8] Liepmann, H. W.; Roshko, A. **Elements of Gasdynamics**. John Wiley & Sons, 1957.
- [9] Serrin, J. "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.VIII/1, pp.125-263. Springer-Verlag, 1959.
- [10] Shames, I. H. **Mecánica de Fluidos**, Tercera Edición. McGraw-Hill (Bogotá), 1995.
- [11] Shapiro, A. H. **The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow**, Vol.I-II. John Wiley & Sons, 1953.
- [12] Truesdell, C. A.; Muncaster, R. G. **Fundamentals of Maxwell's Kinetic Theory of a Simple Monatomic Gas**, Treated as a Branch of Rational Mechanics. Academic Press, 1980.
- [13] Von Mises, R. **Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow**. Academic Press, 1958. Second Printing, 1966.
- [14] White, F. M. **Mecánica de Fluidos**, Quinta Edición. McGraw-Hill (Madrid), 2004.
- [15] Wylie, E. B.; Streeter, V. L.; Suo, L. **Fluid Transients in Systems**. Prentice-Hall, 1993.
- [16] Yahya, S. M. **Fundamentals of Compressible Flow: With Aircraft and Rocket Propulsion**, Second Edition (SI Units). Wiley Eastern Limited, 1982. Reprint, 1992
- [17] Yuan, S. W. **Foundations of Fluid Mechanics**. Prentice Hall, (Englewood Cliffs, New Jersey), 1967.
- [18] Zierep, J. **Theoretical Gasdynamics**. Springer-Verlag, 1978.



# CAPITULO X

## FLUIDOS VISCOSOS

### CONTENIDO

1. FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO.	228
1.1. Ecuación General.	228
1.2. Ecuación de Navier-Stokes-Duhem.	232
1.3. Ecuación de Navier-Stokes.	232
1.3.1. Presión Piezométrica.	233
1.4. Ecuación de la Energía Térmica.	234
2. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (ESTACIONARIOS).	236
2.1. Flujo entre Dos Placas (Couette).	236
2.1.1. Placas Planas.	236
2.1.2. Placas Circulares.	237
2.2. Flujo en una Tubería (Poiseuille).	238
2.2.1. Sección Circular.	238
2.2.2. Sección Anular.	238
2.3. Flujo entre dos Cilindros (Taylor).	239
3. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (TRANSITORIOS).	240
3.1. Problemas de Stokes.	240
3.1.1. Primer Problema de Stokes.	240
3.1.2. Segundo Problema de Stokes.	241
3.2. Oscilación en Tubería.	241
3.2.1. Oscilación Tubo Sólo.	241
• Laminar.	242
• Turbulento.	243
3.2.2. Oscilación entre Tanques.	243
3.2.2. Oscilación con Recipiente.	244
3.3. Golpe de Ariete.	245
3.3.1. Velocidad de Propagación.	245
3.3.2. Tubería Rígida (Joukowski).	246
3.3.3. Tubería Elástica.	246

4. TEORIA DE LA CAPA LIMITE.	247
4.1. Capa Límite Laminar.	247
4.1.1. Fundamentos.	247
4.1.2. Capa Límite en Placa Plana.	247
4.1.3. Capa Límite Tubular Externa.	250
4.1.4. Capa Límite Tubular Interna.	252
4.1.5. Modelo de Blasius.	254
4.2. Capa Límite Turbulenta.	255
4.2.1. Fundamentos.	255
4.2.2. Navier-Stokes.	255
4.2.3. Ley de Potencia.	255
4.2.4. Longitud de Mezcla.	257
4.2.5. Acoplamiento Laminar-Turbulento.	258
BIBLIOGRAFIA.	259

## 1. FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO

### 1.1. ECUACION GENERAL

La ecuación del movimiento de Cauchy es

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (1)$$

La relación constitutiva para un fluido newtoniano es

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \mathcal{T} = -P\mathbf{I} + \lambda \vartheta \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad \mathcal{T} = \lambda \vartheta \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad \vartheta = \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr} \mathbf{D} \quad (2)$$

donde

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^t) \quad \mathbf{G} = (\nabla \mathbf{v})^t \quad (3)$$

Esta relación constitutiva, aunque fue inferida por Stokes, define lo que se denomina un fluido newtoniano. Sin embargo, un fluido newtoniano es un caso particular de lo que se conoce como fluidos stokesianos, cuya relación constitutiva es menos restrictiva (ver Cap. VII).

La *ecuación general* válida para fluidos compresibles, donde las viscosidades  $\lambda$  y  $\mu$  pueden variar de un punto a otro, se expresa de forma simbólica como

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + (\lambda + \mu) \nabla \vartheta + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \vartheta \nabla \lambda + 2 \nabla \mu \cdot \mathbf{D} \quad (4)$$

la cual ha sido obtenida directamente de substituir la definición (3) en la relación (2) y a su vez en la ecuación de Cauchy (1).

La forma de calcular la divergencia de la velocidad  $\vartheta$  en distintos sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales está presentada en la Tabla 1 de la sección IX.1.6. Para un fluido incompresible este valor es nulo en cualquier sistema de coordenadas y se dice que el flujo es solenoidal.

La tabla 1 presenta la ecuación de Cauchy (1), substituida la descomposición  $\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \mathcal{T}$ , en distintos sistemas de coordenadas curvilíneas ortonormales: Cartesianas, Cilíndricas y Esféricas. El ángulo  $\theta$  en el sistema de coordenadas cilíndricas se denomina *ángulo acimutal*. Por otro lado, Los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  en el sistema de coordenadas esféricas se denominan el *ángulo cenital* y *ángulo acimutal*, respectivamente.



En coordenadas cilíndricas, cuando no existe dependencia de la coordenada  $z$ , se dice que el sistema de coordenadas es polar y al ángulo  $\theta$  se le denomina *ángulo polar*.

**Tabla 1.** Ecuaciones de Cauchy  $\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\rho a_x = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$ $\rho a_y = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$ $\rho a_z = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\rho a_r = \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \right]$ $\rho a_\theta = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} \right]$ $\rho a_z = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right]$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\rho a_r = \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} - \tau_{\phi\phi}}{r} \right]$ $\rho a_\theta = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta} - \tau_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \right]$ $\rho a_\phi = \rho g_\phi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi} + 2\tau_{\theta\phi} \cot \theta}{r} \right]$

Los esfuerzos viscosos se indican en la próxima tabla 2 en los mismos sistemas de coordenadas ortonormales utilizados anteriormente. Bajo la hipótesis de Stokes el valor de la viscosidad  $\lambda$  es  $-2\mu/3$  (ver Sección III.2.3.1). El gradiente de la presión resulta de aplicar el operador diferencial nabla ( $\nabla$ ), definido en los distintos sistemas de coordenadas antes expuestos por

$$\begin{aligned}
\nabla &= \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \\
&= \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \\
&= \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}
\end{aligned} \tag{5}$$

**Tabla 2.** Componentes del tensor de esfuerzos viscosos  $\mathcal{T} = \lambda \vartheta \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & \tau_{yy} &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} & \tau_{zz} &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \tau_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} & \tau_{\theta\theta} &= \lambda \vartheta + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \tau_{zz} &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \tau_{r\theta} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & \tau_{\theta z} &= \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) & \tau_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \end{aligned}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} & \tau_{\theta\theta} &= \lambda \vartheta + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \\ \tau_{\phi\phi} &= \lambda \vartheta + 2\mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right] & \tau_{\theta\phi} &= \mu \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \\ \tau_{r\phi} &= \mu \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \right] \end{aligned}$

La tabla 3 muestra las diferentes componentes del tensor velocidad de deformación  $\mathbf{D}$  para los distintos sistemas de coordenadas curvilíneas ortonormales.

**Tabla 3.** Componentes del tensor velocidad de deformación  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^t)$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\begin{aligned} D_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} & D_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y} & D_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ D_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & D_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & D_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\begin{aligned} D_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} & D_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & D_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ D_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & D_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) & D_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \end{aligned}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\begin{aligned} D_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} & D_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & D_{\phi\phi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \\ D_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right] & D_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \\ D_{r\phi} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \right] \end{aligned}$

Expresando los términos correspondientes en función de los campos de velocidades y viscosidades, la expresión (4) se puede expresar de forma más expandida como

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot [(\nabla \mathbf{v})^t + \nabla \mathbf{v}] \quad (4')$$

No obstante, aparte de cumplirse la ecuación (4) ó (4'), también debe satisfacerse la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6)$$

Esta ecuación sólo se satisface para el campo de velocidades, cuando correspondientemente el campo de presiones es el correcto en (5). Sin embargo, particularmente para los líquidos, bajo la hipótesis de flujo incompresible ( $\vartheta = 0$ ), cualquier perfil de presiones paralelo satisface igualmente esta condición, puesto que la presión interviene en la ecuaciones en forma de derivada.

La tabla 4 presenta la ecuación de continuidad (6) expresada en distintos sistemas de coordenadas ortonormales.

**Tabla 4.** Ecuación de continuidad.

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0$

Cuando el flujo es incompresible las relaciones de arriba se reducen a la de la divergencia de la velocidad nula, por lo que se recomienda usar las expresiones de la tabla 1 de la Sección IX.1.6.

El tensor gradiente de velocidad  $\mathbf{G} = [\nabla \mathbf{v}]^t$  tiene las siguientes componentes en los sistemas de coordenadas cartesiano, cilíndrico y esférico

$$[\mathbf{G}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{G}]_{r,\theta,z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7.a, b)$$

$$[\mathbf{G}]_{r,\theta,\phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi \cot \theta}{r} \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \end{bmatrix} \quad (7.c)$$

respectivamente.

La tabla 5, adicionalmente, contiene la expresión de la aceleración  $\mathbf{a}$  en los sistemas de coordenadas ya mencionados, donde se pueden identificar el término transitorio  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  y el término convectivo  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ .

**Tabla 5.** Ecuaciones para la aceleración  $\mathbf{a} = \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$ $a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$ $a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}$ $a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$ $a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}$ $a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2}{r} \cot \theta$ $a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cot \theta$

## 1.2. ECUACION DE NAVIER-STOKES-DUHEM

La ecuación de Navier-Stokes-Duhem válida para fluidos compresibles, donde la viscosidad se considera constante, se expresa de forma simbólica como

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \frac{\mu}{3} \nabla \vartheta + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad \vartheta = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

Esta ecuación se obtiene de la ecuación general 1.1.(5) eliminando las variaciones de las viscosidades y considerando la condición de Stokes en la cual se establece que  $\lambda = -2\mu/3$  para que el fluido sea un fluido de Stokes (ver sección III.2.3.1).

## 1.3. ECUACION DE NAVIER-STOKES

La ecuación de Navier-Stokes válida para fluidos incompresibles se expresa de forma simbólica como

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1)$$

Esta ecuación se obtiene de la ecuación 1.2.(1) y considerando la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

La ecuación de Navier-Stokes está expresada en los distintos sistemas de coordenadas ortonormales en la tabla 6.

**Tabla 6.** Ecuaciones de Navier-Stokes.

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\rho a_x = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$ $\rho a_y = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$ $\rho a_z = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\rho a_r = \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\}$ $\rho a_\theta = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right\}$ $\rho a_z = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\rho a_r = \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left( \nabla^2 v_r - \frac{2 v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 v_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right)$ $\rho a_\theta = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right)$ $\rho a_\phi = \rho g_\phi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \mu \left( \nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right)$

**Nota:** Las coordenadas esféricas requieren de la expresión del laplaciano (ver Tabla 2 de la Sección IX.1.6)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Para fluidos newtonianos compresibles que siguen la hipótesis de Stokes, la ecuación de Navier-Stokes arriba mencionada debe contener adicionalmente el término  $\mu \nabla \vartheta / 3$  ( $\vartheta = \nabla \cdot \mathbf{v}$ ). Es decir, se debe usar la ecuación 1.2.(1), donde el término  $\nabla \vartheta$  se puede fácilmente obtener de la tabla 2 en los correspondientes sistemas de coordenadas.

### 1.3.1. Presión Piezométrica

Es frecuente que en la ecuación de Navier-Stokes (para fluidos incompresibles) se agrupen los términos de fuerza a distancia  $\rho \mathbf{g}$  y gradiente de presión  $-\nabla P$  en un sólo término  $-\nabla \tilde{P}$ , cuando aquellas se derivan de un potencial en la forma  $\mathbf{g} = -\nabla \varphi$ , puesto que constituyen fuerzas conservativas. Por consiguiente, se tiene

$$\rho \mathbf{g} - \nabla P = -\nabla (P + \rho \varphi) = -\nabla \tilde{P} \quad \tilde{P} = P + \rho \varphi \quad (2)$$

como similarmente se hizo en la Sección IX.1.1., pero ahora en un contexto mucho más general. La presión  $\tilde{P}$  se denomina de forma general *presión reducida* o particularmente *presión piezométrica* en el ámbito de la gravedad vertical.

Existen típicamente dos casos que utilizan marcadamente por su amplia aplicabilidad. La gravedad vertical, descendente y uniforme y la gravedad radial, concéntrica, homogénea, descritas por el siguiente par de ecuaciones

$$\mathbf{g} = -g \mathbf{k} \quad (\text{Vertical}) \quad \mathbf{g} = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (\text{Radial}) \quad (3)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\mathbf{k}$  es el versor coordenado con el eje  $z$  vertical ascendente,  $G$  es la constante de la gravitación universal,  $M$  es la masa del cuerpo que origina el campo de fuerza gravitatoria concentrada en el origen, y  $\mathbf{e}_r$  es el versor coordenado con el eje  $r$ . En ambos casos las funciones potenciales que originan el campo de las fuerzas son

$$\varphi = gz \quad (\text{Vertical}) \quad \varphi = -G\frac{M}{r} \quad (\text{Radial}) \quad (4)$$

Para el caso particular de la hidrostática  $\nabla P = \rho \mathbf{g}$ , estas relaciones son

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (\text{Vertical}) \quad \frac{\partial P}{\partial r} = -\rho G \frac{M}{r^2} \quad (\text{Radial}) \quad (5)$$

las cuales integradas dan las siguientes soluciones

$$P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1) \quad (\text{Vertical}) \quad P_2 - P_1 = \rho GM \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (\text{Radial}) \quad (6)$$

Si  $P_2 > P_1$ , entonces sobre el punto donde actúa la presión  $P_2$  existe una columna equivalente de líquido de densidad  $\rho$  y de altura  $h$  hasta el punto donde actúa la presión  $P_1$ , tal que

$$P_2 - P_1 = \rho gh \quad (\text{Vertical}) \quad P_2 - P_1 = \rho GMh/r_{\text{ms}}^2 \quad (\text{Radial}) \quad (7)$$

donde  $r_{\text{ms}} = \sqrt{r_1 r_2}$  es la posición radial media geométrica. Se puede decir que en la gravitación radial existe una aceleración de gravedad equivalente  $g_{\text{ms}} = GM/r_{\text{ms}}^2$ , como lo sugiere la expresión (3.b). Particularmente, en el caso vertical se establece una relación entre el gradiente de la presión piezométrica  $\tilde{P}$  y el gradiente de la altura piezométrica  $\tilde{P}/(\rho g) = \tilde{h} = h + z$  de la forma  $\nabla \tilde{P} = \rho g \nabla \tilde{h}$ . Algo similar pasa en el caso radial sólo cuando los radios son grandes y  $r_{\text{ms}}$  es aproximadamente constante al igual que  $g_{\text{ms}}$ .

#### 1.4. ECUACION DE LA ENERGIA TERMICA

La ecuación de la energía térmica presentada en esta sección como

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = T\beta \frac{dP}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad \mathbf{q} = -k \nabla T \quad (1)$$

no es más que una de las ecuaciones de la temperatura presentadas antes en la sección III.4.3.4, adicionalmente con la ley de Fourier para la transferencia de calor por conducción (1.b).

La tabla 7 presenta la ecuación de la energía térmica (1) expresada en los distintos sistemas de coordenadas ortonormales. La tabla 8 completa la información de la tabla 7 en lo que respecta al término de disipación viscosa.

**Tabla 7.** Ecuaciones de la energía térmica.

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \beta T \frac{dP}{dt} + \Phi_\mu + \Phi_r$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \beta T \frac{dP}{dt} + \Phi_\mu + \Phi_r$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \beta T \frac{dP}{dt} + \Phi_\mu + \Phi_r$

**Tabla 8.** Término de disipación viscosa  $\Phi_\mu = \boldsymbol{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{v} = \lambda \vartheta^2 + 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{G}$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\Phi_\mu = \lambda \vartheta^2 + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right]$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\Phi_\mu = \lambda \vartheta^2 + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\Phi_\mu = \lambda \vartheta^2 + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \right] + \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \mu \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \right]^2 + \mu \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]^2$

## 2. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (ESTACIONARIOS)

En esta parte se describirán brevemente algunos problema para flujo viscoso (newtonianos) en régimen estacionario ( $\partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{0}$ ) y generalmente desarrollados ( $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ), aunque en este último aspecto pueden aparecer aceleraciones centrípetas en el término convectivo.

### 2.1. FLUJO ENTRE DOS PLACAS (COUETTE)

#### 2.1.1. Placas Planas

Este es el flujo más sencillo que puede ocurrir en un dominio confinado entre dos placas planas y con un movimiento plano rectilíneo y uniforme (en  $x$ ). Sean dos placas paralelas distanciadas una longitud  $h$  perpendicular a ellas. La coordenada  $x$  es paralela también al flujo, por lo que podemos decir que solo existe velocidad en esa dirección y tenemos que el perfil de velocidades es función de la distancia perpendicular  $y$

$$v_x = U(y) \quad (1)$$

La ecuación de Navier-Stokes 1.3.(1) (también la tabla 6 de la misma sección) se reduce a la ecuación diferencial con sus respectivas condiciones de borde

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = 0 \quad \begin{array}{ll} y = 0 & U = 0 \\ y = h & U = U_o \end{array} \quad (2)$$

Las derivadas parciales se han convertido en ordinarias por la única dependencia que existe respecto a  $y$ . Las condiciones de borde existen de esa forma porque se ha impuesto la *condición de no deslizamiento* respecto a las superficies sólidas e impermeables que confinan el flujo (ver sección III.2.2.3).

La solución de (2) es la siguiente

$$U = C_1 y + C_0 \quad \begin{array}{l} C_0 = 0 \\ C_1 = U_o/h \end{array} \quad (3)$$

Por lo que en definitiva el perfil de velocidades es

$$U = U_o \frac{y}{h} \quad \frac{Q}{b} = \frac{U_o h}{2} \quad (4)$$

siendo  $Q/b$  el caudal volumétrico por unidad de ancho  $b$  (en la dirección de  $z$ ).

Si al problema anterior le agregamos un gradiente de presión piezométrica en la dirección de  $x$ , entonces la ecuación (2) se convierte en

$$0 = \beta + \mu \frac{d^2 U}{dy^2} \quad \beta = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \quad \begin{array}{ll} y = 0 & U = 0 \\ y = h & U = U_o \end{array} \quad (5)$$

cuya solución es

$$U = -\frac{\beta}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_0 \quad \begin{array}{l} C_0 = 0 \\ C_1 = \frac{\beta}{2\mu} h + \frac{U_o}{h} \end{array} \quad (6)$$

y definitivamente queda como

$$U = \frac{\beta h^2}{2\mu} \left[ \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right] + U_o \frac{y}{h} \quad \frac{Q}{b} = \frac{\beta h^3}{12\mu} + \frac{U_o h}{2} \quad (7)$$



En este caso, el problema se puede muy bien denominar *flujo de Couette-Poiseuille*. Si no existe desplazamiento de la placa de arriba ( $U_o = 0$ ) el flujo se convierte en un *flujo de Poiseuille plano* y cuyo caso circular se verá adelante en la sección 2.2. Los flujos de Poiseuille y Poiseuille-Couette tubular entre dos cilindros se describirán en la Sección 2.2.2.

### 2.1.2. Placas Circulares

El problema anterior cambia drásticamente cuando la placa de arriba, en lugar de desplazarse en línea recta, gira respecto a un eje ( $r = 0$ ) con una velocidad angular  $\omega$ , sobre un plano ( $z = h$ ), mientras la placa de abajo ( $z = 0$ ) está fija. Debido a la simetría axial presente, las derivadas parciales respecto a  $\theta$  son todas nulas. El perfil de velocidades viene determinado solamente por la velocidad tangencial  $v_\theta$  en función de dos variables cilíndricas de la forma

$$v_\theta = V(r, z) \quad (8)$$

Substituyendo esto en la ecuación de Navier-Stokes 1.3.(1), junto con la condición de no deslizamiento III.2.2.(4) y teniendo en cuenta la simetría axial, se reduce a la siguiente ecuación diferencial

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V) \right] + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \begin{array}{ll} z = 0 & V = 0 \\ z = h & V = \omega r \end{array} \quad r = R_o \quad V = 0 \quad (9)$$

En  $r = 0$  obviamente no hay movimiento tangencial ( $V = 0$ ).

Para resolver (9) aplicamos el método de separación de variables de la forma

$$V(r, z) = R(r) Z(z) \quad \frac{1}{r} R' Z - \frac{1}{r^2} R Z + R'' Z + R Z'' = 0 \quad (10)$$

Realizando la correspondiente separación se obtiene

$$\frac{1}{r} \frac{R'}{R} - \frac{1}{r^2} + \frac{R''}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} r^2 R'' + r R' + (r^2 \lambda^2 - 1) R = 0 \\ Z'' - \lambda^2 Z = 0 \end{array} \quad (11)$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales resultantes son: La de arriba es la ecuación de Bessel de orden 1 cuyas soluciones son las funciones de Bessel  $J_1(\lambda r)$  y  $Y_1(\lambda r)$  (ver Sección E.2.1.2); la de abajo es la ecuación cuyas soluciones son las funciones exponenciales  $\sinh(\lambda z)$  y  $\cosh(\lambda z)$  (la segundas soluciones  $Y_1(\lambda x)$  de la ecuación de Bessel y  $\cosh(\lambda z)$  de la otra se descartan por no satisfacer las condiciones de borde en (9)). Resulta finalmente

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_1(\lambda_i r) \sinh(\lambda_i z) \quad (12)$$

Los diferentes valores de  $\lambda_i$  se obtienen de las infinitas raíces de la ecuación

$$J_1(\lambda R_o) = 0 \quad (13)$$

originada de la última condición de borde en  $r = R_o$ . Los diferentes valores de los coeficientes  $a_i$  se obtienen de

$$a_i = \frac{\omega}{\sinh(\lambda_i h)} \frac{\int_0^1 r^2 J_1(\lambda_i r) dr}{\int_0^1 r [J_1(\lambda_i r)]^2 dr} \quad (14)$$

originada de la condición de borde en  $z = h$  y obtenida de aplicar a la expresión (12) la ortogonalidad de la función  $J_\nu(x)$  bajo la integración (producto interior)  $\int_0^1 x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) dx = 0$  ( $\alpha \neq \beta$ ).

## 2.2. FLUJO EN UNA TUBERIA (POISEUILLE)

### 2.2.1. Sección Circular

El flujo dentro de una tubería con cualquier inclinación y de sección circular se describe con un perfil radial de velocidad axial con simetria y un gradiente de presión piezométrica (ver Sección 1.3.1) constante que impulsa el flujo en la forma

$$v_z = U(r) \quad \beta = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} \quad (1)$$

La ecuación de Navier-Stokes (ec. 1.3.(1) y tabla 6) ya simplificadas es la siguiente

$$0 = \beta + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dU}{dr} \right) \quad \begin{array}{ll} r = 0 & dU/dr = 0 \\ r = R & U = 0 \end{array} \quad (2)$$

donde se aplico la condición de no deslizamiento en contacto con la pared de la tubería y simetría axial en el eje  $z$ .

La solución de (2) es la siguiente

$$U = -\frac{\beta}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_o \quad \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_o = \frac{\beta R^2}{4\mu} \end{array} \quad (3)$$

El término con el logaritmo se descarta porque en el origen tiende a  $-\infty$ . Por lo que definitivamente el perfil de velocidades es

$$U = \frac{\beta R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad Q = \frac{\beta \pi R^4}{8\mu} \quad (4)$$

La segunda expresión es la *ecuación de Hagen-Poiseuille* para tuberías lisas en régimen laminar.

### 2.2.2. Sección Anular

En el problema anterior, cuando el flujo se confina a una sección anular, entonces la ecuación diferencial es la misma y sólo cambian las condiciones de borde en la forma

$$0 = \beta + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dU}{dr} \right) \quad \begin{array}{ll} r = R_o & U = 0 \\ r = R & U = 0 \end{array} \quad (5)$$

donde en ambas superficies extremas que confinan el flujo se han aplicado la condición de no deslizamiento.

La solución de (5) es la siguiente

$$U = -\frac{\beta}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_o \quad \begin{array}{l} C_1 = \frac{\beta}{4\mu} \left[ \frac{R^2 - R_o^2}{\ln(R/R_o)} \right] \\ C_o = \frac{\beta}{4\mu} \left[ R^2 - \frac{R^2 - R_o^2}{\ln(R/R_o)} \ln R \right] \end{array} \quad (6)$$

En  $C_1$  y  $C_o$  da lo mismo si se intercambian  $R$  por  $R_o$ . En definitiva, el perfil de velocidades queda como

$$\begin{aligned} U &= \frac{\beta R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1 - (R_o/R)^2}{\ln(R_o/R)} \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right] \\ U &= \frac{\beta R_o^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_o} \right)^2 - \frac{(R/R_o)^2 - 1}{\ln(R_o/R)} \ln \left( \frac{r}{R_o} \right) \right] \end{aligned} \quad Q = \frac{\beta \pi R^4}{8\mu} \left[ 1 - \left( \frac{R_o}{R} \right)^4 + \frac{(1 - (R_o/R)^2)^2}{\ln(R_o/R)} \right] \quad (7)$$

donde  $Q$  es el caudal volumétrico a través de la sección anular.

Si en este problema el cilindro sólido del centro se desliza con un velocidad paralela al eje  $z$  de magnitud  $U_o$ , entonces los coeficientes cambian

$$C'_o = C_o - \frac{\ln R}{\ln(R_o/R)} U_o \quad C'_1 = C_1 + \frac{1}{\ln(R_o/R)} U_o \quad (8)$$

Si por el contrario el cilindro que se mueve es el de afuera, entonces los mismos coeficientes se modifican como

$$C'_o = C_o + \frac{\ln R_o}{\ln(R_o/R)} U_o \quad C'_1 = C_1 - \frac{1}{\ln(R_o/R)} U_o \quad (9)$$

Si ambos cilindros se deslizan, entonces se fija el marco de referencia a uno de ellos y se resuelve el problema como alguno de los dos anteriores. Este último problema se podría muy bien denominar *flujo Poiseuille-Couette tubular*.

### 2.3. FLUJO ENTRE DOS CILINDROS (TAYLOR)

En este problema el cilindro exterior de radio  $R$  gira con un avelocidad angular  $\omega$ , mientras que el cilindro interior de radio  $R_o$  gira con un avelocidad angular  $\omega_o$ . El perfil de velocidades tangenciales  $v_\theta$  es dependiente únicamente del radio  $r$  y posee una simetría axial. Esto es,

$$v_\theta = V(r) \quad (1)$$

Eliminando de la ecuación de Navier-Stokes los términos nulos y considerando que, en este caso la condición de no deslizamiento se establece con respecto a cada cilindro, una de las ecuaciones que sobrevive es la de la dirección angular

$$0 = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V) \right] \quad \begin{array}{ll} r = R_o & V = \omega R_o \\ r = R & V = \omega R \end{array} \quad (2)$$

La solución de (2) es la siguiente

$$V = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} \quad \begin{array}{l} C_1 = \frac{R^2 \omega - R_o^2 \omega_o}{R^2 - R_o^2} \\ C_2 = R_o^2 \omega_o - C_1 R_o^2 \end{array} \quad (3)$$

y substituyendo los coeficientes definitivamente queda como

$$V = \frac{1}{R^2 - R_o^2} \left[ (R^2 \omega - R_o^2 \omega_o) r - R_o^2 R^2 (\omega - \omega_o) \frac{1}{r} \right] \quad (4)$$

Otra ecuación que sobrevive es la de la dirección radial

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} = \rho V^2 \frac{1}{r} \quad r = R \quad P = P_z \quad (5)$$

que permite obtener el campo de presiones. El término en el miembro de la derecha es el negativo aceleración centrípeta (positivo de la aceleración centrífuga) contenida en el término convectivo de la aceleración en coordenadas cilíndrica (ver Tabla 5 de la Sección 1.1). La condición  $P_z$  es la presión en la periferia ( $r = R$ ) y cuyo gradiente puede ser igual al gradiente axial  $dP_z/dz = \partial P/\partial z$ .

La solución de (25), una vez sustituida la solución para  $V(r)$ , es la siguiente

$$\tilde{P} = \rho \left[ \frac{R^2 C_1^2}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 + 2C_1 C_2 \ln \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{C_2^2}{2R^2} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] - \frac{\rho}{2} (R^2 C_1^2 - C_2^2 / R^2) + P_z \quad (6)$$

que representa el crecimiento de la presión hacia la periferia debido a la fuerza centrífuga de la ecuación (5).

### 3. PROBLEMAS FUNDAMENTALES (TRANSITORIOS)

#### 3.1. FLUJO SOBRE PLACA MOVIL (STOKES)

Los problemas de Stokes son los ejemplos más representativos de los flujos transitorios. Conforman fundamentalmente dos problemas: Movimiento repentino de una placa plana y movimiento oscilatorio de la misma placa. Ambos se describirán en breve a continuación.

##### 3.1.1. Primer Problema de Stokes

El primer problema de Stokes consiste en el movimiento repentino de una placa plana, lo que origina un flujo transitorio del tipo  $v_x = u(t, y)$ . La simplificación de la ecuación de Navier-Stokes se reduce en la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales y su respectiva condición inicial y de borde (no deslizamiento)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad u(t, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ U & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Haciendo el análisis de similitud se obtiene que el problema en análisis se puede describir de la siguiente forma alternativa

$$\frac{u(t, y)}{U} = f(\eta) \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad (2)$$

transformando a la ecuación diferencial parcial (1) en una ecuación diferencial ordinaria equivalente

$$f'' + 2\eta f' = 0 \quad f'(\eta) = C_1 e^{-\eta^2} \quad \begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

con sus respectivas condiciones de borde.

La solución general de (3) es

$$f(\eta) = C_1 \int_0^\eta e^{-\xi^2} d\xi + C_0 \quad \begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_1 &= -2/\sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (4)$$

y la aplicación de las condiciones de borde definitivamente dan la siguiente solución

$$\frac{u(t, y)}{U} = 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (5)$$

donde se utiliza la *función de error*.

Un análisis de la solución indica que la misma se reduce en un 4lo que produce que la capa de espesor

$$\delta = 3\sqrt{\nu t} \quad \eta = 3/2 = \frac{\delta}{2\sqrt{\nu t}} \quad (6)$$

es la zona de influencia del flujo alrededor de la placa plana.

### 3.1.2. Segundo Problema de Stokes

El segundo problema de Stokes consiste en el movimiento oscilatorio de una placa plana, lo que origina un flujo transitoriamente oscilatorio de la forma  $v_x = u(t, y)$ . La simplificación de la ecuación de Navier-Stokes se reduce en la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales y su respectiva condición inicial y de borde (no deslizamiento)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad u(t, 0) = U \cos \omega t \quad (7)$$

La solución de (1) se puede obtener en el plano complejo mediante el siguiente cambio de variables

$$\frac{d^2 w}{dy^2} - i \frac{\omega}{\nu} w = 0 \quad u(t, y) = \Re[w(y) e^{i\omega t}] \quad (8)$$

que origina un problema oscilatorio equivalente. Notando que  $\sqrt{i} = \pm(1+i)/\sqrt{2}$ , la solución general de la ecuación diferencial (8) es la siguiente

$$w(y) = C_1 \left[ -(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right] + C_2 \left[ (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right] \quad \begin{array}{l} C_1 = U \\ C_2 = 0 \end{array} \quad (9)$$

Substituyendo las condiciones iniciales y de borde, resulta en la siguiente solución particular

$$\frac{u(t, y)}{U} = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) \quad (10)$$

La mayor amplitud se tiene en contacto con la placa y es igual a  $U$ . La segunda mayor amplitud se tiene a una distancia  $\delta$  igual a

$$\delta = \pi \sqrt{2\nu/\omega} \quad u = 1/e^\pi \quad (11)$$

lo que marca el tamaño de la zona de influencia.

## 3.2. OSCILACION EN TUBERIA

### 3.2.1. Oscilación Tubo Sólo

La oscilación de un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  dentro de un tubo sólo es un problema transitorio dependiente por supuesto del tiempo, pero también dependiente de la posición espacial  $x$  a lo largo de la tubería como una coordenada curvilínea

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{4\tau_w}{\rho D} = 0 \quad (1)$$

Esto si no hay cambio en la sección del flujo, que es el caso que nos ocupa. La velocidad  $U$  es la velocidad media del flujo en la tubería por lo que el problema se trata como un tubo de corriente en la ecuación (1) (ver Sección IX.1.4.2). Cuando el conducto no es de sección circular de diámetro  $D$ , entonces esta variable se convierte en lo que denominamos el diámetro hidráulico.

El esfuerzo cortante se relaciona con el flujo medio  $U$  mediante la ecuación de Darcy-Weisbach en la forma

$$\tau_w = \frac{f}{8} \rho U |U| \quad f = f(\Re, \varepsilon/D) \quad \Re = \frac{\rho |U| D}{\mu} \quad (2)$$

donde  $f$  es el factor de fricción que depende del régimen del flujo en el número de Reynolds  $\Re$  y eventualmente en régimen turbulento también muestra dependencia de la rugosidad relativa  $\varepsilon/D$ .

### Laminar

Cuando el régimen es laminar entonces el factor de fricción está dado unívocamente por la ecuación de Hagen-Poiseuille 2.2.(4.b) como

$$f = \frac{64}{Re} \quad \tau_w = \frac{8\mu U}{D} \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que la energía cinética no varía a lo largo del conducto, lo que anula el segundo término de (1), las presiones al inicio y final son las mismas atmosféricas, anulando el tercer término, y existe únicamente cambio de la energía potencial y fricción viscosa en los dos últimos términos, respectivamente, entonces la integración de (1) a lo largo del tubo se reduce a un oscilador simple amortiguado sin forzamiento

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (4)$$

donde  $U = dx/dt$  y los coeficientes son

$$m = L \quad c = \frac{32\nu L}{D^2} \quad k = 2g \quad (5)$$

siendo  $L$  la longitud de líquido a lo largo del tubo y representa la inercia del sistema,  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática e interviene en el término de amortiguamiento del sistema, proporcional a la longitud e inversamente proporcional al diámetro al cuadrado, y el término elástico  $k$  conforma la diferencia de potencial entre la entrada y la salida  $z_2 - z_1 = 2x$ , considerando  $x = 0$  cuando las superficies libres están niveladas./

La solución de (4) bajo las condiciones iniciales  $x(0) = x^o$ ,  $x'(0) = v^o$  es

$$x(t) = e^{-\alpha t} [C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)] \quad C_1 = x^o \quad C_2 = (v^o + \alpha x^o)/\omega_d \quad (6)$$

donde

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{c}{c_o} \quad c_o = 2m\omega_n \quad \alpha = \frac{c}{2m} \quad (7)$$

siendo  $c_o$  en coeficiente de amortiguamiento crítico, debajo del cual el valor de  $c < c_o$  da un comportamiento subamortiguado como en (6). El coeficiente  $\alpha$  es el inverso del tiempo de amortiguamiento,  $\omega_d$  es la frecuencia amortiguada y  $\omega_n$  es la frecuencia natural que se tuviera en el sistema si no hubiese amortiguamiento. Una forma de estimar la frecuencia amortiguada es mediante el uso de lo que se denomina *decremento logarítmico* definido con dos máximos de oscilaciones seguidas (del mismo lado) como

$$\delta = \ln \frac{x^k}{x^{k+1}} = \alpha T_d = \frac{2\pi\alpha}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi c}{m\omega_d} \quad (8)$$

donde  $T_d = 2\pi/\omega_d$  es el período amortiguado. De aplicar (6) a dos máximos consecutivos se tiene que  $x^k/x^{k+1} = \exp(\alpha T_d)$  y de allí se obtiene fácilmente (8).

Cuando  $c > c_o$  ( $\zeta > 1$ ) entonces el comportamiento es sobreamortiguado de la forma

$$x(t) = C_1 e^{\beta_1 t} + C_2 e^{\beta_2 t} \quad \begin{aligned} \beta_1 &= -\alpha + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \\ \beta_2 &= -\alpha - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad \begin{aligned} C_1 &= (x^o - v^o/\beta_2)/(1 - \beta_1/\beta_2) \\ C_2 &= (x^o - v^o/\beta_1)/(1 - \beta_2/\beta_1) \end{aligned} \quad (9)$$

con  $\beta_1$  y  $\beta_2$  las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial. Este último comportamiento se obtiene sólo en caso de líquidos altamente viscosos.

### Turbulento

En régimen turbulento el factor de fricción no se substituye sino que es dependiente del número de Reynolds y por ende de la velocidad  $U$ , lo que hace resoluble el problema sólo de forma numérica. No obstante, si se deja indicado el factor de fricción la ecuación (1) integrada a lo largo del tubo da el siguiente resultado

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \pm c \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + kx = 0 \quad (10)$$

donde los coeficientes son

$$m = L \quad c = \frac{fL}{2D} \quad k = 2g \quad (11)$$

y donde el doble signo contempla si la oscilación es en el sentido positivo o negativo.

Ahora teniendo en cuenta

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx} \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dU^2}{dz} \quad (12)$$

entonces (10) queda de la forma

$$\frac{m}{2} \frac{dU^2}{dx} \pm cU^2 + kx = 0 \quad (13)$$

y acepta un factor integrante  $\exp(\pm \lambda x)$ , con  $\lambda = 2c/m$ . Aplicándolo se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{m}{2} U^2 e^{\pm \lambda x} \right) = -kx e^{\pm \lambda x} \quad (14)$$

Integrando entre dos puntos consecutivos con velocidad nula en oscilaciones continuadas (de uno y otro lado) queda finalmente

$$F(x^{k+1}) = F(x^k) \quad F(x) = (1 \mp \lambda x) e^{\pm \lambda x} \quad (15)$$

donde la función  $F$  es, salvo el factor  $\pm k/\lambda^2$ , la función primitiva del miembro de la derecha de (14), y que es la constante de integración por la nulidad de  $U$ . Sabiendo entonces un mínimo podemos obtener un máximo con el signo positivo y teniendo un máximo podemos tener un mínimo usando el signo negativo. Particularmente, la función  $F^+(\phi) = (1 - \phi)e^\phi$  está acotada entre 0 y 1, con  $\phi = |\lambda x|$ , mientras que la función  $F^-(\phi) = (1 + \phi)e^{-\phi}$  queda por encima. Las oscilaciones (15) saltan de una función a la otra de manera alternativa. Horizontalmente, para cambiar el valor de  $\phi$  y verticalmente para cambiar la constante de integración al cambiar el tipo de función.

Un observación necesaria es que un flujo oscilante nunca será permanentemente turbulento, porque su velocidad siempre disminuirá por debajo un valor crítico, y se convertirá en laminar cerca de los extremos donde la velocidad es nula. Sin embargo, considerando estos son lapsos de tiempo son pequeños en lo que dura el régimen laminar cerca de los máximos y mínimos, el modelo anterior se puede aceptar válido dentro de cierto margen.

### 3.2.2. Oscilación Entre Tanques

Suponiendo que los tanques tienen el fondo al mismo nivel, la integración de la ecuación de Bernoulli (1) se realiza de forma parecida, salvo que con tres observaciones adicionales. Primero se han despreciado las energía cinéticas de las superficies libres de los tanques y sus diferencias. Segundo, las pérdidas viscosas (último término) involucran una longitud equivalente  $L_e > L$  mayor que la original de la tubería, que incorpora las pérdidas en los accesorios intermedios y en la entrada y salida de la tubería, desde y hacia los tanques. Tercero, la integración del término de energía potencial (penúltimo término) da la resta de las cotas  $z_2 - z_1 = x_2 + x_1$ . La coordenada  $x_2$  mide la ubicación de la superficie libre del tanque 2 hacia arriba y la coordenada  $x_1$  mide la ubicación de la superficie libre del tanque 2 hacia abajo. La coordenada  $x$

mide la posición una partícula dentro de la tubería. Un balance de caudal volumétrico y su correspondiente integración dan

$$\mathcal{A}_1 \frac{dx_1}{dt} = \mathcal{A} \frac{dx}{dt} = \mathcal{A}_2 \frac{dx_2}{dt} \quad \mathcal{A}_1 x_1 = \mathcal{A} x = \mathcal{A}_2 x_2 \quad (16)$$

donde  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_2$  son las áreas del tanque 1, de la tubería y del tanque 2, respectivamente. Las condiciones iniciales en la integración se escogieron todas coincidentalmente nula para simplificar los resultados, pero no siempre es así. El cambio de variables en (16.b) da que el término de energía potencial se pueda colocar entonces completamente en función de  $x$ . Incorporando estas dos observaciones entonces la ecuación diferencial (4) en régimen laminar queda idéntica, pero los coeficientes se modifican a los siguientes

$$m = L \quad c = \frac{32\nu L_e}{D^2} \quad k = g\mathcal{A} \left( \frac{1}{\mathcal{A}_1} + \frac{1}{\mathcal{A}_2} \right) \quad (17)$$

Para régimen turbulento la ecuación diferencial que aplica es la (10), pero con los nuevos coeficientes

$$m = L \quad c = \frac{fL_e}{2D} \quad k = g\mathcal{A} \left( \frac{1}{\mathcal{A}_1} + \frac{1}{\mathcal{A}_2} \right) \quad (18)$$

La resoluciones de las ecuaciones diferenciales es igual que en el caso de la tubería sólo para cada régimen.

Cuando los tanques no están nivelados, sino que, por ejemplo, el fondo tanque 2 se eleva por encima del fondo del tanque 1, entonces las soluciones (16) siguen inalteradas, puesto que se ha usado como referencia (cuando se anularon las condiciones iniciales) para las cotas en la energía potencial el nivel del líquido sin perturbar.

### 3.2.3. Oscilación con Recipiente

Cuando se tiene un recipiente presurizado, por ejemplo del lado de 2, todo lo dicho antes para oscilaciones entre tanques sigue exactamente igual, pero el cambio de variables se altera un poco y existe presiones que no se cancelan al integrar el tercer término de (1). El cambio de variables se plantea de nuevo como un balance de caudal volumétrico y luego se integra

$$\mathcal{A}_1 \frac{dx_1}{dt} = \mathcal{A} \frac{dx}{dt} = \mathcal{A}_2 \frac{dx_2}{dt} \quad \mathcal{A}_1 x_1 = \mathcal{A} x = \mathcal{A}_2 (x_2 - x_2^o) \quad (19)$$

donde hemos supuesto que los orígenes de  $x$  y  $x_1$  son coincidentes (nulos en ambos) y diferente para  $x_2$ . Esto puede ocurrir si ese extremo está presurizado e inicialmente las superficies libres no están nivelada. No obstante se utiliza la misma referencia (la de  $x_1$ ) para medir las energía potencial en ambos tanque y recipiente. El cambio de variables se hace más elaborado

$$x_1 = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_1} x \quad x_2 = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_2} x + x_2^o \quad z_2 - z_1 = x_1 + x_2 = \mathcal{A} \left( \frac{1}{\mathcal{A}_1} + \frac{1}{\mathcal{A}_2} \right) x + x_2^o \quad (20)$$

lo que agrega a la ecuación diferencial, ya no homogénea, un término de forzamiento tipo escalón.

El término de presión ya no es nulo, sino que es

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} = \frac{P - P_a}{\rho} \quad P = \frac{P^o \mathcal{V}^{ok}}{[\mathcal{V}^o - (x_2 - x_2^o)\mathcal{A}_2]^k} \quad (21)$$

donde se aplicó la expansión-compresión del gas presurizado mediante la relación isoentrópica con presiones absolutas, siendo  $P_a$  la presión atmosférica absoluta y  $\mathcal{V}^o$  el volumen de gas originalmente atrapado sin oscilación en la posición  $x_2^o$ . Esta última modificación le agrega a la ecuación diferencial no linealidades que antes no existían.



### 3.3. GOLPE DE ARIETE

El fenómeno de *golpe de ariete* se distingue del anterior de oscilaciones en que en éste no tiene salida libre para el flujo o la tiene reducida con mucha rapidez. En oscilaciones el flujo está libre a uno y otro lado reduciendo su amplitud por la viscosidad. En golpe de ariete se origina una onda de presión que se propaga a lo largo del conducto.

#### 3.3.1. Velocidad de Propagación

Sea una tubería de diámetro  $D$ , área  $\mathcal{A}$ , llevando un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  a una velocidad  $U$  de izquierda a derecha. AL final de la tubería existe una válvula que se cierra rápida o paulatinamente, total o parcialmente. Justo en los alrededores de la válvula se genera una sobrepresión  $P$  por el frenado del fluido, siendo esta perturbación propagada aguas arriba a la velocidad del sonido  $c$  en el medio.

Las ecuaciones que describen el fenómeno son las de conservación de:

Masa

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{d\mathcal{A}}{dt} = 0 \quad (1)$$

Cantidad de Movimiento

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{fU|U|}{2D} = 0 \quad (2)$$

Las formas de las ecuaciones son tales que incluyen el hecho de que el área de la sección de la tubería se puede deformar y por lo tanto afecta el flujo. Las derivadas totales  $d/dt = \partial/\partial t + U \partial/\partial x$  tienen una parte transitoria y otra parte convectiva. La conservación de la masa se ha obtenido de aplicar el teorema del transporte a un volumen diferencial  $\rho \mathcal{A} \delta x$  y luego hallar el límite.

Dos propiedades de los fluidos están relacionada con la propagación de un onda de presión, el módulo de elasticidad volumétrica y la compresibilidad

$$K = -v \left. \frac{dP}{dv} \right|_s = \rho \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_s \quad K = \frac{k}{\kappa} \quad \kappa = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \quad (3)$$

Aunque comunmente  $K$  no se especifica a entropía constante, las pruebas para obtenerla se hacen sin calor (adiabático) y con velocidades moderadas (cuasi-estático-reversible). De aquí se obtiene que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dP}{dt} \quad (4)$$

que usaremos más adelante.

Un casquete de la mitad de una tubería se analiza y posee una fuerza tangencial interna  $T$  por unidad de longitud que al dividirlo entre el área de espesor  $e$  nos da el esfuerzo  $\sigma$ , que está relacionado con la deformación  $\epsilon$

$$T = \frac{PD}{2} \quad \sigma = \frac{T}{e} = E \epsilon \quad \begin{aligned} d\sigma &= E d\epsilon = \frac{d(PD)}{2e} \\ d\epsilon &= \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}} \end{aligned} \quad (5)$$

de donde se obtiene que

$$\frac{D}{eE} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{d\mathcal{A}}{dt} \left( 1 - \frac{PD}{2eE} \right) \approx \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{d\mathcal{A}}{dt} \quad (6)$$

Substituyendo (4) y (6) en la ecuación de continuidad (1) queda la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} + c^2 \frac{\partial U}{\partial x} \quad c^2 = \frac{K/\rho}{1 + (K/E)(D/e)} \quad (7)$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de la onda de presión y que depende en cierta medida de la elasticidad de la tubería.

### 3.3.2. Tubería Rígida (Joukowski)

Cuando la tubería es rígida ( $E \rightarrow \infty$ ) en la ecuación (7.b) debe suprimirse en el denominador el segundo término y queda

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (8)$$

Un modelo muy simple de aplicar asumiendo la tubería rígida es el *modelo de Joukowski*. Asumimos que una válvula se cierra de forma repentina dejando salir todavía una velocidad  $V$ . La onda se propaga y va recorriendo una distancia  $L$  para el instante de análisis formando un volumen de control de área  $\mathcal{A}$  y longitud  $L$ , dejando salir una velocidad del lado derecho de  $V$  a la sobrepresión  $P$  y dejando entrar una velocidad del lado izquierdo de  $W$  a la presión original  $P_o$  inalterada todavía. Aplicamos los principio de conservación:

Masa

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathcal{A} L) + \rho \mathcal{A} [V - (W + C)] = 0 \quad (9)$$

Cantidad de Movimiento

$$(P_o - P)\mathcal{A} = \frac{d}{dt}(\rho V \mathcal{A} L) + \rho \mathcal{A} [V^2 - U(V + c)] \quad (10)$$

De la primera ecuación se obtiene que  $W = V$ , incluyendo que  $dL/dt = c$ . De la segunda ecuación se obtiene

$$P - P_o = \rho (U - V)(c + V) \quad (11)$$

Si graficamos la curva de  $(P - P_o)/\rho$  vs.  $V$  observamos que es una parábola y su valor máximo es  $[(U + C)/2]^2$  y se obtiene para  $V = (U - c)/2$  que es un valor negativo. Cuando no existe una fuga  $V = 0$  por la válvula entonces la sobrepresión se estima sencillamente  $P - P_o = \rho U c$ .

Cuando adicionalmente la variación de la velocidad en la válvula es transitoria, entonces la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (10) no es necesario modificarse, sino que hay que tener en cuenta que  $V$  se deriva con el tiempo, con lo que se obtiene

$$P - P_o = \rho (U - V)(c + V) - \rho c t \frac{dV}{dt} \quad (12)$$

Esta expresión permite ahora considerar como afecta la sobrepresión el hecho de que la válvula ya no tiene un cierre instantáneo como (11), sino gradual.

### 3.3.3. Tubería Elástica

Para una tubería elástica la velocidad de propagación de la onda de presión es

$$c = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + (K/E)(D/e)}} \quad (13)$$

Despreciando el término convectivo de la velocidad en (2) y despreciando el término convectivo de la presión en (7), se obtienen el siguiente par de ecuaciones diferenciales respectivamente, que intentaremos resolver con el *método de las características*

$$L_1 = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{fU|U|}{2D} = 0 \quad (14.a)$$

$$L_2 = \frac{\partial P}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (14.b)$$

Estas dos ecuaciones se pueden combinar linealmente y hacer

$$L = L_1 + \lambda L_2 = \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \lambda \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\rho \lambda} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + g \sin \theta + \frac{fU|U|}{2D} \quad (15)$$

El primer término de (15) en el paréntesis es la derivada total  $dU/dt$  si  $\lambda \rho c^2 = dx/dt$ . En forma similar, el segundo término en paréntesis es la derivada total  $dP/dx$  si  $1/(\rho \lambda) = dx/dt$ . Estas ecuaciones son ambas correctas si  $dx/dt$  tiene el mismo valor

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \rho c^2 = \frac{1}{\lambda \rho} = \pm c \quad \lambda = \pm \frac{1}{\rho c} \quad (16)$$

Finalmente la ecuación completa para  $L$  es

$$L = \frac{dU}{dt} \pm \frac{1}{\rho c} \frac{dP}{dt} + g \sin \theta + \frac{fU|U|}{2D} = 0 \quad (17)$$

Esta es la ecuación que permite aplicar el método de las características una vez discretizada en una línea característica positiva y otra negativa que lleven al mismo punto.

## 4. TEORIA DE LA CAPA LIMITE

### 4.1. CAPA LIMITE LAMINAR

#### 4.1.1. Fundamentos

La capa límite es un término acuñado por Prandtl (1904) [Prandtl & Tietjens, 1934] al intentar separar el flujo en dos regiones. Una externa donde los efectos viscosos son despreciables y son válidas las hipótesis de flujo potencial con velocidad local  $U_\infty$  y una interna cercana a la pared sólida donde los efectos de la viscosidad se vuelven predominante debido a la condición de no deslizamiento y existe un perfil de velocidad  $v$ , lo que ocasiona una gradiente predominante de velocidad en la dirección perpendicular a dicha pared. Prandtl fué el primero en darse cuenta que los efectos de entrada del flujo aguas arriba se ven minimizados para números de Reynolds altos y la región donde los efectos viscosos son importantes se convierte en una capa delgada a la que denominó *Capa Límite*. Para su análisis en el caso plano supuso que las variaciones transversales (dirección  $y$ , con velocidad  $v$ ) a la capa son más pronunciados que las variaciones longitudinales (dirección  $x$ , con velocidad  $u$ ) al flujo. Estas hipótesis se pueden resumir en las siguientes expresiones

$$v \ll u \quad \frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \approx 0 \quad Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \gg 1 \quad (1)$$

pudiendo existir un gradiente de presión longitudinal favorable o adverso.

#### 4.1.2. Capa Límite en Placa Plana

El primer estudio analítico de la capa límite lo realizó von Kármán (1921) mediante procedimientos integrales aplicados al flujo sobre una placa plana impermeable. El análisis que se sigue en esta parte reproduce prácticamente el mismo análisis, sólo que añadiendo el efecto de una velocidad horizontal exterior (paralela a la placa)  $U_\infty$  variable con la posición a lo largo de la placa y añadiendo el efecto de un gradiente de presión  $\Delta$  que en principio puede no ser constante (luego se revisa el caso donde se le supone constante a cada una de las variables).

Se ha idealizado un volumen de control que va desde la entrada de la placa hasta una posición genérica  $x$  donde la capa tiene un espesor  $\delta$ , el mismo alto que el volumen de control, donde se supone que la velocidad alcanza casi (99%) la velocidad exterior  $U_\infty$  horizontal. El análisis se hará sólo sobre la parte superior, entendiendo que en la parte inferior ocurre exactamente lo mismo que una imagen especular de lo de arriba.

En cada posición  $x$  se supone conocido el perfil de velocidades expresado de “forma similar” para una posición genérica como

$$\frac{u}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (2)$$

siendo la distancia  $y$  la coordenada perpendicular a la superficie de la placa donde existe un esfuerzo cortante calculado para el fluido newtoniano como

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{U_\infty}{\delta} D_0 \quad D_0 = f'(0) \quad (3)$$

El área perpendicular de flujo en la entrada y la salida es  $\mathcal{A} = \delta b$  y el área lateral  $\mathcal{A}' = x b$ , siendo  $b$  el ancho de la placa. Puede existir una gradiente de presión longitudinal determinado por la ecuación de Bernoulli como

$$\Delta = -\frac{dP}{dx} = \rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \quad (4)$$

Cuando el gradiente de presión  $\Delta$  se considera constante, entonces se obtiene las soluciones particulares

$$P = -\Delta x + P_\infty^o \quad U_\infty^2 = \frac{2\Delta}{\rho} x + (U_\infty^o)^2 \quad (4')$$

donde  $U_\infty$  se considera función de la posición  $x$  y  $U_\infty^o$  es una constante de integración.

El principio de conservación de la masa aplicado al mencionado volumen de control por unidad de ancho  $b$  resulta en los siguientes términos

$$\int_0^\delta u \, dy - U_\infty^o \delta + \int_{\mathcal{A}'} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA'/b = 0 \quad (5)$$

siendo el último término el flujo a través del área lateral  $\mathcal{A}'$ . La velocidad  $U_\infty^o$ , una constante, es la que presenta el flujo justo antes de notarse la presencia de la placa para la posición  $x = 0$ .

El principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal aplicado al mismo volumen de control resulta en los siguientes términos

$$-\int_0^x \tau_w \, dx = \rho \left[ \int_0^\delta u^2 \, dy - (U_\infty^o)^2 \delta + \int_{\mathcal{A}'} U_\infty \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA'/b \right] + (P - P_\infty^o) \delta \quad (6)$$

donde  $P_\infty^o$ , una constante, es la presión justo antes de notarse la presencia de la placa para la posición  $x = 0$ .

La resolución del flujo sobre el área  $\mathcal{A}'$  de la ecuación (5) nos da

$$\int_{\mathcal{A}'} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA/b = U_\infty \delta^* + (U_\infty^o - U_\infty) \delta \quad (7)$$

donde

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = B_0 \delta \quad B_0 = \int_0^1 [1 - f(Y)] dY \quad (8)$$

es lo que se denomina el *Espesor de Desplazamiento* y coincide con la distancia medida desde la pared donde el perfil de velocidades origina el mismo flujo por debajo, que su complementario  $(U_\infty - u)$  por encima. El coeficiente  $B_0$  es una constante en el cálculo anterior, porque en la variable  $Y = y/\delta$  se vuelve independiente de la posición  $x$ .

La substitución de (7) en (6), una vez que se ha derivado con respecto a  $x$ , nos da el siguiente resultado

$$-\tau_w = \rho \left[ \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy - U_\infty (U_\infty - U_\infty^o) \frac{d\delta}{dx} - U_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy \right] + \frac{d}{dx} [(P - P_\infty^o)\delta] \quad (9)$$

que luego de reagrupar y cancelar términos nos da

$$\tau_w = \rho \left\{ \frac{d}{dx} (U_\infty^2 \theta) + [U_\infty^o (U_\infty^o - U_\infty) - (P - P_\infty^o)/\rho] \frac{d\delta}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dU_\infty^2}{dx} \delta^* \right\} \quad (10)$$

donde

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left( 1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy = C_0 \delta \quad C_0 = \int_0^1 f(Y) [1 - f(Y)] dY \quad (11)$$

es el *Espesor de Momento*. El coeficiente  $C_0$  igualmente es una constante de cálculo. Para el caso particular de gradiente de presión  $\Delta$  constante, la expresión anterior se reduce a

$$\tau_w = \rho \left[ \frac{d}{dx} (U_\infty^2 \theta) + \left( \epsilon (U_\infty^o)^2 + \frac{\Delta}{\rho} x \right) \frac{d\delta}{dx} + \frac{\Delta}{\rho} \delta^* \right] \quad \epsilon = (1 - U_\infty/U_\infty^o) \quad (10')$$

donde si  $\Delta > 0$  el gradiente de presión es favorable al flujo y desfavorable en el caso negativo. El valor de la función  $\epsilon$  se obtiene de la solución (4') incluida en la siguiente expresión equivalente

$$\tau_w = \rho \left[ \frac{d}{dx} (U_\infty^2 \theta) + (\beta \epsilon + \alpha x) \frac{d\delta}{dx} + \alpha \delta^* \right] \quad \epsilon = \frac{-2\alpha x}{\sqrt{\beta(2\alpha x + \beta)} + \beta} \quad (10'')$$

donde

$$U_\infty^2 = 2\alpha x + \beta \quad \alpha = \frac{\Delta}{\rho} \quad \beta = (U_\infty^o)^2 \quad (12)$$

Particularmente en el caso sin aceleración externa, con  $\Delta = 0$  ( $U_\infty = \text{Constante}$ ), la ecuación diferencial (10'') se reduce a la bien conocida ecuación

$$\tau_w = \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (13)$$

que igualada a la expresión (3) da el siguiente resultado para el espesor de la capa límite

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu D_0 x}{U_\infty C_0}} \quad \frac{\delta}{x} = \frac{\sqrt{2D_0/C_0}}{\mathcal{Re}_x^{1/2}} \quad \mathcal{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (14)$$

y el siguiente para el esfuerzo cortante en la pared y el coeficiente de fricción local

$$\tau_w = U_\infty^{3/2} \sqrt{\rho \mu D_0 C_0 / 2} x^{-1/2} \quad C_x = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \sqrt{2D_0 C_0} \mathcal{Re}_x^{-1/2} \quad (15)$$

Globalmente la fuerza de arrastre y el coeficiente de arrastre dan

$$F_D = \int_0^L \tau_w b dx = b U_\infty^{3/2} \sqrt{2\rho \mu D_0 C_0} L \quad C_D = \frac{F_D/(bL)}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \sqrt{8D_0 C_0} \mathcal{Re}_L^{-1/2} \quad (16)$$

para una sólo cara de la placa de longitud  $L$  y ancho  $b$  inmersa en un fluido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  ( $\nu = \mu/\rho$ ) (Ver Munson et al. Ejemplo 9.4, pp.555-559).

La siguiente tabla es un resumen de los resultados para varios tipos de perfiles en la capa límite laminar sin aceleración externa sobre una placa plana

Tabla 1. Resultados en el análisis de momentum en una placa plana para varios perfiles de velocidad

PERFIL	$\delta Re_x^{1/2}/x$	$C_x Re_x^{1/2}$	$C_D Re_L^{1/2}$
$u/U_\infty = y/\delta$	3.46	0.578	1.156
$u/U_\infty = 2y/\delta - (y/\delta)^2$	5.48	0.730	1.460
$u/U_\infty = 3(y/\delta)/2 - (y/\delta)^3/2$	4.64	0.646	1.292
$u/U_\infty = \text{Sen}[\pi(y/\delta)/2]$	4.79	0.655	1.310
Blasius	5.00	0.664	1.328

El modelo de la parábola es el de von Kármán, mientras que el modelo de la cúbica es de Prandtl. El modelo de Blasius, cuya solución se da al final de la tabla se analizará más adelante.

#### 4.1.3. Capa Límite Tubular Externa

Similar a como se hizo con la capa límite en una placa plana se puede hacer con el flujo exterior a una tubería, pero con simetría axial. El volumen de control se escoge ocupando la región anular entre la entrada de la tubería ( $x = 0$ ) y una posición genérica  $x$ , siendo el anillo un cuerpo de revolución de espesor  $\delta$  que es el espesor de la capa límite en la salida del volumen. De esta forma se define un área perpendicular de flujo  $\mathcal{A} = \pi\delta(2R + \delta)$ , siendo el perímetro del tubo calculado con su radio  $R$  como  $\mathcal{S} = 2\pi R$ . El diferencial de área distanciada de la pared impermeable en  $y$  hacia afuera se calcula como  $d\mathcal{A} = 2\pi r dr$  con  $r = R + y$  el radio de ubicación de dicha posición. El área lateral cilíndrica del flujo que se aleja de la tubería es  $\mathcal{A}' = 2\pi(R + \delta)x$ . Supondremos de igual manera que el perfil de velocidades aunque axisimétrico tiene la misma dependencia funcional genérica que (2).

Puede existir una gradiente de presión longitudinal determinado por la ecuación de Bernoulli como en (4) y (4'), donde la velocidad en el exterior de la capa límite  $U_\infty$  se considera función de la posición  $x$  y  $U_\infty^o$  es una constante de integración y representa de nuevo la velocidad de entrada del flujo que todavía no se ha percatado de la existencia de la pared sólida.

El principio de conservación de la masa aplicado al mencionado volumen de control resulta en los siguientes términos

$$\int_{\mathcal{A}} u d\mathcal{A} - U_\infty^o \mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}'} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A}' = 0 \quad (17)$$

siendo el último término el flujo a través del área lateral  $\mathcal{A}'$ . La velocidad  $U_\infty^o$ , una constante, es la que presenta el flujo justo antes de notarse la presencia de la placa para la posición  $x = 0$ .

El principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal aplicado al mismo volumen de control resulta en los siguientes términos

$$-\int_0^x \tau_w \mathcal{S} dx = \rho \left[ \int_{\mathcal{A}} u^2 d\mathcal{A} - (U_\infty^o)^2 \mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}'} U_\infty \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A}' \right] + (P - P_\infty^o) \mathcal{A} \quad (18)$$

donde  $P_\infty^o$ , una constante, es de nuevo la presión justo antes de notarse la presencia de la tubería para la posición  $x = 0$ .

La resolución del flujo sobre el área  $\mathcal{A}'$  de la ecuación (5) nos da

$$\int_{\mathcal{A}'} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA' = U_{\infty} \delta^* + (U_{\infty}^o - U_{\infty}) \mathcal{A} \quad (19)$$

donde

$$\delta^* = \int_{\mathcal{A}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{\gamma} (\gamma B_0 + B_1) \delta \quad B_0 = \int_0^1 [1 - f(\eta)] \, d\eta \quad B_1 = \int_0^1 \eta [1 - f(\eta)] \, d\eta \quad (20)$$

es lo que se denomina el *Espesor de Desplazamiento* y coincide con la distancia medida desde la pared donde el perfil de velocidades origina el mismo flujo por debajo, que su complementario  $(U_{\infty} - u)$  por encima. Los coeficientes  $B_0$  y  $B_1$  son un par de constantes en el cálculo anterior, porque en la variable  $\eta = y/\delta$  se vuelve independiente de la posición  $x$ . La posición radial se expresa entonces como  $r = (\gamma + \eta)\delta$ , siendo  $\gamma = R/\delta$  y  $dr = \delta \, d\eta$ . El diferencial del área entre el perímetro se expresa entonces como

$$\frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{S}} = (\gamma + \eta) \frac{\delta}{\gamma} \, d\eta \quad \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{S}} = 2\pi r \, dr \quad r = (\gamma + \eta) \delta \quad \gamma = R/\delta \quad \eta = y/\delta \quad dr = \delta \, d\eta \quad (21)$$

La substitución de (19) en (18), una vez que se ha derivado con respecto a  $x$ , nos da el siguiente resultado

$$-\tau_w \mathcal{S} = \rho \left[ \frac{d}{dx} \int_{\mathcal{A}} u^2 \, d\mathcal{A} - (U_{\infty}^o)^2 \frac{d\mathcal{A}}{dx} + U_{\infty} \frac{d}{dx} (U_{\infty} \mathcal{A}) - U_{\infty} \frac{d}{dx} \int_{\mathcal{A}} u \, d\mathcal{A} \right] + \frac{d}{dx} [(P - P_{\infty}^o) \delta] \quad (22)$$

que luego de reagrupar y cancelar términos nos da

$$\tau_w = \rho \left\{ \frac{d}{dx} (U_{\infty}^2 \theta) + [(U_{\infty}^o)^2 - U_{\infty}^2] - (P - P_{\infty}^o)/\rho \right\} \frac{d\mathcal{A}/\mathcal{S}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dU_{\infty}^2}{dx} (\delta^* - \mathcal{A}/\mathcal{S}) \quad (23)$$

donde

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{\gamma} (\gamma C_0 + C_1) \delta \quad C_0 = \int_0^1 f(\eta) [1 - f(\eta)] \, d\eta \quad C_1 = \int_0^1 \eta f(\eta) [1 - f(\eta)] \, d\eta \quad (24)$$

es el *Espesor de Momento*. Los coeficientes  $C_0$  y  $C_1$  igualmente son constantes de cálculo. Para el caso particular de gradiente de presión  $\Delta$  constante, la expresión anterior se reduce a

$$\tau_w = \rho \left[ \frac{d}{dx} (U_{\infty}^2 \theta) + \frac{\Delta}{\rho} \left( \delta^* - \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{S}} - x \frac{d\mathcal{A}/\mathcal{S}}{dx} \right) \right] \quad (23')$$

donde si  $\Delta > 0$  el gradiente de presión es favorable al flujo y desfavorable en el caso negativo. El valor de la función  $\mathcal{A}/\mathcal{S}$  y su derivada se obtienen de

$$\mathcal{A} = \pi \delta (2R + \delta) \quad \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{S}} = \delta \left(1 + \frac{\delta}{2R}\right) \quad \frac{d\mathcal{A}/\mathcal{S}}{dx} = \left(1 + \frac{\delta}{R}\right) \frac{d\delta}{dx} \quad (25)$$

De nuevo  $U_{\infty}^2$  se calcula con (12).

Particularmente en el caso sin aceleración externa, con  $\Delta = 0$  ( $U_{\infty} = \text{Constante}$ ), la ecuación diferencial (23') se reduce otra vez a la ecuación diferencial (13), sólo que en este caso el espesor de momento (24) se

expresa de forma distinta, por lo que la ecuación diferencial final da una expresión diferente. Igualando (23') con (3) resulta

$$\frac{\nu}{U_\infty} \frac{D_0}{\delta} = C_0 \dot{\delta} + \frac{2C_1}{R} \delta \dot{\delta} \quad \frac{\nu D_0}{U_\infty} x = \frac{C_0}{2} \delta^2 + \frac{2}{3} \frac{C_1}{R} \delta^3 \quad (26)$$

Esta ecuación cúbica reordenada da

$$\delta^3 + a\delta^2 - b = 0 \quad a = \frac{3}{4} \frac{C_0}{C_1} R \quad b = \frac{3}{2} \frac{D_0}{C_1} \frac{\nu}{U_\infty} R x^2 \quad (27)$$

y el resultado se obtiene aplicando la resolvente de Cardano (Sección E.1.1.2)

$$\delta = -\frac{a}{3} + \frac{2^{1/3} a^2}{3(B + 3\sqrt{C})^{1/3}} + \frac{(B + 3\sqrt{C})^{1/3}}{2^{1/3} 3} \quad (28a)$$

donde

$$B = 27b - 2a^3 \quad C = 3b(B - 2a^3) \quad (28b)$$

El segundo término es equivalente a  $(B - 3\sqrt{C})^{1/3} / (2^{1/3} 3)$

#### 4.1.4. Capa Límite Tubular Interna

En la capa límite tubular interior la sección de flujo del tubo de radio  $R$  se puede dividir en dos regiones. Una región central de área  $\mathcal{A}_o$  que denominaremos el núcleo y una región periférica de área  $\mathcal{A}$  que es la que encierra la capa límite circundante en contacto con la pared sólida. De esta forma se tiene que la suma de estas áreas dan el área total de la tubería

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_o + \mathcal{A} = \pi R^2 \quad \mathcal{A}_o = \pi(R - \delta)^2 \quad \mathcal{A}\pi[R^2 - (R - \delta)^2] = \pi\delta(2R - \delta) \quad (29)$$

Para el flujo interior las expresiones (21) cambian ligeramente a

$$\frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{S}} = (\eta - \gamma) \frac{\delta}{\gamma} d\eta \quad \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{S}} = 2\pi r dr \quad r = (\gamma - \eta) \delta \quad \gamma = R/\delta \quad \eta = y/\delta \quad dr = -\delta d\eta \quad (30)$$

y el perfil del velocidades se conoce para una posición genérica de la forma

$$\frac{u}{U_o} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (2)$$

donde  $U_o$  es la velocidad uniforme del núcleo que es la mayor de la sección. Ntése la diferencia con (2). El volumen de control con simetría axial es entonces la región de revolución en el intervalo  $[0, x]$  y entre los radios  $[R - \delta, R]$  (equivalente a  $y$  en el intervalo  $[0, \delta]$ ) que engloba toda la capa límite.

El principio de conservación de la masa aplicado al mencionado volumen de control resulta en los siguientes términos

$$\int_{\mathcal{A}} u d\mathcal{A} + U_o \mathcal{A}_o - U_\infty^o \mathcal{A}_t = 0 \quad (31)$$

que reordenados dan las siguientes dos expresiones

$$\int_{\mathcal{A}} u d\mathcal{A} + (U_o - U_\infty^o) \mathcal{A}_o - U_\infty^o \mathcal{A} = 0 \quad \int_{\mathcal{A}} (u - U_o) d\mathcal{A} + (U_o - U_\infty^o) \mathcal{A}_t = 0 \quad U_o \delta^* \mathcal{S} = (U_o - U_\infty^o) \mathcal{A}_t \quad (32)$$



donde

$$\delta^* = \int_{\mathcal{A}} \left(1 - \frac{u}{U_o}\right) \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{\gamma}(\gamma B_0 - B_1) \delta \quad B_0 = \int_0^1 [1 - g(\eta)] d\eta \quad B_1 = \int_0^1 \eta [1 - g(\eta)] d\eta \quad (33)$$

es el espesor de desplazamiento. La velocidad  $U_\infty^o$  y la presión  $P_\infty^o$  continúan siendo los valores del flujo antes de alcanzar la tubería en la entrada de la misma.

El principio de conservación de cantidad de movimiento lineal aplicado al mismo volumen de control arroja lo siguientes términos

$$- \int_0^x \tau_w \mathcal{S} dx = \rho \left[ \int_{\mathcal{A}} u^2 d\mathcal{A} + U_o^2 \mathcal{A}_o - (U_\infty^o)^2 \mathcal{A}_t \right] + (P - P_\infty^o) \mathcal{A}_t \quad (34)$$

Substituyendo (32) en esta última expresión y reorganizando los términos se obtiene

$$\begin{aligned} - \int_0^x \tau_w \mathcal{S} dx &= \rho \left[ \int_{\mathcal{A}} u^2 d\mathcal{A} + (U_o + U_\infty^o) (U_o - U_\infty^o) \mathcal{A}_o - (U_\infty^o)^2 \mathcal{A} \right] + (P - P_\infty^o) \mathcal{A}_t \\ &= \rho (-U_o^2 \theta + U_\infty^o U_o \delta^*) \mathcal{S} + (P - P_\infty^o) \mathcal{A}_t \end{aligned} \quad (35)$$

donde

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_o} \left(1 - \frac{u}{U_o}\right) \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{\gamma}(\gamma C_0 - C_1) \delta \quad C_0 = \int_0^1 g(\eta) [1 - g(\eta)] d\eta \quad C_1 = \int_0^1 \eta g(\eta) [1 - g(\eta)] d\eta \quad (36)$$

es el espesor de momento. Nótese las diferencias de las expresiones (33) y (36) con las expresiones (20) y (24). Ahora, derivando respecto a la variable  $x$  se despeja el esfuerzo cortante  $\tau_w$  en la pared

$$\tau_w = \rho U_o \left( U_o \frac{d\theta}{dx} - U_\infty^o \frac{d\delta^*}{dx} \right) + \rho \frac{dU_o}{dx} (2U_o \theta - U_\infty^o \delta^*) - \frac{\mathcal{A}_t}{\mathcal{S}} \frac{dP}{dx} \quad (37)$$

donde el esfuerzo también se expresa como para un fluido newtoniano mediante la expresión

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \frac{1}{\delta} = \mu U_o D_o \frac{1}{\delta} \quad D_o = g'(0) \quad (38)$$

Igualando ambas relaciones se obtiene

$$\mu U_\infty^o D_o \frac{\beta}{\delta} = \rho (U_\infty^o)^2 \beta \left\{ \beta \frac{d\theta}{dx} + [(2\beta\theta - \delta^*) \alpha - 1] \frac{d\delta^*}{dx} \right\} - \frac{\mathcal{A}_t}{\mathcal{S}} \frac{dP}{dx} \quad (39)$$

donde

$$\beta = \frac{U_o}{U_\infty^o} = \frac{\mathcal{A}_t}{\mathcal{A}_t - \mathcal{S} \delta^*} \quad \frac{dU_o}{dx} = \alpha \beta U_\infty^o \frac{d\delta^*}{dx} \quad \alpha = \beta \mathcal{S} / \mathcal{A}_t = 2\beta / R \quad (40)$$

Llamando  $\epsilon$  a lo que está entre los corchetes, finalmente resulta la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\nu}{U_\infty^o} D_o = (C_o \beta + B_o \epsilon) \delta \dot{\delta} - \frac{2}{R} (C_1 \beta + B_1 \epsilon) \delta^2 \dot{\delta} - \frac{R}{2\beta} \frac{dP/dx}{\rho (U_\infty^o)^2} \quad (41)$$

donde a continuación se han substituido todas las relaciones

$$\beta = \frac{\mathcal{A}_t}{\mathcal{A}_t - \mathcal{S} (B_o - B_1 \delta / R) \delta} \quad \epsilon = \alpha [2\beta (C_o - C_1 \delta / R) \delta - (B_o - B_1 \delta / R) \delta] - 1 \quad (42)$$

La siguiente tabla muestra los valores típicos de los coeficientes que presentan los distintos modelos donde lo que determina su valores son el perfil de velocidades.

Tabla 2. Valores de los coeficientes para distintos perfiles de velocidades.

PERFIL	$D_o$	$B_o$	$B_1$	$C_o$	$C_1$
$f(\eta) = \eta$	1	1/2	1/6	1/6	1/12
$f(\eta) = 2\eta - \eta^2$	2	1/3	1/12	2/15	1/20
$f(\eta) = (3\eta - \eta^3)/2$	3/2	3/8	1/10	39/280	9/160
$f(\eta) = \text{Sen}(\pi\eta/2)$	$\pi/2$	$1 - 2/\pi$	$1/2 - 4/\pi^2$	$2/\pi - 1/2$	$7/\pi^2 - 1/4$
Blasius	1.66	$x$	$x$	0.1328	$x$

Por ejemplo, el modelo de la parábola es debido a von Kármán, mientras que el modelo de la cúbica es debido a Prandtl. El modelo de Blasius que se menciona al final de la tabla se explicará en la próxima sección.

#### 4.1.5. Modelo de Blasius

Blasius, un alumno de Prandtl, propuso un modelo (presentado en su tesis doctoral en Göttingen en 1908) de la capa límite laminar sobre una placa plana, basado en la resolución de la ecuación de Navier-Stokes sin gradiente de presión (sin aceleración exterior)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (43)$$

Utilizando una ingeniosa transformación de coordenadas donde el campo de velocidades plano  $(u, v)$  se define de la forma

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty F'(\eta) \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{U_\infty}{2\sqrt{\text{Re}_x}} [\eta F'(\eta) - F(\eta)] \quad (44)$$

basado en una función de corriente  $\psi$  dependiente de una variable independiente  $\eta$  satisfaciendo las condiciones de similitud

$$\psi = \sqrt{\nu U_\infty x} F(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / U_\infty}} \quad (45)$$

Con lo cual obtiene finalmente la siguiente ecuación diferencial

$$F''' + \frac{1}{2} F F'' = 0 \quad (46)$$

con las siguientes condiciones de contorno

$$F(0) = F'(0) = 0 \quad F(\infty) = 1 \quad (47)$$

lo cual se puede resolver con el método del disparo en la condición  $F''(0)$  si se utiliza un método numérico de valor inicial. Esto dará un valor estimado de  $F''(0) \approx 0.33206$ . Para un valor de  $\eta \geq 5$  se considera que se está en el borde de la capa límite, puesto que  $F'(\eta) \geq 0.99155$ .

## 4.2 CAPA LIMITE TURBULENTA

### 4.2.1. Fundamentos

En esta parte del estudio del flujo turbulento en una capa límite se tiene la mismas hipótesis que en la capa laminar, sólo que las soluciones y modelos planteados son concebidos promediados en el tiempo (flujo estadísticamente estacionario).

### 4.2.2. Navier-Stokes

La ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas para este tipo de flujo incompresible y plano es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

De esta ecuación diferencial se puede obtener la velocidad  $v$  en  $y$  despejando como

$$v = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{d}{dx} \int_0^\delta (U_\infty - u) dy = U_\infty \frac{d\delta^*}{dx} \quad (2)$$

donde los dos últimos miembros han resultado de aplicar la Regla de Leibniz

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy = \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + u(\delta) \frac{d\delta}{dx} \quad (3)$$

y la definición del espesor  $\delta^*$  de desplazamiento

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = B_o \delta \quad (4)$$

igualmente definida para el flujo laminar.

La ecuación de Navier-Stokes para este tipo de flujo está promediada en el tiempo y es parecida al flujo laminar

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (5)$$

No obstante, el esfuerzo se calcula de forma diferente como se indica a continuación

$$\tau = \begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial y} & \text{Laminar} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} & \text{Turbulento} \end{cases} \quad (6)$$

Para el cálculo de la parte turbulenta, adelante se encontrará el modelo de la longitud de mezcla de Prandtl.

### 4.2.3. Ley de Potencia

El modelo de la ley de potencia se basa en un perfil de velocidades propuesto por Prandtl de la forma

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (7)$$

donde el exponente se ha correlacionado bien con los resultados experimentales, según Blasius, en el rango  $5 \times 10^5 < Re_L < 10^7$ . Los valores de los coeficientes para este perfil están mostrados en la siguiente tabla

Tabla 1. Valores de los coeficientes para el perfil de velocidades ley de potencia 1/7.

PERFIL	$D_o$	$B_o$	$B_1$	$C_o$	$C_1$
$f(\eta) = \eta^{1/7}$	$\infty$	1/8	1/30	7/72	7/240

Como es de observarse el perfil predice un gradiente de velocidad que es físicamente imposible, por lo que se hace necesario en el modelo estimar el esfuerzo cortante en la pared correlacionando, por sugerencia de Prandtl (ver [White,2004], pp.451-453), los resultados experimentales del coeficiente de fricción local de la forma

$$C_x = 2 \frac{d\theta}{dx} \approx 0.02 \mathit{Re}_\delta^{-1/6} = 0.027 \mathit{Re}_x^{-1/7} \quad (8)$$

donde

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = C_o \delta \quad (9)$$

es el mismo espesor de momento que para regimen laminar. Finalmente, se obtienen los siguientes resultados

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.16}{\mathit{Re}_x^{1/7}} \quad C_D = \frac{0.031}{\mathit{Re}_L^{1/7}} = \frac{7}{6} C_x(L) \quad (10)$$

Blasius por su parte (ve [Shames,1995], pp.593-598) recomendó en su lugar usar la siguiente correlación del coeficiente de fricción local para el esfuerzo cortante en la pared

$$C_x = 2 \frac{d\theta}{dx} \approx 0.045 \mathit{Re}_\delta^{-1/4} = 0.0577 \mathit{Re}_x^{-1/5} \quad (11)$$

con lo cual obtuvo los siguientes resultados alternativos

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{\mathit{Re}_x^{1/5}} \quad C_D = \frac{0.072}{\mathit{Re}_L^{1/5}} = \frac{5}{4} C_x(L) \quad (12)$$

La última correlación se ha corregido para incluir la porción de entrada laminar en la forma

$$C_D = \frac{0.074}{\mathit{Re}_L^{1/5}} - \frac{A}{\mathit{Re}_L} \quad (13)$$

donde el coeficiente  $A$  se escoge de la siguiente tabla

Tabla 2. Coeficiente de corrección de la ecuación (13).

$\mathit{Re}_L$	$3^5$	$5 \times 10^5$	$10^6$	$3 \times 10^6$
$A$	1050	1700	3300	8700

#### 4.2.4. Longitud de Mezcla

El modelo de la *longitud de mezcla* es debido a Prandtl, quien propuso que las fluctuaciones de la velocidades son proporcionales a una longitud característica  $\ell$  por el gradiente de velocidad. Específicamente

$$-v' = u' = \ell \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad \ell = \kappa y \quad (14)$$

donde  $\kappa \approx 0.41$  es la constante de von Kármán y la longitud característica  $\ell$  es proporcional a su vez a la distancia  $y$  perpendicular a la pared. Las fluctuaciones en contacto con la pared son ambas nulas, es decir, en  $y = 0$   $u' = 0$  y  $v' = 0$ , la primera por la condición de no deslizamiento y la segunda por la impermeabilidad de la pared sólida. De esta forma el esfuerzo cortante turbulento se puede estimar principalmente como (despreciando la componente molecular del esfuerzo debido a la viscosidad dinámica)

$$\tau = -\rho \overline{u'v'} = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad \mu_t = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (15)$$

El parámetro  $\mu_t$  a veces es denominado la *viscosidad turbulenta*, lo que justifica su notación.

Si se acepta que este esfuerzo es constante a lo largo del flujo e igual a su valor  $\tau_w$  en la pared, entonces la raíz cuadrada de la expresión anterior (pasando la densidad al miembro de la derecha) y considerando sólo dependencia respecto a  $y$ , da el siguiente resultado

$$\kappa y \left( \frac{du}{dy} \right) = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = U_\tau \quad (16)$$

donde la constante  $U_\tau$  (respecto a  $y$ ), por el hecho de tener dimensiones de velocidad, se le denomina *velocidad de fricción*, y posee un valor local diferente (respecto a  $x$ ). La integración de la ecuación diferencial anterior, luego de un conveniente adimensionamiento de las variables, resulta en lo que se denomina la *ley logarítmica*

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + A^+ \quad \kappa \approx 0.41 \quad A^+ \approx 5.5 \quad (y^+ > 20) \quad (17)$$

Los valores de las constantes  $\kappa$  y  $A^+$  se han adaptado a los experimentos con placas planas. Las variables adimensionales utilizadas

$$u^+ = \frac{u}{U_\tau} \quad y^+ = \frac{y U_\tau}{\nu} \quad (18)$$

reciben el nombre de *Variables de Pared*. Normalmente esta ley logarítmica es válida para  $y^+ > 20$ . Para valores menores  $y^+, 5$  el efecto de la viscosidad se hace predominante y la proporcionalidad lineal del esfuerzo con el gradiente de velocidad (fluido newtoniano) se reduce a

$$u^+ = y^+ \quad (y^+ < 5) \quad (19)$$

En el rango  $5 \leq y^+ \leq 20$  existe una transición que se modela con una función de amortiguamiento (Van Driest).

Todo lo dicho anteriormente es para el contacto con una superficie lisa. Cuando la superficie es rugosa la ley logarítmica se cambia por esta otra

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y^+}{\mathbf{k}_s^+} + B' \quad \mathbf{k}_s^+ = \frac{\mathbf{k}_s U_\tau}{\nu} \quad B' \approx 8.5 \quad (20)$$

siendo  $\mathbf{k}_s$  la rugosidad hidrodinámica de la pared, la cual se correlaciona experimentalmente (no tiene que ver nada con la rugosidad real de la superficie, excepto que son directamente proporcionales entre sí). La constante de integración  $B' \cong 8.5$  depende de la rugosidad  $B' = B'(\mathbf{k}_s^+)$  para valores en el rango  $5 \leq \mathbf{k}_s^+ \leq 70$ .

Por debajo ( $\mathbf{k}_s^+ < 5$ ) la superficie se considera hidrodinámicamente lisa. Una relación que permite encontrar aproximadamente la función  $B'(\mathbf{k}_s^+)$  en el rango de transición  $\mathbf{k}_s^+ < 43.6$  es

$$B'(\mathbf{k}_s^+) = B + X - C X^3 \quad X = \kappa^{-1} \ln \mathbf{k}_s^+ \quad (21)$$

con  $B = 5.5$  y  $C = 0.007666746$  [Granados,2003]. Por encima de este rango de transición, se asume  $B' = 8.5$  (Ec.(30), Sección XV.3.4.4).

#### 4.2.5. Acoplamiento Laminar-Turbulento

Los modelos para la capa límite laminar sobre una placa plana obviamente comienza al inicio de la misma por las hipótesis hechas para la misma. No obstante, los otros modelos para la capa límite turbulenta se han desarrollado para una longitud de la parte laminar despreciable. Cuando se está cerca de la zona de transición ( $Re_x \approx 5 \times 10^5$ ) esto ya no es del todo cierto. Es por ello es que se hace necesaria una forma de acoplar los dos regímenes con los modelos existentes. Un aforma de hacerlo es definir para la parte turbulenta un origen de la coordenada longitudinal diferente a la región laminar.

Sea el origen de la región laminar la punta de la placa plana con una coordenada longitudinal que denotaremos  $x$ . El origen virtual de la región turbulenta comienza un poco antes, una distancia  $\Delta x$ , previa a la transición en donde se estima que  $Re_x \approx 5 \times 10^5$ , ubicada a una distancia  $x_c$  medida desde desde la punta. Esto se debe hacer así porque los modelos de la capa límite turbulenta suponen que para su origen en  $\tilde{x} = 0$  la capa turbulenta tiene espesor nulo, donde denotaremos su coordenada longitudinal  $\tilde{x}$ . Existe entonces una transformación de coordenadas de una capa a la otra establecida como

$$\tilde{x} = x - x_c + \Delta x \quad dx = d\tilde{x} \quad (22)$$

lo que significa que en el intervalo  $[x_c - \Delta x, x_c]$  la capa sigue siendo laminar, pero virtualmente ya ha comenzado la parte turbulenta. El valor de  $\Delta$  se calcula igualando los espesores de las capa laminar y turbulenta en el mismo lugar de transición. Suponemos que los modelos laminar y turbulento tiene la misma forma para el espesor

$$\frac{\delta}{x} = \frac{a_l}{Re_x^\alpha} \quad \frac{\delta}{\tilde{x}} = \frac{a_t}{Re_{\tilde{x}}^\beta} \quad (23)$$

y para el coeficiente de fricción local

$$C_x = \frac{b_l}{Re_x^\alpha} \quad C_{\tilde{x}} = \frac{b_t}{Re_{\tilde{x}}^\beta} \quad (24)$$

Por ejemplo, para el modelo de Blasius laminar  $a_l = 4.96$ ,  $b_l = 0.664$  y  $\alpha = 1/2$ . Para el modelo de Blasius turbulento  $a_t = 0.37$ ,  $b_t = 0.0577$  y  $\beta = 1/5$ . HACiendo la mencionada igualación para el punto crítico, tenemos que

$$\delta_c = \frac{a_l x_c}{Re_{x_c}^\alpha} = \frac{a_t \Delta x}{Re_{\Delta x}^\beta} \quad (25)$$

con lo que despejando se obtiene

$$\Delta x = \left[ \frac{a_l (U_\infty / \nu)^\beta}{a_t Re_{x_c}^\alpha} x_c \right]^{\frac{1}{1-\beta}} \quad (26)$$

El coeficiente de arrastre de la porción laminar se calcula como

$$C_D = \frac{1}{x_c} \int_0^{x_c} C_x dx = \frac{(\nu/U_\infty)^\alpha b_l}{x_c} \int_0^{x_c} x^{-\alpha} dx = \frac{(\nu/U_\infty)^\alpha}{x_c} \frac{b_l}{1-\alpha} x_c^{1-\alpha} \quad (27)$$

El coeficiente de arrastre de la porción turbulenta se calcula como

$$\begin{aligned} C_{\bar{D}} &= \frac{1}{L - x_c} \int_{x_c}^L C_{\bar{x}} dx = \frac{1}{L - x_c} \int_{\Delta x}^{L - x_c + \Delta x} C_{\bar{x}} d\tilde{x} = \frac{(\nu/U_{\infty})^{\beta} b_t}{L - x_c} \int_{\Delta x}^{L - x_c + \Delta x} \tilde{x}^{-\beta} d\tilde{x} \\ &= \frac{(\nu/U_{\infty})^{\beta}}{L - x_c} \frac{b_t}{1 - \beta} [(L - x_c + \Delta x)^{1-\beta} - \Delta x^{1-\beta}] \end{aligned} \quad (28)$$

Finalmente se obtiene la fuerza de arrastre global y la potencia disipada

$$F_D = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 B [C_D x_c + C_{\bar{D}} (L - x_c)] \quad \dot{W} = F_D U_{\infty} \quad (29)$$

como la combinación lineal de los coeficientes de arreste de la porción laminar y la porción turbulenta. La dimensión  $B$  es el ancho de la placa plana y  $L$  es la longitud total de la misma.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Aris, R. **Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics**. Prentice-Hall, 1962.
- [2] Batchelor, G. K. **An Introduction to Fluid Dynamics**. Cambridge University Press, 1967. 13<sup>th</sup> Printing, 1990.
- [3] Churchill, S. W. **Viscous Flows: The Practical Use of Theory**. Butterworths Publishers (Boston), 1988.
- [4] Currie, I. G. **Fundamental Mechanics of Fluids**, Second Edition. McGraw-Hill, 1993.
- [5] Doering, Ch. R.; Gibbon, J. D. **Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations**. Cambridge University Press, 1995.
- [6] Dryden, H. L.; Murnaghan, F. D.; Bateman, H. **Hydrodynamics**. Dover Publications, 1956.
- [7] Flügge, S.; Truesdell, C. A.; (Eds.). **Encyclopedia of Physics**. Vol.VIII/2: "Fluid Dynamics II". Springer-Verlag, 1963.
- [8] Foias, C.; Manley, O.; Rosa, R.; Temam, R. **Navier-Stokes Equations and Turbulence**. Cambridge University Press, 2001.
- [9] Goldstein, S. (Ed.). **Modern Developements in Fluid Dynamics**. Dover Publications, 1965.
- [10] Granados, A. L. **Flujo Turbulento Cargado con Partículas Sólidas en una Tubería Circular**, Tesis Doctoral, Univ. Politécnica de Madrid, E. T. S. Ing. Industriales, 2003.
- [11] Granger, R. A. **Fluid Mechanics**. Dover Publications (New York), 1995.
- [12] Ladyzhenskaya, O. A. **The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow**, 2<sup>nd</sup> Edition. Gordon and Breach Science Publishers, 1969. 2<sup>nd</sup> Printing, 1987.
- [13] Lamb, H. **Hydrodynamics**, 6th Edition. Dover Publications, 1932.
- [14] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **Fluid Mechanics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Pergamon Press, 1987.
- [15] Meyer, R. E. **Introduction to Mathematical Fluid Dynamics**. Wiley-Interscience, 1971. Dover Publications, 1982.
- [16] Milne-Thomson, L. M. **Theoretical Hydrodynamics**. Macmillan (New York), 1950.
- [17] Moody, L. F. "Friction factors for pipe flow", **Trans. ASME**, Vol.66, p.671, (1944).
- [18] Munson, B. R.; Young, D. F.; Okiishi, T. H. **Fundamentals of Fluid Mechanics**, Fourth Edition, John Wiley & Sons Inc. (New York), 2002.
- [19] Nakayama, Y.; Woods, W. A.; Clark, D. G.; Japan Society of Mechanical Engineers; (Eds.). **Visualized Flow**. Pergamon Press, 1988.
- [20] Parmakian, J. **Waterhammer Analysis**. Dover Publications, 1963.

- [21] Prandtl, L.; Tietjens, O. G. **Fundamentals of Hydro - and Aeromechanics**. Dover Publications, 1934.
- [22] Prandtl, L.; Tietjens, O. G. **Applied Hydro - and Aeromechanics**. Dover Publications, 1934.
- [23] Raudkivi, A. J.; Callander, R. A. **Advanced Fluid Mechanics. An Introduction**. Edward Arnold Publishers, 1975.
- [24] Robertson, J. M. **Hydrodynamics in Theory and Application**. Prentice-Hall - Englewood Cliffs, 1965.
- [25] Schetz, J. A. **Boundary Layer Analysis**. Prentice-Hall, 1993.
- [26] Schlichting, H. **Boundary Layer Theory**, 6<sup>th</sup>/7<sup>th</sup> Editions. McGraw-Hill (New York), 1968/79.
- [27] Serrin, J. "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol. **VIII**/1, pp.125-263. Springer-Verlag, 1959.
- [28] Shames, I. H. **Mechanics of Fluids**. McGraw-Hill, 1962.
- [29] Shames, I. H. **Mecánica de Fluidos**, 3<sup>ra</sup> Edición. McGraw-hill (Bogotá), 1995.
- [30] Sherman, F. S. **Viscous Flow**. McGraw-Hill, 1990.
- [31] Streeter, V. L.; Wylie, E. B. **Mecánica de Fluidos**. McGraw-Hill, 1988.
- [32] Streeter, V. L.; Wylie, E. B.; Bedford, K. W **Mecánica de Fluidos**, Novena Edición. McGraw-Hill, 2000.
- [33] Thomson, W. T. **Teoría de Vibraciones**, Aplicaciones. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1982.
- [34] Thomson, W. T.; Dahleh, M. D. **Theory of Vibration with Applications**, 5<sup>th</sup> Edition. Prentice-Hall, 1998.
- [35] Van Dyke, M. **An Album of Fluid Motion**. Parabolic Press, 1982.
- [36] Von Kármán, Th. "On Laminar and Turbulent Friction", **Z. Angew. Math. Mech.**, Vol.1, (1921), pp.235-236.
- [37] Whitaker, S. **Introduction to Fluid Mechanics**. Krieger, 1968.
- [38] White, F. M. **Mecánica de Fluidos**, Quinta Edición. McGraw-Hill (Madrid), 2004.
- [39] White, F. M. **Viscous Fluid Flow**. McGraw-Hill, 1974.
- [40] Yuan, S. W. **Foundations of Fluid Mechanics**. Prentice Hall, (Englewood Cliffs, New Jersey), 1967.



# CAPITULO XI

## SOLIDOS ELASTICOS

### CONTENIDO

1. FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO.	262
1.1. Ecuaciones Básicas del Movimiento.	262
1.1.1. Deformación-Desplazamiento y Compatibilidad.	262
1.1.2. Sólido Elástico Lineal de Hooke.	262
1.1.3. Ecuación de Cauchy y de Equilibrio.	264
1.2. Ecuación de Cauchy-Navier.	264
1.3. Ecuación de Beltrami-Michell.	266
2. PROBLEMAS FUNDAMENTALES.	267
2.1. Problemas con Simetría Polar.	268
2.1.1. Método Inverso.	268
2.1.2. Presión Externa-Interna.	268
2.2. Problemas de Saint-Venant.	269
2.2.1. Fundamentos.	269
2.2.2. Principio de Saint-Venant.	270
2.2.3. Extensión.	270
2.2.4. Flexión.	270
2.2.5. Torción.	271
3. VIGAS CON GRANDES DEFLEXIONES.	272
3.1. Introducción.	273
3.1.1. Antecedentes.	273
3.1.2. Geometría.	273
3.1.3. Descripciones.	274
3.1.4. Cinemática.	274
3.2. Dinámica de la Viga.	275
3.2.1. Fuerzas y Momentos.	275
3.2.2. Cantidad de Movimiento Lineal.	275
3.2.3. Cantidad de Movimiento Angular.	275
3.2.4. Relaciones Constitutivas.	276
3.2.5. Condiciones Iniciales y de Frontera.	277

3.3. Problema de Contacto.	277
3.3.1. Contacto Singular.	277
3.3.2. Contacto Distribuido.	277
3.3.3. Teoría de Colisión.	277
BIBLIOGRAFIA.	277

## 1. FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO

En esta sección se tratarán las ecuaciones especiales que se emplean para un material sólido elástico lineal de Hooke isótropo, sufriendo deformaciones infinitesimales.

### 1.1. ECUACIONES BASICAS DEL MOVIMIENTO

Las ecuaciones básicas del movimiento de un sólido de Hooke con deformaciones infinitesimales son:

- Relación deformación-desplazamiento o ecuación de compatibilidad.
- Ecuación constitutiva para un sólido de Hooke isótropo.
- Ecuación de equilibrio dinámico.

En el primer grupo de ecuaciones se puede emplear la relación deformación-desplazamiento o la ecuación de compatibilidad, pero no ambas. En el segundo grupo se puede emplear la ecuación constitutiva del esfuerzo en función de la deformación o su inversa. En el tercer grupo existe una sólo ecuación disponible.

#### 1.1.1. Deformación-Desplazamiento y Compatibilidad

La ecuación de deformación-desplazamiento

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^t + \nabla \mathbf{u}] \quad (1)$$

realmente define al tensor  $\mathbf{E}$  como una variable auxiliar en las ecuaciones de movimiento (Nota: En lo que sigue  $\nabla \equiv \tilde{\nabla}$  tiene una descripción de tipo material). Esta variable no puede ser cualquiera, sino que debe cumplir con las ecuación de compatibilidad para deformaciones infinitesimales

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \nabla \varrho = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) + [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E})]^t \quad (2)$$

Esta dos ecuaciones no pueden ser utilizadas al mismo tiempo, puesto que son mutuamente excluyentes. Cuando se desea obtener la solución en  $\mathbf{u}$ , se debe emplear la ecuación (1). Cuando se desea obtener la solución en  $\mathbf{E}$ , se debe emplear la ecuación (2).

#### 1.1.2. Sólido Elástico Lineal de Hooke

La ecuación constitutiva para un sólido elástico lineal e isótropo permite obtener el tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  en función del tensor de deformación infinitesimal  $\mathbf{E}$ , en la forma

$$\mathbf{S} = \lambda_e \varrho \mathbf{I} + 2\mu_e \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}}{1+\nu} \left[ \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \varrho \mathbf{I} + \mathbf{E} \right] \quad \varrho = \text{tr} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3)$$

o, recíprocamente, permite obtener  $\mathbf{E}$  en función de  $\mathbf{S}$ , mediante la inversión funcional. Esto es,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mathbf{E}} [(1+\nu)\mathbf{S} - \nu \zeta \mathbf{I}] \quad \zeta = \text{tr} \mathbf{S} = \frac{\mathbf{E}}{1-2\nu} \varrho \quad (4)$$

Estas dos ecuaciones son la misma relación constitutiva, expresadas de dos formas distintas, es decir, despejando diferentes variables. Por consiguiente, estas ecuaciones no deben ser empleadas simultáneamente. Se debe emplear o una u otra. Esto las hace mutuamente excluyentes, como las ecuaciones de la sección anterior. La tabla 1 contiene las expresiones para los esfuerzos (3) en los distintos sistemas de coordenadas curvilíneos ortonormales.

**Tabla 1.** Componentes del tensor de esfuerzos elásticos  $\mathbf{S} = \lambda_e \varrho \mathbf{I} + 2\mu_e \mathbf{E}$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda_e \varrho + 2\mu_e \frac{\partial u_x}{\partial x} & \sigma_{yy} &= \lambda_e \varrho + 2\mu_e \frac{\partial u_y}{\partial y} & \sigma_{zz} &= \lambda_e \varrho + 2\mu_e \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_{xy} &= \mu_e \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \sigma_{yz} &= \mu_e \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \sigma_{xz} &= \mu_e \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda_e \varrho + 2\mu_e \frac{\partial u_r}{\partial r} & \sigma_{\theta\theta} &= \lambda_e \varrho + 2\mu_e \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \sigma_{zz} &= \lambda_e \varrho + 2\mu_e \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_{r\theta} &= \mu_e \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \sigma_{\theta z} &= \mu_e \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \sigma_{rz} &= \mu_e \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \end{aligned}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda_e \varrho + 2\mu_e \frac{\partial u_r}{\partial r} & \sigma_{\theta\theta} &= \lambda_e \varrho + 2\mu_e \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_{\phi\phi} &= \lambda_e \varrho + 2\mu_e \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) \\ \sigma_{r\theta} &= \mu_e \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \right] & \sigma_{\theta\phi} &= \mu_e \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \\ \sigma_{r\phi} &= \mu_e \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right] \end{aligned}$

Las deformaciones en los materiales elásticos pueden no sólo ser inducidas por los esfuerzos, sino también por los cambios de temperatura. Un cambio de temperatura  $\Delta T = T - T_a$  ( $T_a$  temperatura ambiente) en un sólido isótropo incrementa el tensor de deformación en  $\alpha \Delta T \mathbf{I}$ . Este valor debe sumarse en el miembro derecho de la expresión (4.a). Es decir,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\mathbf{S} - \nu \zeta \mathbf{I}] + \alpha \Delta T \mathbf{I} \quad \zeta = \text{tr} \mathbf{S} = \frac{E}{1 - 2\nu} (\varrho - 3\alpha \Delta T) \quad (5)$$

Obviamente como se puede observar, la expresión (4.b) ya no es válida para este caso. La expresión inversa de (5) queda entonces de la forma

$$\mathbf{S} = \frac{E}{1 + \nu} \left[ \left( \frac{\nu}{1 - 2\nu} \right) \varrho \mathbf{I} + \mathbf{E} \right] - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha \Delta T \mathbf{I} \quad \varrho = \text{tr} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1 - 2\nu}{E} \zeta + 3\alpha \Delta T \quad (6)$$

Existe diferentes parejas de constantes que se pueden emplear en la relación constitutiva para un sólido de Hooke, aparte de las ya usadas en (3) (ver sección III.2.3.2). Estas constantes se resumen en la siguiente tabla [Shames & Cozzarelli, 1992]. Las propiedades  $\lambda_e$  y  $\mu_e$  son los coeficientes de Lamé descritos en aquella oportunidad.

**Tabla 2.** Relaciones entre las constantes elásticas para la ley de Hooke.

	E	$\nu$	G ( $= \mu_e$ )	$\lambda_e$	K
E, $\nu$			$E/[2(1 + \nu)]$	$\nu E/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$	$E/[3(1 - 2\nu)]$
E, G		$(E - 2G)/(2G)$		$G(2G - E)/(E - 3G)$	$EG/[3(3G - E)]$
E, $\lambda_e$		$(R - E - \lambda_e)/(4\lambda_e)$	$(R + E - 3\lambda_e)/4$		$(R + E + 3\lambda_e)/6$
E, K		$(3K - E)/(6K)$	$3EK/(9K - E)$	$3K(3K - E)/(9K - E)$	
$\nu$ , G	$2G(1 + \nu)$			$2G\nu/(1 - 2\nu)$	$\frac{2}{3}G(1 + \nu)/(1 - 2\nu)$
$\nu$ , $\lambda_e$	$\lambda_e(1 + \nu)(1 - 2\nu)/\nu$		$\lambda_e(1 - 2\nu)/(2\nu)$		$\lambda_e(1 + \nu)/(3\nu)$
$\nu$ , K	$3K(1 - 2\nu)$		$\frac{3}{2}K(1 - 2\nu)/(1 + \nu)$	$3K\nu/(1 + \nu)$	
G, $\lambda_e$	$G(2G + 3\lambda_e)/(G + \lambda_e)$	$\lambda_e/[2(G + \lambda_e)]$			$(2G + 3\lambda_e)/3$
G, K	$9KG/(3K + G)$	$\frac{1}{2}(3K - 2G)/(3K + G)$		$(3K - 2G)/3$	
$\lambda_e$ , K	$9K(K - \lambda_e)/(3K - \lambda_e)$	$\lambda_e/(3K - \lambda_e)$	$3(K - \lambda_e)/2$		

**Nota:** La constante auxiliar R se define como  $R = \sqrt{(E + \lambda_e)^2 + 8\lambda_e^2}$ .

Cualquier pareja de las constantes que aparecen en las dos primeras columnas de la tabla anterior pueden substituir a E y  $\nu$  en (3) y la relación constitutiva seguirá siendo la misma.

### 1.1.3. Ecuación de Cauchy y de Equilibrio

La ecuación de Cauchy III.2.2.(1) para el caso de deformaciones elásticas no puede ser empleada, puesto que todas las variables involucradas en las ecuaciones antes planteadas poseen una descripción material. La ecuación de Cauchy, por el contrario, posee una descripción espacial. Debido a esta circunstancia se hace necesario expresar la ecuación de movimiento con una descripción material en la forma

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S} + \rho_o \tilde{\mathbf{g}} = \rho_o \tilde{\mathbf{a}} \quad \tilde{\mathbf{a}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (7)$$

Esta ecuación es la misma ecuación II.2.7.(8.a), deducida en la ocasión en que se definió el tensor de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}(t, \mathbf{X})$ , el cual posee una descripción material. En esta oportunidad se puede definir una fuerza de volumen

$$\tilde{\mathbf{f}} = \rho_o (\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{a}}) \quad (8)$$

donde se ha interpretado  $-\rho_o \tilde{\mathbf{a}}$  como una fuerza inercial por unidad de volumen. Esta variable va a simplificar algunos resultados que se presentarán más adelante. La ecuación que resulta de (7), substituyendo (8), es

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad (9)$$

y se denomina la *ecuación de equilibrio dinámico*.

La segunda igualdad (7.b) expresada arriba se deriva de la definición del vector desplazamiento con una descripción material I.3.1.(13.a), y permite expresar al vector aceleración  $\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$  en su descripción material  $\tilde{\mathbf{a}}(t, \mathbf{X})$ .

## 1.2. ECUACION DE CAUCHY-NAVIER

La ecuación de Cauchy-Navier es la unión de las ecuaciones 1.1.(1) y 1.1.(3), junto con la ecuación de equilibrio 1.1.(9), de manera tal, que al final queda una ecuación cuya variable a resolver es el vector desplazamiento  $\mathbf{u}$ .

Extrayendo la divergencia a 1.1.(1), se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \varrho + \nabla^2 \mathbf{u}) \quad (1.a)$$

Extrayendo la divergencia de 1.1.(3), se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\mathbf{E}}{1 + \nu} \left( \frac{\nu}{1 - 2\nu} \nabla \varrho + \nabla \cdot \mathbf{E} \right) \quad (1.b)$$

Introduciendo la primera en la segunda, y reemplazando este resultado en la ecuación de equilibrio 1.1.(9), resulta

$$-\tilde{\mathbf{f}} = \nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\mathbf{E}}{2(1 + \nu)} \left( \frac{1}{1 - 2\nu} \nabla \varrho + \nabla^2 \mathbf{u} \right) \quad (2)$$

Finalmente, pasando el factor al otro miembro, y reorganizando los términos, se obtiene la *ecuación de Cauchy-Navier*

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{2(1 + \nu)}{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad (3)$$

**Tabla 1.** Divergencia de los desplazamientos ó dilatación  $\varrho = \text{tr} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}$

La ecuación de Cauchy-Navier puede expresarse en sus tres componentes para distintos sistemas de coordenadas. La tabla 2 expresa la ecuación de Cauchy-Navier en los sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. El ángulo  $\theta$  en el sistema de coordenadas cilíndricas se denomina *ángulo acimutal*. Por otro lado, Los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  en el sistema de coordenadas esféricas se denominan el *ángulo cenital* y *ángulo acimutal*, respectivamente. La tabla 1 contiene la divergencia del vector desplazamiento para estos mismo sistemas de coordenadas, con el objetivo de completar la información que aparece en la tabla 2.

**Tabla 2.** Ecuaciones de Cauchy-Navier.

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\rho_o \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \rho_o \tilde{g}_x + (\lambda_e + G) \frac{\partial \varrho}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$ $\rho_o \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \rho_o \tilde{g}_y + (\lambda_e + G) \frac{\partial \varrho}{\partial y} + G \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right)$ $\rho_o \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \rho_o \tilde{g}_z + (\lambda_e + G) \frac{\partial \varrho}{\partial z} + G \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\rho_o \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \rho_o \tilde{g}_r + (\lambda_e + G) \frac{\partial \varrho}{\partial r} + G \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right\}$ $\rho_o \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \rho_o \tilde{g}_\theta + \frac{\lambda_e + G}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial \theta} + G \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right\}$ $\rho_o \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \rho_o \tilde{g}_z + (\lambda_e + G) \frac{\partial \varrho}{\partial z} + G \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\rho_o \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \rho_o \tilde{g}_r + (\lambda_e + G) \frac{\partial \varrho}{\partial r} + G \left( \nabla^2 u_r - \frac{2 u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 u_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right)$ $\rho_o \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \rho_o \tilde{g}_\theta + \frac{\lambda_e + G}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial \theta} + G \left( \nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right)$ $\rho_o \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} = \rho_o \tilde{g}_\phi + \frac{\lambda_e + G}{r \sin \theta} \frac{\partial \varrho}{\partial \phi} + G \left( \nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right)$

**Nota:** La tabla incluye las siguientes definiciones

$$\lambda_e = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu_e = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Cuando existe dilatación térmica, entonces las ecuaciones de Cauchy-Navier deben incluir el término  $-[E/(1 - 2\nu)] \alpha \nabla T$ , donde  $\alpha$  es el *coeficiente de expansión térmica* [Mendelson,1968;Fenner,1987]. Es decir,

$$\rho_o \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_o \tilde{\mathbf{g}} + (\lambda_e + G) \nabla \varrho + \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha \nabla T \quad \varrho = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4)$$

Los cambios de temperatura pueden afectar también los valores de las constantes elásticas. Para la mayoría de los materiales elásticos este efecto es insignificante, excepto para los casos donde los cambios de temperatura son elevados [Fenner,1987]. Las ecuaciones de Cauchy-Navier colocadas arriba en forma tabular no considera estos últimos efectos de la temperatura.

### 1.3. ECUACION DE BELTRAMI-MICHELL

La ecuación de Beltrami-Michell es la unión de las ecuaciones 1.1.(2) y 1.1.(4), junto con la ecuación de equilibrio 1.1.(9), de manera tal, que al final queda una ecuación cuya variable a resolver es el tensor de esfuerzo  $\mathbf{S}$ .

Introduciendo la ecuación 1.1.(4) en la ecuación 1.1.(2) por etapas, resulta, en el miembro de la izquierda,

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \nabla \varrho = \frac{1 + \nu}{E} \nabla^2 \mathbf{S} - \frac{\nu}{E} \nabla^2 \zeta \mathbf{I} + \frac{1 - 2\nu}{E} \nabla \nabla \zeta \quad (1.a)$$

Luego, en el miembro de la derecha

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})]^t = \frac{1+\nu}{E} \{ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{S}) + [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{S})]^t \} - \frac{2\nu}{E} \nabla \nabla \zeta \quad (1.b)$$

De esta forma se obtiene

$$\nabla^2 \mathbf{S} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \zeta = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{S}) + [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{S})]^t + \frac{\nu}{1+\nu} \nabla^2 \zeta \mathbf{I} \quad (2)$$

Extrayendo la traza de esta última expresión, resulta

$$\nabla^2 \zeta = \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{S}) \quad (3)$$

Substituyendo en (2), finalmente queda

$$\nabla^2 \mathbf{S} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \zeta = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{S}) + [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{S})]^t + \frac{\nu}{1-\nu} \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{S}) \quad (4)$$

Esta última expresión depende exclusivamente de  $\mathbf{S}$ , al igual que el resultado (2), pero en esta oportunidad se puede substituir la ecuación de equilibrio 1.1.(9), con lo cual se obtiene definitivamente la *ecuación de Beltrami-Michell*

$$\nabla^2 \mathbf{S} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \zeta = -\nabla \tilde{\mathbf{f}} - (\nabla \tilde{\mathbf{f}})^t - \frac{\nu}{1-\nu} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{f}} \quad (5)$$

## 2. PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**Definición.** Sea  $\Omega$  una región. Sean  $\mathbf{u}$  y  $\tilde{\mathbf{f}}$  los campos vectoriales de desplazamiento y fuerzas, y sean  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{S}$  los campos tensoriales de deformación infinitesimal y esfuerzos definidos en  $\Omega$ . Sean  $\mu$  y  $\nu$  propiedades del material correspondientes a los módulos de corte y de Poisson. Decimos que  $s = [\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}]$  es un *estado elástico* correspondiente a la fuerza de volumen  $\tilde{\mathbf{f}}$  y las constantes elásticas  $\mu$  y  $\nu$  en la región  $\Omega$  y escribimos

$$s = [\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}] \in \mathcal{C}(\tilde{\mathbf{f}}, \mu, \nu, \Omega) \quad \mathcal{C} = \text{Clase de equivalencia de estados elásticos}$$

si y sólo si  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{S}$  satisfacen

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad \mathbf{S} = 2\mu \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \varrho \mathbf{I} + \mathbf{E} \right] \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\tilde{\nabla} \mathbf{u} + [\tilde{\nabla} \mathbf{u}]^t)$$

que son la ecuación de equilibrio 1.1.(9), la relación constitutiva 1.1.(3) y la relación de compatibilidad 1.1.(1).

Dados los siguientes datos:

- a:) Una región  $\Omega$  cerrada con una frontera  $\partial\Omega$ .
- b:) Dos constantes elásticas  $\mu$ ,  $\nu$ .
- c:) Un campo vectorial de fuerzas  $\tilde{\mathbf{f}}$ .
- d:) Ciertas condiciones de borde en la frontera  $\partial\Omega$ .

El problema se reduce a:

Encontrar  $s = [\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}] \in \mathcal{C}(\tilde{\mathbf{f}}, \mu, \nu, \Omega)$  que satisfaga las condiciones de borde. Las condiciones de borde deben satisfacer que, en al menos una región o punto de la frontera, debe conocerse el desplazamiento  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_o$ .

## 2.1. PROBLEMAS CON SIMETRIA POLAR

### 2.1.1. Método Semi-Inverso

Decimos que  $s = [\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}]$  es un estado elástico con *simetría polar* si el campo de desplazamiento es

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \varphi(r) \mathbf{r} \quad r = \|\mathbf{u}\| \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r \quad (1)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el *radio vector de posición* y su versor es  $\mathbf{e}_r$ .

Para este estado el gradiente de desplazamiento queda caracterizado por

$$\mathbf{L} = [\nabla \mathbf{u}]^t = \varphi \mathbf{I} + \varphi' \frac{\mathbf{\Lambda}}{r} \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{r} \mathbf{r} \quad \text{tr} \mathbf{L} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 3\varphi + \varphi' r \quad (2)$$

El tensor  $\mathbf{E}$  de deformación infinitesimal es exactamente igual a  $\mathbf{L}$  por la simetría de éste último

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) = \mathbf{L} = \varphi \mathbf{I} + \varphi' \frac{\mathbf{\Lambda}}{r} \quad \text{tr} \mathbf{E} = \text{tr} \mathbf{L} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \varrho \quad (3)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}$  es el tensor diádico del radio vector.

El laplaciano de  $\mathbf{u}$  y el gradiente de  $\varrho$  coinciden por la misma simetría

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \varrho = \left( 4 \frac{\varphi'}{r} + \varphi'' \right) \mathbf{r} \quad (4)$$

De la ecuación de Cauchy-Navier 1.2.(3) se obtiene que

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left( 4 \frac{\varphi'}{r} + \varphi'' \right) \mathbf{r} = -\frac{2(1+\nu)}{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{f}} \quad (5)$$

Si obviamos las fuerzas de volumen haciendo  $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$ , entonces

$$\varphi'' + 4 \frac{\varphi'}{r} = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dr}(r^4 \varphi') = 0 \quad (6)$$

Lo que da como solución

$$\varphi(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^3} \quad \varphi' = -\frac{3C_2}{r^4} \quad \varphi'' = \frac{12C_2}{r^5} \quad (7)$$

y el tensor de esfuerzos queda finalmente como.

$$\mathbf{S} = \left( K_1 + \frac{K_2}{r^3} \right) \mathbf{I} - 3 \frac{K_2}{r^5} \mathbf{\Lambda} \quad \begin{aligned} K_1 &= 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} C_1 \\ K_2 &= 2\mu C_2 \end{aligned} \quad (8)$$

### 2.1.2. Presión Externa-Interna

En un problema con un dominio  $\Omega$  y su frontera  $\partial\Omega$  definidos por

$$\Omega = \{\mathbf{r} \mid R_o \leq r \leq R\} \quad \mathbf{n} = \begin{cases} -\mathbf{e}_r & \text{en } \partial_o \Omega \\ \mathbf{e}_r & \text{en } \partial \Omega \end{cases} \quad (9)$$



Teniendo en consideración que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_r = r^2 \mathbf{e}_r$ , entonces el vector de tracción en la frontera resulta ser

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \begin{cases} (K_1 - 2K_2/R_o^3) \mathbf{n} & \text{en } \partial_o \Omega \\ (K_1 - 2K_2/R^3) \mathbf{n} & \text{en } \partial \Omega \end{cases} \quad (10)$$

Para el caso donde las fuerzas en las fronteras son de presión  $\mathbf{s} = -P\mathbf{n}$  (esto es porque la presión siempre actúa a compresión), entonces las constantes de la solución son

$$K_1 = -\frac{P R^3 - P_o R_o^3}{R^3 - R_o^3} \quad K_2 = -\frac{R^3 R_o^3}{2} \frac{P - P_o}{R^3 - R_o^3} \quad (11)$$

donde podemos anular  $P$  si queremos presión puramente interna o anulamos  $P_o$  si la queremos puramente externa.

## 2.2. PROBLEMAS DE SAINT-VENANT

### 2.2.1. Fundamentos

El planteamiento de Saint-Venant se enmarca en un dominio alargado  $\Omega$  que consiste en un cilindro de sección genérica  $\Pi$  que lo genera, de tal forma que la líneas generatrices son todas paralelas a un eje  $z$  perpendicular a dicha sección. La siguiente figura 1 muestra como se vería este dominio de Saint-Venant

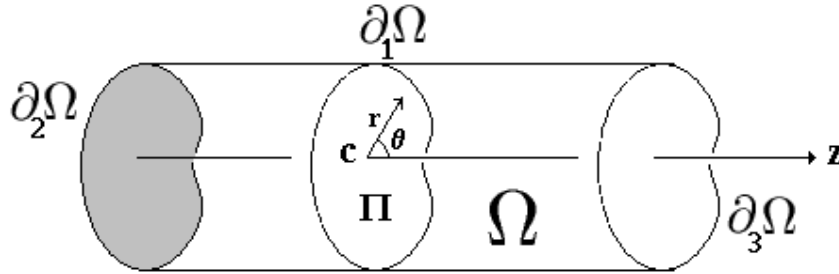


Figura 1. Problema de Saint-Venant.

La sección  $\Pi$  puede tener una forma relativamente arbitraria pero tiene que ser una región simplemente conexa y por tanto cerrada por una curva que genera la porción de la frontera lateral designada por  $\partial_1 \Omega$ . Las otras dos porciones de la frontera las conforma las tapas del inicio  $\partial_2 \Omega$  y del final  $\partial_3 \Omega$ . de manera tal que

$$\partial \Omega = \partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega \cup \partial_3 \Omega \quad (1)$$

El eje  $z$  es generado por el centroide  $c$  de la sección genérica  $\Pi$  y se escoge  $c$  para que sea el origen del sistema de coordenadas.

En el problema de Saint-Venant no existe fuerzas de volumen  $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$  y la condición de contorno en la frontera  $\partial_1 \Omega$  es nula. De manera que se tiene un estado elástico  $\mathbf{s} = [\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}] \in \mathcal{C}(\mathbf{0}, \mu, \nu, \Omega)$  con

$$\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \partial_1 \Omega \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}^{**} \quad \text{en} \quad \partial_2 \Omega \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}^{***} \quad \text{en} \quad \partial_3 \Omega \quad (2)$$

y con fuerzas y momentos resultantes en las tapas iguales a

$$\mathbf{F}^{**} = \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{s}^{**} dA = -\mathbf{F}^{***} \quad \mathbf{F}^{***} = \int_{\partial_3 \Omega} \mathbf{s}^{***} dA \quad (3)$$

$$\mathbf{M}^{**} = \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{s}^{**} d\mathcal{A} = -\mathbf{M}^{***} \quad \mathbf{M}^{***} = \int_{\partial_3 \Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{s}^{***} d\mathcal{A} \quad (4)$$

por la condición de equilibrio estático. El problema planteado tiene solución única salvo por un desplazamiento rígido infinitesimal.

### 2.2.2. Principio de Saint-Venant

Sean  $s'$  y  $s''$  dos estados elásticos que resuelven el mismo tipo de problema de Saint-Venant. Entonces, lejos de  $\partial_2$  y  $\partial_3$  los estados  $s'$  y  $s''$  se parecen. En esa lejanía la permanencia de la condición de borde en la frontera  $\partial_1 \Omega$  hace a los estados elásticos parecerse por el aplastamiento que ella induce. Sean  $s = s' - s''$  un estado elástico combinado. Obviamente  $s[\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}] \in \mathcal{C}(\mathbf{0}, \mu, \nu, \Omega)$  y las fuerzas y momentos se anulan en una sección  $\Pi$  lo suficientemente alejada de  $\partial_2 \Omega$  y  $\partial_3 \Omega$

$$\mathbf{F} = \int_{\Pi} \mathbf{s} d\mathcal{A} = \int_{\Pi} (s' - s'') d\mathcal{A} = \mathbf{0} \quad \mathbf{M} = \int_{\Pi} \mathbf{r} \times \mathbf{s} d\mathcal{A} = \int_{\Pi} \mathbf{r} \times (s' - s'') d\mathcal{A} = \mathbf{0} \quad (5)$$

El principio de Saint-Venant dice que lejos de las tapas un estado  $s = s' - s''$  que satisfaga (5) es pequeño.

Sean  $s^{(i)} = [\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{E}^{(i)}, \mathbf{S}^{(i)}] \in \mathcal{C}(\mathbf{0}, \mu, \nu, \Omega)$  estados elásticos de Saint-Venant de diferentes tipos. Entonces la combinación lineal  $\sum_{i=1}^n \lambda_i s^{(i)}$  con  $\lambda_i s^{(i)} = [\lambda_i \mathbf{u}^{(i)}, \lambda_i \mathbf{E}^{(i)}, \lambda_i \mathbf{S}^{(i)}] \in \mathcal{C}(\mathbf{0}, \mu, \nu, \Omega)$  también es un problema de Saint-Venant. Los problemas más típicos de Saint-Venant son los de Extensión, Flexión y Torsión, que se describirán a continuación.

### 2.2.3. Extensión

Una distribución de fuerza axial  $\mathbf{f}$  uniforme en la sección de área  $\mathcal{A}$  constante da un esfuerzo axial  $\sigma = \mathbf{f}/\mathcal{A}$  y se denomina *extensión*. El tensor de esfuerzos y sus componentes son

$$\mathbf{S} = \sigma \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \quad [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (6)$$

El escalar  $\sigma$  se asume constante en la sección y uniforme en  $z$ .

### 2.2.4. Flexión

Una distribución de esfuerzos axiales  $\sigma_{zz}$  con dependencia lineal del tipo

$$\mathbf{S} = \sigma_{zz} \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \quad [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \sigma_{zz} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} \quad (7)$$

da un estado elástico denominado *flexión*, donde el coeficiente vectorial  $\boldsymbol{\alpha}$  es una constante. En la frontera las condiciones de borde para  $\mathbf{s} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$  son

$$\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \partial_1 \Omega \quad \mathbf{s} = -\sigma_{zz} \hat{\mathbf{k}} \quad \text{en} \quad \partial_2 \Omega \quad \mathbf{s} = \sigma_{zz} \hat{\mathbf{k}} \quad \text{en} \quad \partial_3 \Omega \quad (8)$$

con  $\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{k}}$  en  $\partial_2 \Omega$  y  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{k}}$  en  $\partial_3 \Omega$ .

En una sección genérica  $\Pi$  las fuerzas internas se calculan como

$$\mathbf{F} = \int_{\Pi} \mathbf{s} d\mathcal{A} = \int_{\Pi} \sigma_{zz} \hat{\mathbf{k}} d\mathcal{A} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \left[ \int_{\Pi} \mathbf{r} d\mathcal{A} \right] \hat{\mathbf{k}} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}_c \mathcal{A}) \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}_c = \langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\Pi} \mathbf{r} d\mathcal{A} \equiv \mathbf{0} \quad (9)$$

siendo nulo el resultado porque el centroide de área coincide con el origen del sistema de coordenadas.

En la misma sección los momentos de fuerzas internas se calculan como

$$\mathbf{M} = \int_{\Pi} \mathbf{r} \times \mathbf{S} d\mathcal{A} = \int_{\Pi} \sigma_{zz} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{k}} d\mathcal{A} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \left[ \int_{\Pi} \mathbf{r} \mathbf{r} d\mathcal{A} \right] \times \hat{\mathbf{k}} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \langle \boldsymbol{\Lambda} \rangle \mathcal{A}) \times \hat{\mathbf{k}} \quad \langle \boldsymbol{\Lambda} \rangle = \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\Pi} \mathbf{r} \mathbf{r} d\mathcal{A} \quad (10)$$

donde  $\boldsymbol{\Lambda}$  es el tensor simétrico formado por la diádica  $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{r} \mathbf{r}$  (ver 2.1.(2.b)).

### 2.2.5. Torsión

En la torsión de una sección circular, la sección  $\Pi$  rota en torno al eje  $z$  como una lámina rígida en un ángulo  $\beta = \lambda z$ , siendo el desplazamiento para cada punto en  $\mathbf{r}$  de la forma

$$\mathbf{u} = \beta \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r} = \lambda z \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r} \quad (11)$$

El tensor gradiente de deformación y de deformación infinitesimal coinciden por ser el primero simétrico. Esto es,

$$\mathbf{L} = \mathbf{E} = \frac{\mathbf{S}}{2\mu} = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} \quad [\mathbf{L}] = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

El tensor  $\mathbf{S}/(2\mu)$  igualmente coincide porque la traza de los tres tensores es nula.

En la frontera  $\partial\Pi$  de la sección  $\Pi$  los vectores unitarios tangencial  $\mathbf{t}$  y normal  $\mathbf{n}$  satisfacen

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{ds} \hat{\mathbf{j}} \quad \mathbf{n} = \mathbf{t} \times \hat{\mathbf{k}} = \frac{dy}{ds} \hat{\mathbf{i}} - \frac{dx}{ds} \hat{\mathbf{j}} \quad (13)$$

por lo que en la frontera de la sección el vector  $\mathbf{s}$  de tracción es

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \quad \mu \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy/ds \\ -dx/ds \\ 0 \end{bmatrix} = -\mu \lambda \left( y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} \right) [\hat{\mathbf{k}}] = -\frac{\mu}{2} \lambda \frac{d}{ds} (x^2 + y^2) [\hat{\mathbf{k}}] = [\mathbf{0}] \quad (14)$$

lo que da que  $x^2 + y^2$  es una constante cuando se aplica (12), por lo que es válida solamente para una sección circular.

Cuando la sección es no circular entonces (11) se modifica de la siguiente forma

$$\mathbf{u} = \lambda z \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r} + \lambda \varphi(x, y) \hat{\mathbf{k}} \quad (15)$$

El tensor gradiente de deformación y de deformación infinitesimal igualmente coinciden por ser el primero simétrico, lo que da de manera similar

$$\mathbf{L} = \mathbf{E} = \frac{\mathbf{S}}{2\mu} = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} \quad [\mathbf{L}] = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 & 0 & x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -y + \frac{\partial \varphi}{\partial x} & x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

El tensor  $\mathbf{S}/(2\mu)$  igualmente coincide porque la traza de los tres tensores sigue siendo nula.

Para este caso la ecuación de equilibrio estático da que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad (17)$$

el laplaciano de  $\varphi(x, y)$  es nulo.

En la frontera  $\partial\Pi$  de la sección  $\Pi$  un análisis similar al caso circular da que el vector  $\mathbf{s}$  de tracción es

$$\begin{aligned} [\mathbf{s}] = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}] &= \mu\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ 0 & 0 & x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ -y + \frac{\partial\varphi}{\partial x} & x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy/ds \\ -dx/ds \\ 0 \end{bmatrix} = \mu\lambda \left[ \left( -y + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \frac{dy}{ds} - \left( x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds} \right] [\hat{\mathbf{k}}] \\ &= \mu\lambda \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x^2 + y^2) \right] [\hat{\mathbf{k}}] = [\mathbf{0}] \end{aligned} \quad (18)$$

lo que da que

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{r}^2}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}} \quad (19)$$

se cumple para la curva cerrada de la frontera.

La función conjugada  $\psi$  se define como

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \nabla^2\psi = 0 \quad (20)$$

En el plano complejo  $\mathcal{F}(\zeta) = \varphi + i\psi$  es una función analítica de  $\zeta = x + iy$ . Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial s} \quad (21)$$

entonces la ecuación (19) se convierte en

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} - \psi \right) = 0 \quad \psi - \frac{x^2 + y^2}{2} = \text{cte} \quad (22)$$

Si escogemos la constante no nula  $C$  se reduce a que  $\psi = r^2/2 + C$ . La función

$$\phi = \psi - \frac{r^2}{2} \quad (23)$$

recibe el nombre de *función de Prandtl* y satisface

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x} - x = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - x = \frac{\sigma_{yz}}{\mu\lambda} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - y = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - y = \frac{\sigma_{xz}}{\mu\lambda} \quad (24)$$

o lo que es lo mismo  $\mathbf{s} = \mu\lambda \hat{\mathbf{k}} \times \nabla\phi$ . Esta descripción geométrica del estado de elástico de la torsión hace que las líneas de nivel de  $\phi$  da esfuerzos torsionales constantes y crecen en la dirección donde el gradiente de  $\phi$  se incrementa. Endiduras en la frontera producen esfuerzos grandes, mientras que protuberancias en la misma frontera prácticamente anulan los esfuerzos.

### 3. VIGAS CON GRANDES DEFLEXIONES

El problema de la vigas de grandes longitudes con combinaciones de flexión, corte, elongación y torsión, con grandes deflexiones ha sido evitado tradicionalmente por la complejidad para el modelado y su resolución. La respuesta transitoria de la viga agrega otras complicaciones. Este artículo introduce un modelo para este problema usando la analogía de un látigo elástico. Los látigos, como vigas elásticas pesadas, tienen flexibilidad e inercia en todos los movimientos antes mencionados, los cuales pueden ser en cualquier dirección en un espacio tridimensional. Adicionalmente, en su viaje por el espacio, las partes del látigo pueden colisionar con

objetos, lo cual convierte el fenómeno en un problema de contacto. Todos estos aspectos son considerados en el modelo propuesto, con la finalidad de hacerlo muy general.

### 3.1 INTRODUCCION

#### 3.1.1. Antecedentes

Casi toda la literatura científica relacionada con grandes deflexiones establecen sus argumentos sobre la base de que existe sólo flexión y corte con respuesta estacionaria o permanente. La mayoría de los artículos resuelven problemas lineales o planares, pero los problemas espaciales son dejados de lado. Frecuentemente, el efecto de la flexión, la elongación y la torsión son estudiados separadamente, o mediante una combinación parcial de ellos [Meirovitch,1967]. Por todas estas razones, el *Modelo del Látigo* presentado a continuación, lo que pretende hacer es incorporar todos los efectos mencionados simultáneamente [Granados et al.,1996,1997].

#### 3.1.2. Geometría

La geometría de una viga esbelta y con grandes deflexiones puede ser caracterizada por la línea curva que describe los centroides de las diferentes secciones de área a lo largo de la viga. Esta curva, a la cual denominaremos *eje normal*, tiene las características de una curva alabeada en el espacio. La sección cuya área es  $A(x)$ , puede variar a lo largo del eje normal de la viga, dependiendo de una coordenada axial  $x$ . No obstante la simetría de la viga siempre se considerará cilíndrica con respecto al eje normal. Se conoce que para una curva alabeada en el espacio, las principales características son la curvatura  $\kappa$  y la torsión  $\tau$ . Para una evolución transitoria de la viga, la curvatura y la torsión dependerán adicionalmente del tiempo  $t$ , para cada punto  $x$  de la curva. Simultáneamente, también se define una tríada de vectores unitarios (versores), mutuamente perpendiculares entre sí. Estos son el *vector tangente*  $\lambda$ , el *vector normal*  $\mu$  y el *vector binormal*  $\nu$ . Estos vectores son definidos en tal forma que siguen la regla de la mano derecha  $\lambda \times \mu = \nu$ . El plano generado por los vectores  $\lambda$  y  $\mu$  es llamado el *plano osculador*. La circunferencia en este plano, tangente a la curva y con la misma curvatura, es denominada el *círculo osculador*. En la figura 1 pueden observarse estas características de la curva.

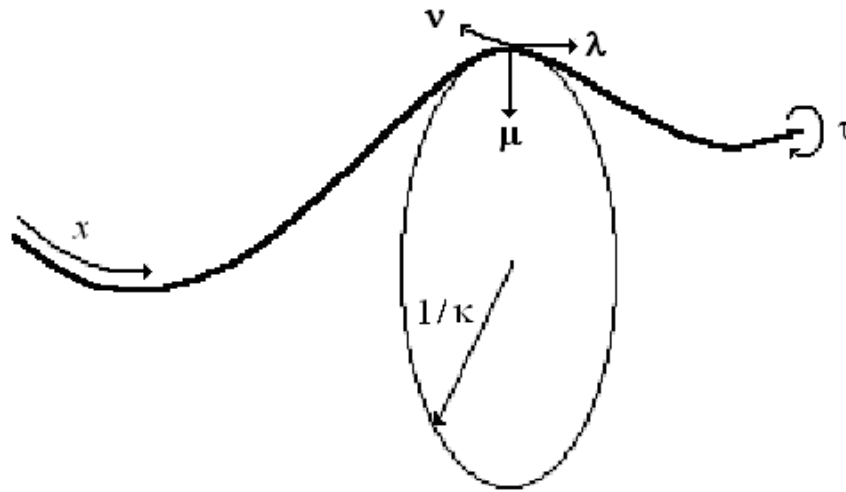


Figura 1. Curva alabeada en el espacio.

Las derivadas espaciales de los vectores unitarios  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $\nu$  se expresan mediante las siguientes ecuaciones de Frenet-Serret [McConnel, 1957]

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \kappa \mu \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \tau \nu - \kappa \lambda \quad \frac{\partial \nu}{\partial x} = -\tau \mu \quad \text{with} \quad \lambda = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \quad (1)$$

donde  $x$  es la localización actual (coordenada curvilínea o axial) a lo largo del eje normal y  $\mathbf{r}$  es el vector de posición en el espacio de un punto en el eje, respecto a un punto de referencia fijo (origen). Nótese que las ecuaciones de Frenet-Serret usan derivadas parciales debido a la adicional dependencia de los vectores unitarios con el tiempo.

La derivada espacial de un vector cualquiera  $\mathbf{b}$  deberá tener en cuenta las ecuaciones de Frenet-Serret. De esta forma, se tiene

$$\mathbf{b} = b_\lambda \boldsymbol{\lambda} + b_\mu \boldsymbol{\mu} + b_\nu \boldsymbol{\nu} \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} = \left( \frac{\partial b_\lambda}{\partial x} - \kappa b_\mu \right) \boldsymbol{\lambda} + \left( \frac{\partial b_\mu}{\partial x} + \kappa b_\lambda - \tau b_\nu \right) \boldsymbol{\mu} + \left( \frac{\partial b_\nu}{\partial x} + \tau b_\mu \right) \boldsymbol{\nu} \quad (2)$$

Nótese que las derivadas de los vectores unitarios han considerado su dependencia en la aposición actual  $x$ .

### 3.1.3. Descripciones

Sea  $\varphi$  cualquier función escalar o vectorial, la cual depende del tiempo  $t$  y de la actual posición  $x$  en el eje, luego que la viga se ha elongado (o contraído). Cuando una función tiene esta dependencia, se dice que posee una *descripción espacial*. Los vectores unitario  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\nu}$ , y el vector de posición  $\mathbf{r}$  tienen una descripción espacial.

Sea  $X$  la localización en el eje normal, antes de que la viga se haya deformado. Cualquier función  $\tilde{\varphi}$  escalar o vectorial, la cual dependa de el tiempo  $t$  y la localización  $X$  se dice que tiene una *descripción material*. Obviamente,  $x = x(t, X)$ , y la equivalencia entre la descripciones espacial y material puede ser impuesta por  $\varphi(t, x) = \varphi[t, x(t, X)] = \tilde{\varphi}(t, X)$ . La coordenada espacial  $x$  está relacionada con la coordenada material  $X$  únicamente por la elongación (contracción) axial.

### 3.1.4. Cinemática

Todo vector  $\mathbf{b}$  actuando sobre la viga pueden ser descompuesto en una componente en la dirección del eje normal y en una componente en la dirección del plano perpendicular (transversal) de la forma

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_n + \mathbf{b}_t \quad \mathbf{b}_n = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad \mathbf{b}_t = \mathbf{b} - \mathbf{b}_n \quad (3)$$

donde  $\mathbf{b}_n$  y  $\mathbf{b}_t$  tienen una descripción espacial.

La derivación con respecto al tiempo par los vectores con una descripción espacial puede ser obtenida como

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + v_n \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} \quad \text{with} \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \tilde{\omega} \times \mathbf{b} + \frac{\delta \mathbf{b}}{\delta t} \quad (4)$$

donde  $\tilde{\omega}$  es la velocidad angular del marco de referencia compuesto por los vectores unitarios de Frenet-Serret en cada punto del eje normal, y donde  $\delta/\delta t$  es la derivación temporal relativa al dicho marco de referencia no inercial. La derivada temporal relativa no tiene en consideración la dependencia de los vectores unitarios con respecto al tiempo. La derivada parcial espacial en (4) debe ser calculada con la aplicación de la relación (2). La cantidad  $v_n$  es la norma euclidiana del vector velocidad  $\mathbf{v}_n$ , la componente normal del vector velocidad  $\mathbf{v}$  de una punto material sobre el eje de la viga.

El vector velocidad  $\mathbf{v}$  está formalmente definido como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial t} \quad \text{donde} \quad \mathbf{r}(t, x) = \tilde{\mathbf{r}}(t, X) \quad (5)$$

Esta expresión enuncia que  $\mathbf{v}$  tiene una descripción espacial, aunque  $\tilde{\mathbf{r}}$  tenga una descripción material. Esta es una condición necesaria para que la velocidad describa el sistema material en un sentido euleriano.

El paso de la partícula puede ser encontrado resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad \text{donde} \quad \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, x) \quad \mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t, X) \quad (X \text{ constante}) \quad (6)$$

Una vez el paso de la partícula ha sido establecido, la configuración geométrica  $\mathbf{r}$  de la curva alabeada en el espacio puede ser también encontrada. Con la configuración geométrica, los vectores unitarios pueden ser calculados fácilmente con las expresiones (1).

### 3.2 DINAMICA DE LA VIGA

#### 3.2.1. Fuerzas y Momentos

Una viga puede ser externamente cargada con una fuerza distribuida  $\mathbf{g}$  y un torque distribuido  $\mathbf{n}$ , ambos definidos por unidad de longitud. También puede ser externamente cargado con una fuerza localizada  $\mathbf{G}$  y con un momento localizado  $\mathbf{N}$ . Internamente, la viga reacciona para cada sección normal con una fuerza de corte  $\mathbf{Q}$ , una fuerza normal  $\mathbf{P}$ , un momento de flexión  $\mathbf{M}$  y un torque  $\mathbf{T}$ . La fuerza normal y el torque son considerados positivos cuando actúan hacia afuera en el corte de la viga.

Todas las fuerzas pueden ser descompuesto con la expresión (3). Así, por ejemplo,  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_n + \mathbf{G}_t$ , con  $\mathbf{G}_n = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\lambda}$  and  $\mathbf{G}_t = \mathbf{G} - \mathbf{G}_n$ . Lo mismo para los momentos. Particularly,

$$\mathbf{IF} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} \quad \mathbf{g} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \quad \mathbf{IM} = \mathbf{T} + \mathbf{M} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{IF}$  es la fuerza de reacción global sobre el área normal de la sección de la viga o *tracción*. Las cantidades  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  son las fuerzas externas normal y transversal distribuidas por unidad de longitud.  $\mathbf{IM}$  es la resultante de los momentos internos. En la figura 2 aparecen todas estas cargas representadas sobre la viga.

#### 3.2.2. Cantidad de Movimiento Lineal

El análisis del balance de la cantidad de movimiento lineal para una rebanada diferencia (infinitesimal), la cual es perpendicular al eje normal, implica que

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{IF}}{\partial x} \quad (2)$$

donde  $m$  es la masa de la viga por unidad de longitud.

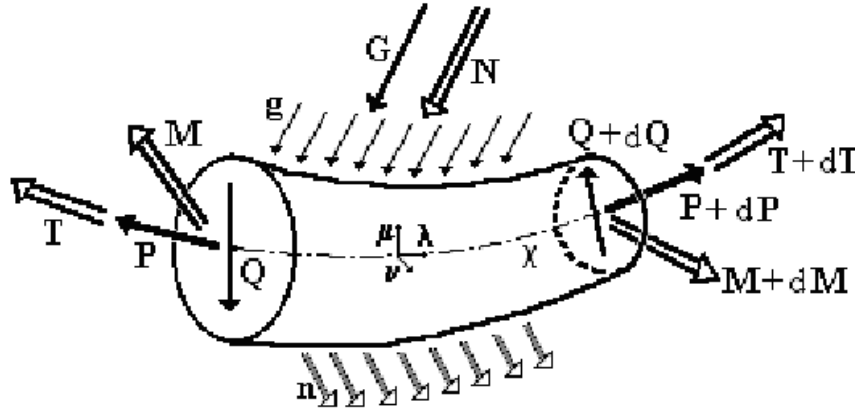


Figura 2. Cargas concentradas y distribuidas sobre la viga.

#### 3.2.3. Cantidad de Movimiento Angular

El análisis del balance de la cantidad de movimiento angular para una rebanada diferencial implica que

$$\frac{m}{A} \left( \mathbf{II} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{II} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) = \mathbf{n} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{Q} + \frac{\partial \mathbf{IM}}{\partial x} \quad [\mathbf{II}] = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde  $I$  es el momento de inercia de área relativa al eje de la fibra neutra of  $A$  (para flexión) y  $J = 2I$  es el momento de inercia polar del área relativa al centroide de  $A$ . El tensor de inercia de área  $\mathbf{I}$  logicamente tiene sus componentes expresadas en la base  $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ . La velocidad angular del sistema material puede diferir de  $\tilde{\omega}$  de la relación 3.1.(4.b).

### 3.2.4. Relaciones Constitutivas

Las *relaciones constitutivas* expresan la dependencia entre la deformación de la viga y las fuerzas y momentos internos.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}} &= E\tilde{A} \left( \frac{\partial \chi}{\partial X} - 1 - \alpha \Delta T \right) \tilde{\boldsymbol{\lambda}} & \tilde{\mathbf{T}} &= \mathbf{G}\tilde{J} \left\{ \left[ \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \frac{\partial}{\partial X} (\boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \right] \tilde{\boldsymbol{\lambda}} - \tilde{\tau}_o \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_o \right\} \\ \tilde{\mathbf{Q}} &= \left( \tilde{\mathbf{n}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial X} \right) \times \tilde{\boldsymbol{\lambda}} & \tilde{\mathbf{M}} &= E\tilde{I} (\tilde{\kappa} \tilde{\boldsymbol{\nu}} - \tilde{\kappa}_o \tilde{\boldsymbol{\nu}}_o)\end{aligned}\quad (4)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad de Young y  $\mathbf{G} = E/[2(1 - \nu)]$  es módulo de corte ( $\nu$  es el módulo de Poisson de contracción transversal). Los vectores angulares  $\boldsymbol{\theta}(t, X)$  y  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t, X)$ , los cuales son respectivamente las soluciones de  $\boldsymbol{\omega}(t, X) = \partial \boldsymbol{\theta} / \partial t$  y  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t, X) = \partial \tilde{\boldsymbol{\theta}} / \partial t$ , son relaciones constitutivas adicionales para la torsión, debidas a la respuesta dinámica de la viga.  $\Delta T$  es el incremento de la temperatura sobre la temperatura ambiental y  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica.

La relación constitutiva (4.a) no considera la pequeña influencia de las fuerzas de corte. Tampoco se consideran las pequeñas contracciones o dilataciones transversales. La relación constitutiva para  $\tilde{\mathbf{Q}}$ , expresión (4.c), debe ser interpretada como una *condición de equilibrio local* entre el gradiente material (referida a la coordenada  $X$ ) del momento de flexión y las fuerzas de corte. Las fuerzas de corte y los momentos debido a las fuerzas de corte son considerados que tienen muy poca influencia en la dinámica de la viga descrita materialmente. Adicionalmente, este razonamiento ayuda al cómputo numérico del problema, puesto que es imposible medir la deformación al corte con solamente la configuración del eje normal (curva de los centroides de área de las secciones).

Debe tomarse en consideración que las relaciones constitutivas para los momentos y el torque, expresiones (4.b, d), han sido formuladas bajo la hipótesis que la viga en su estado no deformado no es necesariamente recta. Esto es por lo que las cantidades  $\tilde{\tau}_o \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_o$  y  $\tilde{\kappa}_o \tilde{\boldsymbol{\nu}}_o$  del estado no deformado se substraen en las mencionadas ecuaciones [Pak & Stauffer, 1994]. Para el caso trivial de torque puro, los vectores unitarios  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$  y  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$  deberán ser solidarios al material de la viga ( $\boldsymbol{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}$  and  $\tilde{\tau}_o = 0$ ).

Nótese que todas las cantidades introducidas en las relaciones constitutivas tienen una descripción material. Esto corresponde a un sólido de Hook, cuyas relaciones constitutivas (para deformaciones infinitesimales pequeñas) siempre se enuncian en términos de una descripción del tipo material, junto con una independencia de la velocidad de deformación [Gurtin, 1981].

Las coordenadas  $x$  y  $X$  están relacionadas a través de la relación constitutiva para la deformación longitudinal (4.a) como

$$x = \int_0^L \left( 1 + \frac{\tilde{\mathbf{P}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\lambda}}}{E\tilde{A}} \right) dX = \int_0^L \sqrt{\left( \frac{dx}{dX} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dX} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dX} \right)^2} dX \quad (5)$$

donde  $L$  es la longitud de la viga no deformada y  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  es el vector cartesiano de posición del eje normal en el espacio ( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  componen la base cartesiana).

En breve, el método de resolución de las ecuaciones se resume a continuación. Ya que las ecuaciones (2), (3) y (4) están acopladas, estas deben ser resueltas en conjunto para obtener las reacciones internas y los desplazamientos-deformaciones. En otras palabras, la deformación geométrica de la viga determinan las reacciones internas mediante las relaciones (4). Consecuentemente, las expresiones (2) y (3) determinan cómo la viga se deforma. Por consiguiente, esta relación de causa-efecto es lógica y puede ser resuelta sin contradicciones en un sentido o en el inverso.



### 3.2.5. Condiciones Iniciales y de frontera

Para completar el problema con el modelo propuesto, es indispensable formular las condiciones iniciales y de frontera. Las condiciones iniciales se establecen por el estado de carga-deformación inicial. Las condiciones de frontera se establecen mediante las cargas (fuerzas y momentos) externas y las deformaciones en los extremos (y eventualmente en los puntos de contacto). Cuando una configuración geométrica determinada es impuesta en un punto, por alguna restricción o atadura, las reacciones pueden ser calculadas usando las expresiones (2) ó (3).

## 3.3 PROBLEMA DE CONTACTO

### 3.3.1. Contacto Singular

El *contacto singular* es producido por una fuerza localizada en  $x_o$  expresada como  $\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}} \delta(x - x_o)$  en términos de una función de delta de Dirac  $\delta(x)$ . Esta fuerza debe ser compatible con la deformación permitida en la viga, la cual es determinada por las restricciones. La fuerza localizada produce una discontinuidad en la reacción interna  $\mathbf{I}\mathbf{F}$  y un cambio en el gradiente del momento flector  $\mathbf{M}$ . Adicionalmente, si un momento localizado  $\mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}} \delta(x - x_o)$  es aplicado, se produce una discontinuidad en la resultante de los momentos internos  $\mathbf{I}\mathbf{M}$ .

### 3.3.2. Contacto Distribuido

El *contacto distribuido* está definido por una fuerza distribuida  $\mathbf{g}$  y un torque distribuido  $\mathbf{n}$ , los cuales instantáneamente cambian el gradiente de la fuerza total interna  $\mathbf{I}\mathbf{F}$  y el torque interno  $\mathbf{T}$ , respectivamente.

### 3.3.2. Teoría de Colisión

El modelo aquí discutido permite la inclusión futura de un modelo de colisión a través de la acción de fuerzas y momentos de contacto por un período corto de tiempo. También, algunas restricciones y ataduras en el espacio por un período de tiempo pueden ser incluidos fácilmente en el modelo. Estas consideraciones deben ser compatibles con las deflexiones de la viga y las restricciones espaciales.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Fenner, D. N. **Engineering Stress Analysis**, A Finite Element Approach with FORTRAN 77 Software. Ellis Horwood Limited - John Wiley & Sons, 1987.
- [2] Flügge, S.; (Ed.). **Encyclopedia of Physics**. Vol.VI: "Elasticity and Plasticity". Springer-Verlag, 1958.
- [3] Granados M. A. L.; Casanova M., E. L.; Müller-Karger P., C. M. "Whip Model for the Transient Response of Large Deflexion Beams". **Applied Mechanics in the Americas**, Vol.4: "Mechanics and Dynamics of Solids". Edited by L. A. Godoy, M. Rysz, L. E. Suárez, College of Engineering, University of Puerto Rico at Mayagüez, pp.379-382, August 1996. *Proceedings of the Fifth Pan-American Congress of Applied Mechanics, PACAM V*. Hotel San Juan Marriott, San Juan of Puerto Rico, January 2-4, 1997.
- [4] Green, A. E.; Zerna, W. **Theoretical Elasticity**, Second Edition. Oxford University Press, 1968.
- [5] Gurtin, M. E. "The Linear Theory of Elasticity". **Encyclopedia of Physics**. Flügge, S.; Truesdell, C. (Eds.). Vol.VIa/2: "Mechanics of Solids II", pp. 1-295. Springer-Verlag, 1972.
- [6] Gurtin, M. E. **An Introduction to Continuum Mechanics**. Academic Press, New York, 1981.
- [7] Lamb, H. **Statics**, Including Hydrostatics and the Elements of The Theory of Elasticity, Third Edition. Cambridge University Press, 1928. 6<sup>th</sup> Reprint, 1949.
- [8] Love, A. E. H. **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**, fourth Edition. Cambridge University Press, 1927. Dover Publications, 1944.
- [9] Marin, J. **Mechanical Behavior of Engineering Materials**. Prentice-Hall, 1962.

- [10] Marsden, J. E.; Hughes, T. J. R. **Mathematical Foundations of Elasticity**. Prentice-Hall (Englewood Cliffs, New Jersey), 1983. Reprint, Dover Publications (New York), 1994.
- [11] McConnell, A. J. **Applications of Tensor Analysis**. Dover Publications, New York, 1957.
- [12] Meirovitch, L. **Analytical Methods in Vibrations**. Macmillan Publishing Company, New York, 1967.
- [13] Mendelson, A. **Plasticity: Theory and Application**. The Macmillan Company - Collier-Macmillan Canada, 1968.
- [14] Murnaghan, F. D. "Finite Deformation of an Elastic Solid". American Journal of Mathematics, Vol.**59**, pp.235-260, (1937).
- [15] Muskhelishvili, N. I. **Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity**, Fundamental Equations, Plane Theory of Elasticity, Torsion and Bending. Second English Edition, Translation of the Fourth, Corrected and Augmented Edition, Moscow, 1954. P. Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands, 1963.
- [16] Pak, R. Y. S.; Stauffer, E. J. "Nonlinear Finite Deformation Analysis of Beams and Columns". **Journal of Engineering Mechanics (ASCE)**, Vol.**120**, No.10, October, (1994).
- [17] Ross, C. T. F. **Advanced Applied Stress Analysis**. Ellis Horwood Limited (Chichester) - John Wiley & Sons (New York), 1987.
- [18] Sedov, L. I. **A Course in Continuum Mechanics**. Vol.I: "Basic Equations and Analytical Techniques". Vol.II: "Physical Foundations and Formulations of Problems". Vol.III: "Fluids, Gases, and The Generation of Thrust". Vol.IV: "Elastic and Plastic Solid and The Formation of Cracks". Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971-1972.
- [19] Shames, I. H.; Cozzarelli, F. A. **Elastic and Inelastic Stress Analysis**. Prentice-Hall, 1992.
- [20] Shames, I. H.; Dym, C. L. **Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics**. Hemisphere Publishing Corp., New York, 1985.
- [21] Sokolnikoff, I. S. **Mathematical Theory of Elasticity**, Second Edition. McGraw-Hill Book Company, 1956.
- [22] Timoshenko, S. P.; Goodier, J. N. **Theory of Elasticity**, Third Edition. McGraw-Hill, 1970.
- [23] Timoshenko, S. P.; Woinowsky-Krieger, S. **Theory of Plates and Shells**, Second Edition. McGraw-Hill, 1959.
- [24] Truesdell, C. A. **The Elements of Continuum Mechanics**. Springer-Verlag, 1966.
- [25] Truesdell, C. A.; (Ed.). **Mechanics of Solids**. Vol.I: "The experimental Foundations of Solid Mechanics". Vol.II: "Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity". Vol.III: "Theory of Viscoelasticity, Plasticity, Elastic Waves, and Elastic Stability". Vol.IV: "Waves in Elastic and Viscoelastic Solids (Theory and Experiments)". Springer-Verlag, 1974.
- [26] Wang, C.- C.; Truesdell, C. **Introduction to Rational Elasticity**. Noordhoff International Publishing (Leyden-Netherlands), 1973.
- [27] Washizu, K. **Variational Methods in Elasticity and Plasticity**. Pergamon Press, 1968.

# CAPITULO XII

## MATERIALES VISCOELASTICOS

### CONTENIDO

1. FLUIDOS VISCOELASTICOS.	279
1.1. Modelo de Maxwell.	279
1.1.1. Forma Diferencial.	280
1.1.2. Forma Integral.	280
1.1.3. Modelos Cuasi-Lineales y No Lineales.	281
1.1.4. Relación Constitutiva de Boltzmann.	282
1.2. Modelo de Jeffreys.	283
1.2.1. Relación Constitutiva.	283
1.2.2. Modelos de Oldroyd.	283
1.2.3. Modelo Generalizado.	284
2. SOLIDOS VISCOELASTICOS.	284
2.1. Modelo de Kelvin-Voigt.	284
2.3. Modelo Generalizado.	285
BIBLIOGRAFIA.	285

### 1. FLUIDOS VISCOELASTICOS

Dentro de los materiales viscoelásticos, se han designado como fluidos, aquellos que no poseen límites para el proceso de deformación, o sea, que la deformación puede hacerse eventualmente infinita, aunque los esfuerzos son finitos. Para los fluidos se prefiere la descripción del tipo espacial de las variables involucradas.

#### 1.1. MODELO DE MAXWELL

El modelo de Maxwell se representa esquemáticamente con un resorte elástico y un amortiguador lineal en serie. Sin embargo, este modelo unidimensional tan sencillo, no existe en la realidad, donde los materiales ocupan un volumen en el espacio y, por consiguiente, los modelos son ineludiblemente tridimensionales. En el modelo unidimensional existen solamente esfuerzos normales u axiales, en los modelos tridimensionales coexisten esfuerzos normales y de corte que interactúan.

### 1.1.1. Forma Diferencial

El modelo de Maxwell linealizado para un fluido viscoelástico incompresible, es decir, con un campo vectorial de velocidades del tipo solenoidal

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

se puede enunciar mediante la siguiente relación constitutiva

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \boldsymbol{\mathcal{T}} \quad \lambda \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{T}}}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{T}} = 2\eta \mathbf{D} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{D}$  es el tensor velocidad de deformación

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{G} + \mathbf{G}^t) \quad \mathbf{G} = (\nabla \mathbf{v})^t \quad (3)$$

y el tensor  $\mathbf{G}$  es el gradiente de la velocidad. El tensor  $\boldsymbol{\mathcal{T}}$  se suele llamar tensor de esfuerzos viscoelásticos. El valor de  $\eta$  actúa como una viscosidad y  $\lambda$  es el tiempo de *relajación* que tarda el material cargado inicialmente con  $\boldsymbol{\mathcal{T}}_o$ , sin que exista deformación ( $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ). En este caso, la solución de (2.b) es

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_o \exp(-t/\lambda) \quad (4)$$

El valor  $\eta/\lambda$  es como un módulo instantáneo de elasticidad lineal.

Para este material, sigue siendo válida la ecuación de conservación de cantidad de movimiento lineal

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}} \quad (5)$$

donde la presión de reacción  $P$ , dependiente del campo de velocidades  $\mathbf{v}$ , puede ser determinada por la solución de las ecuaciones (1) y (5). La presión de reacción no se determina por ninguna expresión constitutiva, ella varía de problema en problema, como en el caso de un fluido newtoniano incompresible.

Por extensión, el modelo de Maxwell no lineal vendrá expresado por la siguiente relación constitutiva

$$\lambda \frac{\delta \boldsymbol{\mathcal{T}}}{\delta t} + \boldsymbol{\mathcal{T}} = 2\eta \mathbf{D} \quad (6)$$

donde el operador diferencial  $\delta/\delta t$  corresponde a cualquiera de las derivadas convectivas descritas en la sección I.3.4.8, excepto la alta-baja y baja-alta, debido a que no conservan en general la simetría del tensor  $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ . Se ha escogido este tipo de derivación, puesto que es invariante bajo un cambio del marco de referencia. Una derivación convectiva interpolada, se puede tener si se escoge en las expresiones I.3.4.(40) los coeficientes  $c_0 = 1$  y  $-1 < c_1 = c_2 < 1$ . En este punto, entonces podemos tener una infinidad de modelos de Maxwell, no obstante, en todos ellos la derivada convectiva en (6), invariante y no lineal, se reduce a la derivada parcial en el tiempo de (2.a), cuando se linealizan todos los estados de deformación al reposo de un material cargado. En otras palabras,

$$\frac{\delta \boldsymbol{\mathcal{T}}}{\delta t} \longrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{T}}}{\partial t} \quad \text{Cuando} \quad \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{0} \quad (7)$$

cerca del estado de reposo del material con carga  $\boldsymbol{\mathcal{T}} \neq \mathbf{0}$ .

### 1.1.2. Forma Integral

Cuando se usan los coeficientes  $c_0 = 1$  y  $c_2 = c_3 = 1$ , la derivada convectiva es alta, y en este caso el modelo de Maxwell se puede reescribir, despejando el tensor de esfuerzos viscoelásticos de la forma integral

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \frac{\eta}{\lambda^2} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda] [\tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau) - \mathbf{I}] d\tau \quad (8.a)$$

donde  $\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)$  es el tensor de Piola y  $\tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau) = \mathbf{B}_\tau(t)$  es el tensor de Green. Estos últimos también pueden ser el tensor de Cauchy  $\mathbf{C}_t(\tau)$  y el tensor de Finger  $\mathbf{C}_t^{-1}(\tau) = \tilde{\mathbf{B}}_\tau(t)$ , cuando se considera la configuración actual en  $t$ , como la configuración de referencia (por est razón, muchos autores obvian la tilde, la cual se mantendrá para ser siempre consistente con la notación). Adicionalmente, se tiene que  $\mathbf{X}_\tau = \mathcal{X}_t(\tau, \mathbf{x})$  es la historia del paso de las partículas, y, por consiguiente,  $\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}_t^t(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau)$ , con  $\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = [\nabla \mathcal{X}_t(\tau, \mathbf{x})]^t$ . Particularmente  $\tilde{\mathbf{C}}_t(t) = \mathbf{I}$ .

Cuando se usan los coeficientes  $c_0 = 1$  y  $c_2 = c_3 = -1$ , la derivada convectiva es baja, y en este caso el modelo de Maxwell se puede reescribir en la forma integral

$$\mathcal{T} = \frac{\eta}{\lambda^2} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda] [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)] d\tau \quad (8.b)$$

donde el tensor  $[\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)]$  es el doble del tensor de deformación finita de Almansi  $\tilde{\mathbf{E}}_t(\tau)$ .

La validez de las formas integrales anteriores se demuestra aplicando la Regla de Leibniz A.2.5.(89') y del hecho de que las siguientes derivadas convectivas se anulan

$$\frac{\delta \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau)}{\delta t} = \mathbf{0} \implies \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau)}{\partial t} = -\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau) - \mathbf{G}^t(t) \cdot \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau) - \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau) \cdot \mathbf{G}(t) \quad (9.a)$$

$$\frac{\delta \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)}{\delta t} = \mathbf{0} \implies \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)}{\partial t} = -\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) - \mathbf{G}^t(t) \cdot \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) - \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) \cdot \mathbf{G}(t) \quad (9.b)$$

donde se ha recortado la notación completa de la forma  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}(t, \mathbf{x})$  y  $\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau, \mathbf{x})$  para reducir el tamaño de las expresiones. Estas a su vez, se deducen de introducir la invarianza del paso de las partículas respecto a la derivación material

$$\frac{d}{dt} \mathcal{X}_t(\tau, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{X}_t(\tau, \mathbf{x}) + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \mathcal{X}_t(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (10)$$

Ver por ejemplo [Joseph,(1990)], para los detalles de esta demostración.

Los modelos de Maxwell con derivadas convectivas alta y baja tienen restricciones en los esfuerzos. Estas restricciones se derivan de hecho de que los tensores  $\tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}$  y  $\tilde{\mathbf{C}}_t$  son definidos positivos, y por lo tanto, sus autovalores son todos positivos (sección A.1.7.12). Como adicionalmente son tensores simétricos, pueden ser diagonalizables siempre. Por consiguiente, para el modelo con derivada convectiva alta

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \left( \mathcal{T} + \frac{\eta}{\lambda} \mathbf{I} \right) \cdot \boldsymbol{\xi} = \frac{\eta}{\lambda^2} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda] \boldsymbol{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau) \cdot \boldsymbol{\xi} d\tau \geq 0 \quad (11.a)$$

y para el modelo con derivada convectiva baja

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \left( \mathcal{T} - \frac{\eta}{\lambda} \mathbf{I} \right) \cdot \boldsymbol{\xi} = -\frac{\eta}{\lambda^2} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda] \boldsymbol{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) \cdot \boldsymbol{\xi} d\tau \leq 0 \quad (11.b)$$

siendo  $\boldsymbol{\xi}$  cualquier vector. Si particularmente tomamos los vectores  $\boldsymbol{\xi}$  como los vectores unitarios de las direcciones principales, entonces las expresiones (11) se convierte en las restricciones de los esfuerzos principales.

### 1.1.3. Modelos Cuasi-Lineales y No Lineales

Lo modelos de Maxwell cuasi-lineales son aquellos que son lineales en la derivada convectiva de  $\mathcal{T}$  y el las derivadas espaciales de  $\mathbf{v}$ , pero son no lineales en  $\mathcal{T}$ . Son modelos de la forma

$$\lambda \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta t} + \mathbf{F}(\mathcal{T}) = 2\eta \mathbf{D} \quad (12)$$

donde la función  $\mathbf{F}$  es no lineal. Un ejemplo, es el modelo de Giesekus [(1982)] con la derivada convectiva alta

$$\lambda \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta} + \mathbf{F}(\mathcal{T}) = 2\eta \mathbf{D} \quad \mathbf{F}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} + c \mathcal{T} \mathcal{T} \quad (13)$$

donde  $c = \alpha\lambda/\eta$  y  $\alpha$  es el factor de movilidad.

Los investigadores Phan-Thien y Tanner [(1977)], han propuesto otro modelo cuasilinear del tipo (12) con

$$\mathbf{F}(\mathcal{T}) = g(\zeta) \mathcal{T} \quad \zeta = \text{tr} \mathcal{T} \quad (14)$$

donde  $g$  es una función escalar de la traza del tensor de esfuerzos. Varias formas para la función  $g$  se han usado para correlacionar resultados de pruebas reológicas. Algunas de ellas son

$$g(\zeta) = \exp(\zeta C\lambda/\eta) \quad g(\zeta) = 1 + c\zeta \quad (15)$$

donde  $C$  y  $c$  son constantes, y la constante  $c = C\lambda/\eta$  se estima cuando la segunda forma es una aproximación de pequeño argumento de la primera forma.

Existe una variedad muy grande de modelos no lineales, pero uno de los más simples es el modelo de White-Metzner, en el que el tiempo de relajación y la viscosidad son funciones del segundo invariante del tensor velocidad de deformación  $\mathbb{I}_{\mathbf{D}} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})$ . Esto es,

$$\lambda(\mathbb{I}_{\mathbf{D}}) \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta t} = 2\eta(\mathbb{I}_{\mathbf{D}}) \mathbf{D} \quad (16)$$

#### 1.1.4. Relación Constitutiva de Boltzmann

Ludwig Boltzmann [(1874)] introdujo una representación integral lineal para los esfuerzos en un sólido viscoelástico. Cuando se aplica esta representación a un fluido de Maxwell con derivada convectiva alta o baja, las ecuaciones (8) y (9) se pueden reescribir integrando por partes como

$$\mathcal{T} = \int_{-\infty}^t \frac{\partial G(t-\tau)}{\partial \tau} [\tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau) - \mathbf{I}] d\tau = - \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (17.a)$$

$$\mathcal{T} = \int_{-\infty}^t \frac{\partial G(t-\tau)}{\partial \tau} [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (17.b)$$

donde

$$\frac{\partial G(t-\tau)}{\partial \tau} = \frac{\eta}{\lambda^2} \exp[-(t-\tau)/\lambda] \quad G(t-\tau) = \frac{\eta}{\lambda} \exp[-(t-\tau)/\lambda] \quad (18)$$

para el caso particular del modelo de Maxwell.

La función  $G(s)$  se denomina *función de relajación* y se asume que es una función positiva, decreciente monótonamente y tiende a cero para valores grandes de  $s$ . Los modelos BKZ (Bernstein-Kearsley-Zapas) generalizan este modelo, permitiendo que la función de relajación pueda ser distinta a (18), dependiendo de la posición  $\mathbf{x}$  y hasta de los invariantes del tensor velocidad de deformación. Inclusive puede ser una función tensorial  $\mathbf{G}(s)$  contraída con el tensor que tiene delante con la operación punto. La función  $G'(s)$ , particularmente el opuesto de (18.a), algunas veces se denomina la *función de Boltzmann*. El valor  $G(0)$ , particularmente evaluado  $\eta/\lambda$  en (18.a), se denomina *módulo instantáneo de elasticidad*.

Las derivadas parciales de los tensores  $\tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau)$  y  $\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)$  deben interpretarse del tipo material con respecto a  $\tau$ , manteniendo constante la configuración de referencia en el tiempo actual  $t$ . Por consiguiente,

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau)}{\partial \tau} = -\tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{C}}}_t(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau) = -2 \mathbf{F}_\tau(t) \cdot \mathbf{D}(\tau) \cdot \mathbf{F}_\tau^t(t) \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)}{\partial \tau} = \dot{\tilde{\mathbf{C}}}_t(\tau) = 2 \tilde{\mathbf{F}}_t^t(\tau) \cdot \mathbf{D}(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) \quad (19)$$

Como se observará, estas expresiones son particularizaciones de I.3.4.(11). Basado en esto, todos los modelos con la relación constitutiva de Boltzmann se reducen a

$$\mathcal{T}(t, \mathbf{x}) = 2 \int_{t_o}^t G(t-\tau) \mathbf{D}(\tau, \mathbf{x}) d\tau \quad (20)$$

cuando se linealizan cerca de un estado de reposo en  $t_o$ . El tensor velocidad de deformación  $\mathbf{D}(\tau, \mathbf{x})$ , denotado en (19) como  $\mathbf{D}(\tau)$  para simplificar, debe calcularse con el campo de velocidades  $\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x})$ . La expresión (20), en un sentido lo que afirma es que en estos modelos la función de relajación  $G(s)$  es una función material independiente para fluidos incompresibles con elasticidad instantánea.

## 1.2. MODELO DE JEFFREYS

El modelo de Jeffreys se origina de enlazar al elemento un elemento de sólido de Voigt-Kelvin (detallado más adelante en la sección 2.1) con un elemento viscoso lineal que lo convierte en fluido. De esta forma, el modelo completo tiene dos viscosidades  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , lo que le hace tener dos tiempos de relajación  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , con un único módulo de elasticidad lineal  $(\eta_1 + \eta_2)/\lambda_1 = \eta_2/\lambda_2$ .

### 1.2.1. Relación Constitutiva

La relación constitutiva del modelo de Jeffreys sigue las mismas consideraciones que el modelo de Maxwell en 1.1.(1) – (3). Sólo que se cambia la expresión 1.1.(2.b) por

$$\lambda_1 \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \mathcal{T} = 2\eta_1 \left[ \mathbf{D} + \lambda_2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \quad (1)$$

La forma integral de esta relación constitutiva es

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_N + \mathcal{T}_E \quad \mathcal{T}_N = 2\mu \mathbf{D} \quad \mathcal{T}_E = \frac{2\eta}{\lambda_1} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda_1] \mathbf{D}(\tau) d\tau \quad (2)$$

donde se definen una viscosidad newtoniana  $\mu$  y una viscosidad elástica  $\eta$  expresadas por

$$\mu = \eta_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad \eta = \eta_1 \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) = \eta_1 - \mu = \frac{\eta_1^2}{\eta_1 + \eta_2} \quad \frac{\eta_1 + \eta_2}{\lambda_1} = \frac{\eta_2}{\lambda_2} \quad (3)$$

El tensor de esfuerzo  $\mathcal{T}_N$  se dice que es la contribución newtoniana y el tensor de esfuerzo  $\mathcal{T}_E$  se dice que es la contribución viscoelástica.

### 1.2.2. Modelos de Oldroyd

En los modelos de Oldroyd [(1965)] se conserva la forma de la relación constitutiva (2), pero la contribución viscoelástica se calcula con el modelo de derivada convectiva alta (Oldroyd B)

$$\mathcal{T}_E = \frac{\eta}{\lambda_1^2} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda_1] [\tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau) - \mathbf{I}] d\tau = -\frac{\eta}{\lambda_1} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda_1] \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}_t^{-1}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.a)$$

o con el modelo de derivada convectiva baja (Oldroyd A)

$$\mathcal{T}_E = \frac{\eta}{\lambda_1^2} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda_1] [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)] d\tau = \frac{\eta}{\lambda_1} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda_1] \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.b)$$

En general, se puede volver a escribir (2), sólo que en esta oportunidad la contribución viscoelástica satisface

$$\lambda_1 \frac{\delta \mathcal{T}_E}{\delta t} + \mathcal{T}_E = 2\eta \mathbf{D} \quad (5)$$

donde la derivada convectiva puede de cualquier tipo, no sólo de los tipos alta o baja para los que  $\mathcal{T}_E$  tiene una forma integral (4). En este caso, la expresión (5) implica que el esfuerzo total satisface también

$$\lambda_1 \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta t} + \mathcal{T} = 2\eta_1 \left[ \mathbf{D} + \lambda_2 \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta t} \right] \quad (6)$$

Las derivadas convectivas en (6) son del mismo tipo en cada miembro, pero esta condición no es necesaria si se desea tener una mayor diversidad de modelos.

### 1.2.3. Modelo Generalizado

El modelo generalizado consiste en utilizar cualquiera de los modelos de la sección 1.1 para evaluar la contribución viscoelástica  $\mathcal{T}_E$ , pero con los parámetros  $\lambda_1$  y  $\eta$ . Por ejemplo, el modelo de Gisekus descrito en la sección 1.1.3, ecuación 1.1.(13) quedaría como

$$\lambda_1 \frac{\delta \mathcal{T}_E}{\delta t} + \mathbf{F}(\mathcal{T}_E) = 2\eta \mathbf{D} \quad \mathbf{F}(\mathcal{T}_E) = \mathcal{T}_E + c \mathcal{T}_E \cdot \mathcal{T}_E \quad c = \alpha \lambda_1 / \eta \quad (7)$$

Para la contribución newtoniana  $\mathcal{T}_N$  se puede usar, por ejemplo, una relación constitutiva de un fluido de segundo orden, como el material descrito en la sección VII.2.5. De esta forma, se puede tener por ejemplo

$$\mathcal{T}_N = C_1 \mathbf{D} + C_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \quad C_1 = C_1(\mathbb{I}_D, \mathbb{III}_D) \quad C_2 = C_2(\mathbb{I}_D, \mathbb{III}_D) \quad (8)$$

Como se podrá observar, en el modelo VII.2.5.(4) se ha tomado  $c_0 = c_3 = 0$  y, por supuesto, que  $\mathbf{A}_1 = 2 \mathbf{D}$ . Las cantidades  $C_1 = 2 c_1$  y  $C_2 = 4 c_2$  son funciones de los dos únicos invariantes principales no nulos de  $\mathbf{D}$ .

Para todos estos modelos las expresiones básicas 1.1.(2.a) y (2.a) siguen siendo válidas.

## 2. SOLIDOS VISCOELASTICOS

Dentro de los materiales viscoelásticos, se han designado como sólidos, aquellos que poseen límites para el proceso de deformación, o sea, que la deformación puede hacerse eventualmente infinita, pero los esfuerzos también. Para los sólidos se prefiere la descripción del tipo material de las variables involucradas.

### 2.1. MODELO DE KELVIN-VOIGT

El modelo de Kelvin-Voigt es muy sencillo. Consiste en un elemento elástico en paralelo con otro elemento viscoso. Su relación constitutiva es

$$\mathbf{S} = \lambda_e \varrho \mathbf{I} + 2\mu_e \mathbf{E} + 2\eta_e \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \varrho = \text{tr} \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) \quad \mathbf{L} = (\tilde{\nabla} \mathbf{u})^t \quad (1)$$

donde  $\lambda_e$  y  $\mu_e$  son los coeficientes de Lamé descritos en las secciones III.2.3.2 y XI.1.1.2. El coeficiente  $\eta_e$  es un coeficiente de viscosidad. De esta forma, cuando el material está en equilibrio estático, la relación constitutiva es la de un sólido isótropo elástico lineal de Hooke (El campo vectorial  $\mathbf{u}$  corresponde al campo de los desplazamientos y el tensor  $\mathbf{L}$  es el gradiente de los desplazamientos).

La relación  $\lambda = \eta_e / \mu_e$  es el tiempo de *recuperación* del material inicialmente deformado con  $\mathbf{E}_o$  y sin actuar esfuerzo alguno ( $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ ), siguiendo un comportamiento  $\lambda \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{E} = \mathbf{0}$  ( $\varrho = 0$ ), cuya solución es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \exp(-t/\lambda) \quad (2)$$

La ecuación del movimiento para el sólido sigue siendo la misma que se usó para el sólido elástico en la sección XI.1.1.3

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \rho_o \tilde{\mathbf{g}} = \rho_o \tilde{\mathbf{a}} \quad \tilde{\mathbf{a}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3)$$

Sólo que ahora el tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}(t, \mathbf{X})$  viene expresado por (1) (El vector  $\tilde{\mathbf{g}}$  es la fuerza de cuerpo o a distancia vista desde la configuración de referencia y  $\rho_o$  es la densidad del material en dicha configuración).



## 2.2. MODELO GENERALIZADO

Un modelo más generalizado para un sólido viscoelástico sigue una idea análoga al modelo de Jeffreys y similares de la sección 1.2. Esto es, por ejemplo, que el tensor de esfuerzo se descompone en un tensor de esfuerzos elástico de Hooke y un tensor de esfuerzos viscoelástico, ambos simétricos

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_H + \mathbf{S}_V \quad \mathbf{S}_H = \lambda_e \varrho \mathbf{I} + 2\mu_e \mathbf{E} \quad \lambda \frac{\partial \mathbf{S}_V}{\partial t} + \mathbf{S}_V = \alpha \varrho \mathbf{I} + 2\beta \mathbf{E} + 2\eta \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son una especie de coeficientes de Lamé para el modelo viscoelástico, y  $\eta$  una especie de viscosidad del mismo modelo. El coeficiente  $\lambda$  es de nuevo un tiempo de relajación del tensor de esfuerzos  $\mathbf{S}_V$  y  $\eta/\lambda$  un módulo instantáneo de elasticidad para el mismo tensor [Fabrizio & Morro, (1992)].

Una trivial integración, usando un factor integrante, da como resultado de (1.c) que

$$\mathbf{S}_V(t) = \frac{\alpha}{\lambda} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda] \varrho(\tau) d\tau \mathbf{I} + \frac{2\beta}{\lambda} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda] \mathbf{E}(\tau) d\tau + \frac{2\eta}{\lambda} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tau)/\lambda] \frac{\partial \mathbf{E}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

Esto muestra que cada uno de los términos corresponde a la forma integral de Boltzmann con la función de relajación del tipo exponencial decreciente

$$G_\alpha(t-\tau) = \frac{\alpha}{\lambda} \exp[-(t-\tau)/\lambda] \quad G_\beta(t-\tau) = \frac{2\beta}{\lambda} \exp[-(t-\tau)/\lambda] \quad G_\eta(t-\tau) = \frac{2\eta}{\lambda} \exp[-(t-\tau)/\lambda] \quad (3)$$

donde los módulos (factores que multiplican al exponencial) cambia en cada caso.

Sabiendo por I.3.2.(14) y I.3.4.(11) que

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = 2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 2 \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad \mathbf{E} = \mathbf{C} + \frac{1}{2} \mathbf{L}^t \cdot \mathbf{L} \quad (4)$$

entonces (1) se puede considerar la linealización, cerca de la configuración de referencia, de un modelo más general, basado en las mismas ideas que los modelos de Boltzmann. Con esto en mente, el tensor de esfuerzos viscoelástico se puede genéricamente expresar como

$$\mathbf{S}_V(t) = \sum_i \int_{-\infty}^t G_i(t-\tau) \mathbb{L}_i[\mathbf{E}(\tau)] d\tau \quad (5)$$

donde el operador  $\mathbb{L}_i$  incluye a su vez combinaciones y composiciones de los operadores lineales  $\text{tr}$ ,  $\partial/\partial\tau$ . Las funciones de relajación  $G_i(s)$  pueden, al igual que se dijo antes con los modelos de Boltzman, diferentes a las funciones del tipo

$$G_i(t-\tau) = \frac{\alpha_i}{\lambda} \exp[-(t-\tau)/\lambda] \quad (6)$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Bird, R. B.; Curtiss, Ch. F.; Armstrong, R. C.; Hassager, O. **Dynamics of Polymeric Liquids**. Vol.1: "Fluid Mechanics". Vol.2: "Kinetic Theory". John Wiley & Sons (New York), 1987.
- [2] Boltzmann, L. "Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung Sitzungber", **Kaiserl-Akad. Wiss. (Wien), Math. Naturwiss Classe**, Vol.70(II), pp.275-306, (1874).
- [3] Coleman, B. D.; Markovitz, H.; Noll, W. **Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids, Theory and Experiment**. Springer-Verlag, 1966.

- [4] Darby, R. **Viscoelastic Fluids: An Introduction to their Properties and Behavior** (Chemical Processing and Engineering, Vol.9, Editors: Lyle F. Albright, R. N. Maddox, John J. McKetta). Marcel Dekker, 1976.
- [5] Fabrizio, M.; Morro, A. **Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity**. Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM (Philadelphia), 1992.
- [6] Findley, W. N.; Lai, J. S.; Onaran, K. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials**, with and Introduction to Linear Viscoelasticity. North-Holland Publishing Company, 1976.
- [7] Flügge, W. **Viscoelasticity**, Second Revised Edition. Springer-Verlag, 1975.
- [8] Giesekus, H. "A Simple Constitutive Equation for Polymer Fluids Based on The Concept of Deformation-Dependent Tensorial Mobility", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Vo.11, pp.69-109, (1968).
- [9] Huilgol, R.R.; Phan-Thien, N. **Fluid Mechanics of Viscoelasticity**. Elsevier, 1997.
- [10] Joseph, D. D. **Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids**. Springer-Verlag, 1990.
- [11] Oldroyd, J. G. "Some Steady Flows of the General Elastico-Viscous Liquid". **Proceedings of the Royal Society**, Vol.A283, (1965).
- [12] Phan-Thien, N. **Understanding Viscoelasticity: Basics of Rheology**. Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg), 2002.
- [13] Phan-Thien, N.; Tanner, R. "A New Constitutive Equation Derived From Network Theory", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Vol.2, pp.353-365, (1977).
- [14] Schowalter, W. R. **Mechanics of Non-Newtonian Fluids**. Pergamon Press, Inc., 1978.
- [15] Shames, I. H.; Cozzarelli, F. A. **Elastic and Inelastic Stress Analysis**. Prentice-Hall, 1992.
- [16] Truesdell, C. A.; (Ed.). **Mechanics of Solids**. Vol.III: "Theory of Viscoelasticity, Plasticity, Elastic Waves, and Elastic Stability". Vol.IV: "Waves in Elastic and Viscoelastic Solids (Theory and Experiments)". Springer-Verlag, 1974.

# CAPITULO XIII

## SOLIDOS PLASTICOS

### CONTENIDO

1. DEFORMACIONES ELASTICAS.	287
1.1. Relaciones Constitutivas.	287
1.1.1. Material Elástico Isótropo.	287
1.1.2. Esfuerzos y Deformaciones Medias.	288
1.1.3. Energía de Deformación.	288
2. DEFORMACIONES PLASTICAS.	289
2.1. Relaciones Constitutivas.	289
2.1.1. Material Plástico Isótropo.	289
2.1.2. Trabajo de Deformación Plástica.	290
2.1.3. Endurecimiento.	290
2.2. Métodos de Resolución.	291
2.2.1. Soluciones Elásticas Sucesivas.	291
2.2.2. Soluciones Dinámicas.	294
BIBLIOGRAFIA.	294

### 1. DEFORMACIONES ELASTICAS

En esta parte se hará un repaso del Capítulo XI para algunas expresiones y conceptos de elasticidad lineal necesarios para luego hacer la formulación de los sólidos plásticos.

#### 1.1. RELACIONES CONSTITUTIVAS

##### 1.1.1. Material Elástico Isótropo

La relación constitutiva para un material elástico isótropo ( $T_{\triangleright} \leq T_{\triangleright,0} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_0$ , según criterio de falla de von Mises) viene dada por

$$\mathbf{S} = \lambda_e \varrho \mathbf{I} + 2\mu_e \mathbf{E} = 2\mu_e \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \varrho \mathbf{I} + \mathbf{E} \right) \quad \varrho = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr} \mathbf{E} = \mathbf{I} \mathbf{E} \approx \frac{\nu - \nu_o}{\nu_o} \quad (1)$$

donde

$$\mu_e = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda_e = \frac{2\mu_e \nu}{1-2\nu} \quad (2)$$

son los coeficientes primario y secundario de Lamé. La cantidad  $\mathbf{E}$  es el módulo de elasticidad lineal y  $\nu$  es el módulo de Poisson (de contracción transversal). La cantidad  $I_{\mathbf{E}}$  es el primer invariante del tensor de deformación  $\mathbf{E}$ .

El tensor de esfuerzos  $\mathbf{S}$  se puede descomponer en una parte isótropa  $\mathbf{S}^\circ$  y una parte desviatoria  $\mathbf{S}'$  en la forma

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^\circ + \mathbf{S}' \quad \mathbf{S}^\circ = 3K \mathbf{E}^\circ \quad \mathbf{S}' = 2G \mathbf{E}' \quad (3)$$

donde los módulos de elasticidad isótropo o volumétrico  $K$  y el módulo de corte  $G$  se calculan como

$$K = \frac{2}{3} G \left( \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \right) = \frac{E/3}{1 - 2\nu} \approx \frac{1}{\kappa} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \mu_e \quad (4)$$

en función del módulo de elasticidad lineal  $E$  y el módulo de Poisson  $\nu$ . El valor  $\kappa = (\partial\rho/\partial P)_T / \rho = -(\partial v/\partial P)_T / v$  es el coeficiente de compresibilidad isotérmica. Expresiones inversas a (4) son las siguientes

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad \nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (5)$$

Como se puede ver en (3) la descomposición en partes isótropa y desviatoria del tensor de esfuerzos se traslada también al tensor de deformación, produciendo esto un desacoplamiento de las relaciones constitutivas en partes isótropa y desviatoria para la elasticidad lineal.

### 1.1.2. Esfuerzos y Deformaciones Medias

Obteniendo la traza de la ecuación (1) se obtiene

$$\zeta = 3K \varrho \quad \zeta = \text{tr} \mathbf{S} = I_S \quad (6)$$

y dividiendo entre tres ambos miembros resulta

$$\sigma_m = 3K \epsilon_m \quad \sigma_m = \frac{\zeta}{3} = -P_m \quad \epsilon_m = \frac{\varrho}{3} \quad (7)$$

donde  $P_m$  es una presión, si los esfuerzos actúan a compresión.

Haciendo uso de (1.b), la expresión anterior también se puede interpretar como

$$P_m \approx K \frac{\mathcal{V}_o - \mathcal{V}}{\mathcal{V}_o} \quad (8)$$

que no es más que la simple ley de la proporcionalidad entre la presión (en este caso manométrica) y la reducción relativa del volumen, también válida para los gases ideales a temperatura constante (Ley de Boyle). El factor de proporcionalidad en este caso es el módulo de elasticidad volumétrico  $K$ .

Ahora con la expresión (6), se puede hallar la relación constitutiva inversa a (1), simplemente despejando el tensor de deformación  $\mathbf{E}$  de la siguiente manera

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2G} \mathbf{S} - \frac{\nu}{E} \zeta \mathbf{I} \quad (9)$$

donde se ha usado la relación (4.a) para  $K$ .

### 1.1.3. Energía de Deformación

La energía de deformación se define como una energía potencial, suponiendo que no existen irreversibilidades (asociadas a veces a componentes viscoelásticos en el material), de la forma

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{I_S^2}{9K} - \frac{II_{S'}}{G} \right) \quad (10)$$

En realidad viene a ser el trabajo realizado para llevar el material descargado, linealmente hasta el estado de esfuerzo correspondiente.

Igualmente como se hizo antes, la energía de deformación también se puede descomponer en su parte isótropa y en su parte desviatoria

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^o + \mathcal{U}' \quad \mathcal{U}^o = \frac{\mathbf{I}_S^2}{18K} = \frac{N_{\triangleright}^2}{2K} = \frac{K \mathbf{I}_E^2}{2} \quad \mathcal{U}' = -\frac{\mathbf{II}_S}{2G} = \frac{3 T_{\triangleright}^2}{4G} = 2G \mathbf{II}_{E'} = 3G \gamma_{\triangleright}^2 \quad (11)$$

donde  $T_{\triangleright}$  y  $N_{\triangleright}$  son respectivamente el esfuerzo cortante y normal sobre el plano octaedral. La cantidad  $\gamma_{\triangleright}$  es la deformación cortante octaedral.

## 2. DEFORMACIONES PLASTICAS

### 2.1 RELACIONES CONSTITUTIVAS

#### 2.1.1. Material Plástico Isótropo

En plasticidad ( $T_{\triangleright} > T_{\triangleright,0} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_0$ , según criterio de falla de von Mises) es frecuente el uso del modelo Prandtl-Reuss que desacopla la parte elástica de la parte plástica del tensor de deformación. Esto es,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^p \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p \quad \varrho = \varrho^e + \varrho^p \quad (1)$$

donde, por una parte, la componente elástica se calcula usando la relación constitutiva inversa 1.1.(9) de un sólido elástico

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{2G} \mathbf{S} - \frac{\nu}{E} \zeta \mathbf{I} \quad \zeta = \text{tr} \mathbf{S} = \mathbf{I}_S \quad (2)$$

Por otra parte, la componente plástica de la deformación es tal, que conserva el volumen y, por lo tanto, satisface

$$\varrho^e = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr} \mathbf{E} = \mathbf{I}_E = \frac{\zeta}{3K} \quad \varrho^p = \nabla \cdot \mathbf{u}^p = \text{tr} \mathbf{E}^p = \mathbf{I}_{E^p} = 0 \quad (3)$$

Esta componente plástica se calcula integrando la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{E}^p}{dt} = \mathbf{S}' \frac{d\Lambda}{dt} \quad (4)$$

donde lo único que origina deformación plástica es el tensor de esfuerzos desviatorio, puesto que la parte isótropa solamente origina deformaciones elásticas. La variable  $\Lambda$  es un parámetro del endurecimiento del material y depende de cuán rápido el material se deforma plásticamente.

En el caso de un plástico perfecto, el parámetro de endurecimiento satisface que crece de forma constante como

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{1}{\mu_p} \quad (5)$$

donde  $\mu_p$  es el módulo de plasticidad del material. Este módulo hace un papel similar a  $\mu_e$  en un material elástico, pero en plasticidad es equivalente a decir que el módulo  $\mu_e$  es variable con el tiempo a medida que evoluciona la deformación.

En el caso de un plástico con endurecimiento de crecimiento variable, el parámetro de endurecimiento satisface que depende de las componentes octaedrales en la forma

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{1}{T_{\triangleright}} \frac{d\gamma_{\triangleright}^p}{dt} \quad (6)$$

donde

$$\tau_{\triangleright}^2 = \frac{2}{9} (\mathbf{I}_{\mathbf{S}}^2 - 3\mathbb{I}_{\mathbf{S}}) = -\frac{2}{3} \mathbb{I}_{\mathbf{S}'}, \quad (\gamma_{\triangleright}^p)^2 = \frac{2}{9} (\mathbf{I}_{\mathbf{E}^p}^2 - 3\mathbb{I}_{\mathbf{E}^p}) = -\frac{2}{3} \mathbb{I}_{\mathbf{E}^p'} \quad (7)$$

son el esfuerzo cortante octaedral del tensor de esfuerzos y la deformación cortante octaedral del tensor deformación plástica. En (7) se ha usado la identidad

$$\mathbb{I}_{\mathbf{T}'} = \mathbb{I}_{\mathbf{T}} - \mathbf{I}_{\mathbf{T}}^2/3 \quad (8)$$

En un ensayo de tracción simple se tiene que

$$\sigma = \frac{3\sqrt{2}}{2} \tau_{\triangleright} \quad \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad \epsilon^e = \frac{\sigma}{\mathbf{E}} \quad d\epsilon^p = \sqrt{2} d\gamma_{\triangleright}^p \approx \sqrt{2} (d\mathbf{E}^p)_{\triangleright} \quad (9)$$

La última igualdad es aproximada porque el diferencial (operador lineal) y la obtención de la componente octaedral  $\gamma_{\triangleright}^p = (\mathbf{E}^p)_{\triangleright}$  (operación no lineal), realmente no conmutan.

Si consideramos que las condiciones octaedrales se mantienen en otras condiciones de deformación, como inicialmente lo sugirió el criterio de falla de Von Mises (ver sección II.3.5), entonces la gráfica del ensayo de  $\sigma$  vs.  $\epsilon$  puede servir para evaluar el endurecimiento en cada instante de la forma

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma} \frac{d\epsilon^p}{dt} \quad (10)$$

De hecho, el modelo de Lévy-Mises usa este mismo criterio, sólomente que desprecia las deformaciones elásticas ( $\mathbf{E}^e \approx \mathbf{0}$ ).

### 2.1.2. Trabajo de Deformación Plástica

El trabajo realizado por las fuerzas internas en un material plástico se calcula como

$$d\mathcal{W} = \mathbf{S} : d\mathbf{E} = \mathbf{S} : d\mathbf{E}^e + \mathbf{S} : d\mathbf{E}^p = d\mathcal{W}^e + d\mathcal{W}^p \quad (11)$$

La parte elástica se calcula igual que la energía de deformación elástica en 1.1.(10),

$$\mathcal{W}^e = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{E}^e = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{I}_{\mathbf{S}}^2}{9\mathbf{K}} - \frac{\mathbb{I}_{\mathbf{S}'}}{\mathbf{G}} \right) \quad (12)$$

Sin embargo, la parte plástica se calcula como

$$d\mathcal{W}^p = \mathbf{S} : d\mathbf{E}^p = \mathbf{S}' : d\mathbf{E}^p = \mathbf{S}' : \mathbf{S}' d\Lambda = -2 \mathbb{I}_{\mathbf{S}'} d\Lambda \quad (13)$$

donde se ha usado la propiedad de que el producto de doble contracción entre dos tensores de segundo orden, uno isótropo y otro desviatorio, es siempre nulo, y se ha utilizado (4) en la última parte. Esta última expresión se puede reescribir como

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{1}{2 \mathbb{I}_{\mathbf{S}'}} \frac{d\mathcal{W}^p}{dt} \quad (14)$$

lo que permite calcular el endurecimiento de una manera alternativa.

### 2.1.3. Endurecimiento

Como se dijo antes, se va a estimar el endurecimiento de la información obtenida de un ensayo de tracción simple, realizado al material. Durante el ensayo, se satisface para los esfuerzos y las deformaciones a cada instante que

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\mathbf{E}} + \epsilon^p \quad \frac{d\epsilon}{d\sigma} = \frac{1}{\mathbf{E}} + \frac{d\epsilon^p}{d\sigma} \quad (15)$$

y para el trabajo que

$$d\mathcal{W}^p = \sigma d\epsilon^p = d\mathcal{W} - d\mathcal{W}^e \quad \frac{d\mathcal{W}^p}{d\sigma} = \sigma \frac{d\epsilon^p}{d\sigma} \quad \mathcal{W} = \int \sigma d\epsilon \quad d\mathcal{W}^e = \frac{1}{2} d\left(\frac{\sigma^2}{E}\right) \quad (16)$$

Si denotamos las relaciones funcionales

$$\sigma = S(\epsilon) = H(\epsilon^p) = Q(\mathcal{W}^p) \quad S'(\epsilon) = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \quad H'(\epsilon^p) = \frac{d\sigma}{d\epsilon^p} \quad Q'(\mathcal{W}^p) = \frac{d\sigma}{d\mathcal{W}^p} \quad (17)$$

entonces se obtienen las siguientes expresiones

$$H'(\epsilon^p) = \frac{E S'(\epsilon)}{E - S'(\epsilon)} \quad Q'(\mathcal{W}^p) = \frac{H'(\epsilon^p)}{S'(\epsilon)} \quad (18)$$

Por lo que ahora el endurecimiento (6), se puede expresar como

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{3}{2} \frac{1}{S(\epsilon)} \frac{d\epsilon^p}{dt} = \frac{3}{2} \frac{1}{S(\epsilon)} \frac{1}{H'(\epsilon^p)} \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{2 \mathbb{I}_{S'}} \frac{1}{Q'(\mathcal{W}^p)} \frac{d\sigma}{dt} \quad (19)$$

En esta expresión, la primera y segunda igualdad corresponde a la ecuación (10) y se le denomina endurecimiento por deformación plástica. La tercera igualdad corresponde a la ecuación (14) y se le denomina endurecimiento por trabajo. En ambos casos se han usado las relaciones funcionales (17).

## 2.2 METODOS DE RESOLUCION

### 2.2.1. Soluciones Elásticas Sucesivas

Cuando se conocen las aceleraciones del sistema y las cargas, tanto concentradas como distribuidas, se puede aplicar este método. El problema se convierte en un problema de equilibrio, cuya ecuación es la ecuación de Cauchy

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad \tilde{\mathbf{f}} = \rho_o (\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{a}}) \quad \tilde{\mathbf{a}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

El tensor de esfuerzo para el material plástico se expresa como

$$\mathbf{S} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \varrho \mathbf{I} + \mathbf{E} - \mathbf{E}^p \right] \quad \zeta = \text{tr} \mathbf{S} = \mathbf{I}_S \quad \varrho = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr} \mathbf{E} = \mathbf{I}_E = \frac{\zeta}{3K} \quad (2)$$

Sabiendo que la divergencia del tensor de deformación es

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \varrho + \nabla^2 \mathbf{u}) \quad (3)$$

entonces la divergencia del tensor de esfuerzos es

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla \varrho^e + \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{E}^p \right) \quad (4)$$

Substituyendo este resultado en la ecuación de equilibrio (1) se obtiene la ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{2(1+\nu)}{E} \tilde{\mathbf{f}} - 2 \nabla \cdot \mathbf{E}^p = \mathbf{0} \quad (5)$$

similar a la ecuación de Cauchy-Navier (ver sección XI.1.2), en donde se ha supuesto conocido el campo de tensores de deformación plástica  $\mathbf{E}^p$ , para poder calcular el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$ . En un principio, este campo de tensores de deformación plástica se puede suponer nulo y el campo de tensores de esfuerzos calculado correspondería a equilibrio elástico.

Teniendo el campo de desplazamiento, se puede ahora calcular el campo de tensores de deformación total  $\mathbf{E}$  de la forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^t + \nabla \mathbf{u}] \quad (6)$$

y con la relación constitutiva (2) se puede calcular el campo de tensores de esfuerzos  $\mathbf{S}$ . Estos tensores o su parte desviatoria

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \frac{\varrho}{3} \mathbf{I} \quad \varrho = \text{tr} \mathbf{E} \quad \mathbf{S}' = \mathbf{S} - \frac{\zeta}{3} \mathbf{I} \quad \zeta = \text{tr} \mathbf{S} \quad (7)$$

permite calcular las componentes octaedrales de la deformación y el esfuerzo

$$\begin{aligned} \gamma_{\triangleright}^2 &= \frac{1}{9} [(E_{11} - E_{22})^2 + (E_{22} - E_{33})^2 + (E_{33} - E_{11})^2 + 6(E_{12}^2 + E_{23}^2 + E_{31}^2)] = \frac{2}{9} (\mathbf{I}_{\mathbf{E}}^2 - 3\mathbb{I}_{\mathbf{E}}) = -\frac{2}{3} \mathbb{I}_{\mathbf{E}'} \\ \tau_{\triangleright}^2 &= \frac{1}{9} [(S_{11} - S_{22})^2 + (S_{22} - S_{33})^2 + (S_{33} - S_{11})^2 + 6(S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2)] = \frac{2}{9} (\mathbf{I}_{\mathbf{S}}^2 - 3\mathbb{I}_{\mathbf{S}}) = -\frac{2}{3} \mathbb{I}_{\mathbf{S}'} \end{aligned} \quad (8)$$

y las componentes equivalentes axiales en el ensayo de tracción

$$\sigma = \frac{3\sqrt{2}}{2} \tau_{\triangleright} \quad \epsilon = S^{-1}(\sigma) = \sqrt{2} \gamma_{\triangleright} \quad \epsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad \epsilon^p = \epsilon - \epsilon^e \quad (9)$$

Las diferencia de los cálculos  $\Delta \epsilon^p$  y  $\Delta \sigma$  en dos iteraciones consecutivas se utilizan para calcular la diferencia del endurecimiento en la forma

$$\Delta \Lambda = \frac{3}{2} \frac{1}{S(\epsilon)} \Delta \epsilon^p = \frac{3}{2} \frac{1}{S(\epsilon)} \frac{1}{H'(\epsilon^p)} \Delta \sigma = -\frac{1}{2 \mathbb{I}_{\mathbf{S}'}} \frac{1}{Q'(\mathcal{W}^p)} \Delta \sigma \quad (10)$$

Estas expresiones, que son la forma discreta de la triple ecuación 2.1.(19), sólo tienen sentido cuando el esfuerzo  $\sigma$  es mayor que el límite de fluencia  $\sigma_o$ . Este valor límite de fluencia puede tomarse como el primer valor iterado para la variable  $\sigma$ . Cuando  $\sigma < \sigma_o$ , simplemente  $\Delta \Lambda = 0$ . El valor de  $\Delta \Lambda$  también se anula cuando el material se descarga, es decir, cuando  $\Delta \sigma < 0$ . Finalmente, la diferencia del tensor de deformaciones plásticas, entre dos iteraciones consecutivas, vendrá dado por la forma discreta de la ecuación 2.1.(4). Esto es,

$$\Delta \mathbf{E}^p = \mathbf{S}' \Delta \Lambda \quad \Delta \epsilon^p = \sqrt{2} (\Delta \mathbf{E}^p)_{\triangleright} \quad (11)$$

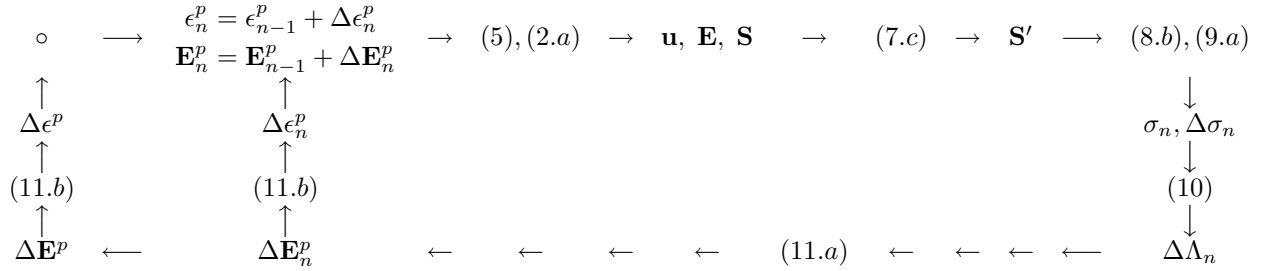
La suma de este valor tensorial con el tensor de deformaciones plásticas supuesto para la iteración anterior, da el nuevo valor del tensor de deformaciones plástica, con el cual se vuelve a repetir todo el proceso de cálculo. Esto se realiza de forma repetida hasta que el proceso iterativo converga a un campo de esfuerzos-deformaciones que, dentro de una cierta tolerancia impuesta, no varíe de una iteración a otra. Todo este proceso iterativo se puede relajar si la suma anterior se hace de la siguiente forma

$$\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \omega \Delta \mathbf{E}_n^p \quad (12)$$

donde el factor de relajación  $\omega$  es menor que la unidad, en el caso de que el proceso se sub-relaje, lo cual es lo más frecuente. Los valores del tensor  $\Delta \mathbf{E}^p$  puede valer distinto en cada punto localizado dentro del materia. También puede ser nulo en una región del material y no nulo en otra región del mismo material.



El siguiente diagrama de flujo representa de forma esquemática como se realizan los cálculos en un proceso iterativo para obtener el incremental de deformación plástica definitivo que satisfaga las relaciones constitutivas y las ecuaciones de movimiento.



Como criterio de parada de este proceso iterativo se puede utilizar la condición 2.1.(3.b).

La siguiente figura presenta como encajan de manera gráfica los conceptos antes expuestos en el procedimiento de resolución.

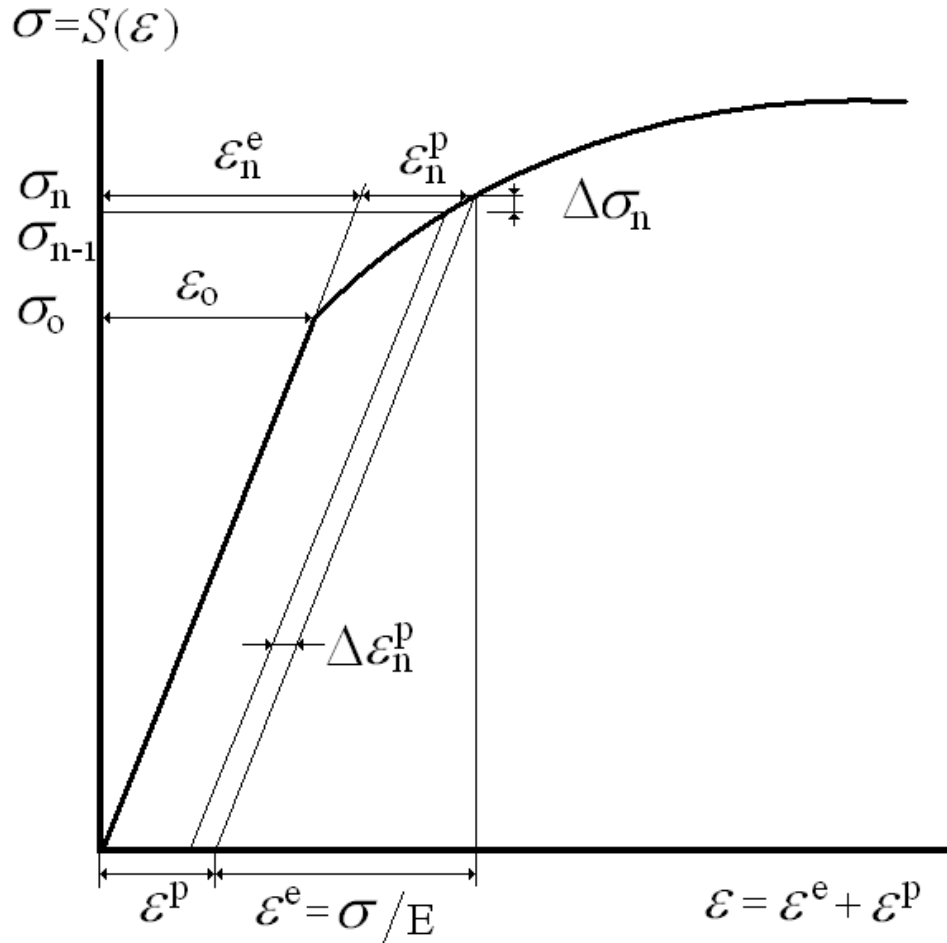


Figura 1. Diagrama esfuerzo-deformación para la plasticidad diferencial incremental.

### 2.2.2. Soluciones Dinámicas

En el caso de soluciones dinámica, la ecuación de equilibrio (1) se expresa como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{v}} \quad \rho_o \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} = \rho_o \tilde{\mathbf{g}} + \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (13)$$

donde  $\tilde{\mathbf{v}}$  es la descripción material de la velocidad y donde la divergencia del tensor de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  viene dada por (4) de nuevo

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\mathbf{E}}{1 + \nu} \left( \frac{\nu}{1 - 2\nu} \nabla \varrho^e + \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{E}^p \right) \quad (14)$$

La forma dinámica de la ecuación de compatibilidad (6) es

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} [(\nabla \tilde{\mathbf{v}})^t + \nabla \tilde{\mathbf{v}}] \quad (15)$$

y la forma dinámica para el tensor de deformaciones plásticas ya se había enunciado como

$$\frac{\partial \mathbf{E}^p}{\partial t} = \mathbf{S}' \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (16)$$

Recuérdese que para campos con descripción material, la derivación parcial es exactamente igual a la derivación material. El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, una vez que se discretizan las ecuaciones (13)–(16), se pueden resolver en el tiempo, a partir de valores iniciales para un estado de deformación-esfuerzo particular del material.

Para el endurecimiento, de igual manera siguen siendo válidas las expresiones 2.1.(19), reproducidas a continuación (con la observación hecha antes con respecto a la derivación en el tiempo)

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \frac{3}{2} \frac{1}{S(\epsilon)} \frac{d\epsilon^p}{dt} = \frac{3}{2} \frac{1}{S(\epsilon)} \frac{1}{H'(\epsilon^p)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{1}{2 \mathbb{I}_{\mathbf{S}'}} \frac{1}{Q'(\mathcal{W}^p)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (19)$$

sólamente que ahora, en el ensayo de tracción, debe hacerse una parametrización con respecto al tiempo. En otras palabras, deben tenerse varios diagrama  $\sigma$  vs.  $\epsilon$ , para varias velocidades de carga-deformación, e interpolar entre los diagramas, dependiendo de la velocidad de la carga o la deformación

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \mathbf{T}_{\triangleright}}{\partial t} \quad \frac{\partial \epsilon^p}{\partial t} = \sqrt{2} \frac{\partial \gamma_{\triangleright}}{\partial t} \quad (17)$$

donde las componentes octaedrales se calculan con (8), a partir del estado instantáneo y local del esfuerzo-deformación del material.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Dowling, N. E. **Mechanical Behavior of Materials**, Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue. Prentice-Hall International, 1993.
- [2] Flügge, S. (Ed.). **Encyclopedia of Physics**. Vol.VI: “Elasticity and Plasticity”. Springer-Verlag, 1958.
- [3] Hill, R. **The Mathematical Theory of Plasticity**. Oxford University Press, 1950. 10<sup>th</sup> Reprint, 1998.
- [4] Langhaar, H. L. **Energy Methods in Applied Mechanics**. John Wiley & Sons, 1962.
- [5] Marin, J. **Mechanical Behavior of Engineering Materials**. Prentice-Hall, 1962.

- [6] Martin, J. B. **Plasticity: Fundamentals and General Results**. The MIT Press, 1975.
- [7] Mendelson, A. **Plasticity: Theory and Application**. The Macmillan Company - Collier-Macmillan Canada, 1968.
- [8] Prager, W. **An Introduction to Plasticity**. Addison-Wesley Publishing Company, 1959.
- [9] Sedov, L. I. **A Course in Continuum Mechanics**. Vol.IV: "Elastic and Plastic Solid and The Formation of Cracks". Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971-1972.
- [10] Shames, I.H.; Cozzarelli, F.A. **Elastic and Inelastic Stress Analysis**. Prentice-Hall, 1992.
- [11] Thomas, T. Y. **Plastic Flow and Fracture in Solids**. Academic Press, 1961.
- [12] Truesdell, C. A.; (Ed.). **Mechanics of Solids**. Vol.III: "Theory of Viscoelasticity, Plasticity, Elastic Waves, and Elastic Stability". Springer-Verlag, 1974.
- [13] Washizu, K. **Variational Methods in Elasticity and Plasticity**. Pergamon Press, 1968.
- [14] Wu, H.-Ch. **Continuum Mechanics and Plasticity**. Chapman & Hall / CRC Press (Boca Raton), 2005.



# CAPITULO XIV

## SISTEMAS MULTICOMPONENTES

### CONTENIDO

1. DIFUSION.	297
1.1. Ecuación de Transporte.	297
1.2. Ley de Fourier.	298
1.3. Ley de Fick.	298
BIBLIOGRAFIA.	298

### 1. DIFUSION

#### 1.1. ECUACION DE TRANSPORTE

La ecuación general de la difusión de masa para la especie  $\alpha$  dentro de un sistema multicomponente es

$$\frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha = \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = w_\alpha \quad (1)$$

donde

$$\mathbf{J}_\alpha = \varrho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad \varrho_\alpha = Y_\alpha \rho \quad \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{d\alpha} \quad (2)$$

siendo  $\varrho_\alpha$  la densidad aparente de la especie  $\alpha$  con fracción másica  $Y_\alpha$ , como si ésta ocupara todo el volumen diferencial del sistema, y  $\mathbf{v}_\alpha$  la velocidad neta de la especie  $\alpha$ , considerando a la velocidad de difusión  $\mathbf{v}_{d\alpha}$  como la velocidad relativa de dicha especie con respecto al sistema multicomponente visto como un todo, el cual se desplaza a la velocidad media  $\mathbf{v}$  (media en el sentido de promediada para todas las especies). El vector flujo  $\mathbf{J}_\alpha$  del transporte total de la especie  $\alpha$  se puede descomponer de la forma

$$\mathbf{J}_\alpha = \mathbf{m}_\alpha + \mathbf{j}_\alpha \quad \mathbf{m}_\alpha = \varrho_\alpha \mathbf{v} \quad \mathbf{j}_\alpha = \varrho_\alpha \mathbf{v}_{d\alpha} \quad (3)$$

siendo  $\mathbf{m}_\alpha$  el transporte por convección y  $\mathbf{j}_\alpha$  el transporte por difusión. El término de fuente (si es positivo) o sumidero (si es negativo)  $w_\alpha$  que aparece en (1) se debe a la producción o gasto de materia de la especie  $\alpha$  debidas a reacciones químicas entre las distintas especies. Substituyendo algunas definiciones de (2) y (3) en la expresión (1) se obtiene la ecuación del transporte de la propiedad  $Y_\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_\alpha) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} Y_\alpha) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\alpha + w_\alpha \quad (4)$$

Para un sistema multicomponente de  $N$  especies se deben satisfacer las siguientes expresiones

$$\sum_{\alpha=1}^N Y_\alpha = 1 \quad \sum_{\alpha=1}^N \varrho_\alpha = \rho \quad \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{j}_\alpha = \mathbf{0} \quad \sum_{\alpha=1}^N Y_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v} \quad (5)$$

donde la tercera expresa que la suma de las cantidades de movimiento  $\varrho_\alpha \mathbf{v}_\alpha$  de todas las especies es la cantidad de movimiento  $\rho \mathbf{v}$  de todo el sistema (las cantidades de movimiento están expresadas por unidad de volumen espacial que ocupa todo el sistema).

### 1.2. LEY DE FOURIER

La ley de Fourier para los sistemas multicomponentes se expresa como

$$\mathbf{q} = -k \nabla T + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{j}_\alpha h_\alpha + \mathbf{R} T \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{K_\alpha X_\beta}{M_\alpha \mathcal{D}_{\alpha\beta}} (\mathbf{v}_{d\alpha} - \mathbf{v}_{d\beta}) \quad (6)$$

donde

$$X_\alpha = \frac{n_\alpha}{n} = Y_\alpha \frac{M}{M_\alpha} \quad \sum_{\alpha=1}^N X_\alpha = 1 \quad \varrho_\alpha = n_\alpha M_\alpha \quad \rho = n M \quad \frac{1}{M} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{Y_\alpha}{M_\alpha} \quad (7)$$

siendo  $n_\alpha$  definida como la densidad aparente molar de la especie  $\alpha$  y  $n$  la densidad molar del sistema multicomponente, por lo que  $X_\alpha$  es la fracción molar de la especie  $\alpha$  en el sistema. Las cantidades  $M_\alpha$  y  $M$  son respectivamente los pesos moleculares de la especie  $\alpha$  y del sistema. La suma de todas las  $X_\alpha$ , al igual que las  $Y_\alpha$ , dan la unidad, pero su significado fraccionario es distinto. El último término de (6) se debe al *efecto Dufour*, en el cual la difusión participa en el transporte de la energía térmica. La cantidad  $\mathbf{R}$  es la constante universal de los gases ideales.

En el caso particular de  $N = 2$ , y no considerando los efectos especiales, la ley de Fourier queda como

$$\mathbf{q} = -k \nabla T + \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{j}_\alpha h_\alpha \quad (9)$$

### 1.3. LEY DE FICK

La ley de Fick para los sistemas multicomponentes se expresa como

$$\sum_{\beta=1}^N \frac{X_\alpha X_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}} (\mathbf{v}_{d\alpha} - \mathbf{v}_{d\beta}) = -\nabla X_\alpha - (X_\alpha - Y_\alpha) \frac{\nabla P}{P} + \sum_{\beta=1}^N \frac{X_\alpha X_\beta}{\rho \mathcal{D}_{\alpha\beta}} \left( \frac{k_\alpha}{Y_\alpha} - \frac{k_\beta}{Y_\beta} \right) \frac{\nabla T}{T} \quad (8)$$

donde el penúltimo término es debido a la barodifusión en el que los gradientes negativos de presión ayudan a la difusión de las especies que tienen un peso molecular  $M_\alpha$  menor que el peso molecular  $M$  del sistema completo (ver la expresión (7.a)). El último término es debido a la termodifusión y es denominado *efecto Soret*, en el cual los gradientes de temperatura pueden o no ayudar a la difusión.

En el caso particular de  $N = 2$ , y no considerando los efectos especiales, la ley de Fick queda como

$$\mathbf{j}_\alpha = -\rho \mathcal{D}_{\alpha\beta} \nabla Y_\alpha \quad (10)$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Austin, J. E.; Palfrey, J. R. "Mixing of Miscible but Dissimilar Liquids in Serial Flow in a Pipeline". **Proc. Instn. Mech. Engrs.**, Vol.178, Pt.1, No.15, pp.377-389, (1963/64).
- [2] Bejan, A. **Heat Transfer**. John Wiley & Sons, 1993.

- [3] Bird, R. B.; Stewart, W. E.; Lightfoot, E. N. **Fenómenos de Transporte**. Editorial Reverté, 1982.
- [4] Bird, R. B.; Stewart, W. E.; Lightfoot, E. N. **Transport Phenomena**, Second Edition. John Wiley & Sons, 2001.
- [5] Birge, E. A. "Contamination Control in Products Pipe Lines". **The Oil & Gas Journal**, pp.176-179/274-291, Sep. 20, (1947).
- [6] Chapman, S.; Cowling, T. G. **The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases**, An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases, Third Edition. Cambridge University Press, 1970.
- [7] Chung, T. J. **Continuum Mechanics**. Prentice-Hall International, 1988. Cambridge University Press, 1996.
- [8] Crank, J. **The Mathematics of Diffusion**. Oxford University Press, 1956.
- [9] Eckert, E. R. G.; Drake, R. M. Jr. **Heat and Mass Transfer**, Second Edition. McGraw-Hill, 1959.
- [10] Hirschfelder, J. O.; Curtiss, C. F.; Bird, R. B. **Molecular Theory of Gases and Liquids**. Wiley, 1964.
- [11] Horn, F. J. M. "Calculation of Dispersion Coefficients by Means of Moments". **AIChE J.**, Vol.17, No.3, pp.613-620, (1971).
- [12] Incropera, F. P.; De Witt, D. P. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**, Third Edition. John Wiley & Sons, 1990.
- [13] Jost, W. **Diffusion in Solids, Liquids, and Gases**. Academic Press, 1952. Sixth Printing, 1970.
- [14] Kays, W. M.; Crawford, M. E. **Convective Heat and Mass Transfer**, Second Edition. McGraw-Hill, 1980.
- [15] Levenspiel, O. "How Much Mixing Occurs in a Pipe?". **Petroleum Refiner**, Vol.37, No.3, pp.191-194, (1958).
- [16] Levenspiel, O. "Longitudinal Mixing of Fluids Flowing in Circular Pipes". **Ind. Eng. Chem.**, Vol.50, No.3, pp.343-346, (1958).
- [17] Levich, V. G. **Physicochemical Hydrodynamics**. Prentice-Hall (New York), 1962.
- [18] Liñan, A.; Williams, F. A. **Fundamental Aspects of Combustion**. Oxford University Press, 1993.
- [19] Prausnitz, J. M. **Molecular Thermodynamics of Fluid-Phase Equilibria**. Prentice-Hall, 1969.
- [20] Reid, R. C.; Prausnitz, J. M.; Sherwood, T. K. **The Properties of Gases and Liquids**, Third Edition. McGraw-Hill, 1966.
- [21] Sherwood, T. K.; Pigford, R. L.; Wilke, Ch. R. **Mass Transfer**. McGraw-Hill, 1975.
- [22] Slattery, J. C. **Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua**. McGraw-Hill, 1972.
- [23] Slattery, J. C. **Advanced Transport Phenomena**. Cambridge University Press, 1999.
- [24] Taylor, G. I. "Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly Through a Tube". **Proc. Roy. Soc.**, Vol.A219, pp.186-203, (1953).
- [25] Taylor, G. I. "The Dispersion of Matter in Turbulent Flow Through a Pipe". **Proc. Roy. Soc.**, Vol.A223, pp.446-468, (1954).
- [26] Tichacek, L. J.; Barkelew, C. H.; Baron, T. "Axial Mixing in Pipes". **AIChE J.**, Vol.3, No.4, pp.439-442, (1957).
- [27] Welty, J. R.; Wicks, Ch. E.; Wilson, R. E. **Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa**. Editorial Limusa, 1982. 4<sup>ta</sup> Reimpresión, 1991.
- [28] Williams, F. A. **Combustion Theory**, The Fundamental Theory of Chemically Reacting Flow Systems. Addison-Wesley Publishing Company, 1965. Second Edition, Perseus Books, 1985. Reprint, 1994.





MECANICA Y TERMODINAMICA DE  
SISTEMAS MATERIALES CONTINUOS

**FENOMENOS**



# CAPITULO XV

## TURBULENCIA

### CONTENIDO

1. INTRODUCCION.	304
1.1. Descripción de la Turbulencia.	304
1.2. Descomposición de Reynolds.	304
1.3. Cascada de Energía.	305
1.3.1. Hipótesis de Kolmogorov.	305
1.3.2. Turbulencia Isótropa.	305
1.3.3. Correlación de Dos Puntos.	309
1.3.4. Espectro de Energía.	311
1.4. Dispersión Relativa.	313
2. ECUACIONES FUNDAMENTALES PROMEDIADAS.	319
2.1. Continuidad.	319
2.2. Cantidad de Movimiento Lineal.	320
2.3. Vorticidad.	321
2.4. Tensor de Velocidad de Deformación.	323
2.5. Producción Turbulenta de la Vorticidad.	324
2.6. Energía Cinética.	325
2.7. Enstrofia.	327
3. MODELOS DE TURBULENCIA.	329
3.1. Cantidad de Movimiento y Continuidad.	329
3.2. Longitud de Mezcla.	330
3.2.1. Fundamentos.	330
3.2.2. Amortiguamiento en la Pared.	331
3.2.3. Modelo de Kármán.	331
3.3. Modelos $k - \varepsilon$ .	332
3.3.1. Modelo de $k$ .	332
3.3.2. Longitud de Escala.	333
3.3.3. Modelo de $\varepsilon$ .	334
3.3.4. Reynolds Bajos.	334
3.3.5. Condiciones de Borde y en la Interfaz.	336
3.3.6. Variables Adimensionales.	338
3.4. Simulación de Grandes Escalas.	339
3.4.1. Viscosidad Turbulenta.	341
3.4.2. Modelo Smagorinsky.	342

3.4.3. Modelo Dinámico.	342
3.4.4. Condición de Borde.	344
3.5. Longitud Característica Mínima.	346
BIBLIOGRAFIA.	348

## 1. INTRODUCCION

### 1.1. DESCRIPCION DE LA TURBULENCIA

La turbulencia es un fenómeno aleatorio que ocurre en sistemas materiales líquidos o gaseosos por el carácter levemente hiperbólico de la ecuación parabólica del movimiento (ver sección E.3.1 ó [Weinberger,1995] para una clasificación general de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales), que en estos casos se denominan: ecuación de Navier-Stokes ó ecuación de Navier-Stokes-Duhem (ecuación en el sentido vectorial de tres componentes), según el fluido sea incompresible o compresible, respectivamente. La ecuación de continuidad completa el problema, puesto que permite adjudicar una ecuación para el campo escalar de la presión, con la generación de una ecuación de Poisson en esta variable. Estas ecuaciones de evolución en el tiempo son parabólicas debido a los términos viscosos, y el carácter hiperbólico viene determinado por el término de la derivada convectiva dentro de la derivada material de la velocidad. Al disminuir la viscosidad, este último término se hace importante y surge la turbulencia como un fenómeno de inestabilidad de la ecuación diferencial, donde el parámetro crítico es el número de Reynolds, el cual determina la relación entre el término convectivo y el término viscoso. (en el caso límite de viscosidad nula, sin gradiente de presión y sin gravedad, la ecuación degenera en la ecuación de Burger no viscosa, que es puramente hiperbólica).

La transición a la turbulencia ocurre al sobrepasarse un punto crítico en el número de Reynolds a partir del cual las fuerzas inerciales superan a las fuerzas viscosas, ocasionando inestabilidades en el fluido (cuando interviene la transferencia del calor por convección libre o natural el número de Grashof es el parámetro que determina la transición). Estas inestabilidades se manifiestan en un inicio por la aparición de grandes remolinos, que luego van generando, mediante la difusión y la convección, torbellinos más pequeños. En un principio, se puede decir que la transición hacia la turbulencia se realiza como un proceso de doblamiento del período [Landau & Lifshitz,1987] por bifurcación. Este proceso ocurre hasta que se equilibra la producción de vórtices a gran escala con la disipación de torbellinos a pequeña escala, siendo esta última ocasionada por la presencia de la viscosidad del fluido, que en dicha escala se vuelve un parámetro importante. Al final, se consiguen torbellinos de diferentes escalas, entremezclados y similares entre sí (los fractales satisfacen también esta propiedad de autosimilaridad), y cuya distribución puede decirse que es gradual en lo que se denominará la *cascada de energía turbulenta*. Se puede decir, que el sistema reacciona a la introducción de más energía creando más y mejor distribuidos gradientes de velocidad (i.e. los torbellinos de distintas escalas) que disipan dicha energía.

### 1.2. DESCOMPOSICION DE REYNOLDS

Todas las variables  $\varphi$  escalares, vectoriales o tensoriales que no se consideren constantes serán descompuestas en una media en el tiempo  $\overline{\varphi}$  (ó una variable filtrada en el caso más general, si se considera en el tiempo y/o en el espacio) y una fluctuación  $\varphi'$  alrededor de dicha media, es decir,

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi' \quad (1)$$

donde

$$\overline{\varphi}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \varphi(\tau) d\tau \quad (2)$$

donde el límite de la integral debe interpretarse como un filtro de caja (ver sec. E.4.2.8) con un ancho muchísimo más grande que las escalas de tiempo de las variaciones que son del orden del tiempo que duran las fluctuaciones. En este sentido, el promediado, visto como un operador  $\overline{\cdot}$ , puede ser asumido como el

operador  $\langle \cdot \rangle$  de la esperanza estadística (de orden 1), si la fluctuación  $\varphi'$  se considera una variable ó función aleatoria centrada (ver sec. E.5.1.3), puesto que

$$\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi} \quad \overline{\varphi'} = 0 \quad (3)$$

Dicho operador es un operador idempotente (ver sec. C.4.3.5) debido a (3.a). El operador  $\overline{\cdot}$  también puede ser un filtro (ver sec. E.4.2.8), aunque no necesariamente idempotente, al menos que la función de filtro sea una función del tipo densidad de probabilidades (ver sec. E.5.1.2) para una variable aleatoria centrada en la media.

Específicamente, se tendrán expresiones similares a (2) para las presiones  $P$ , los vectores de velocidad  $\mathbf{v}$  y vorticidad  $\mathbf{w}$  y los tensores de esfuerzos globales  $\mathbf{T}$ , de esfuerzos viscosos  $\mathbf{T}$ , de gradiente de velocidad  $\mathbf{G}$ , de velocidad de deformación  $\mathbf{D}$ , de velocidad de rotación  $\mathbf{W}$ , etc.

### 1.3. CASCADA DE ENERGIA

#### 1.3.1. Hipótesis de Kolmogorov

Las hipótesis de Kolmogorov provienen de su famoso artículo [Kolmogorov,1941] y todavía son aceptadas como ciertas. Estas son:

- *Isotropía Local.* A números de Reynolds muy altos, los movimientos turbulentos de pequeña escala son estadísticamente isotropos.
- *Similitud.* En cada flujo turbulento desarrollado a un número de Reynolds lo suficientemente alto, la estadística de los movimientos de pequeña escala tiene una formulación universal que únicamente está determinada por la viscosidad cinemática  $\nu$  y la disipación turbulenta  $\varepsilon$ . En el rango inercial, donde estas fuerzas superan a las viscosas la dependencia con respecto a  $\nu$  desaparece.

Las hipótesis de Kolmogorov se pueden extender al campo térmico turbulento, diciendo que el flujo sea también a un número de Peclet lo suficientemente alto y agregando un parámetro adicional, que puede ser la difusividad térmica  $\alpha$  o el número de Prandtl  $= \nu / \alpha$ .

#### 1.3.2. Turbulencia Isótropa

En un sistema turbulento isótropo en equilibrio, la tasa de transferencia de energía de una escala a la otra,  $\varepsilon$ , tiene que ser la misma para todos los tamaños de remolinos. Si se considera remolinos de tamaños  $l$  con velocidad característica  $v_l$ , entonces se satisface que

$$\varepsilon \sim \frac{\text{Energía/Masa}}{\text{Tiempo}} \sim \frac{u_l^2}{l/u_l} = \frac{u_l^3}{l} \quad \implies \quad u_l \sim (\varepsilon l)^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

siendo ésta una proporcionalidad que se satisface hasta la escalas más pequeña donde toda la energía es disipada por la viscosidad.

Donde se alimenta inicialmente al sistema con energía, que procede particularmente de los remolinos más grandes, los cuales poseen una longitud característica  $l_\varepsilon$  y una velocidad característica  $u_\varepsilon$ , la expresión (1) se satisface como una igualdad

$$\varepsilon = \frac{\text{Energía/Masa}}{\text{Tiempo}} = \frac{u_\varepsilon^2}{l_\varepsilon/u_\varepsilon} = \frac{u_\varepsilon^3}{l_\varepsilon} \quad (2)$$

donde la velocidad característica se acostumbra a identificarla como la fluctuación RMS de cada componente de la velocidad ( $v_\varepsilon = v'_{\text{rms}}$ ) definida por ( $i$  no suma)

$$v_{\text{rms}}'^2 = \langle v_i'^2 \rangle = \langle (v_i - V_i)^2 \rangle \quad V_i = \langle v_i \rangle \quad v_i' = v_i - V_i \quad (3)$$

donde el operador  $\langle \cdot \rangle$  es un operador que puede aplicar en cualquier subdominio del dominio espacio-tiempo. Cuando el subdominio es el tiempo, de forma alterna se acostumbra a identificar la velocidad característica con la raíz cuadrada de la energía cinética turbulenta ( $v_\varepsilon = \sqrt{k}$ ), la cual se define como

$$k = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'} = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} = \frac{3}{2} v_{\text{rms}}'^2 \quad (4)$$

La longitud característica se acostumbra tomarla como la escala integral ( $l_\varepsilon = \mathcal{L}$ ) definida en función de la autocorrelación de cada componente de la fluctuación de la velocidad como [Tennekes & Lumley, 1972]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\langle v_i'^2 \rangle} \int_0^\infty \Gamma[v'_i, v'_i](x) dx \quad \langle v_i'^2 \rangle = \Gamma[v'_i, v'_i](0) \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

donde  $x$  puede pertenecer a cualquier subdominio unidimensional del dominio espacio-tiempo (normalmente este subdominio se escoge de manera que tenga homogeneidad estadística). Para una definición general de las escalas de la autocorrelación ver sección E.4.2.5.

La escala  $\eta$ , a partir de la cual toda energía es disipada por la viscosidad, se denomina *escala de Kolmogorov*. Se caracteriza por ser aquella escala de distancia en la cual el tiempo  $\tau_\nu = \ell^2/\nu$  necesario para amortiguar completamente un remolino de longitud  $\ell$  y su tiempo característico  $\tau_\ell = \ell/v_\ell$ , siendo  $v_\ell = (\varepsilon \ell)^{\frac{1}{3}}$  la velocidad característica, coinciden ( $\tau_\nu = \tau_\ell$ ). Resolviendo esta igualdad se obtiene que la longitud  $\ell$  es la escala de Kolmogorov,  $\eta$ , la cual viene dada por la siguiente expresión

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (6)$$

Esta escala separa los remolinos en dos clases diferentes. Por un lado, aquellos remolinos más grandes, con  $l \gg \eta$ , para los cuales las inestabilidades actúan más rápido que los efectos viscosos produciendo el rompimiento en remolinos más pequeños, siendo la viscosidad poco importante. Por otro lado, aquellos remolinos con  $\ell \ll \eta$ , para los cuales la viscosidad logra disipar toda su energía antes de que se produzcan inestabilidades que lo rompan.

El rango de remolinos con tamaño  $l$  para los que  $\eta \ll l \ll l_\varepsilon$  es denominado *rango inercial*, aunque este término algunas veces se restringe a los remolinos auto-similares. En este rango, aproximadamente se satisface [Monin & Yaglom, 1975; Vol.2, pp.351-355] para la velocidad característica del remolino  $u_i$  que

$$u_i \approx C_i v_\kappa \left( \frac{l}{\eta} \right)^{\frac{1}{3}} = C_i (\varepsilon l)^{\frac{1}{3}} \quad C_i^2 = \frac{27}{55} \Gamma(1/3) C_\kappa \approx 1.3151 C_\kappa \quad C_\kappa \approx 1.5 \rightarrow 3.0 \quad (7)$$

donde

$$v_\kappa = \frac{\eta}{\tau_\kappa} = (\nu \varepsilon)^{\frac{1}{4}} \quad \tau_\kappa = \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

son respectivamente la velocidad y el tiempo característico de la escala de kolmogorov y se obtienen de substituir (6) en la relación (1), particularizada para la escala de Kolmogorov  $\eta$ . El comportamiento de la expresión (7) se aparta de los resultados experimentales a medida que  $l$  se aproxima por encima de  $l \approx 10\eta$ . En el último miembro de (7.a), se han supuesto válidas las definiciones (10.a) y (12) de abajo. Se sabe que (7) se aplica únicamente de manera estimativa para las escalas de grandes remolinos  $l_\varepsilon$  y solamente de forma bastante aproximada para las escalas dentro del rango inercial  $l$ . Para las escalas dentro del rango disipativo, descritas a continuación, las expresiones (7) dejan de ser válida (compárese adelante (13) para el rango disipativo con (12) para el rango inercial). La constante  $C_\kappa$  en (7.b), fué introducida históricamente como un premultiplicador para el espectro tridimensional y el factor numérico que le antecede proviene de

consideraciones de isotropía. El rango de los valores (7.c) proviene de experimentos realizados con flujo isótropo [Monin & Yaglom, 1975; Vol. 2, pp. 351-355].

El rango de remolinos con tamaño  $\ell$  (se usa un símbolo diferente para distinguir esta escala de las otras), para los que  $\ell \ll \eta$ , se denomina *rango disipativo*, aunque experimentalmente se ha encontrado que el rango disipativo comienza a partir de aproximadamente  $\ell \approx 10\eta$ , más que a la escala de Kolmogorov. En este rango de remolinos, el flujo es suave y la velocidad puede expandirse en una serie de Taylor, con lo cual resulta que la diferencia de la velocidad es proporcional a  $\ell$ , o sea

$$v_\ell = w_\ell \ell = w'_{\text{ms}} \ell / \sqrt{15} \quad w_\ell = w'_{\text{ms}} / \sqrt{15} = \left( \frac{\varepsilon}{15\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \varepsilon = \nu w'^2_{\text{ms}} = 15\nu \frac{v'^2_{\text{ms}}}{\lambda^2} \quad (9)$$

donde  $w_\ell$ , que es una fracción de la raíz cuadrada de la media del cuadrado de la vorticidad  $w'_{\text{ms}} = \langle \mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}' \rangle^{1/2}$ , ha sido escogida como el valor característico para los gradientes paralelos de la velocidad (a diferencia de  $v'_{\text{ms}}$ , en el cálculo de  $w'_{\text{ms}}$  si se suman el producto de las tres componentes). Adicionalmente, se satisface en el flujo isótropo que  $2(\partial v_\ell / \partial \ell)^2 = (\partial v_n / \partial r)^2$ , siendo

$$v_\ell = \left\langle [\mathbf{v}_\ell(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - \mathbf{v}_\ell(\mathbf{x})]^2 \right\rangle_{\mathbf{x}}^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{v}_\ell \parallel \boldsymbol{\ell} \quad (10.a)$$

la velocidad característica del remolino. De manera similar a (10.a) se puede definir otra velocidad característica en la dirección ortogonal de la forma

$$v_n = \left\langle [\mathbf{v}_n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{v}_n(\mathbf{x})]^2 \right\rangle_{\mathbf{x}}^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{v}_n \perp \mathbf{r} \quad (10.b)$$

En las expresiones (10) se verifica la *Hipótesis de Ergodicidad*  $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{x}} = \langle \cdot \rangle_t$ , donde los promedios alrededor del punto  $\mathbf{x}$  son equivalentes a los promedios alrededor del instante  $t$ . El factor de  $1/\sqrt{15}$  en (9) proviene del hecho de que para el flujo isótropo la expresión para la disipación turbulenta es  $\varepsilon = \nu \langle \nabla \mathbf{v}' : \nabla \mathbf{v}' \rangle = \nu [3\langle (\partial v'_1 / \partial x_1)^2 \rangle + 3\langle (\partial v'_1 / \partial x_2)^2 \rangle + 3\langle (\partial v'_1 / \partial x_2)(\partial v'_2 / \partial x_1) \rangle] = 15\nu \langle (\partial v'_1 / \partial x_1)^2 \rangle$ .

La siguiente tabla resume todas las escalas mencionadas y los respectivos rangos de escalas ubicados entre ellas.

Tabla. Características del remolino turbulento para diferentes rangos de turbulencia isótropa

Rangos/Escalas	CARACTERISTICAS			
	Longitud	Velocidad	Gradiente	Tiempo
Grandes Remolinos <sup>†</sup>	$l_\varepsilon$	$v_\varepsilon = v'_{\text{ms}} \text{ ó } \sqrt{k}$	$v_\varepsilon / l_\varepsilon = \varepsilon / v_\varepsilon^2$	$\tau_\varepsilon = v_\varepsilon^2 / \varepsilon$
Rango Inercial	$l$	$v_l \approx C_l (\varepsilon l)^{\frac{1}{3}}$	$v_l / l \approx C_l (\varepsilon / l^2)^{\frac{1}{3}}$	$\tau_l = (l^2 / \varepsilon)^{\frac{1}{3}}$
Kolmogorov <sup>†</sup>	$\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{\frac{1}{4}}$	$v_K = (\varepsilon \nu)^{\frac{1}{4}}$	$v_K / \eta = (\varepsilon / \nu)^{\frac{1}{2}}$	$\tau_K = (\nu / \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$
Rango Disipativo	$\ell \approx \eta$	$v_\ell = w_\ell \ell \approx (\varepsilon / 15\nu)^{\frac{1}{2}} \ell$	$v_\ell / \ell = w_\ell = w'_{\text{ms}} / \sqrt{15}$	$\tau_\nu = \ell^2 / \nu$

<sup>†</sup> Escala de transición entre rangos de turbulencia

Las generalizaciones de las potencias (10.a) y (10.b) expresadas de la forma

$$S_\ell^m(\ell) = \left\langle \|\mathbf{v}_\ell(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - \mathbf{v}_\ell(\mathbf{x})\|^m \right\rangle_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{v}_\ell \parallel \boldsymbol{\ell} \quad \ell = \|\boldsymbol{\ell}\| \quad (11.a)$$

$$S_n^m(r) = \langle \| \mathbf{v}_n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{v}_n(\mathbf{x}) \|^m \rangle_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{v}_n \perp \mathbf{r} \quad r = \|\mathbf{r}\| \quad (11.b)$$

se denominan las *funciones de estructura* de orden  $m$ , respectivamente del tipo longitudinal y del tipo transversal. De estas forma, los cuadrados de las expresiones (10) son las funciones de estructura de segundo orden, es decir,  $v_\ell = S_\ell^2(\ell)$  y  $v_n = S_n^2(r)$ . En (11) los argumentos pueden especialmente definirse en el dominio del tiempo, o en combinaciones de espacio-tiempo. En el flujo turbulento isótropo y para el rango inercial, con  $\tau_K \ll \tau_i \ll \tau_\varepsilon$  y  $\eta \ll l \ll l_\varepsilon$ , siendo  $l$  y  $\tau_i = (l^2/\varepsilon)^{\frac{1}{3}}$  la longitud y el tiempo característicos, se suele expresar (7) con la función de estructura longitudinal de segundo orden como

$$S_l^2 = \langle [\mathbf{v}_l(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}_l(\mathbf{x})]^2 \rangle_{\mathbf{x}} = C \varepsilon \tau_i = C \varepsilon^{\frac{2}{3}} l^{\frac{2}{3}} \quad C = C_l^2 \quad (12)$$

equivalente a la expresión (7.a). De manera similar en el rango disipativo, con  $\tau_\nu \ll \tau_K$  y  $\ell \ll \eta$ , siendo  $\ell$  y  $\tau_\nu = \ell^2/\nu$  la longitud y el tiempo característicos, las relaciones (9) se pueden expresar mediante la función de estructura longitudinal como

$$S_\ell^2 = \langle [\mathbf{v}_\ell(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - \mathbf{v}_\ell(\mathbf{x})]^2 \rangle_{\mathbf{x}} = C_\nu \varepsilon \tau_\nu = C_\nu \nu^{-1} \varepsilon \ell^2 \quad C_\nu = 1/45 \quad (13)$$

Las constantes universales  $C_K$  y  $C$  se suelen llamar ambas *constantes de Kolmogorov*, por ello es recomendable cuando se mencionen, decir a que contexto se refieren (más adelante se verá otra constante universal  $C_o$  que cae dentro de esta misma categoría).

El principal parámetro que caracteriza la distribución de las velocidades de las escalas pequeñas, para diferentes situaciones de flujo, es la relación entre  $l_\varepsilon$  y  $\eta$ , la cual define cuanto se extiende aproximadamente el rango inercial. Esta relación se obtiene de (2) y (6), de lo cual resulta que

$$\frac{l_\varepsilon}{\eta} = Re_\varepsilon^{\frac{3}{4}} \quad \text{donde} \quad Re_\varepsilon = \frac{v_\varepsilon l_\varepsilon}{\nu} \quad (14)$$

es el número de Reynolds para las grandes escalas. Es frecuente referirse a esta relación en términos de otro número de Reynolds, definido por razones históricas como

$$Re_\lambda = (15 Re_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \quad \text{donde} \quad Re_\lambda = \frac{v_\varepsilon \lambda}{\nu} \quad (15)$$

siendo  $\lambda$  la microescala de Taylor, intermedia entre  $l_\varepsilon$  y  $\eta$ , definida en función de la autocorrelación  $\Gamma[v'_i, v'_i](x)$  como [Tennekes & Lumley, 1972; pp.210-211]

$$-2 \langle v_i'^2 \rangle / \lambda^2 = [ (d^2/dx^2) \Gamma[v'_i, v'_i](x) ]_{x=0} \quad \langle v_i'^2 \rangle = \Gamma[v'_i, v'_i](0) \quad i \text{ no suma} \quad (16)$$

siendo  $\lambda^2/2$  el valor absoluto del radio de curvatura de dicha autocorrelación normalizada en el origen de  $x$ . De nuevo  $x$  puede pertenecer a cualquier subdominio unidimensional del dominio espacio-tiempo (El factor 2 en (16) aparece sólo cuando la autocorrelación es transversal o en el tiempo, pero cuando la autocorrelación es longitudinal no aparece para que  $\lambda$  tenga el mismo valor en todas las direcciones espaciales, según lo muestra las expansiones en series (24) presentadas más adelante en su comportamiento cerca del origen). La relaciones (14) y (15), junto con (2), permiten expresar la microescala de Taylor, en función de las cantidades de la escala integral y de kolmogorov, de la forma [Hinze, 1975]

$$\lambda^2 = 15 \nu \frac{l_\varepsilon}{v_\varepsilon} = 15 \nu \frac{v_\varepsilon^2}{\varepsilon} = 15 \frac{v_\varepsilon'^2}{w_{ms}^2} = 15 l_\varepsilon^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{4}{3}} = 15 \eta^2 Re_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15} \eta^2 Re_\lambda = 15 \frac{l_\varepsilon^2}{Re_\varepsilon} \quad (17)$$

relaciones convenientemente usada para estimar  $\varepsilon$ . Cuando se prolongan la ecuación (7) del rango inercia y la ecuación (9) del rango disipativo se observa que se intersectan en  $\ell \approx 10\eta \lesssim \lambda$  ( $Re_\lambda \gtrsim 25.8$ ), más que  $\ell \approx \eta$ ,



que es el límite usado únicamente como una referencia aproximada de la transición entre el rango inercial y el rango disipativo.

Es costumbre expresar el grado de turbulencia de un flujo en función del valor del número de Reynolds (15) basado en la microescala de Taylor. Por ejemplo, se dice que es imposible obtener turbulencia por debajo de  $Re_\lambda \approx 30$ , y que no existe un flujo turbulento totalmente desarrollado hasta que no se alcanza  $Re_\lambda \approx 100$ . Para las aplicaciones industriales se encuentra un rango de  $Re_\lambda \approx 100 - 1000$  y para aplicaciones aeronáuticas  $Re_\lambda \approx 3000$ . El valor más alto se ha obtenido en la atmósfera y es de alrededor de  $Re_\lambda \approx 10000$ .

Un resultado famoso es la Ley de 4/5 de Kolmogorov, la cual afirma que en el flujo turbulento isótropo la disipación turbulenta  $\varepsilon$  se puede expresar en términos de combinaciones cúbicas de la velocidad [Frisch, 1995]

$$S_\ell^3 = \langle \|\mathbf{v}_\ell(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - \mathbf{v}_\ell(\mathbf{x})\|^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon \ell \quad \mathbf{v}_\ell \parallel \boldsymbol{\ell} \quad \ell = \|\boldsymbol{\ell}\| \quad (18)$$

usando la función de estructura de tercer orden, similar a (11.a), pero particularizada para  $m = 3$ . Esta expresión a veces es usada para estimar el valor de  $\varepsilon$  en flujos experimentales.

### 1.3.3. Correlación de Dos Puntos

El tensor de correlación de velocidad para dos puntos separados por un vector espacial  $\mathbf{r}$  es

$$\mathcal{R}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{v}'(\mathbf{x}) \mathbf{v}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \mathcal{R}^t(-\mathbf{r}) \quad (19)$$

Esta función es también función continua del tiempo  $t$  y de la posición espacial  $\mathbf{x}$ , que se han obviado por razones de simplificación de la notación. El promediado  $\langle \cdot \rangle$ , al igual como se dijo en la sub-subsección anterior, puede hacerse en cualquiera de las combinaciones espacio-temporales de interés, alrededor de  $t$  y/o  $\mathbf{x}$ .

De acuerdo a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, las componentes de  $\mathcal{R}$  satisfacen

$$\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{r}) = \langle v'_i(\mathbf{x}) v'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \leq \langle v'^2_i(\mathbf{x}) \rangle^{\frac{1}{2}} \langle v'^2_j(\mathbf{x}) \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathcal{R}_{ii}(\mathbf{0})} \sqrt{\mathcal{R}_{jj}(\mathbf{0})} \quad (20)$$

donde  $ii$  y  $jj$  no suman. Particularmente, para  $i = j$  se tiene  $\mathcal{R}_{ii}(\mathbf{r}) \leq \mathcal{R}_{ii}(\mathbf{0})$ , lo que quiere decir que la autocorrelaciones principales (elementos de la diagonal principal de la matriz  $[\mathcal{R}]$ ) tiene un valor máximo cuando los puntos coinciden. Adicionalmente, debido a la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles

$$\nabla \cdot \mathcal{R} = \nabla \cdot \mathcal{R}^t = \mathbf{r} \left( 4F + r \frac{dF}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dG}{dr} \right) = \mathbf{0} \quad (21)$$

donde las funciones  $F(r)$  y  $G(r)$ , definidas exclusivamente para turbulencia isótropa de describen a continuación.

Particularmente para turbulencia isótropa, el tensor de correlación se expresa como

$$\mathcal{R}(\mathbf{r}) = G(r) \mathbf{I} + F(r) \mathbf{r} \mathbf{r} \quad F(r) = v'^2_{\text{rms}} \frac{f(r) - g(r)}{r^2} \quad G(r) = v'^2_{\text{rms}} g(r) \quad r = \|\mathbf{r}\| \quad (22)$$

donde

$$f(r) = \frac{\langle \mathbf{v}'_\ell(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}'_\ell(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle}{v'^2_{\text{rms}}} \quad g(r) = f(r) + \frac{1}{2} r f'(r) = \frac{\langle \mathbf{v}'_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}'_n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle}{v'^2_{\text{rms}}} \quad (23)$$

son las correlaciones longitudinal y trasversal normalizadas ( $f' = df/dr$ ). Estas correlaciones tienen su máximo valor en  $r = 0$ , por lo que, según su definición (23) y la relación (20), se satisface que  $f(0) = g(0) = 1$  y que cerca del origen ( $r \approx 0$ )

$$f(r) \approx 1 - \frac{r^2}{2\lambda^2} + O(r^4) \quad g(r) \approx 1 - \frac{r^2}{\lambda^2} + O(r^4) \quad (24)$$

La relación entre los momentos de  $f(r)$  y  $g(r)$  se encuentra a partir del segundo miembro de (23.b) en la forma

$$\frac{1-m}{2} \int_0^\infty r^m f(r) dr = \int_0^\infty r^m g(r) dr \quad (m \geq 0) \quad (25)$$

Los momentos de orden cero ( $m = 0$ ) son las longitudes

$$L_\ell = \int_0^\infty f(r) dr \quad L_n = \int_0^\infty g(r) dr = \frac{1}{2} L_\ell \quad (26)$$

que son convenientemente medidas de la extensión lineal de las regiones hasta donde las velocidades están aún correlacionadas, y son conocidas como las escalas integrales del tipo longitudinal y transversal, respectivamente. Particularmente para  $m = 1$  la expresión (25) se reduce a

$$\int_0^\infty r g(r) dr = 0 \quad (27)$$

lo que significa que la cola de la correlación  $g(r)$  es negativa. Para  $m > 1$  los momentos de  $f(r)$  y  $g(r)$  tienen signos opuestos, lo cual sugiere que, para valores grandes de  $r$ ,  $f(r)$  es positivo y  $g(r)$  negativo. Una demostración de que  $f(r) > 0$  para todo valor de  $r$  nunca ha sido hecha, pero los resultados experimentales lo corroboran.

La correlación de dos puntos para la vorticidad se puede expresar en función de la correlación de la velocidad como

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{w}'(\mathbf{x}) \mathbf{w}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = -(\nabla \times)(\nabla \times) \mathcal{R} = -\nabla^2 \theta \mathbf{I} + \nabla \nabla \theta + \nabla^2 \mathcal{R}^t \quad \theta(\mathbf{r}) = \text{tr} \mathcal{R}(\mathbf{r}) \quad (28)$$

donde en su obtención se ha tenido en cuenta las ecuaciones de continuidad (21). La función  $R(r)$  se introduce aquí por la utilidad que tiene más adelante y además porque evita arrastrar siempre el factor de 2 y es esféricamente función del módulo  $r = \|\mathbf{r}\|$ . La contracción del tensor  $\mathcal{W}$  da el siguiente resultado interesante

$$\text{tr} \mathcal{W} = \langle \mathbf{w}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = -\nabla^2 \theta \quad (29)$$

el cual puede claramente ser generalizado para dar

$$\langle [\nabla \times \mathbf{w}'(\mathbf{x})] \cdot [\nabla \times \mathbf{w}'(\mathbf{x} + \mathbf{r})] \rangle = -\nabla^2 \langle \mathbf{w}'(\mathbf{x}) \mathbf{w}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \nabla^4 \theta \quad (30)$$

y una secuela de tales relaciones [Batchelor, 1953; pp. 38-39]. Para simetría esférica, téngase en cuenta que el operador laplaciano se expresa como

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dr} + \frac{d^2 \theta}{dr^2} \quad \nabla^4 \theta = \nabla^2 (\nabla^2 \theta) \quad (31)$$

En cualquier otro caso, los operadores en (21), (28)-(30) deben interpretarse como  $\nabla \equiv \nabla_{\mathbf{r}}$  y  $\nabla^2 \equiv \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}$ . Es decir, los operadores se aplican en el dominio de  $\mathbf{r}$  y no de  $\mathbf{x}$ . El signo negativo del segundo miembro de (28.a) se justifica porque  $-\nabla_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{x}'}$ , con  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , y las vorticidades se calculan como  $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{w}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{x}'} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}')$ . La bilinealidad de los dos factores dentro del operador  $\langle \cdot \cdot \rangle \equiv \langle \cdot \cdot \rangle_{\mathbf{x}}$  se justifica por la ecuación de continuidad (21).

Un resultado muy importante particularizado para  $r = 0$ , y que justifica las expresiones (9), (15) y (17), es el siguiente

$$w'_{\text{rms}} = \langle \mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}' \rangle = \text{tr} \mathcal{W}(\mathbf{0}) = -\nabla^2 \theta|_{r=0} = -15 v'_{\text{rms}}{}^2 f''(0) = 15 \frac{v'_{\text{rms}}{}^2}{\lambda^2} \quad (32)$$

donde se han usado las expresiones (22), (23) y (24), junto con el operador (31).

#### 1.3.4. Espectro de Energía

La transformada (en este caso inversa) de Fourier del tensor de la correlación de dos puntos  $\mathcal{R}(\mathbf{r}) = \mathfrak{F}[\Phi](\mathbf{r})$ , se denotará como el tensor  $\Phi(\boldsymbol{\kappa})$ , el cual es acotado, hermítico y definido positivo. Esto es,

$$\mathcal{R}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}_\infty} \Phi(\boldsymbol{\kappa}) e^{i \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\kappa}} d\mathcal{V}_\kappa = \mathcal{R}^t(-\mathbf{r}) \quad \Phi(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathcal{V}_\infty} \mathcal{R}(\mathbf{r}) e^{-i \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} d\mathcal{V}_r = \bar{\Phi}(-\boldsymbol{\kappa}) = \Phi^h(\boldsymbol{\kappa}) \quad (33)$$

donde  $\Phi : \mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} \geq 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ , o sea, que  $\Phi$  es una forma bilineal definida positiva, y  $\int |\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})| d\mathcal{V}_\kappa < \infty$  para cualquier volumen  $\mathcal{V}_\kappa \in \mathbb{C}^3$ , o sea, que es de integrales acotadas. El carácter hermítico de  $\Phi(\boldsymbol{\kappa})$ , proviene de la simetría de  $\mathcal{R}(\mathbf{r}) = \mathcal{R}^t(-\mathbf{r})$ .

Las integrales en todo el ángulo sólido, para una posición radial  $r$  determinada de la correlación (33.a), y, equivalentemente, para una posición radial  $\kappa$  determinada de su transformada (33.b), se calculan como

$$\mathcal{S}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{\mathcal{A}(r)} \mathcal{R}(\mathbf{r}) d\mathcal{A}(r) \quad \Psi(\kappa) = \oint_{\mathcal{A}(\kappa)} \Phi(\boldsymbol{\kappa}) d\mathcal{A}(\kappa) \quad (34)$$

donde  $r = \|\mathbf{r}\|$ ,  $\kappa = \|\boldsymbol{\kappa}\|$ , y las integraciones son sobre las superficies de esferas de radios  $r$  y  $\kappa$ , para las cuales  $d\mathcal{A}_r$ ,  $d\mathcal{A}_\kappa$  son sus elementos de área, respectivamente. La inserción del factor  $(4\pi r^2)^{-1}$  y la omisión del factor correspondiente  $(4\pi \kappa^2)^{-1}$ , lo que intenta es dar a las cantidades antes definidas un claro significado físico;  $\mathcal{S}(r)$  es el tensor de correlación promedio para dos puntos separados por una distancia  $r$ , mientras  $\Psi(\kappa) d\kappa$  es la contribución al tensor de energía  $\langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle$ , de los números de onda cuyas magnitudes van desde  $\kappa$  hasta  $\kappa + d\kappa$ . Las relaciones fundamentales (33) entre  $\mathcal{S}(\mathbf{r})$  y  $\Phi(\boldsymbol{\kappa})$ , luego muestran que

$$\mathcal{S}(r) = \int_{\mathcal{V}_\infty} \Phi(\boldsymbol{\kappa}) \frac{\text{sen } r\kappa}{r\kappa} d\mathcal{V}_\kappa = \int_0^\infty \Psi(\kappa) \frac{\text{sen } r\kappa}{r\kappa} d\kappa \quad (35.a)$$

$$\Psi(\kappa) = \frac{\kappa^2}{2\pi^2} \int_{\mathcal{V}_\infty} \mathcal{R}(\mathbf{r}) \frac{\text{sen } \kappa r}{\kappa r} d\mathcal{V}_r = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{S}(r) \kappa r \text{sen } \kappa r dr \quad (35.b)$$

Es decir,  $r\mathcal{S}(r)$  y  $\Psi(\kappa)/\kappa$  son mutuamente transformadas Fourier del seno. Estas funciones tensoriales de dependencia del módulo de un vector juegan un papel importante en la teoría de la turbulencia isotrópica, ya que la dependencia de la dirección de  $\mathbf{r}$  y  $\boldsymbol{\kappa}$  está prescrita por la simetría esférica (Si se dejan los factores de área en los promedios tal como están y se realiza la transformación de Fourier del coseno entre  $\mathcal{S}(r) = \mathfrak{F}_c[\Psi](r)$  y  $\Psi(\kappa)$ , el resultado final es equivalente).

De particular interés físico es la *función de espectro de energía*  $E(\kappa)$  y su transformada  $R(r)$ , definidos como

$$R(r) = \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{S}(r) = \int_0^\infty E(\kappa) \frac{\text{sen } r\kappa}{r\kappa} d\kappa \quad E(\kappa) = \frac{1}{2} \text{tr} \Psi(\kappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(r) \kappa r \text{sen } \kappa r dr \quad (36)$$

De esta forma,  $rR(r)$  y  $E(\kappa)/\kappa$  son mutuamente transformadas de Fourier del seno. La función  $E(\kappa)$  es la densidad de contribución en la energía cinética turbulenta sobre el dominio de magnitudes de números de onda. Por lo tanto, la energía cinética turbulenta total por unidad de masa de fluido es

$$k = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa = R(0) \quad (37)$$

La escala integral  $\mathcal{L}$  en (5) y la microescala de Taylor  $\lambda$  en (16) se reducen a las siguientes expresiones [Monin & Yaglom, 1975; Vol.2, pp.34-35]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{R(0)} \int_0^\infty R(r) dr \quad \lambda = \left[ -\frac{R(0)}{2R''(0)} \right]^{1/2} \quad (38)$$

La ecuación de Parseval E.4.2.(11) permite expresar también que

$$\int_0^\infty R(r) dr = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{E(\kappa)}{\kappa} d\kappa = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathcal{E}(\kappa) d\kappa \quad (39)$$

donde  $\mathcal{E}(\kappa) = \hat{\mathbf{v}}'(\kappa) \cdot \hat{\mathbf{v}}'(\kappa)$  es el espectro tridimensional ó esférico de las fluctuaciones del vector velocidad (la transformada de Fourier  $\hat{\mathbf{v}}'(\kappa)$  está definida en E.4.2.(7)). A veces se refiere a  $E(\kappa)$  como el espectro premultiplicado, puesto que  $\pi E(\kappa) = \kappa \mathcal{E}(\kappa)$ . En (39), más que el espectro, realmente se ha usado la mitad de éste por ser simétrico, al igual que  $R(r)$ , y darle el sentido físico que tiene en (37). Ver la definición del espectro de potencia y la transformada de Fourier  $\hat{\mathbf{v}}'(\kappa)$  de las fluctuaciones  $\mathbf{v}'$  en la sección E.4.2.2, vistas estas fluctuaciones como variables aleatorias centradas, las cuales están definidas en E.5.1.3. Las fluctuaciones de la velocidad  $\mathbf{v}'$  se define como en la sección 1.2 y la disipación turbulenta  $\varepsilon$  será definida con detalle al final de la sección 2.6.

Un resultado bien reconocido es el perfil del espectro del flujo isótropo en el rango inercial, el cual se establece como

$$E(\kappa) = C_\kappa \varepsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}} \quad (40)$$

donde  $C_\kappa$  es la constante universal de Kolmogorov definida antes y  $\kappa = \|\boldsymbol{\kappa}\|$  es el número de onda esférico. Esta fórmula expresa la llamada *ley del cinco tercios* para el espectro de energía en el rango inercial, y fué primeramente propuesta por Obukov[(1949.a,b)].

Una análisis similar al de las expresiones (22), pero para la función  $\Phi$  en turbulencia isótropa, permite obtener

$$\Phi = B(\kappa) \mathbf{I} + A(\kappa) \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa} \quad B(\kappa) = -\kappa^2 A(\kappa) \quad \frac{1}{2} \text{tr} \Phi(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} (k^2 A + 3B) = -k^2 A(\kappa) \quad (41)$$

donde la segunda expresión se ha obtenido de aplicar la condición de continuidad (21) y la tercera representa la densidad espacial de contribución a la energía total en el espacio de números de onda. De manera que la contribución a la energía total de esa parte en el espacio de números de onda entre las esferas de radio  $\kappa$  y  $\kappa + d\kappa$  es precisamente  $E(\kappa)d\kappa$ , y por consiguiente

$$E(\kappa) = 4\pi\kappa^2 \frac{1}{2} \text{tr} \Phi(\boldsymbol{\kappa}) = -4\pi\kappa^4 A(\kappa) \quad \text{tr} \Phi(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{E(\kappa)}{2\pi\kappa^2} \quad (42)$$

Esto permite usar  $E(\kappa)$  como una simple función escalar isótropa para definir  $\Phi(\boldsymbol{\kappa})$  en la forma

$$\Phi(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{E(\kappa)}{4\pi\kappa^4} (\kappa^2 \mathbf{I} - \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa}) \quad (43)$$

exclusivamente en función del radio esférico  $\kappa$ .

La transformada de Fourier  $\Omega$  de la correlación de dos puntos  $\mathcal{W}$  para la vorticidad se define mediante las siguientes expresiones complementarias

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}_\infty} \Omega(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\kappa}} d\mathcal{V}_\kappa \quad \Omega(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathcal{V}_\infty} \mathcal{W}(\mathbf{r}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} d\mathcal{V}_r \quad (44)$$

En el caso isótropo se tiene, de manera similar a (43), que

$$\Omega(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{E(\kappa)}{4\pi\kappa^2} (\kappa^2 \mathbf{I} - \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa}) = \kappa^2 \Phi(\boldsymbol{\kappa}) \quad (45)$$

Sea la siguiente función de espectro

$$\begin{aligned} E_{ij}(\kappa_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_{ij}(r_1, 0, 0) e^{-i\kappa_1 r_1} dr_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [\mathcal{R}_{ij}(r_1, 0, 0) + \mathcal{R}_{ji}(r_1, 0, 0)] \cos(\kappa_1 r_1) dr_1 \end{aligned} \quad (46)$$

siendo  $i = j = 1$  la componente longitudinal, mientras que  $i = j = 2$  ó  $3$  es la componente transversal. El cálculo de la componente longitudinal se realiza de la forma

$$E_{11}(\kappa_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\text{ms}}'^2 f(r_1) \cos \kappa_1 r_1 dr_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3 = \int_{\kappa_1}^{\infty} \left(1 - \frac{\kappa_1^2}{\kappa^2}\right) \frac{E(\kappa)}{\kappa} d\kappa \quad (47.a)$$

y la componente transversal se calcula en la forma

$$E_{22}(\kappa_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\text{ms}}'^2 g(r_1) \cos \kappa_1 r_1 dr_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{22}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3 = \frac{1}{2} \int_{\kappa_1}^{\infty} \left(1 + \frac{\kappa_1^2}{\kappa^2}\right) \frac{E(\kappa)}{\kappa} d\kappa \quad (47.b)$$

El resultado final proviene de haber aplicado (22). Las funciones espectrales anteriores se han evaluado completas en su dominio, aunque sean simétricas. Si se logra medir experimentalmente el espectro  $E_{11}(\kappa_1)$  entonces el resto de las funciones espectrales quedan definidas por

$$E(\kappa) = \frac{1}{2} \kappa^3 \frac{d}{d\kappa} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{dE_{11}(\kappa)}{d\kappa} \right) = \frac{1}{2} \left[ \kappa^2 \frac{d^2}{d\kappa^2} - \kappa \frac{d}{d\kappa} \right] E_{11}(\kappa) \quad E_{22}(\kappa_1) = \frac{1}{2} E_{11}(\kappa_1) - \frac{1}{2} \kappa_1 \frac{dE_{11}(\kappa_1)}{d\kappa_1} \quad (48)$$

Experimentalmente se han validado los siguientes resultados aproximados

$$E_{11}(\kappa_1) = C_1 \varepsilon^{\frac{2}{3}} \kappa_1^{-\frac{5}{3}} \quad E_{22}(\kappa_1) = \frac{4}{3} E_{11}(\kappa_1) \quad (49)$$

para el rango inercial, y cuya apariencia es similar a (40).

Sean las siguientes funciones

$$\varphi(\xi) = \frac{\xi}{2} [\xi \varphi_1''(\xi) - \varphi_1'(\xi)] \approx C_K \xi^{-\frac{5}{3}} \quad (50.a)$$

$$\varphi_1(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{\zeta^2}\right) \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta \approx C_1 \xi^{-\frac{5}{3}} \quad (50.b)$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi^2}{\zeta^2}\right) \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2} [\varphi_1(\xi) - \xi \varphi_1'(\xi)] \approx C_2 \xi^{-\frac{5}{3}} \quad (50.c)$$

donde las aproximaciones son para  $\xi \ll 1$  (adelante se verá que esto corresponde al rango inercial). Entonces, las relaciones (40) y (49) de los espectros en el rango inercial se pueden expresar como

$$E(\kappa) = \eta v_K \varphi(\eta\kappa) \quad E_{11}(\kappa_1) = \eta v_K \varphi_1(\eta\kappa_1) \quad E_{22}(\kappa_1) = \eta v_K \varphi_2(\eta\kappa_1) \quad (51)$$

Los coeficientes  $C_K$ ,  $C_1$  y  $C_2$  se relacionan de la siguiente manera

$$C_1 = \frac{18}{55} C_K \quad C_2 = \frac{24}{55} C_K = \frac{4}{3} C_1 \quad (52)$$

La forma de las funciones (50), permite eliminar la dependencia de los espectros en el rango inercial con respecto al parámetro  $\nu$ , teniendo en consideración (6) y (8), validando de esta forma la hipótesis de similaridad de Kolmogorov para el rango inercial [Monin & Yaglom, 1975; Vol.2, pp.355].

#### 1.4. DISPERSION RELATIVA

El movimiento de medio material continuo puede ser descrito desde dos puntos de vista. El primero, que se denominará *descripción materia ó Lagrangiana*, usa la posición de una partícula del medio (punto material)  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; \tau, \mathbf{X})$  en el instante de observación  $t$ , como una función de su posición espacial  $\mathbf{X}$  en un instante  $\tau$  de referencia, que pone una etiqueta a la correspondiente partícula. El instante  $\tau$  no necesariamente

tiene que ser anterior al instante de observación  $t$ , pero debe ser un estado de configuración factible del medio. Esta descripción permite definir, para cada instante  $t$ , la velocidad de la partícula con la etiqueta  $\mathbf{X}$  como  $\mathbf{V}(t, \mathbf{X}) = \partial \mathbf{x}(t; \tau, \mathbf{X}) / \partial t$ . El segundo punto de vista, que se denominar'a *descripción espacial ó Euleriana*, define la velocidad  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}(t, \mathbf{X})$  como una función de la posición  $\mathbf{x}$  de la partícula  $\mathbf{X}$  en el instante  $t$  (se ha obviado la dependencia funcional con respecto a  $\tau$  en las funciones de velocidad  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{V}$ , porque casi siempre se toma el mismo valor para todas las partículas, y sin pérdida de generalidad, este valor se asume nulo. Cuando se desee instantes de referencia distintos para partículas distintas, entonces se colocará de forma explícita). En esta descripción, para un instante  $t$ , la aceleración de la partícula con la etiqueta  $\mathbf{X}$  se calcula como  $\mathbf{a}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t, \mathbf{X}) = d\mathbf{v}/dt|_{\mathbf{x}} = \partial \mathbf{V} / \partial t$ . El operador diferencial  $d/dt|_{\mathbf{x}}$ , denominado derivada substancial ó material, se interpreta como la derivación con respecto al tiempo de observación, manteniendo la etiqueta  $(\tau, \mathbf{X})$  de la partícula invariante, ó lo que es lo mismo, siguiendo a la partícula en cuestión. De esta forma, para una variable (escalar, vectorial, ó tensorial)  $\phi(t, \mathbf{x}) = \phi[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})] = \Phi(t, \mathbf{X})$  con descripción espacial, se tiene que la derivada material se calcula como

$$\frac{d}{dt}\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \quad (1)$$

La particularización de la expresión anterior para la velocidad  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  es evidente.

Siguiendo el mismo análisis de Batchelor [(1949),(1952)], la función  $\wp(t, \mathbf{x}; \tau, \mathbf{X})$  de densidad de probabilidades (*pdf*) del desplazamiento  $\mathbf{x}$ , se define como la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en  $\mathbf{x}$  en el instante  $t$ , siendo que dicha partícula se encontraba en  $\mathbf{X}$  en el instante  $\tau$ . Es decir,  $\wp(t, \mathbf{x}; \tau, \mathbf{X}) d\mathcal{V}_{\mathbf{x}} d\tau$  es la probabilidad de que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; \tau, \mathbf{X})$ , cuando las partículas originalmente en el intervalo  $[\tau - \frac{1}{2}d\tau, \tau + \frac{1}{2}d\tau]$  estaban contenidas en la bola tridimensional  $d\mathcal{V}_{\mathbf{x}}$  con centro en  $\mathbf{X}$  y diámetro  $dX = \|d\mathbf{X}\|$  (la métrica del espacio y la norma aplicada al mismo formarán parte integral de la función de densidad de probabilidades. Ver E.5.1.2). Similarmente, la función  $\hat{\wp}(t_a, t_b, \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; \tau_a, \tau_b, \mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b)$  de densidad de probabilidades del desplazamiento del conjunto de dos partículas es la densidad de probabilidades de encontrar una pareja de partículas en  $\mathbf{x}_a$  en el instante  $t_a$  y en  $\mathbf{x}_b$  en el instante  $t_b$ , habiendo estado estas partículas ocupando las posiciones  $\mathbf{X}_a$  y  $\mathbf{X}_b$  en los instantes  $\tau_a$  y  $\tau_b$ , respectivamente.

La separación de dos partículas en el instante  $t$  es

$$\mathbf{x}_{\Delta} = \mathbf{x}_{\Delta}(t; \tau_a, \tau_b, \mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b) = \mathbf{x}(t; \tau_a, \mathbf{X}_a) - \mathbf{x}(t; \tau_b, \mathbf{X}_b) = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b \quad (2)$$

La función de densidad de probabilidades de esta cantidad viene dada por

$$\wp_{\Delta}(t, \mathbf{x}_{\Delta}; \tau_a, \tau_b, \mathbf{X}_a, \mathbf{X}_{\Delta}) = \int_{\mathcal{V}_{\mathbf{x}_a}} \hat{\wp}(t, t, \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_{\Delta}; \tau_a, \tau_b, \mathbf{X}_a, \mathbf{X}_{\Delta}) d\mathcal{V}_{\mathbf{x}_a} \quad \begin{array}{l} \mathbf{x}_{\Delta} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b \\ \mathbf{X}_{\Delta} = \mathbf{X}_a - \mathbf{X}_b \end{array} \quad (3)$$

la cual es esencialmente la función generalizada de densidad de probabilidades, en el espacio tridimensional, de la distancia de vecindad de Richardson [(1926)]. Particularmente, y de uso más frecuente es el caso donde las partículas son etiquetadas en el mismo instante  $\tau = \tau_a = \tau_b$  (sin pérdida de generalidad se puede tomar  $\tau = 0$ ). Estadística similar puede ser usada para cuantificar el desplazamiento de conjunto de un número arbitrario de partículas.

El resultado más importante predice la separación inicial de una nube de partículas en el rango inercial,  $\eta \ll \Delta_o \ll l_{\epsilon}$ , donde  $\Delta_o = \|\mathbf{X}_{\Delta}\|$  y para tiempos  $\tau_K \ll t \ll \tau_{\epsilon}$ . Denotando  $\Delta = \|\mathbf{x}_{\Delta}\|$ , entonces la media del cuadrado de la separación de un par de partículas viene dado por [Batchelor,(1950)]

$$\begin{aligned} \overline{\Delta^2(t)} - \Delta_o^2 &\approx [S_{\ell}(\Delta_o) + 2 S_n(\Delta_o)] t^2 = \frac{11}{3} C (\varepsilon \Delta_o)^{\frac{2}{3}} t^2 & \tau_K \ll t \ll \tau_o \\ &\approx C_R \varepsilon t^3 & \tau_o \ll t \ll \tau_{\epsilon} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\tau_o = (\Delta_o^2/\varepsilon)^{1/3}$  es el tiempo por debajo del cual la separación inicial  $\Delta_o$  es importante y donde el valor  $C_R$  es conocido como la constante de Richardson. Batchelor distingue tres regímenes: un régimen del

rango inercial inferior dominado por la diferencia original de distancias y velocidades, donde  $\tau_K \ll t \ll \tau_o$ ; el régimen del rango inercial superior, donde  $\tau_o \ll t \ll \tau_\varepsilon$ ; y un régimen de difusión normal a grandes separaciones, donde el movimiento de dos partículas no está correlacionado. El segundo resultado de (4) para el rango inercial se origina de usar la hipótesis de similitud  $(d\Delta/dt)^3 \sim \varepsilon \Delta$  y separación de variables en la integración, junto con la debida adecuación de las medias (ó esperanzas) a través de la constante de Richardson (debido a que las medias no conmutan con las potencias). El operador de la barra significa la estimación de la esperanza usando la función de densidad de probabilidades  $\wp_\Delta$ , es decir,

$$\overline{\Delta^2(t, \Delta_o)} = \int_{\tau_a \leq t} \int_{\tau_b \leq t} \int_{\mathcal{V}_{\mathbf{X}_a}} \mathbf{x}_\Delta^2(t; \tau_a, \tau_b, \mathbf{X}_a, \mathbf{X}_a - \mathbf{X}_\Delta) \wp_\Delta(t, \mathbf{x}_\Delta; \tau_a, \tau_b, \mathbf{X}_a, \mathbf{X}_\Delta) d\mathcal{V}_{\mathbf{X}_a} d\tau_b d\tau_a \quad (5)$$

donde la dependencia con respecto a  $\Delta_o$  (no colocada en (4) por razones de simplicidad) viene a través de  $\mathbf{X}_\Delta$  y del uso de la norma euclidiana  $\Delta^2(t) = \|\mathbf{x}_\Delta\|^2 = \mathbf{x}_\Delta^2$  y  $\Delta_o^2 = \|\mathbf{X}_\Delta\|^2 = \mathbf{X}_\Delta^2$ .

Batchelor [(1952.a)] extendió estos resultados a difusión relativa de una nube de partículas, demostrando que la media del cuadrado de la distancia de separación de todos los pares de partículas en la nube (promediado también sobre un gran número de ensambles) es el doble de la dispersión de la nube alrededor de (ó relativa a) su centro de masa. La cantidad

$$K = \frac{1}{6} \frac{d}{dt} \overline{\Delta^2(T)} \approx \frac{1}{2} (C_R \varepsilon)^{\frac{1}{3}} \overline{\Delta^2(t)}^{\frac{2}{3}} \approx \frac{1}{2} C_R \varepsilon t^2 \quad \tau_o \ll t \ll \tau_\varepsilon \quad (6)$$

es la difusividad de remolino efectiva para la nube de partículas, donde  $\langle \cdot \rangle$  representa el promedio para todos los pares posibles de partículas. Así, en el rango inercial la difusividad de la nube es proporcional a la potencia 4/3 del diámetro efectivo de la nube, y esto es conocido como la *ley del cuatro tercios de Richardson* [(1926)].

Otro importante régimen es la dispersión relativa dentro del rango disipativo, es decir para separaciones iniciales  $\Delta_o \ll \eta$ . Para tiempos  $t \ll \tau_K$ , la primera ecuación de (56) todavía es válida, pero las funciones de estructura se calculan para el rango disipativo (Ver (13)), mediante expansiones en series de Taylor [Monin & Yaglom, 1975;p.353]

$$S_\ell^2(r) \approx C_\ell r^2 \quad S_n^2(r) \approx C_n r^2 \quad C_\ell = \overline{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2} \quad C_n = \overline{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2} \quad (7)$$

Batchelor [(1952.b)] mostró que el subsecuente crecimiento en el rango disipativo, tal que  $\Delta_o^2 \ll \overline{\Delta^2(t)} \ll \eta^2$ , es un régimen de crecimiento exponencial, de manera que

$$\overline{\Delta^2(t)} = \Delta_o^2 \exp(\gamma t / \tau_K) \quad (8)$$

donde  $\gamma \sim 1$  (ver también [Monin & Yaglom, 1975;§24.5]) y  $\tau_K = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$  es la escala de tiempo de Kolmogorov. Nótese que se toma un tiempo  $t \approx \tau_K \ln(\eta^2/\Delta_o^2)$  para que la separación RMS crezca hasta la escala de Kolmogorov  $\eta$ , y que este tiempo se vuelve infinito en el límite  $\Delta_o/\eta \rightarrow 0$ .

El contexto introducido anteriormente, y particularmente la estadística de partículas marcadas, pueden ser usados para describir los momentos de un campo escalar pasivo  $\phi(t, \mathbf{x})$ , el cual satisface la ecuación de conservación

$$\frac{d}{dt} \phi(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = \alpha \nabla^2 \phi \quad (9)$$

con difusividad  $\alpha \equiv 0$ . En particular, los primeros dos momentos estan dados por

$$\overline{\phi(t, \mathbf{x})} = \int_{\tau \leq t} \int_{\mathcal{V}_{\mathbf{X}}} \Phi(\tau, \mathbf{X}) \wp(t, \mathbf{x}; \tau, \mathbf{X}) d\mathcal{V}_{\mathbf{X}} d\tau \quad (10)$$

y

$$\overline{\phi(t_a, \mathbf{x}_a) \phi(t_b, \mathbf{x}_b)} = \int_{\tau_a \leq t_a} \int_{\tau_b \leq t_b} \int_{\mathcal{V}_{\mathbf{x}_a}} \int_{\mathcal{V}_{\mathbf{x}_b}} \Phi(\tau_a, \mathbf{X}_a) \Phi(\tau_b, \mathbf{X}_b) \hat{\phi}(t_a, t_b, \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b; \tau_a, \tau_b, \mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b) d\mathcal{V}_{\mathbf{x}_b} d\mathcal{V}_{\mathbf{x}_a} d\tau_b d\tau_a \quad (11)$$

donde  $\Phi(\tau, \mathbf{X})$  es la función de fuente y las integraciones en el espacio son realizadas en todo el volumen del fluido. Se puede decir que  $\phi$  es una función sobre el espacio de eventos y  $\Phi$  es una función sobre el espacio de muestras (ver sección E.5.1.1). Considerando que  $t_a = t_b = t$  y que  $\tau_a = \tau_b = \tau$ , entonces la aplicación de los anteriores momentos como filtros a la ecuación de conservación (9) en la variable  $\Phi$  da el siguiente resultado

$$\frac{d}{dt} \overline{\phi(t, \mathbf{x})} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\phi} = \alpha \nabla^2 \bar{\phi} - \nabla \cdot \overline{\mathbf{v}' \phi'} \quad (12)$$

donde se ha supuesto que los filtros (10) y (11) conmutan con los operadores diferenciales temporal y espacial. La fluctuaciones  $\mathbf{v}'$  y  $\phi'$  son alrededor de la variable filtrada, es decir,  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$  y  $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ .

Particularmente, si  $\phi(t, \mathbf{x})$  se define como un campo continuo de la concentración normalizada de las partículas marcadas e infinitamente concentradas en  $\mathbf{x}_o$  en un instante  $t_o = 0$ , entonces

$$q(t, \mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}_\infty} \langle \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t, \mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle d\mathcal{V} \quad \text{donde} \quad \int_{\mathcal{V}_\infty} \phi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = 1 \quad (13)$$

se puede interpretar como una función de densidad de probabilidades  $q(t, \mathbf{r}) = \wp_\Delta(t, \mathbf{r}; 0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  para la separación  $\mathbf{r}$ , que en el instante  $t$  tienen dos partículas que fueron escogidas aleatoriamente en el instante inicial. El operador  $\langle \cdot \rangle$  de nuevo denota un promedio de “ensamble”. Adicionalmente, asumiendo turbulencia homogénea, isotrópica y estacionaria, Richardson [(1926)] propuso un modelo simple de difusión esférica

$$\frac{\partial q(t, r)}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 K \frac{\partial q(t, r)}{\partial r} \right] \quad (14)$$

donde  $K(t, r)$  es una difusividad y  $r = \|\mathbf{r}\|$  es el valor absoluto del vector de separación  $\mathbf{r}$ . Richardson argumentó además que  $K$  debía ser proporcional a  $r^{4/3}$  (ver ecuación (6)) y que

$$\langle r^2 \rangle = C_R \varepsilon t^3 \quad (15)$$

(ver ecuación (4)). El factor  $t^3$  se debe a Richardson[(1926)], pero el factor  $\varepsilon$  se debe a Obukhov [(1941)]. Esto es consistente con el escalamiento de Kolmogorov para el rango inercial, donde la difusividad toma la forma

$$K = \varepsilon^{1/3} r^{4/3} F(\varepsilon^{1/3} r^{-2/3} t) \quad (16)$$

donde  $F(\xi)$  es una función universal de un parámetro adimensional. Así que el modelo de Richardson es el caso donde  $F$  es una constante y  $K$  es independiente del tiempo de forma explícita. Usando las consideraciones de Kolmogorov (16) en la ecuación diferencial (14), se obtiene como solución

$$q(t, r) = \frac{1}{\varepsilon^{3/2} t^{9/2} N} G(\varepsilon^{1/3} r^{-2/3} t) \quad G(\zeta) = \exp \left[ \frac{9}{4} \int_1^\zeta \frac{1}{\xi^2 F(\xi)} d\xi \right] \quad C_R = \frac{6\pi}{N} \int_0^\infty \zeta^{-17/2} G(\zeta) d\zeta \quad (17)$$

donde  $N$  es una constante de normalización y la última expresión ha sido el resultado de substituir las dos primeras en (16) [Ott & Mann,(2000)]. En el modelo de Richardson  $q$  se comporta de forma similar a  $\exp(-\|\mathbf{r}\|^{2/3})$  con una cúspide notable en  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Por el contrario, en el modelo de Batchelor [(1952.a)] la variable  $q$  es suavemente gaussiana y  $F(\xi) = \xi^2$ , lo cual es equivalente a que el argumento de  $K$  no depende de la separación  $r$ , sino que es puramente dependiente del tiempo. En el modelo de Kraichnan  $q$  luce como el modelo de Richardson para pequeñas separaciones ( $\zeta \rightarrow \infty$ ,  $\zeta = \varepsilon^{1/3} r^{-2/3} t$ ), pero su cola tiene



un comportamiento diferente en la forma  $\exp(-\|\mathbf{r}\|^{4/3})$ , y  $F(\xi) \propto \xi$  para valores pequeños de  $\xi = \varepsilon^{1/3} r^{-2/3} t$  y se aproxima a una constante para  $\xi \rightarrow \infty$  ( $F(\xi) \approx A \tanh(B\xi)$ ). Los tres modelos descritos anteriormente son consistentes con la ley (15), pero  $C_R$  es un parámetro ajustable en los modelos de Richardson y Batchelor, mientras que en el modelo de Kraichnan no existen parámetro ajustable y de aquí que pueda predecir los valores de  $C_R$ .

Para el caso más general, donde interviene la convección como en (9) y (12), se puede aplicar la analogía de Boussinesq

$$-\overline{\mathbf{v}'\phi'} = \alpha_t \nabla \overline{\phi} \quad (18)$$

donde  $\alpha_t$  es una difusividad de remolino, no necesariamente constante. Esta difusividad, para las condiciones expuestas por Richardson, aparece en una ecuación diferencial similar a (14), sólo que la variable sería  $\phi$  en lugar de  $q$  y la difusividad sería  $\alpha_t$  en lugar de  $K$  (la difusividad efectiva  $K$  es una medida de la dispersión  $q$ , en cambio  $\alpha_t$  mide la difusión turbulenta de  $\phi$ ). Esta ecuación y dichas condiciones se podrían usar para estimar  $\alpha_t$ , resolviendo de forma directa (9) con  $\alpha = 0$  y comparando luego con (18). Extrapolando la analogía que existe entre la ecuación de transporte turbulento de la velocidad y un escalar pasivo como la temperatura, se puede afirmar que  $\alpha_t \sim K$ .

Considérese ahora las características estadísticas de las diferencias de velocidad para una sola partícula en dos instantes diferentes sucesivos  $t_o$  y  $t = t_o + \tau$ . Sea la diferencia de velocidades en estos instantes

$$\Delta_\tau \mathbf{v} = \mathbf{V}(t, \mathbf{X}_o) - \mathbf{v}(t_o, \mathbf{X}_o) = \mathbf{v}[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}_o)] - \mathbf{v}(t_o, \mathbf{X}_o) \quad (19)$$

donde  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}(t, \mathbf{X}_o)$  es la velocidad y  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}_o)$  es la posición de la partícula de fluido en el instante  $t$ , la cual ocupaba la posición  $\mathbf{X}_o$  en el instante  $t_o$ . Si  $\tau = t - t_o$  es mucho menor que la escala de tiempo lagrangiana  $\tau_L$ , es decir, el intervalo de tiempo durante el cual los cambios en la velocidad lagrangiana  $\mathbf{V}(t, \mathbf{X}_o)$  (las variables con descripción material se denominarán lagrangianas) son comparables con su magnitud, entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}_o) \approx b f \mathbf{X}_o + \mathbf{V}(t_o, \mathbf{x}_o) (t - t_o)$ . Si adicionalmente  $\tau \ll \tau_\varepsilon \leq \tau_L$ , entonces puede considerarse que  $\Delta_\tau \mathbf{v}$  tiene una distribución de probabilidades isotrópica, la cual es independiente de  $t_o$ ,  $\mathbf{x}_o$  y  $\mathbf{V}_o = \mathbf{V}(t_o, \mathbf{x}_o)$  y para la cual se satisfacen las condiciones de las hipótesis de Kolmogorov, por lo cual el momento de segundo orden de la variable aleatoria  $\Delta_\tau \mathbf{v}$  es

$$\mathbf{S}(\tau) = \overline{\Delta_\tau \mathbf{v} \Delta_\tau \mathbf{v}} = S(\tau) \mathbf{I} \quad S(\tau) = v_K^2 \varphi_o(\tau/\tau_K) \quad (20)$$

donde  $\varphi_o(\xi)$  es una nueva función universal. La función  $S_\tau^2 = S(\tau)$  es denominada *función de estructura de la velocidad lagrangiana* (se ha obviado el superíndice del cuadrado en la función por simplicidad). Cuando  $\tau \ll \tau_K$ , en el rango disipativo, la diferencia de velocidad  $\Delta_\tau \mathbf{v}$  para cada realización particular del movimiento turbulento es, por supuesto, proporcional a  $\tau$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= a_o \xi^2 & \xi &\ll 1 \\ S_\tau^2(\tau) &= a_o \nu^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \tau^2 & \tau &\ll \tau_K \end{aligned} \quad (21)$$

En el otro caso límite con  $\tau_K \ll \tau \ll \tau_\varepsilon$ , el cual corresponde al rango inercial en el tiempo, el parámetro  $\nu$  debe desaparecer de (20), por lo cual

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= C_o \xi & \xi &\gg 1 \\ S_\tau^2(\tau) &= C_o \varepsilon \tau & \tau_K &\ll \tau \ll \tau_\varepsilon \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $C_o$  es una constante universal. La semejanza con las expresiones 1.3.(12) y 1.3.(13) es apreciable, pero su interpretación bastante diferente. En (21) y (22) las velocidades en la función de estructura corresponden a la misma partícula en instantes diferentes, mientras que 1.3.(12) y 1.3.(13) las velocidades para un mismo instante y posiciones diferentes corresponden a partículas distintas.

La relación general que conecta la función de autocorrelación para una variable estocástica  $\mathbf{F}(t)$ , la cual posee el valor medio e inicial nulos, se expresa como

$$\overline{\mathbf{F}(t_a)\mathbf{F}(t_b)} = \int_0^{t_a} \int_0^{t_b} \overline{\dot{\mathbf{F}}(\tau_a)\dot{\mathbf{F}}(\tau_b)} d\tau_b d\tau_a \quad (23)$$

Ahora, para efectos de analizar la estructura de pequeña escala de la turbulencia se adoptará la notación de Sawford [(2001)] para las variables de diferencias de la posición  $\tilde{\mathbf{X}}_a(t) = \mathbf{X}_a(t) - \mathbf{V}_{ao}t - \mathbf{X}_{oa}$  y la velocidad  $\tilde{\mathbf{V}}_a(t) = \mathbf{V}_a(t) - \mathbf{V}_{ao}$ , donde  $\mathbf{X}_{oa} = \mathbf{X}_a(0)$  es la posición inicial y  $\mathbf{V}_{ao} = \mathbf{V}_a(0)$  es la velocidad inicial, todas estas cantidades referidas a la partícula  $a$ . Lo mismo para una partícula diferente  $b$ . De las cantidades relativas entre partículas se tiene el desplazamiento  $\hat{\mathbf{X}}(t) = \tilde{\mathbf{X}}_r(t) = \tilde{\mathbf{X}}_a(t) - \tilde{\mathbf{X}}_b(t)$ , la velocidad  $\hat{\mathbf{V}}(t) = \tilde{\mathbf{V}}_r(t) = \tilde{\mathbf{V}}_a(t) - \tilde{\mathbf{V}}_b(t)$  y la aceleración  $\hat{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}_r = \mathbf{A}_r(t) = \mathbf{A}_a(t) - \mathbf{A}_b(t)$ . Si se restringe la atención al rango inercial, entonces las variables relativas poseen un valor medio nulo y el interés se centra en los tensores de covarianza de dos tiempos de la posición, la velocidad y la aceleración

$$\hat{\mathbf{D}}(t_a, t_b) = \overline{\tilde{\mathbf{X}}(t_a)\tilde{\mathbf{X}}(t_b)} \quad \hat{\mathbf{S}}(t_a, t_b) = \overline{\tilde{\mathbf{V}}(t_a)\tilde{\mathbf{V}}(t_b)} \quad \hat{\mathbf{R}}(t_a, t_b) = \overline{\tilde{\mathbf{A}}(t_a)\tilde{\mathbf{A}}(t_b)} \quad (24)$$

Las covarianzas de la velocidad para una y dos partículas pueden ser definidas de manera similar

$$\mathbf{S}(t_a, t_b) = \overline{\tilde{\mathbf{V}}_a(t_a)\tilde{\mathbf{V}}_a(t_b)} \quad \tilde{\mathbf{S}}(t_a, t_b) = \overline{\tilde{\mathbf{V}}_a(t_a)\tilde{\mathbf{V}}_b(t_b)} \quad (25)$$

con formas similares para los desplazamientos y las aceleraciones. Para cada conjunto de covarianzas (una partícula, dos partículas, ó relativa) existe un par de relaciones de la forma de (17), conectando la covarianza de la velocidad a la covarianza de la aceleración, y la covarianza del desplazamiento con la covarianza de la velocidad.

Más general que la expresión (14) es la covarianza de la velocidad dependiente de dos tiempos (y no de un intervalo de tiempo  $\tau$ ), que para el rango inercial y una sola partícula tiene la forma [Monin & Yaglom, 1975;p.533]

$$\mathbf{S}(t_a, t_b) = \frac{1}{2} [S(t_a) + S(t_b) - S(|t_a - t_b|)] \mathbf{I} = \frac{1}{2} C_o \varepsilon (t_a + t_b - |t_a - t_b|) \mathbf{I} \quad (26)$$

La cual, integrada a través de (23), da el siguiente resultado

$$\mathbf{D}(t, t) = \overline{\tilde{\mathbf{X}}_a(t)\tilde{\mathbf{X}}_a(t)} = \frac{1}{3} C_o \varepsilon t^3 \mathbf{I} \quad (27)$$

para la dispersión de la diferencia de desplazamiento de una sola partícula. Esta estadística de una sola partícula representa el movimiento de partículas en un marco de referencia inercial moviéndose con la velocidad inicial de la partícula (estadística condicional de una partícula).

La covarianza de la aceleración es el fundamento para un análisis cinemático de la estadística del movimiento relativo de dos partículas. Si se supone que la covarianza de la aceleración es despreciable o estacionaria, puesto que  $\tilde{\mathbf{R}}(t, t) \rightarrow \mathbf{0}$ , entonces se consigue una conexión entre estadística condicionada de una partícula y la dispersión relativa.

$$\hat{\mathbf{S}}(t, t) = 2 C_o \varepsilon t \mathbf{I} \quad \hat{\mathbf{D}}(t, t) = \frac{2}{3} C_o \varepsilon t^3 \mathbf{I} \quad (28)$$

La segunda de estas expresiones implica que la constante de Richardson está relacionada con la constante de la función de estructura de la velocidad lagrangiana en la forma  $C_R = 2 C_o$ , puesto que  $\overline{\Delta^2(t)} - \Delta_o^2 \approx \text{tr} \hat{\mathbf{D}}(t, t)$ . Por el contrario, si se abandona la hipótesis de una covarianza de la aceleración estacionaria, tal que en el rango inercial es de la forma

$$\text{tr} \tilde{\mathbf{R}}(t_a, t_b) = \overline{\tilde{\mathbf{A}}_a(t_a)\tilde{\mathbf{A}}_b(t_b)} = \varepsilon t_a^{-1} \psi(t_a/t_b) \quad \tau_o \ll t_a, t_b \ll \tau_e \quad (29)$$

con formas análogas para las covarianzas de los desplazamientos  $\tilde{\mathbf{D}}$  y las velocidades  $\tilde{\mathbf{S}}$  de dos partículas. Como resultado de aplicar la restricción (23), las covarianzas de los desplazamientos y las velocidades de dos partículas pueden ser escritas en términos de la función universal de la aceleración  $\psi(\xi)$ . En particular, para  $t_a = t_b = t$  se tiene

$$\text{tr}\tilde{\mathbf{D}}(t, t) = \overline{\text{tr}\tilde{\mathbf{X}}_a(t)\tilde{\mathbf{X}}_b(t)} = (C_a - C_b/3)\varepsilon t^3 \quad \text{tr}\tilde{\mathbf{S}}(t, t) = \overline{\text{tr}\tilde{\mathbf{V}}_a(t)\tilde{\mathbf{V}}_b(t)} = 2C_a\varepsilon t \quad \tau_o \ll t \ll \tau_\varepsilon \quad (30)$$

donde

$$C_a = \int_0^1 \xi^{-1} \psi(\xi) d\xi \quad C_b = \int_0^1 \psi(\xi) d\xi \quad (31)$$

Las constantes universales  $C_a$  y  $C_b$  son determinadas a partir de la estructura de la covarianza de la aceleración en el rango inercial. Esto contrasta con  $C_o$ , el cual se determina en términos de la estructura de la covarianza de la aceleración para una partícula en el rango disipativo [Sawford,(2001)]. Para  $t \ll \tau_o$ , las covarianzas para dos partículas de las expresiones (30) son mucho menores que las correspondientes cantidades para una sola partícula, y esto es consistente con la hipótesis de que la covarianza de la aceleración para dos partículas es despreciable o estacionaria. Así, para el movimiento relativo de dos partículas se tiene el siguiente comportamiento en dos etapas para el rango inercial

$$\text{tr}\hat{\mathbf{D}}(t, t) = \overline{\hat{\mathbf{X}}(t)^2} \approx \overline{\mathbf{X}_r(t)^2} - \overline{\mathbf{X}_r(0)^2} t^2 - \Delta_o^2 \approx \begin{cases} 2C_o\varepsilon t^3 & \tau_K \ll t \ll \tau_o \\ (2C_o - 2C_a + \frac{2}{3}C_b)\varepsilon t^3 & \tau_o \ll t \ll \tau_\varepsilon \end{cases} \quad (32)$$

y

$$\text{tr}\hat{\mathbf{S}}(t, t) = \overline{\hat{\mathbf{V}}(t)^2} \approx \overline{\mathbf{V}_r(t)^2} - \overline{\mathbf{V}_r(0)^2} \approx \begin{cases} 6C_o\varepsilon t & \tau_K \ll t \ll \tau_o \\ (6C_o - 4C_a)\varepsilon t & \tau_o \ll t \ll \tau_\varepsilon \end{cases} \quad (33)$$

Este último resultado es, por supuesto, consistente con lo resultados de Batchelor [(1950)] (ecuación (4)). La segunda ecuación de (32) da el valor de  $C_K = 2C_o - 2C_a + \frac{2}{3}C_b$  para la constante de Richardson. Se ha demostrado que tanto  $C_a$  como  $C_a - \frac{1}{3}C_b$  son no negativos, así que el haber despreciado la covarianza de la aceleración de dos partículas ofrece un límite superior a la dispersión relativa  $\text{tr}\hat{\mathbf{D}}(t, t)$  y a la covarianza de la velocidad relativa  $\text{tr}\hat{\mathbf{S}}(t, t)$ . De hecho, en todas las teoría y simulaciones, siempre se ha obtenido que  $C_R \leq 2C_o$ , variando en orden de magnitud desde 0.06 a 3.52, con las simulaciones cinemáticas (donde el campo de velocidades es aproximado mediante series de Fourier) dando el valor más bajos y los cierres de dos puntos generalmente dando los valores más altos. Todos los momentos lagrangeanos de segundo orden siempre dependen linealmente de  $\varepsilon$ .

## 2. ECUACIONES FUNDAMENTALES PROMEDIADAS

### 2.1. CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad en su forma más general es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

La ecuación de continuidad instantánea para el flujo incompresible ( $\rho = \text{constante}$ ) es

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

Substituyendo la descomposición 1.2.(1) para la velocidad se obtiene

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') = \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (3)$$

Tomando el promedio de esta expresión resulta

$$\overline{\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')} = \nabla \cdot (\overline{\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'} ) = \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (4)$$

En otras palabras, la ecuación instantánea (2) se satisface también para las medias. Considerando el segundo miembro de (3), se puede decir que se satisface también para las fluctuaciones de la velocidad. Así, se tiene que

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (5)$$

En forma resumida, se dirá que los campos de velocidades en un flujo incompresible turbulento son *solenoidales*, tanto para la variable instantánea, como para la variable media y la fluctuación.

## 2.2. CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

La ecuación de cantidad de movimiento instantánea para el flujo incompresible es

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (1)$$

donde el tensor de esfuerzos globales  $\mathbf{T}$  se puede descomponer en una parte isótropa debida a la presión y una parte viscosa

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \mathcal{T} \quad \mathcal{T} = 2\mu \mathbf{D} \quad (2)$$

En (1) la derivada con respecto al tiempo debe interpretarse como un operador diferencial convectivo (o relativo a la materia), es decir,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad \rho \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \varphi) \quad (3)$$

donde la segunda parte de (3) es válida para cualquier flujo, debido a la aplicación de la ecuación 2.1.(1) de continuidad en su forma general. Al operador del lado izquierdo de (3) se le conoce como *derivada material* y al operador del lado derecho se le conoce como *forma conservativa* de dicha derivada. Al término con el operador  $\nabla$  en ambas expresiones se le conoce como *término convectivo*. También se puede definir un operador diferencial convectivo para el flujo medio

$$\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \quad \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla (\varphi) = \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} \varphi) \quad \mathbf{v}' \cdot \nabla (\varphi') = \nabla \cdot (\mathbf{v}' \varphi') \quad (4)$$

donde la segunda y tercera partes han sido derivadas de aplicar la ecuación 2.1.(5) de continuidad en su forma particular para el flujo incompresible y particularmente para el flujo medio y para las fluctuaciones.

El tensor  $\mathbf{D}$  de velocidad de deformación y el tensor  $\mathbf{W}$  de velocidad de rotación se obtienen de la descomposición del tensor gradiente de deformación  $\mathbf{G}$  en su parte simétrica  $\mathbf{D}$  y su parte antisimétrica  $\mathbf{W}$ . Esto es,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^t) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{G}^t) \quad \mathbf{G} = (\nabla \mathbf{v})^t \quad (5)$$

Estos tensores satisfacen ciertas propiedades a saber

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{G} &= \mathbf{0} & \mathbf{G} : \mathbf{G} &= \nabla \nabla : (\mathbf{v} \mathbf{v}) & \mathbf{w} \cdot \mathbf{W} &= \mathbf{0} & \mathbf{G}_x &= \mathbf{W}_x = -\mathbf{w} \\ \nabla \cdot \mathbf{G}^t &= \nabla^2 \mathbf{v} = 2 \nabla \cdot \mathbf{W}^t & &= -\nabla \times \mathbf{w} & 2 \mathbf{D} : \mathbf{D} - \mathbf{G} : \mathbf{G} &= \mathbf{G} : \mathbf{G}^t = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{G} : \mathbf{G} \end{aligned} \quad (6)$$

siendo  $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$  la vorticidad. La dos primeras de estas propiedades se verifican aplicando la ecuación de continuidad 2.1.(2). Las anteriores propiedades se verifican aplicando las identidades A.1.7.(29) y A.1.7.(33.a), y la definición A.1.7.(30) del vector axial de un tensor cualquiera de segundo orden.

Para obtener la ecuación de cantidad de movimiento de las variables medias vamos a utilizar la ecuación (1), substituyendo (2) y (3)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot \mathcal{T} \quad (7)$$

Introduciendo la descomposición 1.2.(1), resulta

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') + (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot \nabla (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \right] = \rho (\bar{\mathbf{g}} + \mathbf{g}') - \nabla (\bar{P} + P') + \nabla \cdot (\bar{\mathcal{T}} + \mathcal{T}') \quad (8)$$

donde

$$\bar{\mathcal{T}} = 2\mu \bar{\mathbf{D}} \quad \mathcal{T}' = 2\mu \mathbf{D}' \quad (9)$$

Tomando el promedio de toda esta ecuación se obtiene

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}'} \right) = \rho \bar{\mathbf{g}} - \nabla \bar{P} + \nabla \cdot \bar{\mathcal{T}} \quad (10)$$

Aplicando la propiedad (4) el término extra  $\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}'}$  se convierte en  $\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'})$  y, luego de reagruparlo con los esfuerzos viscoso, finalmente resulta

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} \right) = \rho \bar{\mathbf{g}} - \nabla \bar{P} + \nabla \cdot (\bar{\mathcal{T}} - \rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}) \quad (11)$$

El tensor  $-\rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}$  se denomina *tensor de esfuerzos de Reynolds* y modifica los esfuerzos viscosos del flujo medio. La ecuación (11) también se puede expresar de forma resumida como

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} - \nabla \bar{P} + \nabla \cdot \check{\mathcal{T}} \quad \check{\mathcal{T}} = \bar{\mathcal{T}} - \rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'} \quad (12)$$

Obsérvese el parecido entre esta ecuación promediada y la ecuación instantánea (7).

### 2.3. VORTICIDAD

La ecuación de cantidad de movimiento lineal 2.2.(7), una vez introducida la relación constitutiva 2.2.(2), se expresa como

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1)$$

Supondremos que las fuerzas a distancia o de cuerpo  $\mathbf{g}$  son conservativas, por lo cual se generan de un campo potencial  $\varphi$ , o sea,

$$\mathbf{g} = -\nabla \varphi \quad (2)$$

En el caso particular del campo de fuerzas gravitatorias  $\varphi = gz$ , siendo  $z$  la dirección vertical ascendente. Considerando esto, aplicando la identidad A.2.2.(15.f) al término convectivo  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  y la penúltima de las propiedades 2.2.(6) a  $\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})$ , la ecuación (1) se reduce a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) - \mathbf{w} \times \mathbf{v} - \nu \nabla \times \mathbf{w} \quad (3)$$

Podemos aplicar a esta ecuación el rotacional intercambiando los operadores  $\nabla \times$  y  $\partial/\partial t$ , obteniéndose

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) - \nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (4)$$

donde el primer término de (3) se ha eliminado por ser el rotacional de un gradiente, que por definición es nulo. El primer y segundo término del miembro de la derecha se pueden desarrollar con las identidades A.2.2.(15.l) y A.2.2.(15.m)), respectivamente. Teniendo presente la ecuación de continuidad 2.1.(2) y

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (5)$$

por ser la divergencia de un rotacional siempre nula por definición, resulta

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{w} \quad (6)$$

El primer término del miembro de la derecha se puede expresar como  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{D}$ , debido a la descomposición 2.2.(5) y a la segunda propiedad 2.2.(6), obteniéndose finalmente

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{D} + \nu \nabla^2 \mathbf{w} \quad (7)$$

El término  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{D}$  representa la amplificación o el *alargamiento del vórtice* y la rotación de la vorticidad debidas a la velocidad de deformación.

La ecuación (5) se puede desarrollar mediante la descomposición 1.2.(1), tal como se hizo con la ecuación de continuidad en las expresiones 2.1.(3) y 2.1.(4), derivando expresiones similares a 2.2.(5) para la vorticidad media y su fluctuación

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{w}} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{w}' = 0 \quad (8)$$

Debido a que los campo de vorticidad, al igual que el de velocidad, son solenoidales tanto para la variable instantánea, la media y la fluctuación, se satisfacen propiedades similares a 2.2.(4) para la vorticidad. Esto es,

$$\mathbf{w} \cdot \nabla (\varphi) = \nabla \cdot (\mathbf{w} \varphi) \quad \bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla (\varphi) = \nabla \cdot (\bar{\mathbf{w}} \varphi) \quad \mathbf{w}' \cdot \nabla (\varphi') = \nabla \cdot (\mathbf{w}' \varphi') \quad (9)$$

donde la primera expresión también es válida para la velocidad, si dentro de la expresión de la derecha en 2.2.(3) se considera que  $\rho$  es constante.

Vamos ahora a desarrollar la ecuación de la vorticidad (7) promediada. Para ello sustituimos, igual que siempre, la descomposición 1.2.(1)

$$\frac{\partial (\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}')}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot \nabla (\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') = (\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') \cdot (\bar{\mathbf{D}} + \mathbf{D}') + \nu \nabla^2 (\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') \quad (10)$$

Tomando el promedio de toda esta ecuación se obtiene, luego de reorganizar los términos,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}} = -\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{w}'} + \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'} + \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{w}} \quad (11)$$

El primer término del miembro de la derecha se puede introducir dentro del término viscoso aplicando la tercera propiedad en (9). De manera que ahora la expresión (11) se puede reescribir

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'} + \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{\mathbf{w}} - \overline{\mathbf{v}' \mathbf{w}'}) \quad (12)$$

El último término dentro del paréntesis  $-\overline{\mathbf{v}' \mathbf{w}'}$  es para la ecuación de la vorticidad, el equivalente de los esfuerzos de Reynolds para la ecuación de cantidad de movimiento. O sea, que representa el transporte medio de  $\mathbf{w}'$  a través de su interacción con la velocidad fluctuante  $\mathbf{v}'$ . El término  $\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'}$  representa la ganancia (o pérdida) de la vorticidad media causada por el alargamiento y rotación de los componentes de la vorticidad fluctuante debida a la fluctuación del tensor velocidad de deformación. A este término le denominaremos *producción turbulenta de la vorticidad*.

Aprovechando las propiedades 2.1.(2), 2.1.(5), (5) y (8) se puede, con la exception del término transitorio, agrupar todos los términos dentro del operador  $\nabla \cdot ( )$ , tal como se hizo en (12). De esta forma se obtiene respectivamente para las expresiones (7) y (11), el siguiente par de expresiones para el transporte instantáneo y medio de la vorticidad

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}^t) \quad \mathbf{\Omega} = \nu \nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \mathbf{v} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{w}}}{\partial t} = \nabla \cdot (\overline{\mathbf{\Omega}} - \overline{\mathbf{\Omega}^t}) \quad \overline{\mathbf{\Omega}} = \nu \nabla \overline{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w} \mathbf{v}} + \overline{\mathbf{w}' \mathbf{v}'} \quad (14)$$

## 2.4. TENSOR DE VELOCIDAD DE DEFORMACION

En esta parte se desarrolla una ecuación de transporte para el tensor de velocidad de deformación. Para ello se aplica el operador diferencial  $\nabla$  a la ecuación de cantidad de movimiento lineal 2.3.(1) y se intercambia con los otros operadores diferenciales como  $\partial/\partial t$  o  $\nabla^2$ . De esta forma se obtiene, considerando que las fuerzas de cuerpo  $\mathbf{g}$  son conservativas según 2.3.(2) y no fluctuantes, una ecuación de transporte para el tensor  $\mathbf{G}^t$

$$\frac{\partial \mathbf{G}^t}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{G}^t + \mathbf{G}^t \cdot \mathbf{G}^t = -\nabla \nabla (P/\rho + \varphi) + \nu \nabla^2 \mathbf{G}^t \quad (1.a)$$

Algo similar se puede hacer para el tensor  $\mathbf{G}$  transponiendo la operación anterior, con lo cual se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{G} = -\nabla \nabla (P/\rho + \varphi) + \nu \nabla^2 \mathbf{G} \quad (1.b)$$

Sumando estas dos últimas expresiones y dividiendo por dos se obtiene como resultado la ecuación de transporte para el tensor velocidad de deformación  $\mathbf{D}$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = -\nabla \nabla (P/\rho + \varphi) + \nu \nabla^2 \mathbf{D} \quad (2)$$

donde se ha tenido en cuenta la descomposición 2.2.(5). En este resultado  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}$  es un tensor simétrico y puede ser descompuesto de la siguiente forma

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{w} \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \mathbf{I} \quad (3)$$

Finalmente la ecuación de transporte (2) se puede expresar como

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{D} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{w} \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \mathbf{I} - \nabla \nabla (P/\rho + \varphi) + \nu \nabla^2 \mathbf{D} \quad (4)$$

Para esta ecuación se puede obtene un resultado promediado, como se ha hecho en las anteriores oportunidades, substituyendo la descomposición 1.2.(1) en (4) y tomando luego la media. De este procedimiento, que no se va a describir en detalles, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\mathbf{D}}}{dt} = \frac{\partial \overline{\mathbf{D}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{D}} = & -\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \mathbf{D}'} - \overline{\mathbf{D}' \mathbf{D}'} - \overline{\mathbf{w}' \mathbf{w}'} + \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'} \mathbf{I} \\ & - \overline{\mathbf{D}} \cdot \overline{\mathbf{D}} - \overline{\mathbf{w} \mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{w}} \mathbf{I} - \nabla \nabla (\overline{P}/\rho + \varphi) + \nu \nabla^2 \overline{\mathbf{D}} \end{aligned} \quad (5)$$

El primer término del miembro de la derecha se puede agrupar junto con el término viscoso, tal como se ha hecho antes. Si embargo, en esta oportunidad no hace falta debido a que el resultado obtenido es simplemente un paso previo para el desarrollo de la próxima sección.

## 2.5. PRODUCCION TURBULENTO DE LA VORTICIDAD

En esta parte se desarrollan ecuaciones de transporte, tanto para el alargamiento instantáneo del vórtice  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{D}$ , como para el alargamiento medio del vórtice  $\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{D}}$  y la producción turbulenta de la vorticidad  $\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'}$ . Debido a la linealidad del operador diferencial derivada material se puede hacer se puede hacer

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{w} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \frac{d\mathbf{w}}{dt} \cdot \mathbf{D} \quad (1)$$

y debido a la linealidad del operador laplaciano  $\nabla^2$ , luego de substituir las expresiones 2.3.(7) y 2.4.(4), se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{D}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{w} \cdot \mathbf{D}) = -\mathbf{w} \cdot \nabla \nabla(P/\rho + \varphi) + \nu \nabla^2(\mathbf{w} \cdot \mathbf{D}) \quad (2)$$

en donde fueron eliminados los términos  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$  por aparecer con signos opuestos y donde el término  $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{w} \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \mathbf{I}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = 0$  debido a la segunda propiedad de 2.2.(6).

Vamos a introducir la descomposición 1.2.(1) es esta ecuación de transporte como es habitual

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[(\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') \cdot (\overline{\mathbf{D}} + \mathbf{D}')] + (\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot \nabla[(\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') \cdot (\overline{\mathbf{D}} + \mathbf{D}')] = \\ -(\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') \cdot \nabla \nabla[(\overline{P} + P')/\rho + \varphi] + \nu \nabla^2[(\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') \cdot (\overline{\mathbf{D}} + \mathbf{D}')] \end{aligned} \quad (3)$$

y luego de promediar la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{dt}(\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{D}}) + \frac{\bar{d}}{dt}(\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'}) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \mathbf{D}'} \cdot \overline{\mathbf{w}}) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \mathbf{w}'} \cdot \overline{\mathbf{D}}) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \mathbf{w}'} \cdot \overline{\mathbf{D}'}) = \\ -\overline{\mathbf{w}'} \cdot \nabla \nabla \overline{P'}/\rho + \nu \nabla^2(\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'}) - \overline{\mathbf{w}} \cdot \nabla \nabla(\overline{P}/\rho + \varphi) + \nu \nabla^2(\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{D}}) \end{aligned} \quad (4)$$

Al igual que siempre se han empleado las expresiones 2.2.(4) y se ha considerado la simetría del tensor  $\mathbf{D}'$ .

Se obtiene ahora la ecuación de transporte para el alargamiento medio del vórtice utilizando una expresión similar a (1), pero en este caso para los flujos medios

$$\frac{\bar{d}}{dt}(\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{D}}) = \overline{\mathbf{w}} \cdot \frac{\bar{d}\overline{\mathbf{D}}}{dt} + \frac{\bar{d}\overline{\mathbf{w}}}{dt} \cdot \overline{\mathbf{D}} \quad (5)$$

Substituyendo en esta ecuación los resultados previos 2.3.(11) y 2.4.(5), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{dt}(\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{D}}) = -[\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \mathbf{w}'})] \cdot \overline{\mathbf{D}} + \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'} \cdot \overline{\mathbf{D}} - \overline{\mathbf{w}} \cdot [\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \mathbf{D}'})] - \overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}'} - \overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{w}' \mathbf{w}'} + \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'} \cdot \overline{\mathbf{w}} \\ - \overline{\mathbf{w}} \cdot \nabla \nabla(\overline{P}/\rho + \varphi) + \nu \nabla^2(\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{D}}) \end{aligned} \quad (6)$$

Finalmente, extrayendo este resultado de la ecuación (4) se obtiene la ecuación de transporte de la producción turbulenta de la vorticidad  $\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'}$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{dt}(\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'}) = -\overline{\mathbf{w}' \mathbf{v}'} : \nabla \overline{\mathbf{D}} - (\nabla \overline{\mathbf{w}})^t : \overline{\mathbf{v}' \mathbf{D}'} - \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'} \cdot \overline{\mathbf{D}} + \overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}'} + \overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{w}' \mathbf{w}'} - \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'} \cdot \overline{\mathbf{w}} \\ - \overline{\mathbf{w}'} \cdot \nabla \nabla \overline{P'}/\rho + \nabla \cdot (\nu \nabla(\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'})) - \overline{\mathbf{v}' \mathbf{w}'} \cdot \overline{\mathbf{D}'} \end{aligned} \quad (7)$$

donde se han agrupado los términos de una forma apropiada para su posterior descripción. Cada uno de los términos de la ecuación de transporte de la producción turbulenta de la vorticidad tiene un significado físico que describiremos a continuación:

- $-\overline{\mathbf{w}' \mathbf{v}'} : \nabla \overline{\mathbf{D}}$  Transporte debido a los gradientes del tensor de velocidad de deformación.



- $-(\nabla \bar{\mathbf{w}})^t : \bar{\mathbf{v}}' \bar{\mathbf{D}}'$  Transporte debido a los gradientes de la vorticidad.
- $-\bar{\mathbf{w}}' \cdot \bar{\mathbf{D}}' \cdot \bar{\mathbf{D}}$  Pérdida debida a la velocidad de deformación. Esta cantidad se transfiere entre las ecuaciones (6) y (7).
- $\bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{D}}' \cdot \bar{\mathbf{D}}'$  Ganancia debida a la rotación que produce la vorticidad sobre las fluctuaciones del tensor velocidad de deformación. Esta cantidad se transfiere entre las ecuaciones (6) y (7).
- $\bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{w}}' \bar{\mathbf{w}}' - \bar{\mathbf{w}}' \cdot \bar{\mathbf{w}}' \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{W}}' \cdot \bar{\mathbf{W}}'$  Ganancia debida a la rotación que produce la vorticidad sobre las fluctuaciones del tensor velocidad de rotación. Esta cantidad se transfiere entre las ecuaciones (6) y (7).
- $-\bar{\mathbf{w}}' \cdot \nabla \nabla P' / \rho$  Producción turbulenta debida a la acción de las fluctuaciones de la vorticidad en las fluctuaciones de la presión.
- $\nu \nabla (\bar{\mathbf{w}}' \cdot \bar{\mathbf{D}}')$  Transporte por difusión viscosa que tiende a atenuar el crecimiento con gradientes abruptos.
- $-\bar{\mathbf{v}}' \bar{\mathbf{w}}' \cdot \bar{\mathbf{D}}'$  Alteración turbulenta del transporte por difusión viscosa media, teniendo el mismo efecto que los esfuerzos de Reynolds sobre los esfuerzos medios en la ecuación de cantidad de movimiento lineal.

Las cantidades que se transfieren entre la ecuación (6) del flujo medio y la ecuación (7) del flujo turbulento lo hacen en el sentido que indican sus signos, puesto que son opuestos en dichas ecuaciones. Por convención denominaremos pérdidas (destrucción) a las cantidades negativas y ganancias (producción) a las cantidades positivas en las respectivas ecuaciones de transporte. El término de producción  $-\bar{\mathbf{w}}' \cdot \nabla \nabla P' / \rho$  se ha denominado así y no de ganancia como los otros porque no tiene su contrapartida de pérdida.

Podemos analizar la turbulencia homogénea simplificando la ecuación de transporte (7) con la eliminación de aquellos términos que poseen el operador  $\nabla$  actuando sobre cantidades medias. De esta forma se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{w}}' \cdot \bar{\mathbf{D}}') = -\bar{\mathbf{w}}' \cdot \bar{\mathbf{D}}' \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{D}}' \cdot \bar{\mathbf{D}}' + \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{w}}' \bar{\mathbf{w}}' - \bar{\mathbf{w}}' \cdot \bar{\mathbf{w}}' \bar{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{w}}' \cdot \nabla \nabla P' / \rho \quad (8)$$

Como se puede observar sólo quedaron aquellos términos de pérdida y ganancia y el último término que es de producción. Todos los términos de transporte (convectivos y debido a gradientes) quedaron eliminados en la turbulencia homogénea.

## 2.6. ENERGIA CINETICA

La ecuación de energía cinética instantánea se puede obtener a partir de la ecuación de cantidad de movimiento instantánea 2.2.(1), multiplicando (producto interior) por la velocidad instantánea  $\mathbf{v}$ . Esto es,

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

Reorganizando los términos del miembro de la izquierda y descomponiendo el miembro de la derecha, se obtiene

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \right] = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{T} : \mathbf{D} = \nabla \cdot [-(P + \varphi) \mathbf{v} + \mathcal{T} \cdot \mathbf{v}] - \mathcal{T} : \mathbf{D} \quad (2)$$

El valor absoluto del último término,  $\Phi_\mu = \mathcal{T} : \mathbf{D} = 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}$ , representa la pérdida de energía por unidad de volumen debida al trabajo de deformación de los esfuerzos viscosos y se denomina *disipación viscosa*. Para la obtención del miembro de la derecha se ha considerado que  $\mathbf{T} : \mathbf{G} = \mathbf{T} : \mathbf{D}$ , ya que  $\mathbf{T} : \mathbf{W} = 0$ , por ser el producto interior de un tensor simétrico y otro antisimétrico. También se ha considerado la relación  $\mathbf{I} : \mathbf{D} = 0$ , debido a la ecuación de continuidad 2.1.(2), la descomposición 2.2.(2) de esfuerzos de presión y esfuerzos viscosos, y que las fuerzas de cuerpo son conservativas (ver ecuación 2.3.(2)) y no fluctuantes.

Vamos a introducir la descomposición 1.2.(1) dentro de la ecuación (2), con lo que se obtiene

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')^2}{2} \right] + (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot \nabla \left[ \frac{(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')^2}{2} \right] \right\} = \nabla \cdot \{ -[(\bar{P} + P') + \varphi](\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') + (\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}') \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \} - (\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}') : (\bar{\mathbf{D}} + \mathbf{D}') \quad (3)$$

Tomando el promedio de esta ecuación, resulta

$$\rho \left[ \frac{\bar{d}}{dt} \left( \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) + \frac{\bar{d}}{dt} \left( \frac{\overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}}{2} \right) + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}') / 2} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla (\mathbf{v}' \cdot \bar{\mathbf{v}})} \right] = \nabla \cdot [ -(\bar{P} + \varphi) \bar{\mathbf{v}} - \overline{P' \mathbf{v}'} + \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{T}' \cdot \mathbf{v}'} ] - \bar{\mathbf{T}} : \bar{\mathbf{D}} - \overline{\mathbf{T}' : \mathbf{D}'} \quad (4)$$

Aplicando al miembro de la izquierda la propiedad 2.2.(4) y substituyendo las relaciones constitutivas 2.2.(9) en el miembro de la derecha finalmente se obtiene

$$\rho \left[ \frac{\bar{d}}{dt} \left( \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) + \frac{\bar{d}}{dt} \left( \frac{\overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}}{2} \right) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}' \cdot \nabla}) / 2 + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}' \cdot \bar{\nabla}}) \right] = \nabla \cdot [ -(\bar{P} + \varphi) \bar{\mathbf{v}} - \overline{P' \mathbf{v}'} + 2\mu \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + 2\mu \overline{\mathbf{D}' \cdot \mathbf{v}'} ] - 2\mu \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}} - 2\mu \overline{\mathbf{D}' : \mathbf{D}'} \quad (5)$$

La ecuación de transporte de la energía cinética media se puede obtener de la ecuación de cantidad de movimiento lineal media 2.2.(11) reorganizada a conveniencia

$$\rho \frac{\bar{d}\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} \right) = \rho \bar{\mathbf{g}} + \nabla \cdot \check{\bar{\mathbf{T}}} \quad \check{\bar{\mathbf{T}}} = \bar{\mathbf{T}} - \rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'} \quad (6)$$

con

$$\bar{\mathbf{T}} = -\bar{P} \mathbf{I} + \bar{\mathbf{T}} \quad \bar{\mathbf{T}} = 2\mu \bar{\mathbf{D}} \quad (7)$$

Obsérvese la similaridad entre las expresiones (6) y (7) con las expresiones 2.2.(1) y 2.2.(2), respectivamente, salvo por los esfuerzos de Reynolds. Cuando la ecuación (1) se multiplica (producto interior) por la velocidad media  $\bar{\mathbf{v}}$ , resulta

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \cdot (\nabla \bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + (\nabla \cdot \check{\bar{\mathbf{T}}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad (8)$$

Reorganizando los términos del miembro de la izquierda y descomponiendo el miembro de la derecha, se obtiene

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \left( \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) \right] = \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \nabla \cdot (\check{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) - \check{\bar{\mathbf{T}}} : \bar{\mathbf{D}} \quad (9)$$

En este caso, el último término es la pérdida de energía por unidad de volumen debida al trabajo de deformación de los esfuerzos medios globales incluyendo los esfuerzos de Reynolds. También se han hecho las mismas consideraciones que en la deducción anterior para reescribir el miembro de la derecha apropiadamente. Por último, introduciendo la relación constitutiva (6.b)-(7) y la expresión 2.3.(2), da finalmente el resultado esperado

$$\rho \frac{\bar{d}}{dt} \left( \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) = \nabla \cdot [ -(\bar{P} + \varphi) \bar{\mathbf{v}} + 2\mu \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'} \cdot \bar{\mathbf{v}} ] - 2\mu \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}} + \rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'} : \bar{\mathbf{D}} \quad (10)$$

El penúltimo término de esta expresión representa la disipación viscosa del flujo medio. El último término representa la pérdida turbulenta de la energía cinética (tiene signo positivo, pero normalmente es una cantidad negativa).

Por último, restando (10) de la ecuación (5) y reorganizando los términos, se obtiene la ecuación de transporte de la energía cinética turbulenta

$$\rho \frac{\bar{d}}{dt} \left( \frac{\overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}}{2} \right) = \nabla \cdot (-\overline{P' \mathbf{v}'} + 2\mu \overline{\mathbf{D}' \cdot \mathbf{v}'} - \rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}/2) - \rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'} : \overline{\mathbf{D}} - 2\mu \overline{\mathbf{D}' : \mathbf{D}'} \quad (11)$$

El primer término del miembro de la derecha es el opuesto de la divergencia del flujo de energía cinética turbulenta. Si este intercambio de energía ocurre dentro de un volumen de control cerrado, entonces esta energía simplemente se redistribuye desde un punto en el flujo a otro.

El último término de la expresión (11) es el opuesto de la *disipación de la energía cinética turbulenta*, habitualmente denotado como  $\rho \varepsilon = 2\mu \overline{\mathbf{D}' : \mathbf{D}'}$ . Este término es la potencia del trabajo de deformación más importante de todos.

El penúltimo término de (11),  $\rho \mathcal{P} = -\rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'} : \overline{\mathbf{D}}$ , es la *producción de la energía cinética turbulenta*, y como aparece también en la ecuación (10), se puede decir que es el intercambio de energía desde la ecuación de transporte de energía cinética media hacia la ecuación de transporte de la energía cinética turbulenta. Cuando se tiene turbulencia estacionaria y homogénea los términos de producción y disipación se equilibran ( $\mathcal{P} = \varepsilon$ ), siendo ambos positivos.

## 2.7. ENSTROFIA

La *enstrofia turbulenta* se define como la cantidad  $\Omega = \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'}/2$  (algunos autores omiten el dos), e indica la intensidad de fluctuación de la vorticidad que da en cierta medida la tasa de disipación turbulenta de la energía con una determinada viscosidad ( $\rho \varepsilon \approx 2\mu \Omega$ ). La *helicidad* de forma similar se define como  $\Omega = \overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}'}/2$ , indica la porción de las fluctuaciones que tienen forma helicoidal y su tasa de disipación es aproximadamente  $-2\nu (\overline{\mathbf{w}' \cdot \nabla \times \mathbf{w}'})/2$ . El factor entre paréntesis a veces se le denomina *helicidad vortical* [Frisch,1995].

La ecuación de la enstrofia instantánea  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}/2$  se puede obtener a partir de la ecuación de la vorticidad 2.3.(7) multiplicando (producto interior) por la vorticidad instantánea  $\mathbf{w}$ . Esto es,

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{w} + \nu (\nabla^2 \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} \quad (1)$$

Reorganizando los términos del miembro de la izquierda y descomponiendo con la identidad A.2.2.(15.o) el último término del miembro de la derecha, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{w}^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{w}^2}{2} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{w}^2}{2} \right) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{w} + \nu \nabla^2 \left( \frac{\mathbf{w}^2}{2} \right) - \nu \nabla \mathbf{w} : (\nabla \mathbf{w})^t \quad (2)$$

Vamos a introducir la descomposición 1.2.(1) dentro de la ecuación (2), de manera que queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}')^2}{2} \right] + (\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot \nabla \left[ \frac{(\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}')^2}{2} \right] = \\ (\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') \cdot (\overline{\mathbf{D}} + \mathbf{D}') \cdot (\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') + \nu \nabla^2 \left[ \frac{(\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}')^2}{2} \right] - \nu \nabla (\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') : [\nabla (\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}')]^t \end{aligned} \quad (3)$$

Tomando el promedio de esta ecuación, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{dt} \left( \frac{\overline{\mathbf{w}^2}}{2} \right) + \frac{\bar{d}}{dt} \left( \frac{\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'}}{2} \right) + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla (\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}')}/2 + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla (\mathbf{w}' \cdot \overline{\mathbf{w}})} = \\ \overline{\mathbf{w} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}' \cdot \mathbf{w}'} + 2\overline{\mathbf{w} \cdot \mathbf{D}' \cdot \mathbf{w}'} + \overline{\mathbf{D} : \mathbf{w}' \mathbf{w}'} \\ + \nu \nabla^2 \left( \frac{\overline{\mathbf{w}^2}}{2} \right) + \nu \nabla^2 \left( \frac{\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'}}{2} \right) - \nu \nabla \overline{\mathbf{w}} : (\nabla \overline{\mathbf{w}})^t - \nu \nabla \overline{\mathbf{w}'} : (\nabla \mathbf{w}')^t \end{aligned} \quad (4)$$

La ecuación de transporte de la enstrofia media se puede obtener de la ecuación de la vorticidad media 2.3.(12) reorganizada a conveniencia

$$\frac{\bar{d}\bar{\mathbf{w}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}} = -\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}'\mathbf{w}'}) + \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'} + \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{w}} \quad (5)$$

Cuando la ecuación (5) se multiplica (producto interior) por la vorticidad media  $\bar{\mathbf{w}}$ , resulta

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{v}} \cdot (\nabla \bar{\mathbf{w}}) \cdot \bar{\mathbf{w}} = -[\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}'\mathbf{w}'})] \cdot \bar{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \nu (\nabla^2 \bar{\mathbf{w}}) \cdot \bar{\mathbf{w}} \quad (6)$$

Reorganizando los términos del miembro de la izquierda y descomponiendo el miembro de la derecha, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\bar{\mathbf{w}}^2}{2} \right) + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \left( \frac{\bar{\mathbf{w}}^2}{2} \right) = & -\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}'\mathbf{w}'}) \cdot \bar{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{w}} \\ & + \nu \nabla^2 \left( \frac{\bar{\mathbf{w}}^2}{2} \right) - \nu \nabla \bar{\mathbf{w}} : (\nabla \bar{\mathbf{w}})^t \end{aligned} \quad (7)$$

Por último, restando (7) de la ecuación (4) y reorganizando los términos, se obtiene la ecuación de transporte de la enstrofia turbulenta

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{dt} \left( \frac{\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'}}{2} \right) = & \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{D}'} \cdot \overline{\mathbf{w}'} + \overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{D}'} \cdot \overline{\mathbf{w}'} + \overline{\mathbf{w}'\mathbf{w}'} : \bar{\mathbf{D}} - \overline{\mathbf{w}'\mathbf{v}'} : \nabla \bar{\mathbf{w}} \\ & + \nabla \cdot \left[ \nu \nabla \left( \frac{\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'}}{2} \right) - \frac{\overline{\mathbf{v}'\mathbf{w}'}}{2} \right] - \nu \nabla \bar{\mathbf{w}'} : (\nabla \bar{\mathbf{w}'})^t \end{aligned} \quad (8)$$

El cuarto término del miembro de la derecha de (8) es la producción de  $\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'}$  debida al gradiente de  $\bar{\mathbf{w}}$ . Este término intercambia vorticidad entre  $\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'}$  y  $\bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{w}}$  de la misma forma en que la producción de energía cinética turbulenta  $-\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'} : \bar{\mathbf{D}}$  intercambia energía entre  $\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}$  y  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ .

El segundo término dentro de los corchetes (en la divergencia) es el transporte de la enstrofia turbulenta debida a las fluctuaciones turbulentas de la velocidad. Este término es análogo al término de transporte  $\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'} \cdot \nabla / 2$  en la ecuación de  $\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}$ .

El primer término, que también se puede escribir como  $\overline{\mathbf{w}'\mathbf{w}'} : \bar{\mathbf{D}}$ , es la producción de la enstrofia turbulenta debido a la deformación turbulenta de la vorticidad turbulenta. Este es uno de los términos más dominantes en la ecuación (8).

El tercer término es la producción (o destrucción, según el caso) de la vorticidad turbulenta, causada por la deformación de las fluctuaciones de la vorticidad debidas a la velocidad de deformación media.

El segundo término es un término de una producción entremezclada. Este término aparece también en la ecuación para  $\bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{w}}$  con el mismo signo. Evidentemente, la deformación de la vorticidad fluctuante debida a la fluctuación de la velocidad de deformación produce  $\bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{w}}$  y  $\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'}$  a la misma tasa.

Los términos viscosos (el primero dentro de los corchetes y el último del miembro de la derecha) son respectivamente el transporte y la disipación de  $\overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'}$ .

### 3. MODELOS DE TURBULENCIA

#### 3.1 CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y CONTINUIDAD

La ecuación de cantidad de movimiento promediada para un fluido incompresible fluyendo en régimen turbulento es

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} \right) = \rho \bar{\mathbf{g}} - \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{T}}} \quad \bar{\bar{\mathbf{T}}} = \bar{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{T}}'_t \quad (1)$$

donde

$$\bar{\mathbf{T}}_t = -\rho \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'} \quad \text{tr}(\bar{\mathbf{T}}_t) = -2\rho k \quad k = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}'} \quad (2)$$

La cantidad  $\bar{\mathbf{T}}_t$  en (2) es el *tensor de los esfuerzos de Reynolds*, la cantidad  $\bar{\mathbf{T}}'_t = \bar{\mathbf{T}}_t - \bar{\mathbf{T}}_t^\circ$  en (1) es su parte desviatoria y  $k$  es la *energía cinética turbulenta*. La parte isotópica del tensor de esfuerzos de Reynolds  $\bar{\mathbf{T}}_t^\circ = (1/3) \text{tr}(\bar{\mathbf{T}}_t) \mathbf{I} = -(2/3) \rho k \mathbf{I}$  está incluida en la presión modificada  $\bar{p} = \bar{P} - (1/3) \text{tr}(\bar{\mathbf{T}}_t)$ , siendo  $\bar{P}$  la presión hidrostática promediada. Se introduce la parte desviatoria del tensor de esfuerzos de Reynolds  $\bar{\mathbf{T}}'_t$ , porque se desea que tenga la misma característica de no tener traza como el tensor velocidad de deformación promediado

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{G}}^t) \quad \bar{\mathbf{G}} = (\nabla \bar{\mathbf{v}})^t \quad (3)$$

como se verá más adelante, siendo  $\bar{\mathbf{G}}$  el tensor gradiente de velocidad promediado.

El campo de presiones  $\bar{p}$  debe satisfacer también la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (4)$$

En otras palabras, el campo de velocidades  $\bar{\mathbf{v}}$  es solenoidal, al igual que el campo de velocidades  $\mathbf{v}$ .

Las relaciones constitutivas frecuentemente empleadas son

$$\bar{\mathbf{T}} = 2\mu \bar{\mathbf{D}} \quad \bar{\mathbf{T}}'_t = 2\mu_t \bar{\mathbf{D}} \quad (5)$$

donde la semejanza que tienen ambas es evidente. Se observa que la parte desviatoria del tensor de esfuerzos de Reynolds se ha colocado en función de  $\bar{\mathbf{D}}$ , que también es un tensor desviatorio ( $\text{tr}(\bar{\mathbf{D}}) = \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$ ), a través de una *viscosidad turbulenta*  $\mu_t$ , siguiendo la hipótesis propuesta por Boussinesq (1877). En esta hipótesis, tanto los esfuerzos puramente viscosos  $\bar{\mathbf{T}}$ , como los esfuerzos turbulentos  $\bar{\mathbf{T}}'_t$ , en analogía con la situación laminar, son proporcionales al tensor velocidad de deformación promediado  $\bar{\mathbf{D}}$  [Rodi,1993].

La ecuación de continuidad (4) en coordenadas cilíndricas se expresa como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

La ecuación de cantidad de movimiento lineal (1)-(3), (5), se puede reescribir como

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot [2(\mu + \mu_t) \mathbf{D}] \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t] \quad (7)$$

y en coordenadas cilíndricas se expresa como

• Dirección  $r$

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \quad b_r = \frac{\partial \mu_v}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_v}{\partial \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \mu_v}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (8.a)$$

$$\rho a_r = \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_v r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \mu_v \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \right] - \mu_v \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_v \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + b_r$$

• Dirección  $\theta$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \quad b_\theta = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \mu_v}{\partial r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_v}{\partial \theta} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial \mu_v}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \quad (8.b)$$

$$\rho a_\theta = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_v r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \mu_v \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right] + \mu_v \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_v \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + b_\theta$$

• Dirección  $z$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad b_z = \frac{\partial \mu_v}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_v}{\partial \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{\partial \mu_v}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (8.c)$$

$$\rho a_z = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_v r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \mu_v \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_v \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + b_z$$

donde, para efectos de simplificar las expresiones, se ha colocado  $\mu_v = \mu + \mu_t$ . Debe tenerse en cuenta que las propiedades pueden cambiar dentro de un mismo fluido o cuando se pase de un fluido al otro (esto último puede hacerse de forma gradual o de forma abrupta). En estas ecuaciones de transporte se han generado unos términos fuentes denotados  $b_r$ ,  $b_\theta$  y  $b_z$ , que provienen de desarrollar  $\nabla \mu_v \cdot (\nabla \mathbf{v})^t$ . Normalmente estos términos fuentes se desprecian por no presentar grandes cambios en la mayoría de los casos.

## 3.2 LONGITUD DE MEZCLA

### 3.2.1 Fundamentos

Existen muchos modelos que tratan de evaluar la viscosidad turbulenta  $\mu_t$ . El más antiguo y simple es el modelo de *longitud de mezcla de Prandtl* [Schlichting,1968], en el cual

$$\mu_t = \rho l_m^2 \|\bar{\mathbf{D}}\| \quad \|\bar{\mathbf{D}}\| = \sqrt{2 \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}}} \quad (1)$$

En los flujos libres la longitud de mezcla  $l_m$  puede ser asumido constante y proporcional al espesor de la capa límite  $\delta$ , es decir,  $l_m = \lambda \delta$ , donde el valor de  $\lambda$  varía de 0.07 a 0.16, según el tipo de flujo. En los flujos con pared la longitud de mezcla puede ser asumida proporcional a la distancia perpendicular  $y$  que existe hasta la pared, esto es,  $l_m = \kappa y$ , donde la constante  $\kappa$ , denominada constante de von Kármán, varía de 0.4 a 0.435 como resultado de pruebas empíricas de varios investigadores. Un modelo mixto ha sido también sugerido en el cual

$$l_m = \kappa [y - (y - \lambda \delta / \kappa) \mathbb{H}(y - \lambda \delta / \kappa)] \quad (2)$$

en donde la función escalón de Heaviside  $\mathbb{H}$  produce el efecto de que, cuando  $y \leq \lambda \delta / \kappa$ , lo cual es aproximadamente un cuarto del espesor de la capa límite, la longitud de mezcla es una rampa  $l_m = \kappa y$ , y, cuando  $y > \lambda \delta / \kappa$ , entonces la longitud de mezcla es un plateau  $l_m = \lambda \delta$ . Para este último modelo los valores sugeridos [Rodi,1993] de las constantes son  $\kappa = 0.435$  y  $\lambda = 0.09$ . En flujos desarrollado dentro de conductos circulares (tuberías), la distribución de la longitud de mezcla está bien descrita por la fórmula de Nikuradse

$$\frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.08 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^2 - 0.06 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^4 \quad (3)$$

Cerca de la pared, la expresión anterior converge asintóticamente a la solución de la rampa  $l_m = \kappa y$  con un valor de la constante de von Kármán de  $\kappa = 0.4$ . En este caso el espesor de la capa límite llega al eje del conducto ( $\delta = R$ ).

### 3.2.2 Amortiguamiento en la pared

Muy próximo a la pared, donde los efectos viscosos juegan un rol importante, la viscosidad turbulenta tiende a anularse más rápidamente que lo que predicen las expresiones (2) y (3), formando lo que se denomina como la *subcapa viscosa*. La rugosidad de la superficie de la pared, por otro lado, afecta a la subcapa viscosa reduciéndola de tamaño, debido a que la mezcla turbulenta se hace más vigorosa. Para lograr estos efectos, las expresiones mencionadas se multiplican por un factor adimensional  $f_m$  denominado *función de amortiguamiento de Van Driest* [Van Driest,(1956)], que modifica las longitudes de mezcla de la forma

$$l_m^* = f_m l_m \quad f_m = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) + \exp\left(-\alpha_s \frac{y^+}{k_s^+}\right) \quad (4.a, b)$$

$$y^+ = \frac{\rho U_\tau y}{\mu} \quad u^+ = \frac{u}{U_\tau} \quad U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.c, d, e)$$

donde las variables adimensionales  $y^+$  y  $u^+$  se denominan (distancia y velocidad) *variables de pared*, siendo  $U_\tau$  lo que se conoce como *velocidad de fricción* y  $\tau_w$  el esfuerzo cortante en la pared (local). El valor  $k_s^+$  es la rugosidad equivalente de Nikuradse  $k_s$  (basada en el tamaño del grano de arena usado para simular la rugosidad) expresada como una variable de pared (i.e. adimensionalizada igual que  $y$ ). El valor de las constantes en (4) se ajustan adecuadamente a  $A^+ = 26$  y  $\alpha_s = 2.3$ , para que por debajo de  $y^+ = 10 \sim 30$  se comience a sentir el efecto acentuado de la viscosidad (lo que atenúa las fluctuaciones turbulentas dentro de la subcapa viscosa, produciendo el perfil lineal de velocidades  $u^+ = y^+$  cuando la superficie es lisa), pero para que la rugosidad absorba parte del tamaño de la subcapa viscosa. Obsérvese que cuando la superficie es lisa, el último término de la expresión (4.b) se anula automáticamente y la subcapa viscosa llega hasta  $y^+ = 10 \sim 30$ .

Existen en la literatura variantes de la expresión (4) que producen efectos similares [Zhang et al.,(1996)]. Una de estas expresiones es debida a Krogstad (1991) y su formulación es

$$f_m = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) + \exp\left[-\frac{y^+}{A^+} \left(\frac{B_s^+}{k_s^+}\right)^{3/2}\right] \sqrt{1 + \exp\left(-\frac{B_s^+}{k_s^+}\right)} \quad (4')$$

donde el valor  $B_s^+ = 70$  es el más apropiado. De nuevo, el último término se anula cuando la superficie es lisa.

### 3.2.3 Modelo de Kármán

Von Kármán [(1930)] hizo el intento de eliminar la necesidad de prescribir una expresión de la longitud de mezcla para cada tipo de flujo. Propuso que la longitud de mezcla fuera proporcional a la relación entre la norma del gradiente y la norma del laplaciano, esto es,

$$l_m = \kappa \frac{\|\nabla \bar{v}\|}{\|\nabla^2 \bar{v}\|} \quad (5)$$

Esta fórmula concuerda muy bien con los experimentos para aquellos flujos con pared, pero su generalidad no ha sido validada. En aquellos flujos libres, como los chorros y las estelas, los perfiles de velocidad tienen puntos de inflexión que son singularidades para (5) que hacen que la longitud de mezcla se haga infinita o muy grande (esto, si se desprecian los gradientes longitudinales). En (5) la norma del tensor en el numerador debe de estar subordinada a la norma del vector en el denominador. Esta norma no necesariamente debe ser la norma descrita en (1).

Existen otros efectos que alteran las expresiones de la longitud de mezcla, como lo son gradiente de presión (adverso o favorable), flotación, recirculación, paredes vecinas, etc. Son tantos los factores, que englobarlos en una sola expresión general ha sido un trabajo tan difícil, que todavía en los actuales momentos no se ha logrado.

### 3.3 MODELOS $k - \varepsilon$

#### 3.3.1 Modelo de $k$

Modelos distintos a los de la longitud de mezcla hay muchos reportados en la literatura especializada. De estos modelos los más usados son los modelos  $k-\varepsilon$ . Se denominan así porque se basan en la energía cinética turbulenta  $k$  (energía específica por unidad de masa) y la *disipación viscosa turbulenta*  $\varepsilon$  (tasa de variación de la energía disipada por unidad de masa y por unidad de tiempo), definidas estas por las expresiones

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'} & \rho \varepsilon &= 2\mu \overline{\mathbf{D}' : \mathbf{D}'} = 2\mu \overline{\mathbf{D}' : \nabla \mathbf{v}'} = \mu \overline{\nabla \mathbf{v}' : \nabla \mathbf{v}'} + \mu \overline{(\nabla \mathbf{v}')^t : \nabla \mathbf{v}'} \\ & & &= 2\mu \overline{\mathbf{D}' : \mathbf{G}'} = \mu \overline{\mathbf{G}' : \mathbf{G}'} + \mu \overline{\mathbf{G}' : \mathbf{G}'^t} \end{aligned} \quad (1)$$

donde el último término de  $\varepsilon$  es el que se le conoce como la *disipación viscosa turbulenta isotrópica*. El término  $\mu \overline{\mathbf{G}' : \mathbf{G}'} = \mu \overline{\nabla \mathbf{v}' : \nabla \mathbf{v}'}$  (Se ha usado la propiedad 2.2.(6.b) aplicada a las fluctuaciones) es de un orden de magnitud despreciable, respecto al término isotrópico  $\mu \overline{\mathbf{G}' : \mathbf{G}'^t}$ , por tener derivadas de segundo orden. Como aproximaciones de las expresiones de arriba se pueden usar

$$k \approx \frac{3}{2} (v'_{\text{ms}})^2 \quad \rho \varepsilon \approx \mu \overline{\mathbf{G}' : \mathbf{G}'^t} \approx \mu \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'} = 3\mu w'^2_{\text{ms}} \quad (1')$$

Estas expresiones aproximadas se convierten en igualdades cuando el flujo es turbulento isotrópico (En la última igualdad se ha usado la propiedad 2.2.(6.f) aplicada a las fluctuaciones). Este último resultado justifica la expresión 1.3.(9.c), colocada allí en un principio, sin justificación alguna.

Con estas variables, entonces la viscosidad turbulenta se expresa como

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2)$$

donde la constante  $C_\mu$  es un parámetro empírico que pudiera depender de otros factores y tipos de flujo. Un valor típico de  $C_\mu = 0.09$  es el más recomendado. La expresión (2) puede considerar el amortiguamiento de pared detallado en la sección 2.3, pero la función de Van Driest debe estar al cuadrado en el miembro de la derecha para que sea consistente con 3.2.(1).

Para predecir el valor de la energía cinética turbulenta  $k$  se puede emplear su ecuación de transporte

$$\rho \frac{\bar{d}}{dt} \left( \frac{\overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}}{2} \right) = \nabla \cdot (-\overline{P' \mathbf{v}'} + 2\mu \overline{\mathbf{D}' \cdot \mathbf{v}'} - \rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'} / 2) - \rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'} : \overline{\mathbf{D}} - 2\mu \overline{\mathbf{D}' : \mathbf{D}'} \quad (3)$$

El primer término del miembro de la derecha de (3) es la divergencia del opuesto de un flujo. Se puede entonces modelar el flujo como si siguiera la ley de Fick, con una difusión proporcional a la difusión  $\nu_t = \mu_t / \rho$  del flujo difusivo de la cantidad de movimiento lineal turbulenta, a través de un número de Prandtl apropiado  $\sigma_k$ . En otras palabras, el término dentro de la divergencia se cambia por

$$-\overline{P' \mathbf{v}'} + 2\mu \overline{\mathbf{D}' \cdot \mathbf{v}'} - \rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'} / 2 = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \quad (4)$$

El segundo término del miembro de la derecha de 3.1.(3), que es el término de producción de la energía cinética turbulenta, se simula directamente como es, substituyendo los esfuerzos de Reynolds 3.1.(2) por su relación constitutiva 3.1.(5.b). De esta forma se obtiene una función de disipación de los esfuerzos turbulentos

$$\Phi_{\mu_t} = -\rho \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'} : \overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathcal{T}_t} : \overline{\mathbf{D}} = (\overline{\mathcal{T}_t}' + \overline{\mathcal{T}_t}^\circ) : \overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathcal{T}_t}' : \overline{\mathbf{D}} + \overline{\mathcal{T}_t}^\circ : \overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathcal{T}_t}' : \overline{\mathbf{D}} = 2\mu_t \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} \quad (5)$$



que coincide con el término de producción. En el desarrollo de (5) la operación  $\overline{\mathcal{T}}_t^\circ : \overline{\mathbf{D}}$  da un resultado nulo, ya que cualquier tensor isótropo es proporcional al tensor unitario  $\mathbf{I}$ , y se tiene que  $\mathbf{I} : \overline{\mathbf{D}} = \text{tr}(\overline{\mathbf{D}}) = \nabla \cdot \overline{\mathbf{v}} = 0$  por la ecuación de continuidad 3.1.(4).

El último término de (3) es  $-\rho\varepsilon$  por definición. Haciendo todas, estas substituciones en (3), teniendo en cuenta las definiciones (1), resulta la ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta  $k$

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla k \right) = \nabla \cdot \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + \Phi_{\mu_t} - \rho\varepsilon \quad \Phi_{\mu_t} = 2\mu_t \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} \quad (6)$$

Recuérdese que  $\overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{G}} = \overline{\mathbf{D}} : \nabla \overline{\mathbf{v}}$  por la simetría del tensor  $\overline{\mathbf{D}}$  (esta misma propiedad se ha usado arriba en (1), pero para el tensor  $\mathbf{D}'$  que también es simétrico). En la práctica, el número de Prandtl para  $k$  se escoge  $\sigma_k = 1$ . Es importante resaltar que en el estado estacionario, cuando los términos convectivos y difusivos son despreciables, entonces la producción iguala a la disipación, la ecuación (6) se reduce a

$$\Phi_{\mu_t} = \overline{\mathcal{T}}_t' : \overline{\mathbf{D}} = 2\mu_t \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} \approx \rho\varepsilon \quad (7)$$

y se dice que la turbulencia está en un *estado de equilibrio local*. (Nota: No debe confundirse la disipación turbulenta (7) con la disipación viscosa global  $\Phi_\mu$  definida en la sección III.4.2.3. La diferencia entre ambas está únicamente en la viscosidad usada para su cálculo).

En el caso de turbulencia isótropa, la ecuación (6) se reduciría a

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\varepsilon \quad (8)$$

que establece el decaimiento de energía cinética turbulenta típica de este tipo de flujo.

### 3.3.2. Longitud de Escala

La disipación  $\varepsilon$  se puede simular a través de una ecuación algebraica

$$\varepsilon = C_d \frac{k^{3/2}}{L} \quad (9)$$

donde interviene una *longitud de escala*  $L$  y  $C_d$  es un parámetro empírico. Esta ecuación, introducida en la expresión (2), la reduce a

$$\mu_t = C'_\mu \rho \sqrt{k} L \quad C'_\mu = \frac{C_\mu}{C_d} \quad (10)$$

que es conocida como la fórmula de Kolmogorov-Prandtl [Rodi,1993]. Dicha fórmula, junto con la ecuación (9), introducidas en (7) permite resolver para  $k$ , quedando que  $k = (C'_\mu/C_d) L^2 \|\overline{\mathbf{D}}\|^2$  (la norma  $\|\overline{\mathbf{D}}\|$  asumida en el sentido de 3.2.(1.b)). Vuelto a introducir este resultado en (10), se obtiene que  $l_m = (C'_\mu{}^3/C_d)^{1/4} L$ , lo que permite concluir que el modelo de la longitud de mezcla es adecuado solamente para aquellos flujos en estado de equilibrio local.

La longitud de escala  $L$  se puede calcular con base a una especie de función de corriente  $\psi$ , en la forma

$$L = \kappa \frac{\psi}{\|\nabla \psi\|} \quad \psi = \sqrt{k}/L \quad (11)$$

Esta longitud de escala es válida solamente en aquellos flujos donde el transporte turbulento se produce principalmente en una dirección preferencia, por ejemplo, en la dirección perpendicular a la pared en aquellos flujos de pared.

Cuando la turbulencia está en equilibrio local, del análisis antes hecho, se obtiene que  $\psi = \sqrt{k}/L = (C'_\mu/C_d)^{1/2} \|\bar{\mathbf{D}}\|$ , y en los casos de transporte turbulento en una dirección preferencial (despreciando los gradientes longitudinales,  $\psi \propto \partial u/\partial y$ ) la expresión (11) se reduce a 3.2.(5) (tomando  $C_d = C'_\mu{}^3$ ).

### 3.3.3. Modelo de $\varepsilon$

La disipación  $\varepsilon$  se puede también calcular al resolver una ecuación de transporte similar a la (6) en la que se ha supuesto que el transporte de  $\varepsilon$  en el término de la divergencia se lleva a cabo a través de mecanismos difusivos, definiendo para este caso una difusión  $\nu_t/\sigma_\varepsilon$ , con un número de Prandtl  $\sigma_\varepsilon$ . Los términos de producción y de destrucción de  $\varepsilon$  se suponen proporcionales a los de  $k$ , pero escalados con  $\varepsilon/k$ . De esta forma, se tiene

$$\rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \varepsilon \right) = \nabla \cdot \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + C_{\varepsilon 1} \Phi_{\mu_t} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad \Phi_{\mu_t} = 2 \mu_t \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}} \quad (12)$$

donde los parámetros introducidos tienen los valores típicos de  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$  y  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ .

Si los parámetros anteriores se asumen constantes, de la región logarítmica del perfil de velocidades cerca de la pared y considerando estado estacionario, equilibrio local para  $k$  (ecuación (7)), la difusión de  $\varepsilon$  y despreciando la convección de  $\varepsilon$ , la ecuación de transporte (12) se reduce a

$$C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu}} \quad (13)$$

Esta expresión permite encontrar el valor de una de las constantes, cuando las otras han sido prefijadas. Un proceso de optimización se puede luego implementar para ajustar estas constantes [Rodi,1993].

### 3.3.4. Reynolds Bajos

Los modelos de la energía cinética turbulenta  $k$  y la disipación viscosa turbulenta  $\varepsilon$  expresados en las secciones 3.3.1 y 3.3.3, respectivamente, normalmente fallan cuando se desea cubrir el flujo en regiones de bajo valor en las variables de pared  $y^+ = \rho U_\tau y / \mu$ . En flujos de alto número de Reynolds, estas variables de pared ocupan un espacio físico  $y$  muy reducido en  $y$ , por lo que los modelos anteriores reproducen una buena descripción de casi la totalidad del flujo, salvo que hay que hacer algunas adaptaciones especiales en las condiciones de borde de  $k$  y  $\varepsilon$ , que veremos más adelante. Por el contrario, flujos con bajos números de Reynolds implican que la zona de la subcapa viscosa y la zona del perfil logarítmico, con variables de pared moderadas ( $y^+ < 100$ ), ocupan un espacio físico importante en la variable física  $y$ . Por consiguiente, es imprescindible en estos flujos modificar los modelos para que puedan predecir el comportamiento en cercanía y dentro de la subcapa viscosa.

En los modelos anteriores se considera que  $\varepsilon$  es la disipación viscosa turbulenta total, y, por consiguiente, no necesariamente se debe anular en la pared. Por otro lado, la parte que llamamos isotrópica de la disipación viscosa turbulenta es la más importante (frente a la porción restante, como se aclaró antes en la sección 3.3.1) y tampoco se anula en la pared. Trabajar en las ecuaciones con una disipación turbulenta isotrópica  $\tilde{\varepsilon}$ , más que la disipación turbulenta total  $\varepsilon$ , tal que tenga una condición de borde nula para  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - b_k$  en la pared, le da cierta ventaja al método. Esto se logra simplemente agregando respectivamente a las ecuaciones (6) y (12) los términos de fuente  $b_k$  y  $b_\varepsilon$ , no necesariamente constantes, que compensen este cambio de variable.

Las difusividades de las ecuaciones de  $k$  y  $\varepsilon$ , designadas hasta ahora como  $\mu_k = \mu_t/\sigma_k$  y  $\mu_\varepsilon = \mu_t/\sigma_\varepsilon$ , se anulan en la subcapa viscosa, haciendo que las ecuaciones predigan que no existe flujo por difusión de las cantidades  $k$  y  $\varepsilon$  dentro de la subcapa viscosa, cuando en realidad si existe, pero muy poco. Adicionalmente, difusividades nulas imponen una singularidad a las ecuaciones diferenciales que hacen imposible su resolución. Ya exactamente en la pared, teóricamente no debe existir flujo por difusión de  $k$ , pero si pudiese existir eventualmente para  $\varepsilon$ , como lo predicen los experimentos. Obsérvese que la ecuación de  $\varepsilon$  se enunció de una forma un tanto empírica, con parámetros experimentales. Uno de estos parámetros pudiera ser muy bien el

flujo de  $\varepsilon$  en la pared. Para compensar todo esto en cierta medida (con algo de incertidumbre) se supone que en la subcapa viscosa la difusividades de  $k$  y  $\varepsilon$  son similares que para  $\mathbf{v}$ . Esto se implementa en el modelo simplemente agregando  $\mu$  a las difusividades anteriores  $\mu_t/\sigma_k$  y  $\mu_t/\sigma_\varepsilon$ .

Incorporando las observaciones antes expuestas, entonces los modelos de  $k$  y  $\varepsilon$  para bajos números de Reynolds se expresan como (se eliminará la tilde de  $\tilde{\varepsilon}$  para simplificar la escritura de las ecuaciones, y se entenderá que cuando existen los términos de fuente  $b_k$  y/o  $b_\varepsilon$ , entonces la condición de  $\varepsilon$  en la pared es nula para las ecuaciones de abajo)

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla k \right) = \nabla \cdot (\mu_k \nabla k) + \Phi_{\mu_t} - \rho \varepsilon + b_k \quad \mu_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \quad \Phi_{\mu_t} = 2 \mu_t \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} \quad (14)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla \varepsilon \right) = \nabla \cdot (\mu_\varepsilon \nabla \varepsilon) + C_{\varepsilon 1} \Phi_{\mu_t} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + b_\varepsilon \quad \mu_\varepsilon = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \quad (15)$$

donde ahora los parámetros  $C_\mu$ ,  $C_{\varepsilon 1}$  y  $C_{\varepsilon 2}$  pueden depender de  $y^+ = \rho U_\tau y / \mu$ , como lo hace la función de amortiguamiento de Van Driest, ó de otra cantidad que indique la cercanía a la pared como  $\mathcal{R}e_y = \rho \sqrt{k} y / \mu$ . Algunos investigadores han propuesto otra cantidad, independiente explícitamente de la geometría del flujo, que es el número de Reynolds  $\mathcal{R}e_t = \rho k^2 / \mu \varepsilon$ . Este número de Reynolds para el modelo propuesto, aunque pueda contener una indefinición de tipo 0/0 en la pared, teóricamente debe ser nulo en la misma [Jones & Launder, (1972)]. Otros investigadores [Lam & Bremhorst, (1981)], prefieren evitar esa indeterminación dando un valor pequeño, pero finito, a  $\varepsilon$  en la pared y trabajar mejor sin términos de fuente, esto es,  $b_k = b_\varepsilon = 0$ . Patel et al. [(1985)] hacen una revisión de varios de estos modelos para bajos números de Reynolds, siendo el más aceptable de todos el de Lam & Bremhorst por reproducir mejor los resultados experimentales.

La ecuación de la energía cinética turbulenta (14) se puede reescribir como

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla k \right) = \nabla \cdot (\mu_k \nabla k) + \Phi_{\mu_t} - \rho \varepsilon + b_k \quad \mu_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \quad \mu_t = C'_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (14')$$

donde, por ejemplo,  $\mu_k = \mu_t / \sigma_k$  y  $b_k = 0$  en los flujos de grandes números de Reynolds, (esto es porque  $\mu$  se hace despreciable frente a  $\mu_t$ ) y donde  $\Phi_{\mu_t}$  (que es un término de disipación viscosa producida por la viscosidad turbulenta  $\mu_t$ ) es el término de producción de la energía cinética turbulenta. Los coeficientes involucrados, son los mismo ya definidos en las secciones 3.3.1-3.3.3 para grandes números de Reynolds. Para bajos números de Reynolds en cambio, se acostumbra a expresar los coeficientes como relaciones funcionales del tipo  $C'_\mu = f_\mu C_\mu$ , donde  $f_\mu$  es función de  $y^+$ ,  $\mathcal{R}e_t$  y  $\mathcal{R}e_y$ . Los coeficientes sin primas son las constantes originales de los modelos de grandes números de Reynolds, lo que es equivalente a decir que  $f_m = 1$ .

Se puede expresar la función  $f_\mu$  descompuesta de la siguiente form  $f_\mu = F_\mu + G_\mu$ , donde  $F_\mu$  es la parte correspondiente a la superficie lisa y  $G_\mu$  es la parte añadida correspondiente a la superficie rugosa ( $\mathbf{k}_s = 0 \Rightarrow G_\mu = 0$ ). Existen varios modelos para la función  $F_m$ , pero el más conocido y usado de ellos es el de Lam y Bremhorst [(1981)]

$$F_\mu = [1 - \exp(-0.0165 \mathcal{R}e_y)]^2 \left( 1 + \frac{20.5}{\mathcal{R}e_t} \right) \quad (16.a)$$

Sin embargo, el que mejor se adapta a los resultados es el de Zhang et al. [(1996)], quienes también incorporan el efecto de la rugosidad

$$F_\mu = 1 - \exp[-(y^+/42)^2] \quad G_\mu = \exp(-25 y^+ / \mathbf{k}_s^+) \sqrt{\mathbf{k}_s^+ / 200} \quad (16.b)$$

La ecuación (14'), por ejemplo, en coordenadas cilíndricas se expresa como

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + v_r \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial k}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial k}{\partial z} \quad (17.a)$$

$$\rho \frac{dk}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_k r \frac{\partial k}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \mu_k \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_k \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \Phi_{\mu_t} - \rho \varepsilon + b_k \quad (17.b)$$

donde el término de producción  $\Phi_{\mu_t}$  en coordenadas cilíndricas es

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu_t} = 2\mu_t \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} = 2\mu_t & \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu_t \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \mu_t \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \mu_t \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

La ecuación de la disipación turbulenta (15) se puede reescribir como

$$\rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \varepsilon \right) = \nabla \cdot (\mu_\varepsilon \nabla \varepsilon) + C'_{\varepsilon 1} \Phi_{\mu_t} \frac{\varepsilon}{k} - C'_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + b_\varepsilon \quad \mu_\varepsilon = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \quad \mu_t = C'_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (15')$$

donde, por ejemplo,  $\mu_\varepsilon = \mu_t / \sigma_\varepsilon$  y  $b_\varepsilon = 0$  en el modelo de grandes números de Reynolds, y donde los parámetros involucrados son los mismos que ya están definidos en la secciones 3.3.1-3.3.3. Para bajos números de Reynolds en cambio, se acostumbra a expresar los otros coeficientes como relaciones funcionales del tipo  $C'_{\varepsilon 1} = f_1 C_{\varepsilon 1}$  y  $C'_{\varepsilon 2} = f_2 C_{\varepsilon 2}$ , donde  $f_1$  y  $f_2$  son funciones de  $y^+$ ,  $Re_t$  y  $Re_y$ . Los coeficientes sin primas son de nuevo las constantes originales de los modelos de grandes números de Reynolds.

El factor  $f_1$  se puede expresar de la siguiente forma general  $f_1 = 1 + F_1 G_1$ , donde el caso de superficie lisa corresponde a  $G_1 = 1$ . Para el modelo de Lam y Bremhorst [(1981)]

$$F_1 = \left( \frac{0.05}{F_\mu} \right)^3 \quad (19.a)$$

El modelo de Zhang et al. [(1996)] adicionalmente incorpora el efecto de la rugosidad

$$F_1 = \left( \frac{9.2}{1 + y^+} \right)^6 \quad G_1 = \exp \left( - \frac{\mathbf{k}_s^+}{1 + 0.1 \mathbf{k}_s^+} \right) \quad (19.b)$$

El factor  $f_2$  para todo caso es el de lam y bremhorst [(1981)]

$$f_2 = 1 - \exp(-Re_t^2) \quad (19.c)$$

el cual ha dado siempre buenos resultados.

La ecuación (15'), por ejemplo, en coordenadas cilíndricas se expresa como

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \quad (20.a)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_\varepsilon r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \mu_\varepsilon r \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_\varepsilon r \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C'_{\varepsilon 1} \Phi_{\mu_t} \frac{\varepsilon}{k} - C'_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + b_\varepsilon \quad (20.b)$$

### 3.3.5. Condiciones de Borde y en la Interfaz

Para flujos confinados, un balance integral de las fuerzas involucradas, las de presión piezométrica o reducida  $P^*$ , por ejemplo en la sección de un conducto, y la de los esfuerzos viscosos en la pared de la misma, nos conlleva a encontrar la siguiente expresión para el esfuerzo cortante en la pared

$$\tau_w = -\frac{R}{2} \frac{dP^*}{dz} \quad R = \frac{D_h}{2} \quad D_h = \frac{4\mathcal{A}}{\mathcal{S}} \quad (21)$$

donde  $\mathcal{A}$  es el área de la sección y  $\mathcal{S}$  es el perímetro mojado. El esfuerzo cortante en la pared (21.a) es promedio cuando la sección del conducto no es circular, y es exacto cuando la sección si lo es. Conociendo este esfuerzo cortante en la pared (sabiendo que  $\mu_t = 0$  en la pared) y aplicando la condición de no deslizamiento sobre una superficie sólida, se tienen las condiciones del borde de la pared para la ecuación de la velocidad

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_z = 0 \\ dv_z/dy = \tau_w/\mu \end{cases} \quad (22)$$

El la región muy cercana a la pared ( $y^+ < 7$ ) se distingue lo que se ha denominado la *sub-capa viscosa*, debido a que allí predominan los esfuerzos viscosos sobre los esfuerzos turbulentos. En esta zona el perfil de velocidades tiene la forma

$$v_z^+ = y^+ \quad (23)$$

y la función de disipación viscosa es una constante

$$\Phi_\mu^+ = \Phi_\mu R/(\rho U_\tau^3) = \mathcal{R}e_\tau/2 \quad (24)$$

siendo  $\mathcal{R}e_\tau = \rho U_\tau D/\mu$  el número de Reynolds basado en la velocidad de la fricción y el diámetro.

Un poco más alejado de la pared, y hasta el borde de la capa límite, se diferencia lo que se ha denominado zona del *perfil logarítmico* de velocidades, el cual presenta la siguiente forma

$$v_z^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+ E) = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad B = \frac{\ln E}{\kappa} \approx 5.05 \quad (E = 9, \kappa = 0.435) \quad (25)$$

(algunos investigadores prefieren los valores  $\kappa = 0.41$  y  $B = 5.5$ , sobre los arriba mostrados). En esta zona se satisface la condición de equilibrio local (7) y el esfuerzo cortante puede considerarse prácticamente constante. Estas dos últimas condiciones pueden expresarse como

$$\rho \varepsilon = \mu_t \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \quad \rho \varepsilon = \tau_w \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (26)$$

Substituyendo en estas dos expresiones equivalentes el perfil de velocidades logarítmico (25), se obtiene

$$k = \frac{U_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \varepsilon = \frac{U_\tau^3}{\kappa y} \quad (27)$$

Estas dos expresiones pueden servir como condición de borde cuando el problema es de valor en la frontera y se está empleando un modelo de  $k$  y  $\varepsilon$  para altos números de Reynolds. Cuando el problema es de valor inicial, se puede estimar la derivada de  $\varepsilon$  con (27) y ajustar la derivada de  $k$  con el método del disparo.

Cuando el modelo de  $k$  y  $\varepsilon$  empleado es para bajos números de Reynolds se deben usar las condiciones naturales

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ dk/dy = 0 \\ \varepsilon = 0 \text{ ó } \varepsilon = \varepsilon_w \\ d\varepsilon/dy = 0 \text{ ó } d\varepsilon/dy = d\varepsilon/dy|_w \end{cases} \quad (28)$$

La derivada de  $\varepsilon$  se puede ajustar con el método del disparo en cada caso. Sin embargo, Lam & Bremhorst [(1981)], por el contrario, recomiendan usar  $\partial\varepsilon/\partial y = 0$  en la pared y ajustar el valor de  $\varepsilon$  a una cantidad muy pequeña para no incluir una singularidad en (2).

En cualquier caso, para los ejes de simetría o bordes de los flujos libres, las condiciones de borde son de gradientes nulo en todas las variables involucradas. En los bordes de flujos libres se tiene también que  $k = \varepsilon = 0$ .

En la interfaz entre los dos fluidos inmiscibles, y donde se han despreciado los efectos capilares, deberá existir continuidad en las variables y en sus flujos por difusión al pasar a través de la superficie donde cambian las propiedades. En otras palabras, se debe satisfacer

$$[\mathbf{v}] = 0 \quad [\mu_v \nabla \mathbf{v}] = 0 \quad [k] = 0 \quad [\mu_k \nabla k] = 0 \quad [\varepsilon] = 0 \quad [\mu_\varepsilon \nabla \varepsilon] = 0 \quad (29)$$

donde  $[\cdot]$  es la diferencia de una función en una superficie donde existe discontinuidad de algún tipo ( $[f] = f_1 - f_2$ ). En particular para la velocidad, la continuidad del flujo significa la continuidad de los esfuerzos viscosos, incluyendo la parte turbulenta.

### 3.3.6. Variables Adimensionales

El problema planteado se puede reescribir en términos de variables adimensionales, escogiendo para ello ciertas variables características del mismo. Estas variables son: La longitud y velocidad características son el radio de la tubería  $R$  y la velocidad en el eje central de la tubería  $U_c$  o la velocidad media  $U_m$ , para hacer las variables adimensionales del orden de la unidad. Si se desea utilizar la velocidad media como velocidad característica, basta con substituir en las expresiones de abajo  $U_c = U_m$  y  $\tilde{U}_m = 1$ . Para las variables de pared, la longitud y la velocidad características son, como ya se explicó en la sección 3.2.2,  $\nu/U_\tau$  y  $U_\tau$ , respectivamente.

Con las variables características indicadas antes, entonces se pueden definir las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{r}{R} & \tilde{v} &= \frac{v_z}{U_c} & \tilde{k} &= \frac{k}{U_c^2} & \tilde{\varepsilon} &= \frac{\varepsilon R}{U_\tau^3} & \tilde{y} &= 1 - \tilde{r} & \tilde{P}^* &= \frac{P^*}{\frac{1}{2} \rho U_c^2} \\ y^+ &= \frac{y U_\tau}{\nu} = \tilde{y} Re \tilde{U}_\tau & v^+ &= \frac{v_z}{U_\tau} & k^+ &= \frac{k}{U_\tau^2} & \varepsilon^+ &= \frac{\varepsilon \nu}{U_\tau^4} \end{aligned} \quad (30)$$

Ocasionalmente, y de forma alternativa, se puede definir  $\varepsilon^+$  como  $\tilde{\varepsilon}$ . Adicionalmente, todas las longitudes de mezcla o longitudes características se adimensionalizan igual que  $y$ . Estas definiciones permiten obtener las siguientes relaciones, que serán de utilidad más adelante

$$-\frac{d\tilde{P}^*}{d\tilde{z}} = 4\tilde{U}_\tau^2 = \frac{1}{2}\tilde{U}_m^2 f \quad f = \frac{-D dP^*/dz}{\frac{1}{2}\rho U_m^2} = 8 \left( \frac{\tilde{U}_\tau}{\tilde{U}_m} \right)^2 \quad \left. \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} \right|_w = -\tilde{U}_\tau^2 Re \quad (31)$$

donde

$$\tilde{U}_m = \int_0^1 2\tilde{r} \tilde{v} d\tilde{r} \quad Re_D = \frac{\rho U_m D}{\mu} = 2 Re \tilde{U}_m \quad Re = \frac{\rho U_c R}{\mu} \quad (32)$$

y donde  $D = 2R$  es el diámetro de la tubería y  $U_m = \tilde{U}_m U_c$  es la velocidad promedio del flujo.

El factor de fricción de Darcy-Weisbach  $f$  definido en (19) se puede calcular a partir de la correlación de Colebrook para tuberías lisas ( $k_s = 0$ ) o rugosas ( $k_s > 0$ ) en la forma

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{2.52}{Re_D \sqrt{f}} + \frac{k_s/D}{3.71} \right) \right]^{-2} \quad Re_D > 2000 \quad (33)$$

donde  $k_s$  es la rugosidad aparente de Nikuradse. Como se puede observar (33) es una expresión implícita en el factor  $f$ . Este factor de fricción es cuatro veces el factor de fricción de Fanny  $C_f = f/4$ , definido como un coeficiente de arrastre del esfuerzo cortante en la pared  $C_f = \tau_w/(\rho U_m^2/2)$ .

Particularmente para el flujo laminar, el perfil de velocidades es parabólico  $\tilde{v} = 1 - \tilde{r}^2$ , la velocidad media es  $U_m = 0.5 U_c$ , la velocidad en el eje es  $U_c = (-dP^*/dz) R^2/(4\mu)$ , el factor de fricción es  $f = 64/Re_D$  y la velocidad de fricción adimensional es  $\tilde{U}_\tau = \sqrt{2/Re}$ .

Las viscosidades y las difusividades adimensionales se definen como el inverso de números de Reynolds en la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_v = \tilde{\mu} + \tilde{\mu}_t &= \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} & Re &= \frac{\rho U_c R}{\mu} & Re_t &= \frac{\rho U_c R}{\mu_t} \\ \frac{1}{\tilde{\mu}_v} = Re_v &= \frac{\rho U_c R}{\mu_v} & \frac{1}{\tilde{\mu}_k} = Re_k &= \frac{\rho U_c R}{\mu_k} & \frac{1}{\tilde{\mu}_\varepsilon} = Re_\varepsilon &= \frac{\rho U_c R}{\mu_\varepsilon} \end{aligned} \quad (34)$$

Adicionalmente a esto, la viscosidad adimensional de remolino se puede expresar, según el modelo que se emplee, como por ejemplo

$$\tilde{\mu} = \tilde{l}_m^2 \left| \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} \right| \quad \tilde{\mu}_t = C_\mu \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}} \tilde{\mu} \quad (35)$$

donde la longitud de mezcla adimensional es  $\tilde{l}_m = l_m/R$ .

Los términos de fuente en las ecuaciones (16) y (19) se han adimensionalizado de la siguiente manera

$$\tilde{b}_k = b_k \frac{R}{\rho U_c U_\tau^2} \quad \tilde{b}_\varepsilon = b_\varepsilon \frac{\mu R}{\rho^2 U_c U_\tau^4} \quad (36)$$

En el caso especial de los modelos de bajo números de Reynolds, los término de fuente quedan adimensionalizados como

$$\tilde{b}_k = -\frac{\tilde{\mu}}{2} \frac{1}{\tilde{k}} \left( \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 \quad \tilde{b}_\varepsilon = 2 \tilde{\mu} \tilde{\mu}_t \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2} \right) \frac{\mu R}{U_\tau^2 \tilde{U}_\tau^2} \quad (37)$$

como se puede observar el término de fuente  $b_\varepsilon$ , tal como fué definido originalmente no queda bien adimensionalizado. Este término no es invariante frente a un cambio de sistema de unidades consistentes. Por esta razón este modelo no se usará, sino hasta modificarlo correctamente o cambiarlo por otro.

De acuerdo a lo ya expuesto, entonces todo el problema queda completamente determinado por dos parámetros: el número de Reynolds basado en la velocidad máxima y en el radio de la tubería  $Re = 1/\tilde{\mu}$  y la velocidad de fricción adimensionalizada con la velocidad característica  $\tilde{U}_\tau = U_\tau/U_c$ .

Particularmente para el caso laminar, las ecuaciones diferenciales son independientes del parámetro  $Re$  y, por consiguiente, su solución no depende de ningún parámetro. Esto es evidente si se substituye (19.a) en la ecuación de cantidad de movimiento adimensionalizada, teniendo en cuenta que  $\tilde{U}_\tau = \sqrt{2/Re}$ , con lo cual resulta que  $-d\tilde{P}^*/d\tilde{z} = 8/Re$ .

### 3.4 SIMULACION DE GRANDES ESCALAS

La *simulación de grandes escalas* (LES - Large Eddy Simulation), frecuentemente también denominado *simulación de grandes remolinos* ó *simulación con modelos de sub-malla*, se basa en definir dos escalas de simulación para los campos involucrados. La escala más pequeña viene determinada por el tamaño del mallado, que en la simulación numérica actúa como un filtro sobre el resultado obtenido en los campos de velocidad y presión (i.e. los resultados con ‘LES’ con un mallado grueso son equivalentes a haber aplicado un filtro “numérico” al resultado con ‘DNS’ que se hubiese obtenido con un mallado muy refinado). La escala más grande viene determinada por la aplicación de un filtro “artificial” de un ancho espacial asociado a dicha escala.

Los *campos de grandes escalas* son aquellos asociados a los campos filtrados a través de la convolución con un filtro  $\mathcal{G}_\Delta(\mathbf{x})$  de ancho vectorial  $\Delta$ , el cual puede ser gaussiano eventualmente (En el filtro gaussiano, de acuerdo a lo que se explicó en la sección E.4.2.8  $\Delta^j = 2\sqrt{3}\sigma^j$  para cada dirección  $j$ , teniendo un tamaño de malla uniforme de  $h^j = \Delta^j/2$ ). Así, el campo  $\varphi(t, \mathbf{x})$  tiene su valor filtrado  $\overline{\varphi}(t, \mathbf{x})$  dado por

$$\overline{\varphi}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}_\infty(\mathbf{x})} \varphi(t, \mathbf{r}) \mathcal{G}_\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) d\mathcal{V}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}_\infty(\mathbf{x})} \varphi(t, \mathbf{x} - \mathbf{r}) \mathcal{G}_\Delta(\mathbf{r}) d\mathcal{V}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

donde  $\mathcal{V}_\infty(\mathbf{x}) = \mathbb{B}(\mathbf{x}, \infty)$ , o sea, la bola abierta con centro en  $\mathbf{x}$  y radio infinito, y fuera de sus dominios las funciones  $\varphi(\mathbf{x})$  y  $\mathcal{G}_\Delta(\mathbf{x})$  se suponen nulas. En efecto, se tiene que  $\mathbb{B}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \infty) = \mathbb{B}(\mathbf{x}, \infty)$ ,  $\forall \mathbf{y}$ . Es fácilmente verificable que el filtro (1) conmuta con las derivadas temporal y espacial (con respecto a  $\mathbf{x}$ ). Esta conmutación deja de ser válida si  $\Delta$  no es una constante.

Sea  $\varphi'$  las fluctuaciones del campo actual  $\varphi$  con respecto a su valor filtrado  $\overline{\varphi}$ , es decir,

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi' \quad (2)$$

Los campos  $\varphi'$  conciernen a las fluctuaciones a escalas menores que el tamaño de  $\Delta$  y se denominarán los *campos de subescala*. Existen varias formas de correlacionar el ancho del filtro  $\Delta$  con los tamaño de las mallas  $h_j = \Delta x_j/2$  en el espacio, pero una de las más usadas es considerar  $\Delta = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3}$ , cuando el filtrado (1) se considera que es isótropo, pero el mallado no. Esta forma se justifica por que el ancho equivalente  $\Delta$  conservar el volumen del espacio filtrado. Otra forma sería definir  $\Delta = \|\Delta\| = (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2)^{1/2}$ , pero es evidente que en aquellas direcciones de mallado más fino el filtro cubriría mayor cantidad de información. Sin embargo, cuando el filtrado es anisótropo, se suele definir  $\Delta^j = \Delta x^j = 2 h^j$  para cada dirección del espacio.

Consideremos las ecuación de Navier-Stokes

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot \mathcal{T} \quad (3)$$

Luego de aplicar el filtro (2) se obtiene

$$\rho \left( \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{v}} \right) = \rho \overline{\mathbf{g}} - \nabla \overline{P} + \nabla \cdot \overline{\mathcal{T}} \quad \overline{\mathcal{T}} = \overline{\mathcal{T}} + \overline{\mathcal{T}}_t \quad \overline{\mathcal{T}} = 2\mu \overline{\mathbf{D}} \quad (4)$$

donde el tensor de esfuerzos de la subescala  $\overline{\mathcal{T}}_t$ , viene dado por

$$\overline{\mathcal{T}}_t = \rho (\overline{\mathbf{v} \mathbf{v}} - \overline{\mathbf{v}} \overline{\mathbf{v}}) = \rho [(\overline{\mathbf{v} \mathbf{v}} - \overline{\mathbf{v}} \overline{\mathbf{v}}) - (\overline{\mathbf{v} \mathbf{v}'} + \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}}) - \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}] \quad (5)$$

El tensor de esfuerzos  $\overline{\mathcal{T}}$  es el esfuerzo viscoso debido a las deformaciones del campo filtrado. El tercer miembro de la expresión (5) se deriva de aplicar la descomposición (2) al primer término del segundo miembro de la misma expresión. En dicho tercer miembro de (5), el primer término se denomina el *término del tensor de Léonard*, el segundo *términos cruzados*, y el tercero el *término del tensor de esfuerzos de Reynolds*. El tensor de Léonard es un término explícito que se puede calcular en función de los campos filtrados, pero los otros términos son desconocidos.

La ecuación del movimiento para los campos filtrados (4) tiene una analogía con la ecuación de Reynolds 3.1.(1), para flujo turbulento no homogéneo promediado en el tiempo. Sin embargo, otros términos, aparte del tensor de esfuerzos de Reynolds, surgen del análisis en el modelo de grandes escalas, debido al hecho de que el operador definido en el filtro (1) no es idempotente como en el caso del promediado en el tiempo. Es decir, en el filtro  $\overline{\overline{\varphi}} \neq \overline{\varphi}$ , lo que implica que  $\overline{\varphi'} \neq \mathbf{0}$ . La operación de filtrado, visto como un operador lineal, conmuta con los operadores de derivación, tanto temporal como espacial, debido a la regla de Leibniz y a que el filtro  $\mathcal{G}_\Delta(\mathbf{x})$  es una función conservativa por estar normalizada (ver las secciones A.2.5.4 y B.2.4.7).

Por las características antes planteadas, el operador  $\overline{\cdot}$  de filtrado, jamás podrá considerarse como el operador  $\langle \cdot \rangle$  de la esperanza estadística de una variable aleatoria. Por ello, es necesario utilizar un operador de esperanza estadística (o promediado espacio-temporal), en aquellas direcciones espacio-temporales, donde el flujo turbulento es homogéneo-estacionario estadísticamente hablando. De esta forma, se tiene que

$$\overline{\varphi} = \langle \overline{\varphi} \rangle + \overline{\varphi'} \quad (2')$$

siendo  $\overline{\varphi'}$  una variable aleatoria centrada, y los esfuerzos de Reynolds estadísticos, según este operador, calculados según

$$\widehat{\overline{\mathcal{T}}_t} = -\rho \langle \overline{\mathbf{v}'} \overline{\mathbf{v}'} \rangle \quad (5')$$



Obsérvese la similaridad entre las expresiones (2') y (2), y entre (5') y (5) con filtrado idempotente. El resultado (5') proviene de un procedimiento similar al seguido para el promediado en el tiempo (ver expresión 2.2.(12), intercambiando el operador promediado  $\bar{\cdot}$  por el operador de esperanza estadística  $\langle \cdot \rangle$ , el cual es igualmente idempotente), por lo que no se repite aquí de nuevo. Obviamente, las expresiones (2') y (5') jamás deben considerarse respectivamente iguales a las expresiones (2) y (5), descritas anteriormente. Las primeras se refieren a las fluctuaciones del campo de velocidades filtrado, respecto a sus esperanzas estadística, las segunda se refieren a las fluctuaciones de la velocidad, respecto a su valor filtrado. Son dos definiciones y cálculos distintos. Al final los esfuerzos turbulentos globales (en una dirección perpendicular al plano homogéneo-estacionario) serán la suma de los esfuerzos de Reynolds estadísticos (5') y los esfuerzos de subescala (5) (más adelante, en la próxima sub-sección, se verá porque es conveniente cambiar estos últimos por su parte desviatoria). Los esfuerzos totales serán la suma de los esfuerzos turbulentos globales y los esfuerzos puramente viscosos (4.c).

Otra diferencia entre el modelo de grandes escalas y la ecuación de Reynolds promediada en el tiempo es que el primero usualmente simula campos de rápidas fluctuaciones en el espacio y el tiempo, si  $\Delta$  es suficientemente pequeño, mientras que el segundo simula campos que varían muy suavemente en el espacio, y generalmente no sufren cambios en el tiempo o estos cambios se producen muy lentamente en el tiempo, con tiempos característicos muchísimo mayores que los lapsos de tiempos tomados en el promediado. Este promediado puede considerarse como un filtrado “pasa bajo” en la dirección temporal, con una función de filtro tipo caja de un tamaño muy grande y con ancho de banda muy pequeño. Por el contrario, los modelos de grandes escalas usan filtros de tamaños muy pequeño y anchos de banda muy grandes.

### 3.4.1. Viscosidad Turbulenta

El *tensor de subescala*  $\bar{\mathcal{T}}_t$  se simula a través de una viscosidad turbulenta  $\mu_t$ , denominada a veces viscosidad de sub-malla, siguiendo la misma hipótesis de Boussinesq, adoptada antes también para la ecuación de Reynolds. De esta forma se tiene que la ecuación (4) se puede expresar

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} \right) = \rho \bar{\mathbf{g}} - \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\mathcal{T}} \quad \bar{\mathcal{T}} = \bar{\mathcal{T}} + \bar{\mathcal{T}}'_t = \bar{\mathcal{T}} - \bar{\mathcal{T}}_t^\circ \quad (6)$$

con

$$\bar{\mathcal{T}} = 2 \mu \bar{\mathbf{D}} \quad \bar{\mathcal{T}}'_t = 2 \mu_t \bar{\mathbf{D}} \quad (7)$$

La cantidad  $\bar{\mathcal{T}}'_t = \bar{\mathcal{T}} - \bar{\mathcal{T}}_t^\circ$  en (6) es la parte desviatoria del tensor de esfuerzos de la subescala  $\bar{\mathcal{T}}_t$  definido en (5). La parte isotópica de este tensor de subescala,  $\bar{\mathcal{T}}_t^\circ = (1/3) \text{tr}(\bar{\mathcal{T}}_t) \mathbf{I}$ , está incluida en la presión modificada  $\bar{p} = \bar{P} - (1/3) \text{tr}(\bar{\mathcal{T}}_t)$ , siendo  $\bar{P}$  la presión hidrostática filtrada. Se observa también que esta parte isotropa es lo diferencia (4.b) de (6.b). Se introduce la parte desviatoria del tensor  $\bar{\mathcal{T}}_t$  en (6.a) por razones similares a las que se argumentaron en la ecuación de Reynolds: se desea que tenga la característica de no tener traza como el tensor velocidad de deformación filtrado

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{G}}^t) \quad \bar{\mathbf{G}} = (\nabla \bar{\mathbf{v}})^t \quad (8)$$

siendo  $\bar{\mathbf{G}}$  el tensor gradiente de velocidad filtrado.

El campo de presiones  $\bar{p}$ , aunque ya no representa a las presiones hidrostática  $\bar{P}$ , debe ser tal, que se satisfaga de igual manera la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (9)$$

La cual se deriva de aplicar la conmutatividad del operador filtrado y la derivación espacial. Al igual que antes, el campo de velocidades  $\bar{\mathbf{v}}$  es solenoidal, como el campo de velocidades  $\mathbf{v}$ .

El problema de la modelización de los términos de la subescala, a veces denominada parametrización de la subescala, es la de expresarlos en función de los campos de grandes escalas. En la física matemática este problema es referido como un problema de homogenización, donde las leyes que gobiernan el medio son conocidas a un nivel microscópico, y se desea tener las leyes de evolución a niveles macroscópicos.

### 3.4.2. Modelo Smagorinsky

El modelo más conocido para la simulación de la viscosidad turbulenta en los modelos de gran escala, es el modelo de Smagorinsky (1963), el cual se resume de la siguiente manera

$$\mu_t = \rho l^2 \|\bar{\mathbf{D}}\| \quad 1 = C_s \Delta \quad \|\bar{\mathbf{D}}\| = \sqrt{2 \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}}} \quad (10)$$

donde  $C_s$  es un parámetro del modelo, el cual puede ser constante o puede calcularse dinámicamente. Si se asume turbulencia isotrópica y que  $k_c = \pi/\Delta x$ , es el número de onda del espectro en el espacio de Fourier donde se hace el corte, y este cae dentro de la cascada de  $\mathcal{E}(k) \sim k^{-5/3}$  de Kolmogorov, se puede ajustar la constante  $C_s$ , tal que, en promedio espacial, la energía cinética turbulenta de la subescala tenga un decaimiento igual a  $\varepsilon$ . De esta forma, se obtiene que

$$C_s \approx \frac{1}{\pi} \left( \frac{3 C_K}{2} \right)^{-3/4} \quad (11)$$

donde  $C_K$  es la constante de Kolmogorov (la expresión (11) es válida solamente para un tipo muy particular de filtro). Si se toma un valor de la constante de Kolmogorov de  $C_K = 1.4$ , entonces se puede calcular un valor de  $C_s \approx 0.18$ , aunque es muy frecuente asumir un valor que varía en el rango  $C_s = 0.1 - 0.18$ .

Experimentalmente se ha encontrado que un valor de  $C_s = 0.1$  (lo que representa una reducción de la viscosidad turbulenta en un factor de aproximadamente cuatro, respecto a  $C_s = 0.18$ ) produce resultados satisfactorios para turbulencia isotrópica, flujos libres con cortadura y flujos en canales si se le adapta una función de amortiguamiento en la pared a 1, como se hizo con la longitud de mezcla  $l_m$  en 3.2.(4). Sin embargo, se ha encontrado que el modelo de Smagorinsky es excesivamente disipativo en la cercanía de la pared. En particular, el modelo no funciona bien en la transición hacia la turbulencia en el flujo de una capa límite sobre una pared plana, comenzando con un perfil laminar al cual se le ha agregado una perturbación. El flujo permanece laminar debido a una excesiva viscosidad turbulenta generada por las deformaciones cortantes.

### 3.4.3. Modelo Dinámico

Definamos un filtro de prueba con un ancho  $\tilde{\Delta} = \alpha \Delta$ , digamos de mayor escala, con  $\alpha > 1$  (por ejemplo,  $\alpha = 2$ ), de la forma

$$\tilde{\varphi}(t, \mathbf{x}) = \int_{V_\infty(\mathbf{x})} \varphi(t, \mathbf{r}) \mathcal{G}_{\tilde{\Delta}}(\mathbf{x} - \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}) = \int_{V_\infty(\mathbf{x})} \varphi(t, \mathbf{x} - \mathbf{r}) \mathcal{G}_{\tilde{\Delta}}(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}) \quad (12)$$

Con este filtro podemos filtrar otra vez los campos  $\tilde{\varphi}$  ya filtrados antes con el filtro definido por (1), de manera de obtener  $\tilde{\tilde{\varphi}}$ . Apliquemos ahora este filtro al tensor de subescala  $\tilde{\mathcal{T}}_t$ , con lo cual se obtiene

$$\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}_t = \rho (\tilde{\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}) \quad (13)$$

Definamos adicionalmente los tensores

$$\tilde{\tilde{\mathcal{R}}}_t = \rho (\tilde{\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}) \quad \tilde{\tilde{\mathcal{L}}}_t = \rho (\tilde{\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}) \quad (14)$$

siendo el primero el tensor de subescala obtenido si se reemplaza el filtro “barra” por el doble filtro “barra-tilde” en (5), y el segundo, denominado también tensor de esfuerzos de Léonard, es el tensor de esfuerzos turbulentos correspondiente al filtro de prueba aplicado al campo de velocidades  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Estos tensores verifican la siguiente expresión

$$\tilde{\tilde{\mathcal{L}}}_t = \tilde{\tilde{\mathcal{R}}}_t - \tilde{\mathcal{T}}_t \quad (15)$$

denominada la *identidad de Germano* [Germano et al., (1991)].

Obtengamos la parte desviatoria de los tensores de sub-escala antes definidos. Usando el modelo de Smagorinsky, la parte desviatoria de (13) es

$$\widetilde{\mathcal{T}}'_t = \widetilde{\mathcal{T}}_t - \frac{1}{3} \text{tr}(\widetilde{\mathcal{T}}_t) \mathbf{I} = 2\rho \mathbf{l}^2 \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \widetilde{\mathbf{D}} \quad (16)$$

De la misma forma, la parte desviatoria de (14.a) es

$$\widetilde{\mathcal{R}}'_t = \widetilde{\mathcal{R}}_t - \frac{1}{3} \text{tr}(\widetilde{\mathcal{R}}_t) \mathbf{I} = 2\rho (\alpha \mathbf{l})^2 \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \widetilde{\mathbf{D}} \quad (17)$$

El tensor  $\widetilde{\mathbf{D}}$  es análogo al tensor  $\overline{\mathbf{D}}$ , pero construido con el campo de velocidades doblemente filtradas  $\widetilde{\mathbf{v}}$ , en lugar del campo de velocidades  $\overline{\mathbf{v}}$ , filtrado una sola vez.

Con la ayuda de la identidad de Germano (15) y con las expresiones (16) y (17), resulta que la parte desviatoria de (14.b) es

$$\widetilde{\mathcal{L}}'_t = \widetilde{\mathcal{L}}_t - \frac{1}{3} \text{tr}(\widetilde{\mathcal{L}}_t) \mathbf{I} = 2\rho \mathbf{l}^2 (\alpha^2 \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \widetilde{\mathbf{D}} - \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \overline{\mathbf{D}}) \quad (18)$$

Con el objeto de calcular el parámetro del modelo de Smagorinsky a partir de las ecuaciones planteadas, durante el filtrado del tensor en (13), la longitud  $\mathbf{l}$ , y por consiguiente  $C_s$ , se ha supuesto invariante frente al filtro, por lo que se ha considerado una constante en (16). La expresión (18) se puede multiplicar escalarmente (o lo que es equivalente, contraerse doblemente) con el tensor  $\overline{\mathbf{D}}$  en la forma

$$\widetilde{\mathcal{L}}_t : \overline{\mathbf{D}} = \rho (\widetilde{\mathbf{v}}\widetilde{\mathbf{v}} - \overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{v}}) : \overline{\mathbf{D}} = 2\rho \mathbf{l}^2 (\alpha^2 \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \widetilde{\mathbf{D}} - \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \overline{\mathbf{D}}) : \overline{\mathbf{D}} = 2\rho \mathbf{l}^2 \widetilde{\mathbf{M}} : \overline{\mathbf{D}} \quad (19.a)$$

siendo

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \alpha^2 \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \widetilde{\mathbf{D}} - \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \overline{\mathbf{D}} \quad (19.b)$$

y donde se ha tenido en cuenta la definición (14.b), y la multiplicación con la parte isótropa se ha eliminado debido a la ecuación de continuidad (9) (recuérdese que  $\mathbf{I} : \overline{\mathbf{D}} = \text{tr}\overline{\mathbf{D}} = \nabla \cdot \overline{\mathbf{v}} = 0$ ). Del resultado (19) se puede despejar  $\mathbf{l}^2$  y por consiguiente el coeficiente  $C_s$ , obteniéndose finalmente

$$\mathbf{l}^2 = (C_s \Delta)^2 = \frac{1}{2} \frac{(\widetilde{\mathbf{v}}\widetilde{\mathbf{v}} - \overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{v}}) : \overline{\mathbf{D}}}{(\alpha^2 \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \widetilde{\mathbf{D}} - \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \overline{\mathbf{D}}) : \overline{\mathbf{D}}} = \frac{1}{2\rho} \frac{\widetilde{\mathcal{L}}_t : \overline{\mathbf{D}}}{\widetilde{\mathbf{M}} : \overline{\mathbf{D}}} \quad (20)$$

donde las cantidades involucradas se obtienen filtrando con (12) cantidades que se suponen están en función de los campos de las velocidades de gran escala  $\overline{\mathbf{v}}$ , ya conocidos. El resultado (20) se ha usado para varios tipos de flujo, y se sabe que el denominador eventualmente puede anularse o volverse tan pequeño que produce inestabilidades numéricas.

Otra forma de resolver la expresión (18), es considerando que no se satisface exactamente, puesto que los tensores en su primer y último miembros no son necesariamente proporcionales entre sí, siendo el error

$$\epsilon = 2\rho \mathbf{l}^2 \widetilde{\mathbf{M}} - \widetilde{\mathcal{L}}'_t \quad (21)$$

Luego se encuentra el parámetro  $c = \mathbf{l}^2$  que minimiza  $\epsilon^2$  aplicando el método de mínimos cuadrados a este error. Así se obtiene la ecuación normal  $\partial\epsilon^2/\partial c = 2\epsilon\partial\epsilon/\partial c = 0$  y de ella se despeja  $c$  [Lilly,(1992)]. De acuerdo a esto, entonces queda que el parámetro  $c$  es

$$\mathbf{l}^2 = (C_s \Delta)^2 = \frac{1}{2} \frac{(\widetilde{\mathbf{v}}\widetilde{\mathbf{v}} - \overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{v}}) : (\alpha^2 \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \widetilde{\mathbf{D}} - \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \overline{\mathbf{D}})}{(\alpha^2 \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \widetilde{\mathbf{D}} - \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \overline{\mathbf{D}}) : (\alpha^2 \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \widetilde{\mathbf{D}} - \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \overline{\mathbf{D}})} = \frac{1}{2\rho} \frac{\widetilde{\mathcal{L}}_t : \widetilde{\mathbf{M}}}{\widetilde{\mathbf{M}} : \widetilde{\mathbf{M}}} \quad (22)$$

El tensor definido  $\widetilde{\mathbf{M}}$  es también un tensor sin traza al igual que  $\overline{\mathbf{D}}$  debido a la linealidad del operador  $\text{tr}(\cdot)$ , por lo que la doble contracción con el tensor identidad es nulo, lo que al igual que antes elimina la parte isótropa del tensor (14.b). El resultado (22) remueve la posibilidad de la indeterminación que pudiera presentarse en (20) y que causa las inestabilidades numéricas que se mencionaron antes.

Los resultados (20) ó (22) que permiten obtener el valor del parámetro  $C_s$ , caen dentro de lo que se ha denominado *modelos dinámicos*, ya que el valor de  $C_s$  se calcula para cada instante y cada posición. En otra palabras, se considera que  $C_s(t, \mathbf{x})$  es una función con una descripción de tipo euleriana. Sin embargo, como el cálculo debe hacerse de forma numérica, calcular  $C_s(t, \mathbf{x})$  se hace una tarea costosa, computacionalmente hablando. Por ello, en la mayoría de los estudios el cálculo del mencionado parámetro se hace promediando espacialmente en ciertas regiones del espacio, que pueden ser por ejemplo, superficies paralelas a las paredes que limitan el flujo. En turbulencia isótropa, el promedio debe hacerse en tiempo y espacio y el resultado final se considera una constante del flujo. Todo lo expuesto en esta sección ha sido el resultado de la revisión de la referencia [Lesieur,1997].

### 3.4.4. Condición de Borde

La condición de no deslizamiento en una pared sólida no da buen resultado cuando se usan los modelos de grandes escalas, ya que estos modelos no logran tener la suficiente definición como para adentrarse en la subcapa viscosa y mucho menos en la rugosidad de la superficie. Además, la utilización de funciones de amortiguamiento de la longitud de Smagorinski cerca de una pared lisa no ha sido exitosa del todo en estos modelos. Por esta razón, se hace necesario modificar las condiciones de pared para los modelos de grandes escalas. Esto se hace fundamentalmente con el uso del perfil logarítmico

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad U^+ = \frac{|U|}{U_\tau} \quad y^+ = \frac{y U_\tau}{\nu} \quad U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (23)$$

Dicho perfil se asume que es válido también de forma transitoria y en cualquier plano perpendicular a la pared. Sea  $u_o$  una muestra de velocidad, tangente a la superficie sólida a una cierta distancia (ortogonal) de la pared  $y_o$  ( $y_o^+ > 30$ ). Suponiendo que la velocidad perpendicular a dicha superficie es prácticamente nula, entonces con este perfil se puede estimar la velocidad de fricción  $U_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ , y con ella imponer una condición de esfuerzo instantáneo  $\tau_w$  conocido en ese borde.

No obstante, como en (23) esta incógnita aparece de forma implícita, tanto en  $u_o^+$ , como en  $y_o^+$ , se hace difícil su cálculo. Para facilitar este procedimiento se ha escogido el siguiente parámetro de ajuste

$$\alpha = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+ U^+) + B = \frac{1}{\kappa} \ln U^+ + U^+ \quad (\kappa = 0.41, B = 5.0) \quad (24)$$

para el cual, como se puede observar en el segundo miembro, no existe dependencia con respecto a la velocidad de fricción. Este parámetro satisface aproximadamente la siguiente correlación

$$U^+ = f(\alpha) = -1.7121 + 0.7015 \alpha + 0.00337 \alpha^2 \quad (25)$$

para valores de  $\alpha \geq 8$ , como se puede observar en la siguiente gráfica de la figura 1.

El mencionado procedimiento se puede resumir de la siguiente manera: Se escogen una muestra del flujo  $y_o$  y  $u_o$  en la zona logarítmica ( $y_o^+ > 30$ ), siendo  $u = v_x$  ó  $v_z$  (el plano  $xz$  es tangente a la pared, y el eje  $y$  es normal a dicha superficie, pero dirigido hacia el fluido). Con esta muestra se estiman las derivadas

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w = \frac{\tau_w}{\mu} \text{sign}(u_o) = \frac{U_\tau^2}{\nu} \text{sign}(u_o) \quad (26)$$

las cuales sirven como condiciones de borde en  $u = v_x$  ó  $v_z$  del tipo Neumann, junto con la condición de Dirichlet  $v_y = v_{y_o}$ , todas evaluadas en la pared. Estas últimas condiciones evitan, en cierta medida, que el campo de velocidades del tipo solenoidal se desplace por los dos grados de libertad de deslizamiento

(paralelos a la pared) que están implicados en (26). Sin embargo, este limitado deslizamiento no tiene la menor importancia porque cae dentro de la sub-capa viscosa que es de pequeña escala, y la cual no se trata de simular con los modelos de grandes escalas. Cuando se considera la impenetrabilidad de la pared, entonces  $v_{yo} = 0$ , en caso contrario  $v_{yo} > 0$  cuando existe transpiración y  $v_{yo} < 0$  cuando existe succión.

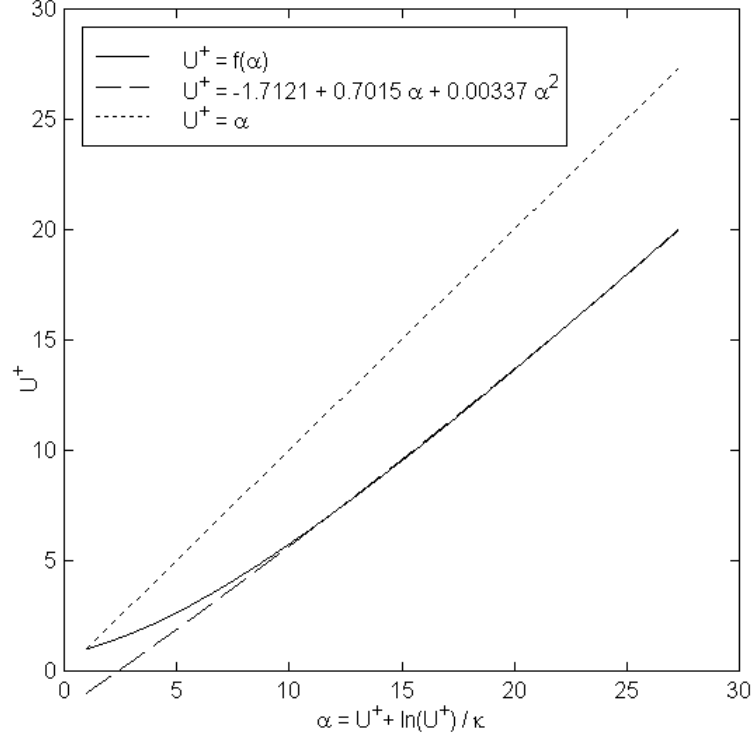


Figura 1. Función de correlación de  $U^+$  vs.  $\alpha$ .

Cuando la pared es lisa ( $k_s^+ < 5$ ), siendo  $k_s$  la rugosidad aparente de tamaño de grano de arena de Nikuradse, la velocidades de fricción correspondientes se calculan como

$$U_{\tau o} = \frac{|u_o|}{f(\alpha_o)} \quad \alpha_o = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{y_o |u_o|}{\nu} \right) + B \geq 8 \quad (27)$$

No obstante, cuando  $\alpha_o < 8$ , el cálculo de la velocidad de fricción puede hacerse como si se tratase de flujo laminar  $\partial u / \partial y = u_o / y_o$ .

En esta parte se ha preferido tomar el valor de  $B = 5.0$  para el flujo sobre una placa plana lisa, en lugar del valor  $B = 5.5$  del flujo dentro de una tubería de pared lisa. Se ha hecho así porque, aunque la curvatura de la superficie no es la misma en la direccin axial y en la direccin azimutal, las fluctuaciones del flujo en dichas direcciones cerca de la pared son pequeñas y el efecto de la curvatura es despreciable.

Cuando la pared es rugosa [Schlichting,1968], la ley de pared (23) deja de ser válida y en su lugar se utiliza

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+ / k_s^+) + B' \quad k_s^+ = \frac{k_s U_\tau}{\nu} \quad (28)$$

siendo  $B' = B'(k_s^+)$  cuando  $5 \leq k_s^+ \leq 70$ . Cuando  $k_s^+ > 70$ , entonces  $B' \cong 8.5$  es aproximadamente una constante. Por debajo de  $k_s^+ = 5$ , la tubería se considera lisa y entonces  $B'(k_s^+) \cong B + \kappa^{-1} \ln(k_s^+)$ , recobrándose la forma de (23). De acuerdo a , entonces la expresión de  $U_{\tau o}$ , equivalente a (27), pero para el caso rugoso, se escribe

$$U_{\tau o} = \frac{|u_o|}{\kappa^{-1} \ln(y_o / k_s) + B'} \quad (29)$$

La ecuación anterior se ha obtenido con un simple despeje de la expresión (28) aplicada a la muestra. Al igual que la pared el cálculo de la velocidad de fricción  $U_{\tau o}$  es instantáneo y su valor cambia en cada punto y a cada instante [Granados,(2002a)].

Una relación que permite encontrar aproximadamente la función  $B'(\mathbf{k}_s^+)$  en el rango de transición  $\mathbf{k}_s^+ < 43.6$  es

$$B'(\mathbf{k}_s^+) = B + X - C X^3 \quad X = \kappa^{-1} \ln \mathbf{k}_s^+ \quad (30)$$

con  $B = 5.5$  y  $C = 0.007666746$ . Por encima de este rango de transición, se asume  $B' = 8.5$ . En esta oportunidad, se ha preferido tomar el valor de  $B$  para una tubería lisa en lugar del valor que asume para una placa plana lisa, con el objetivo de que (30) reproduzca los resultados experimentales de Nikuradse (ver por ejemplo [Schlichting,1968], pág.582-583).

### 3.5 LONGITUD CARACTERISTICA MINIMA

Este modelo se basa en proponer tres longitudes características de las tres zonas presentes en un flujo turbulento cerca de una pared. Estas tres zonas son: Sub-capa viscosa, perfil logarítmico y turbulencia isótropa (en zonas muy alejadas de la pared y en las direcciones tangentes a la pared).

Para la región de la sub-capa viscosa se propone una longitud característica

$$l_v = \kappa \frac{\|\bar{\nabla}\|}{\|\nabla \bar{\nabla}\|} \quad (1)$$

donde el operador  $\| \cdot \|$  se propone en primera instancia que es como una norma y el campo de velocidades  $\bar{\nabla}$  que es un campo promediado ó filtrado, pero esto puede modificarse, según se trate de un modelo de longitud de mezcla o de grandes escalas. La norma en el denominador debe estar subordinada a la norma del numerador (es decir,  $\|\mathbf{1} \cdot \nabla \bar{\nabla}\| = \|\nabla \bar{\nabla}\|$  cuando  $\|\mathbf{1}\| = 1$ ). La constante  $\kappa$  es la constante de von Kármán. Esta longitud es parecida a la longitud de escala propuesta en el modelo de la sección 3.3.2. Cuando se substituye el perfil de la sub-capa viscosa 3.3.(23.a) en la expresión (1), se obtiene que  $l_v = \kappa y$ , siendo  $y$  la coordenada perpendicular a la pared, lo que la justifica en esta zona.

Para la región del perfil logarítmico se propone una longitud característica

$$l_t = \kappa \frac{\|\nabla \bar{\nabla}\|}{\|\nabla \nabla \bar{\nabla}\|} \quad (2)$$

las observaciones hechas antes con respecto a la norma son extensibles a los tensores de orden tres (el hessiano en el denominador) con respecto a los tensores de orden dos (el jacobiano en el numerador). Esta longitud es muy similar a la descrita en el modelo de von Kármán en la sección 3.2.3. Cuando se substituye el perfil logarítmico 3.3.(25) en la expresión (2), se obtiene de nuevo que  $l_t = \kappa y$ , lo que la justifica en esta otra zona.

Se puede observar que de estas dos longitudes características descritas hasta ahora, una de ellas se hace más pequeña que la otra en aquella región donde es válida. En otras palabras, se puede proponer que cuando son iguales, se está en el límite entre la sub-capa viscosa y la región de perfil logarítmico. Se ha encontrado también que un factor del tipo

$$1 - \exp(-\alpha_d l_v/l_t) \quad (3)$$

simula muy bien un factor de amortiguamiento como el de Van Driest descrito en la sección 3.2.2.

Una ley del tipo

$$\frac{1}{l_m} = \frac{1}{l_v} + \frac{1}{l_t} \quad (4)$$

permitiría encontrar la longitud característica (que sería la menor) para todo el rango de las dos regiones mencionadas. Combinando la expresión (4) con el factor (3) se consigue con un modelo de longitud característica

$$l_m^* = l_m [1 - \exp(-\alpha_d l_v/l_t)] = \frac{l_v l_t}{l_v + l_t} [1 - \exp(-\alpha_d l_v/l_t)] \quad (5)$$

que es válido para todo el rango mencionado, incorporando los efectos atenuantes de la turbulencia debidos a la presencia cercana de una pared. Un valor de  $\alpha_d = 0.5$  ha dado buenos resultados para bajos números de Reynolds. Este modelo, aunque es muy parecido a un modelo de longitud de mezcla, se puede completar más aún y completar un modelo de turbulencia de grandes escalas. De hecho, si se considera el problema cuasi-estacionario y se interpreta  $\|\bar{\mathbf{v}}\| = \bar{v}_i$ ,  $\|\nabla \bar{\mathbf{v}}\| = \partial_j \bar{v}_i$  y  $\|\nabla \nabla \bar{\mathbf{v}}\| = \partial_j^2 \bar{v}_i$ , siendo  $i$  la dirección tangente a la pared y  $j$  la dirección perpendicular a la misma, entonces el modelo propuesto es un modelo de longitud de mezcla universal. No obstante en el borde de las capas límites hay que verificar que la expresión (2) tienda al resultado  $l_t = \lambda \delta$ , donde  $\delta$  es el espesor de dichas capas, de acuerdo a lo planteado en 3.2.(2).

Para la región de turbulencia isotrópica se propone una longitud característica

$$l_s = C_s \Delta \quad (6)$$

donde se ha aplicado alguna forma de calcular  $\Delta$  con el vector tamaño del filtro  $\Delta$ , cuyas componentes no necesariamente son todas iguales. Un ejemplo puede ser un filtro gaussiano con desviaciones típicas distintas en cada dirección principal, como el descrito en el apéndice E en la función de densidad de probabilidades gaussiana. El coeficiente  $C_s$  hace el papel de una constante de Smagorinsky o un coeficiente calculado con un modelo dinámico. Esta última longitud característica se combina con las anteriores de la forma

$$l = \min(l_m^*, l_s) \quad (7)$$

representando un umbral que separa un modelo de grandes escalas y un modelo cuasi-estacionario de longitud de mezcla. Es decir, filtros de una banda muy grande suavizarán tanto el flujo que será posible describirlo “mejor” con un modelo de longitud de mezcla. Se puede emplear también una ley de suma de los inversos de las longitudes, pero no se sabe como funcionará. No obstante la expresión (7) contiene en su forma el efecto “umbral” que se desea imponer y no el efecto gradual que produciría la ley de los inversos.

La longitud sintetizada en la expresión (7) sería aquella longitud que intervendría en el modelo de viscosidad turbulenta

$$\mu_t = \rho l^2 \|\bar{\mathbf{D}}\| \quad \|\bar{\mathbf{D}}\| = \sqrt{2 \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}}} \quad (8)$$

propuesto para los modelos de grandes escalas.

El modelo propuesto hasta ahora es un modelo isotrópico, pero se puede especular sobre un modelo anisótropo con vectores de longitudes características obtenidos de los siguientes sistemas de ecuaciones

$$|\bar{\mathbf{G}}| \cdot \mathbf{l}_v = |\mathbf{v}| \quad |\nabla \bar{\mathbf{G}}| \cdot \mathbf{l}_t = |\bar{\mathbf{G}}|^t \quad \mathbf{l}_s = \mathbf{C}_s \cdot \Delta \quad (9)$$

Luego encontrando la forma de obtener un vector de longitudes características mínima  $\mathbf{l}$ , que incluyera los efectos de los tres vectores anteriores, se pueden calcular directamente los tensor de esfuerzos de la subescala en la forma

$$\bar{\mathcal{T}}_t = \rho \bar{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{G}}^t \quad \bar{\mathbf{G}} = (\nabla \bar{\mathbf{v}})^t \quad (10)$$

En las expresiones (9) y (10) el símbolo  $|\cdot|$  significa valor absoluto, conservado el tipo de variable sobre la que aplica (no es un operador),  $\bar{\mathbf{G}}$  es el tensor gradiente de velocidad descrito con anterioridad (extendido su significado a campos filtrados, más que promediados) y  $\mathbf{l}$  es un tensor simétrico formado con la diádica del vector  $\mathbf{l}$  de longitudes características. El coeficiente  $\mathbf{C}_s$  es un tensor de segundo orden cuyas componentes, todas positivas, son constantes de Smagorinsky o similares. El vector  $\mathbf{l}$  se podría obtener aplicando las expresiones (7)-(10), por componentes, a los respectivos vectores de longitudes características. La existencia del símbolo de valor absoluto en (9) haciendo a todas las componentes de los vectores de longitudes características sean positivos y que las componentes del tensor de Smagorinsky sean positivas todas, es una restricción cuestionable que merecerá mayores estudios.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Batchelor, G. K. "Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence: I. Eulerian Analysis", **Aust. J. Sci. Res.**, Vol.2, pp.437-450, (1949).
- [2] Batchelor, G. K. "The Application of The Similarity Theory of Turbulence to Atmospheric Diffusion", **Q. J. R. Meteorol. Soc.**, Vol.76, pp.133-146, (1950).
- [3] Batchelor, G. K. "Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence: II. The Relative Motion of Particles", **Proc. Cambridge Philos. Soc.**, Vol.48, pp.345-362, (1952.a).
- [4] Batchelor, G. K. "The Effect of Homogeneous Turbulence on Material Lines and Surfaces", **Proc. R. Soc. London, Serie A**, Vol.213, pp.349-366, (1952.b).
- [5] Batchelor, G. K. **The Theory of Homogeneous Turbulence**. Cambridge University Press, 1982. 3<sup>rd</sup> Printing, 1990.
- [6] Bradshaw, P.; Cebeci, T.; Whitelaw, J. H. **Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow**. Academic Press, 1981.
- [7] Chorin, A. J. **Lectures on Turbulence Theory**. Publish or Perish, Inc., 1975.
- [8] Chorin, A. J. **Vorticity and Turbulence**. Springer-Verlag (New York), 1994.
- [9] Chung, T. J. **Continuum Mechanics**. Prentice-Hall International, Inc., 1988. Cambridge University Press, 1996.
- [10] Durbin, P. A.; Pettersson Reif, B. A. **Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows**. John Wiley & Sons, 2001.
- [11] Frisch, U. **Turbulence**. Cambridge University Press, 1995. Reprint, 1998.
- [12] Frost, W.; Moulden, T. H.; Bitte, J. (Eds.) **Handbook of Turbulence**. Vol.1: "Fundamentals and Applications (Frost & Moulden)". Vol.2: "Modeling and Measurement (Frost, Moulden & Bitte)". Plenum Press (New York), 1977.
- [13] Germano, M.; Piomelli, U.; Moin, P.; Cabot, W. H. "A Dynamical Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model", **Phys. Fluid A**, Vol.3, No.7, pp.1760-1765, (1991).
- [14] Granados, A. L. "Simulacin con "LES" del Flujo Turbulento en una Tubería Rugosa". *II Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas*, Vol.1 y Vol.2, E. Oñate, F. Zárata, G. Ayala, S. Botello, M. A. Moreles (Eds.), Guanajuato, México, 17-19 Enero de 2002, pp.899-910.
- [15] Granados, A. L. **Flujo Turbulento Cargado con Partículas Sólidas en una Tubería Circular**, Tesis Doctoral, Univ. Politécnica de Madrid, E. T. S. Ing. Industriales, 2003.
- [16] Hinze, J. O. **Turbulence**, 2<sup>nd</sup> Edition. McGraw-Hill, Inc., 1975.
- [17] Holmes, Ph.; Lumley, J. L.; Berkooz, G. **Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry**. Cambridge University Press (U.K.), 1996.
- [18] Jones, W. P.; Launder, B. E. "The Prediction of Laminarization With a Two-Equation Model of Turbulence", **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol.15, No.2, pp.301-314, (1972).
- [19] Kolmogorov, A. N. "The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Number". **Dokl. Akad. Nauk SSSR**, Vol.30, pp.299-303, (1941). [En Ruso]
- [20] Lam, C. K. G.; Bremhorst, K. A. "Modified Form of the  $k-\varepsilon$  Model for Predicting Wall Turbulence", **Trans. ASME, J. Fluids Eng.**, Vol.103, pp.456-460, (1981).
- [21] Landahl, M. T.; Mollo - Christensen, E. **Turbulence and Randon Processes in Fluid Mechanics**, Second Edition. Cambridge University Press, 1992.
- [22] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **Fluid Mechanics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Butterworth-Heinemann, 1987.
- [23] Launder, B. E.; Reynolds, W. C.; Rodi, W. Mathieu, J.; Jeandel, D.; **Turbulence Models and Their Applications (Vol.2)**. Editions Eyrolles (París), 1984.



- [24] Launder, B. E.; Spalding, D. B. "The Numerical Computation of Turbulent Flows", **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, Vol.3, pp.269-289, (1974).
- [25] Lesieur, M. **Turbulence in Fluids**, Third Edition. Kluwer Academic Pub, 1997.
- [26] Lilly, D. K. "A Proposed Modification of The Germano Subgrid Scale Closure Method", **Phys. Fluid A**, Vol.4, No.3, pp.633-635, (1992).
- [27] Lumley, J. L. **Stochastic Tools in Turbulence**. Academic Press, 1970.
- [28] Mathieu, J.; Jeandel, D.; Launder, B. E.; Reynolds, W. C.; Rodi, W. **Simulation of Turbulence Models and Their Applications (Vol.1)**. Editions Eyrolles (Paris), 1984.
- [29] Mathieu, J. M.; Scott, J. F. **An Introduction to Turbulent Flow**. Cambridge University Press, 2000.
- [30] Métais, O.; Ferziger, J. H.. **New Tools in Turbulence Modelling**. Springer-Verlag, 1997.
- [31] Monin, A. S.; Yaglom, A. M. **Statistical Fluid Mechanics, Vol.I-II**. The MIT Press, 1971/1975. 4<sup>th</sup>/3<sup>rd</sup> Printing, 1979/1987.
- [32] Moody, L. F. "Friction factors for pipe flow", **Trans. ASME**, Vol.66, p.671, (1944).
- [33] Munson, B. R.; Young, D. F.; Okiishi, T. H. **Fundamentals of Fluid Mechanics**, Fourth Edition, John Wiley & Sons Inc. (New York), 2002.
- [34] Obukhov, A. M. "Spectral Energy Distribution in Turbulent Flow", **Izv. Akad. Nauk SSSR**, Vol.5, pp.453-566, (1941).
- [35] Obukhov, A. M. "Structure of the Temperature Field in a Turbulent Flow", **Izv. Akad. Nauk SSSR**, Vol.13, No.1, pp.58-69, (1949.a).
- [36] Obukhov, A. M. "Pressure Fluctuations in a Turbulent Flow", **Dokl. Akad. Nauk SSSR**, Vol.66, No.1, pp.17-20, (1949.b).
- [37] Ott, S.; Mann, J. "An Experimental Investigation of The Relative Diffusion of Particle Pairs in Three-Dimensional Turbulent Flow", **J. Fluid Mech.**, Vol.422, pp.207-223, (2000).
- [38] Patel, V. C.; Rodi, W.; Scheuerer, G. "Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review", **AIAA J.**, Vol.23, No.9, pp.1308-1319, (1985)
- [39] Peyret, R.; Krause, E. (Eds.) **Advanced Turbulent Flow Computations**. Springer-Verlag (New York), 2000.
- [40] Piquet, J. **Turbulent Flows: Models and Physics**. Springer-Verlag (Berlín/Heidelberg), 1999. Revised 2<sup>nd</sup> printing, 2001.
- [41] Pope, S. B. **Turbulent Flows**. Cambridge university Press, 2000.
- [42] Reynolds, A. J. **Turbulent Flows in Engineering**. John Wiley & Sons, 1974.
- [43] Richardson, L. F. "Atmospheric Diffusion Shown on distance-neighbor Graph", **Proc. R. Soc. London**, Serie A, Vol.110, pp.709-737, (1926).
- [44] Rodi, W. **Turbulence Models and Their Application in Hydraulics: A State of the Art Review**, Third Edition. Institut für Hydromechanik (University of Karlsruhe) - A. A. Balkema (Rotterdam), 1993. Second Print, 2000.
- [45] Sagaut, P. **Large Eddy Simulation for Incompressible Flows** Springer-Verlag ( Berlin / Heidelberg ), 2000.
- [46] Sawford, B. "Turbulent Relative Dispersion", **Annu. Rev. Fluid Mech.**, Vol.33, pp.289-317, (2001).
- [47] Schetz, J. A. **Boundary Layer Analysis**. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [48] Schlichting, H. **Boundary Layer Theory**, 6<sup>th</sup>/7<sup>th</sup> Editions. McGraw-Hill (New York), 1968/79.
- [49] Shames, I. H. **Mecánica de Fluidos**, 3<sup>ra</sup> Edición. McGraw-hill (Bogotá), 1995.
- [50] Slattery, J. C. **Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua**. McGraw-Hill, Inc. 1972.
- [51] Slattery, J. C. **Advanced Transport Phenomena**. Cambridge University Press, 1999.

- [52] Smagorinsky, J. "General Circulation Experiments with The Primitive Equations", **Mon. Weath. Rev.**, Vol.**91**, No.3, pp.99-164, (1963).
- [53] Stanišić, M. M. **The Mathematical Theory of Turbulence**. Springer-Verlag (New York), 1985.
- [54] Tennekes, H.; Lumley, J. L. **A First Course in Turbulence**. The MIT Press, 1972.
- [55] Townsend, A. A. **The Structure of Turbulent Shear Flow**. Cambridge University Press, 1980.
- [56] Van Driest, E. R. "On Turbulence Flow Near a Wall", **Journal of Aerospace Science**, Vol.**23**, p.1007-1011, (1956).
- [57] Von Kármán, Th. "Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz", Nach. Ges. Wiss. Göttingen, **Math. Phys. Klasse**, Vol.**58**, (1930). NACA TM 611, (1931).
- [58] Von Kármán, Th. "On Laminar and Turbulent Friction", **Z. Angew. Math. Mech.**, Vol.**1**, (1921), pp.235-236.
- [59] Weinberger, H. F. **A First Course in Partial Differential Equations**, With Complex Variables and Transform Methods. Dover Publications, 1995.
- [60] White, F. M. **Mecánica de Fluidos**, Quinta Edición. McGraw-Hill (Madrid), 2004.
- [61] Zhang, H.; Faghri, M.; White, F. M. "A New Low-Reynolds-Number  $k - \varepsilon$  Model for Turbulent Flow Over Smooth and Rough Surfaces", **Journal of Fluids Engineering**, Vol.**118**, No.2, pp.255-259, (1996).

# CAPITULO XVI

## RELATIVIDAD

### CONTENIDO

1. RELATIVIDAD ESPECIAL.	351
1.1. Transformaciones Relativistas	351
1.1.1. Transformación de Galileo.	352
1.1.2. Transformación de Lorentz.	352
1.2. Consecuencias de La Relatividad.	353
1.2.1. Contracción del Espacio.	353
1.2.2. Dilatación del Tiempo.	354
1.2.3. Suma de Velocidades.	354
1.2.4. Masa, Momentum y Energía.	355
2. RELATIVIDAD GENERAL.	356
2.1. Ecuaciones Básicas.	356
2.1.1. Formas Cuadráticas y Geodésicas.	356
2.1.2. Campo Estático con Simetría Esférica.	357
2.1.3. Agujero Negro.	358
2.1.4. Orbitas planetarias.	361
2.2. Ecuaciones Generales.	364
2.2.1. Tensor de Energía material.	364
2.2.2. Término Cosmológico.	366
BIBLIOGRAFIA.	367

### 1. RELATIVIDAD ESPECIAL

La *Relatividad Especial* trata de las leyes de la física que permanecen invariantes observadas desde sistemas inerciales. Los sistemas inerciales son representados por sistemas coordenados rectilíneos desplazándose entre sí con velocidad constantes.

#### 1.1. TRANSFORMACIONES RELATIVISTAS

La física relativista se basa en los siguientes postulados:

- Las leyes de la física son las mismas para cualquier observador inercial.
- La velocidad de la luz es la misma para cualquier observador inercial.

El segundo postulado descansa en los resultados experimentales de Michelson & Morley (1887) que intentaba descifrar la existencia de un supuesto éter, medio de propagación de la luz en el vacío, que resultó

en una velocidad de la luz constante sin importar la orientación del interferómetro usado y la no existencia de tal éter. La velocidad de la luz es entonces una constante universal.

### 1.1.1. Transformación de Galileo

La *Transformación de Galileo* entre un sistema  $S'$  en movimiento con una velocidad  $v$ , constante en  $x$ , respecto a un sistema  $S$  en reposo es

$$\begin{aligned} t' &= t & t &= t' \\ x' &= x - vt & x &= x' + vt' \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \end{aligned} \quad (1)$$

La fuerza y la cantidad de movimiento sobre un cuerpo de masa  $m$  se definen como

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \mathbf{p} = m\mathbf{u} \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} - m\mathbf{v} \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad (2)$$

El diferencial de tiempo propio  $\tau$  se define a partir de la forma cuadrática como

$$(cd\tau)^2 = (cdt)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = (cdt')^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) = (cd\tau')^2 \quad (3)$$

y son equivalentes en ambos sistemas y se considera un invariante de la transformación. Cuando es nulo define la propagación de una señal de luz en el vacío a la velocidad de  $c$  constante, observada desde los sistemas  $S$  y  $S'$ .

### 1.1.2. Transformación de Lorentz

La dilatación del tiempo se puede expresar a partir de (3) como [French,1974]

$$(cd\tau)^2 = (cdt)^2 - (v dt)^2 = (cdt)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad dt = \gamma d\tau \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (4)$$

siendo  $\tau$  el tiempo propio que viene a ser el tiempo observado siguiendo a una partícula moviéndose a la velocidad  $v$  respecto a un sistema  $S$  inercial en reposo.

La *Transformación de Lorentz* entre dos sistemas paralelos, el sistema  $S'$  moviéndose a velocidad  $v$  en  $x$  respecto a un sistema  $S$  en reposo, se expresa como

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) & ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) & x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \end{aligned} \quad (5)$$

donde existe un factor adicional  $\gamma$ , definido por (4.c,d), y el tiempo ya no es absoluto como en las transformación de Galileo. La coincidencia de los orígenes de ambos sistemas se ha escogido para simplificar. La velocidad  $v$  puede ser tan elevada como la de la luz  $c$  (nunca superior o igual,  $\gamma > 1$ ), que su relación  $\beta$  ya no es despreciable. Cuando  $v \ll c$ , entonces  $\beta \approx 0$  y  $\gamma \approx 1$ , y en el límite se obtiene la transformación de Galileo. En notación matricial esta transformación se expresa como

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (6)$$

Para cualquier inclinación de la velocidad  $\mathbf{v}$ , se tiene [Jackson,1999]

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} - \boldsymbol{\beta} \gamma ct \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \beta = \|\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{\boldsymbol{\beta}^2} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \boldsymbol{\beta}^2 = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (8)$$

Para el espacio tetradimensional se define el cuatrivector

$$\{\mathbf{x}\} = \begin{Bmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

y la transformación de Lorentz se expresa para sistemas ortonormales como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L} \cdot \mathbf{x} \quad [\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + (\gamma - 1)\beta_x^2/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_x\beta_y/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_x\beta_z/\beta^2 \\ -\gamma\beta_y & (\gamma - 1)\beta_y\beta_x/\beta^2 & 1 + (\gamma - 1)\beta_y^2/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_y\beta_z/\beta^2 \\ -\gamma\beta_z & (\gamma - 1)\beta_z\beta_x/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_z\beta_y/\beta^2 & 1 + (\gamma - 1)\beta_z^2/\beta^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

La transformación inversa se obtiene cambiando el signo de  $\boldsymbol{\beta}$  por relatividad. Una substitución de la transformación de Lorentz en el diferencial del tiempo propio sigue dando que son equivalentes en ambos sistemas y sigue siendo un invariante de la transformación. En el caso de la propagación de la luz el diferencial del tiempo propio es nulo.

## 1.2. CONSECUENCIAS DE LA RELATIVIDAD

Veamos varias de las consecuencias de la relatividad especial, todas ellas derivadas de los dos postulados propuestos al principio.

### 1.2.1. Contracción del Espacio

Sean los dos sistemas inerciales propuestos en la transformación de Lorentz, el sistema móvil  $S'$  moviéndose a una velocidad  $v$  constante en  $x$ , con respecto a otro sistema  $S$  en reposo (denominamos el reposo cualquier movimiento no conocido a priori, pero que no afecta la dinámica del sistema). Colocamos una barra fija de longitud  $l_o$  al sistema  $S'$  orientada en  $x'$ , de tal forma que las coordenadas de sus extremos son  $x'_1$  y  $x'_2 = x'_1 + l_o$ , es decir,

$$l_o = x'_2 - x'_1 \quad (1)$$

Substituyamos la transformación de Lorentz 1.1.(5.a) para un único instante  $t$ , lo que nos daría como observamos la barra desde  $S$  para un instante  $t$ . Esto es,

$$l_o = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l \quad (2)$$

donde  $l = x_2 - x_1$  es la longitud de la barra como la observamos desde  $S$  en el instante  $t$ , para el cual los extremos de la barra están distanciados en el tiempo  $\Delta t' = -\gamma\beta l/c = -\beta l_o/c$ . Este resultado lo expresamos como

$$l = \frac{l_o}{\gamma} \quad (3)$$

En otras palabra, desde  $S$  observamos la barra de longitud  $l$  menor (originamente de longitud  $l_o$  en el sistema  $S'$ ) como si ésta se hubiese contraído en un factor  $1/\gamma < 1$ . Por relatividad, el mismo resultado hubiésemos obtenido si colocamos la barra fija al sistema  $S$  y la observamos desde el sistema  $S'$  para un único instante

$t'$ . En este caso  $l_o = x_2 - x_1$  y  $l = x'_2 - x'_1$ . En la dirección transversal al movimiento no existe contracción alguna. Estos resultados pueden resumirse como “las longitudes más largas son las observadas desde sistemas inerciales en reposo”.

### 1.2.2. Dilatación del Tiempo

Sean los mismos dos sistema, el sistema  $S'$  desplazándose en  $x$  a una velocidad  $v$  respecto al sistema  $S$ . Una señal de luz originada en el suelo del sistema en  $S'$  recorre una distancia vertical  $c \Delta t'$ . La misma señal observada desde el sistema  $S$  recorre un camino recto pero oblicuo o inclinado de longitud  $c \Delta t$ , que viene a ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyo cateto opuesto al origen de la señal es la vertical mencionada antes de longitud  $c \Delta t'$  y el cateto adyacente de longitud  $v \Delta t$ . Aplicamos el teorema de Pitágoras a este triángulo rectángulo

$$(c \Delta t)^2 = (v \Delta t)^2 + (c \Delta t')^2 \quad (4)$$

Despejamos  $\Delta t'$  y nos da

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (5)$$

Expresamos este resultado como

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} \quad (6)$$

Es decir, el tiempo  $\Delta t'$  es más corto que el tiempo  $\Delta t$  y es equivalente a decir que los relojes en movimiento se retrasan respecto a los relojes en reposo. O sea que el tiempo pasa más lento para el observador (en  $x'$  fijo) en movimiento en el sistema  $S'$ , que para el observador en reposo en el sistema  $S$ , donde habrá habido un desplazamiento  $\Delta x = v \Delta t$ . Este mismo resultado se obtiene de la transformación de Lorentz 1.1.(5.b) donde los lapsos de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  y  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$  se observan desde el sistema  $S'$  en un punto  $x'$  fijo. O sea, que el sistema  $S$  se mueve con respecto al sistema  $S'$  con velocidad  $-v$ , si asumimos al sistema  $S'$  en reposo. Por relatividad, un resultado equivalente se obtendrá si la señal vertical se produce en el suelo del sistema  $S$  y se observa desde  $S'$ . Solo que para este caso la hipotenusa es  $c \Delta t'$  y los catetos opuesto y adyacente son  $c \Delta t$  y  $v \Delta t'$ , respectivamente. Observado desde el sistema  $S'$  es como si el sistema  $S$  se moviera con velocidad  $-v$  y por eso su tiempo  $\Delta t$  es más corto para un punto fijo  $x$ . Estos resultados pueden resumirse como “los lapsos de tiempos más cortos son los observados desde sistemas inerciales en reposo”.

### 1.2.3. Suma de Velocidades

La aplicación de dos transformaciones de Lorentz consecutivas, una con velocidad  $v_1$  y la otra con velocidad  $v_2$  dan como resultado una transformación equivalente de de velocidad  $v$ , siendo todas estas velocidades colineales. El resultado es una transformación de Lorentz de velocidad

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \quad (7)$$

o lo que es equivalente

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (8)$$

Si alguna de las velocidades  $v_1$  o  $v_2$  es igual a  $c$ , entonces el resultado es que  $v$  es igual a  $c$ . De acuerdo a esta regla de suma de velocidades de transformaciones de Lorentz es imposible obtener velocidades iguales o superiores a la velocidad de la luz ( $v < c$ ) y  $\beta$  siempre es inferior a la unidad.

Sean  $u_x = dx/dt$ ,  $u_y = dy/dt$  y  $u_z = dz/dt$  las componentes de la velocidad  $\mathbf{u}$  de una partícula observada desde un sistema inercial  $S$  en reposo. Sean  $u'_x = dx'/dt$ ,  $u'_y = dy'/dt$  y  $u'_z = dz'/dt$  las componentes de la velocidad  $\mathbf{u}'$  de la misma partícula observada desde un sistema inercial  $S'$  paralelo, moviéndose con

velocidad  $v$  en  $x$  respecto a  $S$ . A partir de las transformación de Lorentz 1.1.(5) se pueden obtener las relaciones entre ambas velocidades como [French,1974]

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} & u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} & u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} & u_z &= \frac{u'_z}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)} \end{aligned} \quad (9)$$

donde se establece que la composición de las velocidades  $\mathbf{u}'$  y  $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{e}}_x$  da una velocidad  $\mathbf{u}$  que en ningún caso debe superar el valor de  $c$  (en su módulo).

Cuando se conoce la velocidad  $\mathbf{u}'$  respecto al sistema  $S'$  y se desea conocer la misma velocidad respecto al sistema  $S$ , sabiendo que  $S'$  se desplaza respecto a  $S$  a una velocidad  $\mathbf{v}$ , entonces el resultado es el siguiente [Jackson,1999]

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}/c^2} \quad \mathbf{u}_{\perp} = \frac{\mathbf{u}'_{\perp}}{\gamma(1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}/c^2)} \quad (10)$$

La notación  $u_{\parallel}$  y  $\mathbf{u}_{\perp}$  se refieren a las componentes de la velocidad  $\mathbf{u}$  paralela y perpendicular, respectivamente, a la velocidad  $\mathbf{v}$ . Como puede observarse las expresiones (10) son la generalización de las expresiones del lado derecho de (9). La composición inversa de las velocidades, es decir las componentes de la velocidad  $\mathbf{u}'$  en función de las componentes de la velocidad  $\mathbf{u}$ , se obtiene cambiando el signo a  $\mathbf{v}$ .

#### 1.2.4. Masa, Momentum y Energía

Una consecuencia importantísima de la relatividad especial es la reformulación de los conceptos de masa y energía. Ya no se conserva una u otra, sino que son intercambiables. La masa de un cuerpo ya no es constante sino variable con la velocidad. Si designamos como  $m_o$  a la masa en reposo y a  $m$  a la masa en movimiento, entonces

$$\begin{aligned} m &= \gamma m_o \\ \mathbf{p} &= m \mathbf{v} \\ E &= m c^2 \\ \mathcal{K} &= E - E_o \end{aligned} \quad (11)$$

siendo  $E_o = m_o c^2$  es la energía en reposo y  $\mathcal{K}$  es la energía cinética. La fuerza viene determinada por

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (12)$$

al igual que en la mecánica no relativista, pero con la masa  $m$  dependiente de la velocidad.

En relatividad se definen las *velocidades de Minkowski*, los *momentos de Minkowski* y las *fuerzas de Minkowski* de la forma

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} i\gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad \{\wp\} = \{m_o \mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} iE/c \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \quad \{\mathcal{F}\} = \begin{Bmatrix} i\gamma \dot{E}/c \\ \gamma \mathbf{F} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

donde la fuerza de Minkowski se obtiene como

$$\mathcal{F} = \frac{d\wp}{d\tau} \quad (14)$$

siendo la derivada calculada con respecto al tiempo propio  $\tau$ . Como se observa (13.b) las cantidades de Minkowski trasladan la variabilidad de la masa a la velocidad. Las cantidades de Minkowski satisfacen las siguientes igualdades

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -c^2 \quad \mathcal{F} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \wp \cdot \wp = -m^2 c^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - \frac{E^2}{c^2} \quad (15)$$

La forma de la expresión para la energía (11.c, d) se justifica con la siguiente deducción

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \int_{\mathbf{r}_o}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_o}^{\mathbf{r}} \frac{d}{dt} (\gamma m_o \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} = m_o \int_{t_o}^t \left( \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \gamma \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dt \\ &= m_o c^2 \int_{t_o}^t \left( \frac{d\gamma}{dt} \beta^2 + \gamma \beta \dot{\beta} \right) dt = m_o c^2 \int_{t_o}^t (\beta^3 \dot{\beta} \gamma^3 + \beta \dot{\beta} \gamma) dt \\ &= m_o c^2 \int_{t_o}^t \beta \dot{\beta} \gamma^3 dt = m_o c^2 \int_{\beta_o}^{\beta} \beta \gamma^3 d\beta = m_o c^2 \int_{\gamma_o}^{\gamma} d\gamma = (\gamma - 1) m_o c^2 = mc^2 - m_o c^2 \end{aligned} \quad (16)$$

donde se considera que se ha acelerado un cuerpo de masa  $m$  desde el reposo, por lo que  $\beta_o = 0$  y  $\gamma_o = 1$ .

## 2. RELATIVIDAD GENERAL

La *Relatividad General* trata de sistemas en presencia de la gravedad por lo que es conveniente el uso de coordenadas curvilíneas, ya que la masa le dice al espacio como curvarse y el espacio le dice a la masa o la luz como moverse.

### 2.1. ECUACIONES BASICAS

#### 2.1.1. Forma Cuadrática y Geodésicas

La forma cuadrática fundamental es

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1)$$

En el espacio cartesiano esta forma se convierte en

$$ds^2 = (c dt)^2 - dy^i dy^j \quad (2)$$

En el espacio-temporal con simetría esférica estática la forma cuadrática adquiere la siguiente expresión

$$ds^2 = (c dt)^2 - (dr)^2 - r^2 (d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (3)$$

donde  $(t, r, \theta, \phi)$  son las coordenadas esféricas convencionales, con  $r$  la posición radia desde el origen y  $\theta$  y  $\phi$  los ángulos cenital y acimutal, respectivamente. En la ausencia de gravedad o muy lejos de su influencia, ésta debe ser la forma para cualquier desplazamiento en línea recta.

Sean  $\lambda^i = dx^i/ds$  las componentes de los vectores tangentes unitarios de una trayectoria geodésica ( $g_{ij} \lambda^i \lambda^j = 1$ ), entonces las derivadas intrínsecas B.2.1.(13) con respecto a  $s$  de dichas componentes se anulan, puesto que los vectores tangentes sufren un desplazamiento paralelo a lo largo de una geodésica. Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \lambda^i}{\delta s} &= \frac{d\lambda^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i \lambda^j \lambda^k = \lambda^i_{;k} \lambda^k \\ &= \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$



### 2.1.2. Campo Estático con Simetría Esférica

El tensor de Einstein B.1.2.(22) para este caso es nulo

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 0 \quad (5)$$

Estas son la ecuaciones gravitacionales de Einstein (1916). Cuando contraemos esta ecuación multiplicándola por  $g^{ij}$  se obtiene que  $R - 4R/2 = 0$ , de modo que  $R = 0$  y en consecuencia

$$R_{ij} = 0 \quad (6)$$

Son análogas a la ecuación de Laplace  $\nabla^2 U = g^{ij} U_{,ij} = 0$  que satisface el potencial newtoniano.

Una solución a estas ecuaciones gravitacionales [Schwarzschild,(1916)] propuso modificar la forma cuadrática (3) en los términos temporal y radial, con funciones dependientes únicamente del radio, de la siguiente manera

$$ds^2 = f(r) (c dt)^2 - g(r) (dr)^2 - r^2 (d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (7)$$

donde hemos adoptado una nueva unidad para la velocidad de la luz  $c$ , de modo que sea 1. Los términos cruzados se han omitido de la fórmula (7) puesto que  $ds^2$  debe ser independiente de los signos de  $d\theta$  y  $d\phi$  por simetría esférica y del mismo modo excluimos los términos con  $dt$ , puesto que admitimos que el campo es estático y reversible en el tiempo por lo que debe ser independiente del signo de  $dt$ .

Para el cálculo la funciones  $f$  y  $g$  adoptan la convenientes formas [Sokolnikoff,1979]

$$f(r) = e^{\mu(r)} \quad g(r) = e^{\lambda(r)} \quad (8)$$

tales que  $\mu, \lambda \rightarrow 0$ , mientras  $f, g \rightarrow 1$ , cuando  $r \rightarrow \infty$ . El tensor métrico para esta forma es

$$g_{00} = e^{\mu} \quad g_{11} = -e^{\lambda} \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad (9)$$

Los demás términos fuera de la diagonal principal son nulos. El determinante  $g$  del tensor métrico es

$$g = g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} = -e^{\mu+\lambda} r^4 \sin^2 \theta \quad (10)$$

Como es negativo, es conveniente introducirlo en las fórmulas como  $\sqrt{|g|}$  y no como originalmente aparece.

Para establecer las ecuaciones (6), construyamos los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \lambda' & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} \mu' & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda} & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{\mu-\lambda} \mu' \end{aligned} \quad (11)$$

donde los acentos indican derivación respecto a  $r$ . Ahora podemos substituir estos símbolos en las fórmulas del tensor de Ricci B.1.2.(19) y obtener, después de cálculos tediosos pero simples, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} R_{00} &= -e^{\mu-\lambda} \left\{ \frac{1}{2} [\mu'' + \frac{\mu'}{2} (\mu' - \lambda')] + \frac{\mu'}{r} \right\} = 0 \\ R_{11} &= \frac{1}{2} [\mu'' + \frac{\mu'}{2} (\mu' - \lambda')] - \frac{\lambda'}{r} = 0 \\ R_{22} &= e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{r}{2} (\mu' - \lambda') \right] - 1 = 0 \\ R_{33} &= \sin^2 \theta \{ e^{-\lambda} [1 + \frac{r}{2} (\mu' - \lambda')] - 1 \} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

El resto de las componentes del tensor de Ricci son también nulos aunque no generan ecuaciones.

La anulación de las dos primeras expresiones de (12) conlleva a que

$$\mu' + \lambda' = 0 \quad (13)$$

Para  $r$  grandes ambas funciones  $\mu$  y  $\lambda$  se deben anular, así que la integración

$$\mu + \lambda = 0 \quad (14)$$

nos da un constante de integración nula. Las dos últimas expresiones de (12), incorporando lo anterior, nos da que

$$e^\mu (1 + r \mu') = 1 \quad (15)$$

Hagamos

$$\gamma = e^\mu \quad (16)$$

y la ecuación (15) se convierte en

$$\gamma + r \gamma' = 1 \quad (17)$$

Integrando esta ecuación lineal de primer orden, tenemos

$$e^\mu = \gamma = 1 - \frac{2m}{r} \quad e^\lambda = \gamma^{-1} \quad (18)$$

donde la constante de integración se ha escogido conveniente para que  $m$  represente la masa de un cuerpo centrado en  $r = 0$ . La forma cuadrática (7) queda finalmente como

$$ds^2 = \gamma (c dt)^2 - \gamma^{-1} (dr)^2 - r^2 (d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (19)$$

siendo

$$g_{00} = \gamma = e^\mu = 1 + 2U \quad g_{11} = -\gamma^{-1} = -e^\lambda \quad U = -\frac{m}{r} \quad (20)$$

que es la tendencia newtoniana y satisface la ecuación de Laplace  $\nabla^2 U = 0$  para el potencial  $U$ . En las ecuaciones (18)-(20) se ha utilizado un sistema de unidades tal que  $m$  tiene dimensiones de longitud y  $U$  es adimensional. En un sistema de unidades consistente (cgs o MKS), la masa  $\tilde{m}$  en unidades de masa y  $\tilde{U}$  en unidades de velocidad <sup>2</sup>, vendrían calculadas con las siguientes expresiones  $m = \tilde{m} K/c^2$  y  $U = \tilde{U}/c^2$ , donde  $K$  es la constante (Gauss) de la gravitación universal [Rindler,2006]. Entonces  $\tilde{m}$  sería la masa real del cuerpo centrado y el potencial  $\tilde{U} = -K \tilde{m}/r = c^2 U$  sería el newtoniano. Para la tierra se tiene que  $m = \tilde{M}_t K/c^2 = 4.4347 \times 10^{-1} cm$  con  $\tilde{M}_t = 5.9722 \times 10^{27} g^1$  y para el sol  $m = \tilde{M}_s K/c^2 = 1.477 \times 10^5 cm$  con  $\tilde{M}_s = 1,9891 \times 10^{33} g^1$ , siendo  $K = 6.67384 \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}$  la constante de la gravitación universal y  $c = 2.99792458 \times 10^{10} cm^1 s^{-1}$  la velocidad de la luz en el vacío.

### 2.1.3. Agujero Negro

La solución (19) se vuelve singular en  $r = 2m$ , porque  $g_{00} = \gamma = 0$  y  $g_{11} = -\gamma^{-1} \rightarrow -\infty$ . Pareciese que  $r = 2m$  es un radio mínimo para un cuerpo de masa  $m$ , pero realmente es un umbral de discontinuidad por debajo del cual se denomina *agujero negro*, asumiendo que la masa está concentrada en un punto  $r = 0$ . Lo que haremos en esta sección es transformar el sistema de coordenadas  $(ct, r)$  por otro  $(c\tau, r)$  tal que desaparezca la mencionada discontinuidad.

Considérese una partícula cayendo radialmente con una velocidad  $(v^0, v^1, 0, 0)$  determinada por las ecuaciones (4). Particularmente, esto es

$$\frac{dv^0}{ds} = -g^{00} g_{00,1} v^0 v^1 = -g^{00} \frac{dg_{00}}{ds} v^0 \quad (21)$$

Ahora  $g^{00} = g_{00}^{-1}$ , así que

$$g_{00} \frac{dv^0}{ds} + \frac{dg_{00}}{ds} v^0 = \frac{d(g_{00}v^0)}{ds} = 0 \quad (22)$$

y luego de integrar da una constante

$$g_{00}v^0 = \zeta \quad (23)$$

condicionada por los valores iniciales  $g_{00}$  y  $v^0$  de la partícula al comenzar a caer.

Otra vez de (1) tenemos

$$g_{ij}v^i v^j = g_{00}(v^0)^2 + g_{11}(v^1)^2 = 1 \quad (24)$$

Multiplicando por  $g_{00}$  y usando que  $g_{00}g_{11} = -1$  encontramos que  $\zeta^2 - (v^1)^2 = g_{00} = \gamma$  y tomando la solución negativa para  $v^1$ , debido a que la partícula va cayendo, obtenemos  $(\gamma(r) = 1 - 2m/r)$

$$v^0 = \zeta\gamma^{-1} \quad v^1 = -(\zeta^2 - \gamma)^{1/2} \quad (25)$$

Ahora la relación

$$\frac{dt}{dr} = \frac{v^0}{v^1} = -\zeta\gamma^{-1}(\zeta^2 - \gamma)^{-1/2} \quad (26)$$

nos da una idea de lo que le pasa a la partícula en la cercanía  $r = 2m + \varepsilon$ , con  $\varepsilon$  pequeño, del radio crítico. Entonces,  $dt/dr = -2m/\varepsilon = -2m/(r - 2m)$  e integrando  $t = -2m \ln(r - 2m) + C$ , así que  $r \rightarrow 2m$  y  $t \rightarrow \infty$  y la partícula toma un tiempo infinito en alcanzar el radio crítico  $r = 2m$ .

Supongamos que la partícula está emitiendo una señal de luz intermitente y está siendo observada por alguien ubicado en el infinito ( $r$  grande). Se observa que la luz se ha desviado hacia el infrarojo por un factor  $g_{00}^{-1/2} = \gamma^{-1/2} = (1 - 2m/r)^{-1/2}$ . Este factor se convierte en infinito al acercarse la partícula a  $r = 2m$ . Todo el proceso sobre la partícula será observado yendo cada vez más lento en la medida que se acerca más al radio crítico. Hasta que al pasar por el mismo, la partícula se observa como si la intermitencia se detuviera.

Ahora consideremos a un observador viajando junto con la patícula. Su escala del tiempo es medida por  $ds$ . Como

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{v^1} = -(\zeta^2 - \gamma)^{-1/2} \quad (27)$$

y esto tiende a  $-\zeta^{-1}$  en la medida que  $r$  tiende a  $2m$ , la partícula alcanza el radio crítico en un tiempo propio finito para el observador moviéndose con la partícula. Qué pasa con la partícula después?. Ella sigue viajando por el espacio vacío a valores menores de  $r$  [Dirac,1996].

Para examinar la continuación de la solución de Schwarzschild para valores de  $r < 2m$ , es necesario utilizar otro sistema de coordenadas no estático donde  $g_{00}$  y  $g_{11}$  dependen del tiempo. Mantenemos inalteradas las coordenadas en  $\theta$  y  $\phi$ , pero en lugar de  $ct$  y  $r$  como en (19), proponemos un cambio de coordenadas  $c\tau$  y  $r$ , que remueva la singularidad antes encontrada, definidas por

$$c\tau = ct + f(r) \quad r = ct + g(r) \quad (28)$$

donde las funciones  $f(r)$  y  $g(r)$  están a nuestra disposición.

Entonces, para mantener invariante la forma cuadrática con este cambio de coordenadas, se debe satisfacer que  $(h(r) = 2m/r, \gamma(r) = 1 - h(r))$

$$\begin{aligned} (cd\tau)^2 - h(dr)^2 &= (cdt + f'dr)^2 - h(cdt + g'dr)^2 \\ &= \gamma(cdt)^2 + 2(f' - hg')(cdt)(dr) + (f'^2 - hg'^2)(dr)^2 \\ &= \gamma(cdt)^2 - \gamma^{-1}(dr)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

para lo cual se deben imponer las siguientes condiciones para escoger las funciones  $f$  y  $g$

$$f' - h g' = 0 \quad f'^2 - h g'^2 = -\gamma^{-1} \quad (30)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para  $f'$  y  $g'$  se obtiene

$$f' = h g' = h^{1/2} \gamma^{-1} \quad g' = h^{-1/2} \gamma^{-1} \quad (31)$$

Para integrar esta ecuación, hacemos  $r = y^2$  y  $2m = a^2$ , con lo cual tenemos

$$\frac{dg}{dy} = 2y \frac{dg}{dr} = \frac{2}{a} \frac{y^4}{y^2 - a^2} \quad g = \frac{2}{3a} y^3 + 2a y - a^2 \ln \left| \frac{y+a}{y-a} \right| \quad (32)$$

Finalmente, de (31), se obtiene

$$g' - f' = \gamma g' = h^{-1/2} \quad g - f = r - c\tau = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2m}} r^{3/2} \quad (33)$$

La expresión de la derecha se ha obtenido de integrar la izquierda. Despejando  $r$  queda

$$r = \mu (r - c\tau)^{2/3} \quad \mu = \left( \frac{3}{2} \sqrt{2m} \right)^{2/3} \quad (34)$$

De esta forma se puede ver claramente que se satisfacen las condiciones (30) y se puede usar (29). Substituyendo esto dentro de la solución de Schwarzschild (19) en las nuevas coordenadas  $\tau$  y  $r$  como lo indica (29), se obtiene

$$\begin{aligned} ds^2 &= (cd\tau)^2 - h(dr)^2 - r^2 [(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2] \\ &= (cd\tau)^2 - \frac{2m}{\mu(r - c\tau)^{2/3}} (dr)^2 - \mu^2(r - c\tau)^{4/3} [(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2] \end{aligned} \quad (35)$$

El valor crítico  $r = 2m$  corresponde, de (33), a  $r - c\tau = 4m/3$  y ya no existe singularidad en las métricas de (35).

Sabemos que la forma cuadrática (35) satisfacen las ecuaciones de Einstein para el espacio vacío en la región  $r > 2m$ , porque puede transformarse a la solución de Schwarzschild mediante un simple cambio de coordenadas. Podemos inferir que satisfacen también las ecuaciones de Einstein para  $r \leq 2m$  por continuidad analítica, porque ya no envuelve cualquier singularidad en  $r = 2m$ . Se puede continuar para  $r$  menores inclusive hasta  $r = 0$  o equivalentemente hasta  $r - c\tau = 0$ .

La singularidad aparece en la conexión entre las nuevas coordenadas y las originales, ecuación (28). Pero una vez que se han establecido las nuevas coordenadas, podemos descartar las anteriores y la singularidad ya no aparece más.

Vemos que la solución de Schwarzschild para el espacio vacío pueden extenderse hasta la región  $r \leq 2m$ . Pero esta región ya no puede comunicarse con el espacio para el cual  $r > 2m$ . Cualquier signo, inclusive la luz, le tomará un tiempo infinito cruzar la frontera  $r = 2m$ , como se puede chequear. Así no tenemos directo conocimiento observacional de la región  $r < 2m$ . Tal región es denominada *agujero negro*, porque cualquier cosa que cae adentro de ella (tomando un tiempo infinito, según nuestros relojes, en hacerlo), no puede escapar de ahí.

La cuestión surge si tal región realmente existe. Lo que si realmente se puede decir sobre ella de forma definitiva es que las ecuaciones de Einstein lo permiten. Un objeto estelar masivo puede colapsar en un pequeño radio y las fuerzas gravitacionales convertirse en fuerzas extraordinariamente grandes, que ninguna fuerza física pueda evitar que ocurra el colapso. Parecería que tendría que colapsar en un agujero negro.

Tomaría un tiempo infinito en hacerlo medido por nuestros relojes, pero un tiempo relativamente finito visto desde la misma materia colapsada.

#### 2.1.4. Orbitas Planetarias

Estamos en la posición de determinar la trayectoria de una partícula que se mueve en un campo estático con simetría esférica determinado por la forma cuadrática (19). La trayectoria de la partícula es una geodésica de modo que tenemos que resolver el sistema de ecuaciones (4) con  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$  y  $x^3 = \phi$  con los valores de los símbolos de Christoffel por (11) juntos con las funciones (18). De acuerdo a esto, tenemos para las coordenadas mencionadas  $t$ ,  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  ( $\gamma = 1 - 2m/r \neq 0$ ,  $c = 1$ )

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{ds} \frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \gamma \frac{dt}{ds} \right) = 0 \quad (36.a)$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{1}{2\gamma} \frac{d\gamma}{dr} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - \gamma r \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \gamma r \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 + \frac{\gamma}{2} \frac{d\gamma}{dr} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 \quad (36.b)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \cos \theta \sin \theta \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0 \quad (36.c)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (36.d)$$

Vamos a probar que la solución de la ecuación (36.c) es

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \frac{d\theta}{ds} = 0 \quad \frac{d^2\theta}{ds^2} = 0 \quad (37)$$

Dado que  $dt/ds \neq 0$  y la condición inicial para  $\theta = \pi/2$  es  $d\theta/dt = 0$ , entonces  $d\theta/ds = (d\theta/dt)(dt/ds) = 0$ , por lo que, de la ecuación (36.c), resulta que  $d^2\theta/ds^2 = 0$ . El resultado correspondiente en el caso newtoniano es obvio, puesto que, bajo el convenio de fuerza central, no puede haber componente de la fuerza en la normal al plano de movimiento. De este modo, si el movimiento se estableció desde el inicio en el plano  $\pi/2$  (plano  $x - y, z = 0$ ), continúa en ese plano.

Si sustituimos la solución para  $\theta = \pi/2$  en la ecuación (36.d), tenemos

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (38)$$

y si integramos las ecuaciones (36.a) y (38), resultan

$$\frac{dt}{ds} = \frac{a}{\gamma} \quad \frac{d\phi}{ds} = \frac{h}{r^2} \quad (39)$$

donde  $a$  y  $h$  son constantes arbitrarias de la integración. La constante  $h$  tiene dimensiones de longitud y la constante  $a$  es adimensional. Particularmente,  $\tilde{h} = hc/2$  ( $\text{cm}^2\text{s}^{-1}$ ) es la *velocidad areolar*, la velocidad de barrido de área del radio vector  $r$  por unidad de tiempo y considerada constante en la Segunda Ley de Kepler. La velocidad areolar se calcula como  $\tilde{h} = |\mathbf{r} \times \mathbf{\tilde{v}}|/2 = r \tilde{v}_\phi/2$ , siendo  $\tilde{v}^2 = \tilde{v}_r^2 + \tilde{v}_\phi^2$  y  $\tilde{v}_\phi = r\dot{\phi}$ .

Substituyendo en la ecuación (36.b), los resultados (39), tenemos

$$\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{1}{2\gamma} \frac{d\gamma}{dr} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - \gamma r \left( \frac{h}{r^2} \right)^2 + \frac{\gamma}{2} \frac{d\gamma}{dr} \left( \frac{a}{\gamma} \right)^2 = 0 \quad (40)$$

La expresión para  $(dr/ds)^2$  que aparece en la expresión anterior se puede obtener a partir de la fórmula (19), utilizando (37) y (39). De esto tendremos que

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = a^2 - \gamma \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right) \quad (41)$$

que luego de substituir en (40) nos da

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{m}{r^2} = \frac{h^2}{r^3} \left(1 - \frac{3m}{r}\right) \quad (42)$$

puesto que  $\gamma = 1 - 2m/r$ . Pero aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \quad \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r}{d\phi^2} \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + \frac{dr}{d\phi} \frac{d^2\phi}{ds^2} = \frac{h^2}{r^4} \left[\frac{d^2r}{d\phi^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2\right] \quad (43)$$

donde hemos hecho uso de la ecuación (39.b).

De este modo la ecuación (42) se puede escribir en la forma

$$\frac{h^2}{r^4} \left[\frac{d^2r}{d\phi^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2\right] + \frac{m}{r^2} = \frac{h^2}{r^3} \left(1 - \frac{3m}{r}\right) \quad (44)$$

Si introducimos una nueva variable  $u = 1/r$ , de manera que

$$\frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \quad \frac{d^2r}{d\phi^2} = \frac{2}{u^3} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - \frac{1}{u^2} \frac{d^2u}{d\phi^2} \quad (45)$$

entonces la ecuación (44) se reduce a [Sokolnikoff,1979]

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 = \frac{m}{h^2} (1 + 3h^2u^2) \quad (46)$$

Esta ecuación junto con (39.b) nos bastan para determinar la trayectoria de la orbita planetaria de una partícula alrededor de un cuerpo centrado ( $r = 0$ ) de masa  $m = K \tilde{m}/c^2$  y velocidad areolar  $h = 2\tilde{h}/c$ , siendo  $K = 6.67384 \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}$  la constante de la gravitación universal y  $c = 2.99792458 \times 10^{10} cm^1 s^{-1}$  la velocidad de la luz en el vacío.

La ecuación relativista (46) difiere de la correspondiente clásica sólomente en el segundo término del miembro de la derecha. Este término es el causante de la precesión del perihelio y si se descarta simplemente no hay precesión. La relación entre los dos términos  $(3mu^2)/(m/h^2) = 3h^2u^2 = 3(r d\phi/ds)^2$  determina cuando es importante este nuevo término de corrección. Para las velocidades planetarias ordinarias esta relación es pequeña. Por ejemplo, el radio de la órbita terrestre es  $r = 1.5 \times 10^{13} cm$ , la velocidad angular es  $d\phi/dt = 2 \times 10^{-7} rad/s$  y, si tomamos en primera aproximación  $dt/ds = 1/c$ , encontramos que el valor de la relación es del orden de  $10^{-8}$ . Para el movimiento de Mercurio el término  $K\tilde{m}/\tilde{h}^2$  es del orden de  $10^{-12}$ , mientras que el término  $3\tilde{m}u^2/c^2$  es del orden de  $10^{-21}$ , dando una relación de  $10^{-9}$ , también pequeña, pero el efecto acumulativo es importante. Mercurio tiene un período de 88 días, completa 415 revoluciones por siglo. De este modo el avance del perihelio durante 100 años vale  $415\epsilon = 2.04 \times 10^{-4} rad = 42''$  de arco. Para otros planetas distintos de Mercurio el avance acumulativo del perihelio en un siglo se estima para Venus en  $9''$ , para la Tierra en  $4''$  y para Martes en  $1''$ .

Como consecuencia, en el movimiento planetario ordinario, el término de corrección en la ecuación relativista (46) es despreciable en cuanto a la forma de la órbita se refiere, pero la influencia de este término

en el comportamiento acumulativo del perihelio es importante, siendo un ángulo de precesión de  $\epsilon = 6\pi m^2/h^2$  radianes establecido durante cada revolución. En lo que sigue veremos como obtener este resultado aplicando el método de aproximaciones sucesivas.

La ecuación relativista para la órbita de un planeta (46) tiene un término de corrección  $3h^2u^2$  que es pequeño en comparación a la unidad y esto justifica el método de aproximaciones sucesivas que vamos a utilizar. La primera aproximación la obtendremos de despreciar justamente ese término. Llamemos a esta aproximación  $u_1$  y sería la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{m}{h^2} \quad (47)$$

con

$$u_1 = \frac{m}{h^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_o)] \quad (48)$$

donde  $e$  es la excentricidad de la órbita elíptica y  $\phi_o$  es la longitud angular que identifica el perihelio. Substituyamos la solución  $u_1$  en el segundo miembro de (46) por lo que tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\phi^2} + u &= \frac{m}{h^2} + 3m u_1^2 \\ &= \frac{m}{h^2} + \frac{3m^3}{h^4} + \frac{6m^3}{h^4} e \cos(\phi - \phi_o) + \frac{3m^3}{2h^4} e^2 [1 + \cos 2(\phi - \phi_o)] \end{aligned} \quad (49)$$

Puesto que las órbitas planetarias son casi circulares (para Mercurio  $e = 0.04$ ), la contribución del término que contiene  $e^2$  es despreciable. También el término con  $3m^3/h^4$  tiene un efecto insignificante en la forma orbital, pero el término que contiene  $\cos(\phi - \phi_o)$ , puede tener un efecto acumulativo en el desplazamiento del perihelio. Teniendo en cuenta todo esto, simplificamos la ecuación (49) escribiendo en su lugar

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{6m^3}{h^4} e \cos(\phi - \phi_o) \quad (50)$$

La solución de esta ecuación es entonces  $u = u_1 + u_2$ , la segunda aproximación, donde  $u_2$  se obtiene de resolver la siguiente ecuación diferencial (esto se puede hacer ya que el operador diferencial es lineal)

$$\frac{d^2u_2}{d\phi^2} + u_2 = \frac{6m^3}{h^4} e \cos(\phi - \phi_o) \quad (51)$$

con

$$u_2 = \frac{3m^3}{h^4} e \phi \sin(\phi - \phi_o) \quad (52)$$

El resultado completo de la segunda aproximación es

$$u = u_1 + u_2 = \frac{m}{h^2} \left[ 1 + e \cos(\phi - \phi_o) + \frac{3m^2}{h^2} e \phi \sin(\phi - \phi_o) \right] \quad (53)$$

Este paso ya es suficiente para nuestro propósito de determinar la secuencia de aproximaciones sucesivas y consideramos que (53) representa la solución de (46) con suficiente aproximación. Si ponemos

$$\delta\phi_o = \frac{3m^2}{h^2} \phi \quad (54)$$

y observamos que

$$\cos(\phi - \phi_o) + \delta\phi_o \sin(\phi - \phi_o) = \sqrt{1 + (\delta\phi_o)^2} \cos(\phi - \phi_o - \alpha) \quad (55)$$

donde  $\alpha = \arctan(\delta\phi_o) \approx \delta\phi_o$ , escribimos (53) como

$$u \approx \frac{m}{h^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_o - \delta\phi_o)] \quad (56)$$

si despreciamos los términos del orden  $(\delta\phi_o)^2$  en comparación con la unidad. Es evidente que, a partir de las ecuaciones (54) y (56), que cuando un planeta se mueve en una revolución  $\phi = 2\pi$ , por (54) el perihelio avanza un ángulo

$$\epsilon = \frac{6\pi m^2}{h^2} \quad (57)$$

La ecuación (56) representa una órbita cerrada, sólo aproximadamente elíptica en su forma, ya que  $\delta\phi_o$  es función (54) de  $\phi$ .

Puesto que  $u = 1/r$ , tenemos

$$r = \frac{h^2/m}{1 + e \cos(\phi - \phi_o - \delta\phi_o)} \quad (58)$$

de modo que el parámetro  $l = h^2/m$  está ligado a la elipse a través de la geometría de la cónica donde  $l = a(1 - e^2)$ , siendo  $a$  el semieje mayor. De esta forma tenemos

$$l = \frac{h^2}{m} = a(1 - e^2) \quad h^2 = ml = ma(1 - e^2) \quad (59)$$

Substituyendo este resultado en la ecuación (57) nos queda

$$\epsilon = \frac{6\pi m}{a(1 - e^2)} = \frac{6\pi \tilde{m} K/c^2}{a(1 - e^2)} \quad (60)$$

donde  $\tilde{m}$  es la masa del sol.

## 2.2. ECUACIONES GENERALES

### 2.2.1. Tensor de Energía material

Supóngase que tenemos una distribución de materia cuya velocidad varia continuamente de un punto a otro. Si  $x^i$  denota las coordenadas de un elemento de materia, podemos introducir un vector de velocidad  $v^i = dx^i/ds$  (adimensionales) el cual será una función del espacio como una función de campo. Tiene las siguientes propiedades

$$g_{ij}v^i v^j = v_j v^j = 1 \quad (1)$$

$$(g_{ij}v^i v^j)_{,k} = g_{ij} (v^i v^j_{,k} + v^i_{,k} v^j) = 2 g_{ij} v^i v^j_{,k} = 0 \quad (2)$$

En la derivación covariante anterior se ha tenido en cuenta el lemma de Ricci B.2.1.(12). Es decir, el gradiente de (1) es nulo, por lo que

$$v_j v^j_{,k} = 0 \quad (3)$$

Introduzcamos ahora un campo escalar de “densidad”  $\rho$ , tal que el vector de campo  $\rho v^i$  determina la densidad y el flujo de la materia. La condición de la conservación de la materia es

$$(\rho v^i)_{,i} = \rho_{,i} v^i + \rho v^i_{,i} = 0 \quad (4)$$

De aquí que

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\partial \rho}{\partial x^i} v^i = -\rho v^i_{,i} \quad (5)$$



es la condición que fija como varía  $\rho$  a lo largo de una geodésica de un elemento de materia. Esto permite definir  $\rho$  para un paquete del espacio lleno con materia y luego especificar  $\rho = 0$  fuera de este paquete, donde sigue siendo válida la ecuación de Einstein 2.1.(5) para el espacio vacío.

Definamos el *tensor de energía material*  $T^{ij}$  como

$$T^{ij} = \rho v^i v^j \quad (6)$$

la interpretación de este tensor es la siguiente.  $T^{00}$  es la densidad de energía, los términos  $T^{0m}$  son los flujos de energía. Similarmente,  $T^{n0}$  es la densidad del momentum y  $T^{nm}$  es el flujo del momentum. La divergencia del tensor de energía material, en este contexto, es nulo

$$T^{ij}_{,j} = v^i (\rho v^j)_{,j} + \rho v^i_{,j} v^j = 0 \quad (7)$$

El primer término se anula por (4). El segundo término se anula porque  $v^i$  son los vectores tangente a las geodésicas y, por consiguiente, satisface 2.1.(4). La condición de que la materia se ubique en una geodésica no es una condición adicional, sino que ya viene implícita en la definición (6) por la condición (7). Esto se expresa mejor diciendo: *En un fluido incoherente las líneas de corriente son geodésicas.*

Ya que la divergencia de los tensores de Einstein B.1.2.10 y el tensor de energía material (6) siempre son nulas, entonces parece razonable que, en lugar de 2.1.(5), igualem los dos tensores introduciendo un factor  $k$  de la forma [Einstein,(1916);Dirac,1996]

$$G^{ij} = k T^{ij} \quad G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = k \rho v^i v^j \quad (8)$$

Vamos ahora a determinar el valor de la constante  $k$  adimensional, puesto que asumimos que los tensores  $G^{ij}$  y  $T^{ij}$  tienen las mismas unidades (longitud)<sup>-2</sup>. Multiplicando la expresión anterior por  $g_{ij}$  y contrayendo, teniendo en cuenta (1), se obtiene

$$-R = k \rho \quad (9)$$

De esta forma la ecuación (8) puede ser reescrita como

$$R^{ij} = k \rho (v^i v^j - \frac{1}{2} g^{ij}) = k (T^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} T) \quad T = g_{ij} T^{ij} = \rho \quad (10)$$

Debido a que las velocidades  $v^i$  son adimensionales al igual que las cantidades  $g^{ij}$ , entonces los símbolos de Christoffel tienen dimensión (longitud)<sup>-1</sup>, luego el tensor de Ricci  $R^{ij}$  y la densidad  $\rho$  (consecuentemente el tensor de energía  $T^{ij}$  también) tienen dimensión (longitud)<sup>-2</sup>. Si se desea trabajar las ecuaciones (8) y (10) en unidades convencionales para la densidad  $\tilde{\rho}$  (masa/longitud<sup>3</sup>) y la velocidad  $\tilde{v}^i$  (longitud/tiempo), entonces  $k$  debe reemplazarse por  $\tilde{k} = k K/c^4 \approx -2.07650 \times 10^{-48} g^{-1} cm^{-1} s^2$ , siendo  $K \approx 6.67384 \times 10^{-8} g^{-1} cm^3 s^{-2}$  la constante de la gravitación universal [Levi-Civita,1964;Rindler,2006]. Si el cambio es sólo para la densidad entonces  $\tilde{k} = k K/c^2 \approx -1.86627 \times 10^{-27} g^{-1} cm^1$  [Einstein,(1916)]. En estos cálculos se ha tenido en cuenta el valor de  $k$  establecido en el siguiente párrafo.

Comparando un campo estático con una distribución de materia estática (despreciando términos de segundo orden)

$$\frac{1}{2} \nabla^2 g_{oo} = \nabla^2 U = \frac{1}{2} k \rho \quad (11)$$

Entonces el factor debe ser  $k = -8\pi$  para que esté de acuerdo con la ecuación de Poisson  $\nabla^2 U = -4\pi\rho$  en el límite newtoniano (ver 2.1.(20)). Cuando el cambio de unidades es sólo en la densidad, usando  $\tilde{\rho}$ , la ecuación (11) se convierte en  $\nabla^2 U = \tilde{k}\tilde{\rho}/2$  con  $\tilde{k} = k K/c^2$ . Cuando el cambio adicionalmente afecta a  $\tilde{U} = c^2 U$  entonces la misma ecuación se expresa como  $\nabla^2 \tilde{U} = \tilde{k}\tilde{\rho}/2$  con  $\tilde{k} = k K$ .

Einstein [(1916)] propone también incorporar en (6) un término de “presión”  $P$ , existiendo una relación constitutiva entre  $\rho = \rho(P)$  y  $P$  (unidades de ambas cantidades iguales), de tal forma que ahora

$$T^{ij} = -P g^{ij} + (\rho + P) v^i v^j \quad G^{ij} = k T^{ij} \quad (12)$$

con lo cual se obtienen las ecuaciones hidrodinámicas eulerianas de la teoría general de la relatividad. Como se presenta aquí difiere ligeramente de la forma original, incorporando  $P v^i v^j$  al segundo término [Synge,(1937);Levi-Civita,1964;Rindler,2006]. No obstante, queda en cuestionamiento la nulidad de la divergencia de  $T^{ij}$  en (7), con el cambio hecho en (12), al menos que se satisfaga lo siguiente. Anulemos el gradiente del tensor de energía

$$T_{,j}^{ij} = -P_{,j} g^{ij} + (\rho + P) v_{,j}^i v^j + [(\rho + P) v^j]_{,j} v^i = 0 \quad (13)$$

Multiplicando esta ecuación por  $v_i$  e identificando que el término del medio en el miembro de la derecha se anula por (3), se obtiene que

$$[(\rho + P) v^j]_{,j} = P_{,j} v^j \quad (14)$$

Introduciendo este resultado de nuevo en (13) de nuevo e identificando en el término del medio la derivada intrínseca de la velocidad 2.1.(4) y despejando dicho término resulta en

$$(\rho + P) \frac{\delta v^i}{\delta s} = -P_{,j} (v^i v^j - g^{ij}) \quad (15)$$

O sea que,  $v^i$  ya no son geodésicas como en (6), sino que satisfacen la expresión (15). Esto se expresa mejor diciendo: *En un fluido coherente la aceleración de las líneas de corriente vienen determinadas por el gradiente de presión* [Synge,1971].

Similarmente al caso no relativista, donde se satisfacen las ecuaciones de movimiento de Euler  $\nabla P + \partial \rho \mathbf{v} / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g}$ , teniendo en cuenta la ecuación de continuidad  $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$  (ver III.1.2.(3)), es el vector  $\mathbf{g}$  quien determina a  $\rho$ ,  $P$  y  $\mathbf{v}$ , junto con sus condiciones iniciales y de contorno. Lo que en relatividad general significa que, la materia le dice al espacio como deformarse y el espacio le dice a la materia como moverse. En este contexto, las velocidades  $v^i$  determinan el tensor métrico  $g^{ij}$ , y viceversa, en las ecuaciones de movimiento (12) antes mencionadas, teniendo en consideración la expresión (15).

La relación  $P/\rho$  (solución de la ecuación diferencial  $(\rho + P)g = -dP/dr$ , con  $g = (g_t/R_t)r$ , reflejo de la expresión (15)) ha mostrado ser muy pequeña, al menos en el ámbito terrestre, donde calculada en el centro de la tierra da un valor de  $P_o/\rho \approx \frac{1}{2}g_t R_t \approx \frac{1}{2}\tilde{g}_t \tilde{R}_t/c^2 \approx 3.47582 \times 10^{-10}$  (asumiendo nula la presión  $\tilde{P}_t$  en la superficie de la tierra, siendo  $\tilde{g}_t \approx 9.80665 \times 10^2 \text{ cm}^1 \text{ s}^{-2}$  la aceleración de la gravedad en la superficie,  $\tilde{R}_t \approx 6.371 \times 10^8 \text{ cm}$  el radio de la tierra y  $c \approx 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm}^1 \text{ s}^{-1}$  la velocidad de la luz en el vacío) [Synge,1971]. Con esto se puede decir que, en el segundo término  $\rho(1 + P/\rho)v^i v^j$  de (12), el término de presión es despreciable frente al término de densidad.

### 2.2.2. Término Cosmológico

Einstein había considerado generalizar sus ecuaciones de campo para el espacio vacío a [Dirac,1996]

$$R_{ij} = \lambda g_{ij} \quad (16)$$

donde  $\lambda$  es una constante. Se obtienen buenos resultados sin este término y, por lo tanto, si uno lo introduce debe asumirlo lo suficientemente pequeño para que no perturbe dichos resultados. Ya que  $R_{ij}$  contiene segundas derivadas de  $g_{ij}$ , la constante  $\lambda$  debe tener dimensiones (distancia) $^{-2}$ . Para que  $\lambda$  sea pequeña esta distancia tiene que ser muy grande. Es una distancia comológica, del orden del radio del universo.

Por consiguiente, si uno va a introducir este término en la ecuación general, debería incluirlo de la forma

$$R^{ij} - \lambda g^{ij} = k(T^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}T) \quad G^{ij} + \lambda g^{ij} = kT^{ij} \quad (17)$$

para que sea compatible con el principio de Hamilton y con las conjeturas sobre el campo y la materia [Lorentz et al.,1952;Rindler,2006]. En (17) se ha contraído la ecuación de la izquierda multiplicándola por  $g_{ij}$  y se la ha restado por  $g^{ij}/2$  para obtener la ecuación de la derecha. La cantidad  $T = g_{ij}T^{ij}$  se define igual pero ya no es  $\rho$  como en (10), sino  $\rho - 3P$ , al menos que  $P = 0$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Blankfield, J.; McVittie, G. C. "Einstein's Equations and Classical Hydrodynamics". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.2, pp.337-354, (1958/59).
- [2] Born, M. **Einstein's Theory of Relativity**. Dover Publications (New York), 1965.
- [3] Carroll, S. M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. Addison Wesley, 2003.
- [4] Chandrasekhar, S. **Classical General Relativity**. Oxford University Press, 1993.
- [5] Dirac, P. A. M. **General Theory of Relativity**. Princeton University Press (Princeton, New Jersey), 1996.
- [6] Eddington, A. S. **The Mathematical Theory of Relativity**, Second Edition. Cambridge University Press, 1924.
- [7] Eddington, Sir A. S. **Space, Time and Gravitation**. Harper & Row (New York), 1959.
- [8] Einstein, A. "Zur elektrodynamik bewegter Körper". **Annalen der Physik**, Vol.17, pp.891-921, (1905).
- [9] Einstein, A. "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". **Annalen der Physik**, Vol.49, pp.769- , (1916).
- [10] Einstein, A. **The Meaning of Relativity**, Fifth Edition. Princeton University Press (Princeton, New Jersey), 1953. Fourth Printing, 1974.
- [11] Einstein, A. **Relativity: The Special and The General Theory**, Three Rivers Press (New York), 1961. Crown (New York), 1961.
- [12] Einstein, A. **El Significado de La Relatividad**. Espasa-Calpe (Madrid), 1971.
- [13] French, A. P. **Relatividad Especial**. Editorial Reverté (Barcelona), 1974.
- [14] Goldstein, H. **Mecánica Clásica**. Aguilar S. A. de Ediciones, 1963/1969.
- [15] Goldstein, H. **Mecánica Clásica**, 2<sup>da</sup> Edition, 3<sup>ra</sup> Reimpresión. Aguilar S. A. de Ediciones, 1977. Editorial Reverté, 1998.
- [16] Goldstein, H. **Classical Mechanics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Addison-Wesley, 1980.
- [17] Goldstein, H.; Poole, Ch.; Saffko, J. **Classical Mechanics**, 3<sup>rd</sup> Edition. Addison-Wesley (San Francisco), 2002.
- [18] Hartle, J. B. **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**. Addison Wesley, 2003.
- [19] Jackson, J. D. **Classical Electrodynamics**, Third Edition. John Wiley & Sons (New York), 1999.
- [20] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **Teoría Clásica de los Campos**, Segunda Edición. Editorial Reverté, 1981.
- [21] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **The Classical Theory of Fields**, 4<sup>th</sup> Revised Edition. Butterworth-Heinemann, 1987.
- [22] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **Fluid Mechanics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Butterworth-Heinemann, 1987.
- [23] Levi-Civita, T. **The n-Body Problem in General Relativity**. D. Reidel Publishing Company (Dordrecht-Holland), 1964.
- [24] Lorentz, H. A.; Einstein, A.; Minkowski, H.; Weyl, H. **The Principle of Relativity**. Dover Publications (New York), 1952.

- [25] Lovelock, D. "The Uniqueness of The Einstein Field Equations in a Four-Dimensional Space". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.**33**, pp.54-70, (1969).
- [26] Lianis, G.; Rivlin, R. S. "Relativistic Equations of Balance in Continuum Mechanics". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.**48**, pp.64-82, (1972).
- [27] Michelson, A. A.; Morley, E. W. **Am. J. Sci.**, Vol.**134**, pp.333, (1887).
- [28] Møller, C. **The Theory of Relativity**, Second Edition. Clarendon Press (Oxford), 1972.
- [29] Mould, R. A. **Basic Relativity**. Springer-Verlag (New York), 1994.
- [30] Pauli, W. **Theory of Relativity**. Dover Publications (New York), 1981.
- [31] Rindler, W. **Relativity: Special, General and Cosmological**. Oxford University Press, 2001. Second Edition, 2006.
- [32] Schutz, B. F. **A First Course in General Relativity**. Cambridge University Press, 1985. Reprinted, 2001.
- [33] Schwarzschild, K. "Über das Gravitationsfeld eines Masspunktes nach der Einsteinschen Theorie". **Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.**, pp.189-196, (1916).
- [34] Sokolnikoff, I. S. **Análisis Tensorial**, 2<sup>da</sup> Edición. John Wiley & Sons, 1979.
- [35] Synge, J. L. "Relativistic Hydrodynamics". **Proc. London Math. Soc.**, Second Series, Vol.**43**, (1937).
- [36] Synge, J. L. **Relativity: The Special Theory**, Second Edition. North-Holland (Amsterdam), 1964. Third Printing, 1972.
- [37] Synge, J. L. **Relativity: The General Theory**. North-Holland (Amsterdam), 1960. Fourth Printing, 1971.
- [38] Toupin, R. A. "World Invariant Kinematics". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.**1**, pp.181-211, (1957).

MECANICA Y TERMODINAMICA DE  
SISTEMAS MATERIALES CONTINUOS

## **APENDICES**



# APENDICE A

## VECTORES Y TENSORES CARTESIANOS

### CONTENIDO

1. ALGEBRA.	374
1.1. Introducción.	374
1.1.1. Elemento Indicial.	374
1.1.2. Convención de Suma.	375
1.1.3. Sistema de Coordenadas Cartesiano.	375
1.2. Vectores Bases.	375
1.2.1. Delta de Kronecker.	376
1.2.2. Regla de Substitución.	376
1.2.3. Bases Ortonormales.	376
1.2.4. Transformación de Bases.	376
1.2.5. Cosenos Directores.	377
1.3. Vectores Cartesianos.	377
1.3.1. Definición.	377
1.3.2. Multiplicación Escalar.	377
1.3.3. Adición.	377
1.3.4. Vectores Coplanares.	378
1.3.5. Producto Escalar o Interior.	378
1.4. Matrices y Determinantes.	378
1.4.1. Producto de Matrices.	378
1.4.2. Símbolo Alternante.	378
1.4.3. Determinante.	379
1.4.4. Propiedades del Símbolo Alternante.	379
1.5. Otra Operaciones Vectoriales.	379
1.5.1. Producto Vectorial.	379
1.5.2. Producto Tensorial.	380
1.5.3. Producto Exterior.	380
1.5.4. Triple Producto Escalar.	381
1.5.5. Triple Producto Vectorial.	382
1.5.6. Bases no Ortonormales.	382
1.5.7. Sistema de Bases Recíprocas.	382

1.6. Tensores Cartesianos.	382
1.6.1. Definición.	382
1.6.2. Base Diádica.	383
1.6.3. Multiplicación Escalar.	383
1.6.4. Adición.	383
1.6.5. Producto de un Tensor por un Vector.	383
1.6.6. Producto Interior de Tensores.	384
1.6.7. Producto Escalar de Tensores.	384
1.6.8. Contracción de Tensores.	385
1.6.9. Producto Vectorial de Tensores.	385
1.6.10. Producto Tensorial de Tensores.	385
1.6.11. Regla del Cociente.	386
1.7. Tipos de Tensores.	386
1.7.1. Tensor Transpuesto.	386
1.7.2. Tensor Simétrico.	387
1.7.3. Tensor Antisimétrico.	387
1.7.4. Descomposición Simétrica-Antisimétrica.	388
1.7.5. Tensor Ortogonal.	388
1.7.6. Tensor Semejante.	388
1.7.7. Tensor Isótropo.	389
1.7.8. Descomposición Isótropa-Desviatoria.	389
1.7.9. Tensor Definido Positivo.	389
1.7.10. Vector Axial de un Tensor.	389
1.7.11. Tensor Axial.	390
1.7.12. Descomposición Espectral.	390
1.7.13. Descomposición Polar.	393
2. CALCULO.	395
2.1. Introducción.	395
2.1.1. Campo Vectorial o Tensorial.	395
2.1.2. Vectores y Tensores Paramétricos.	395
• Dependencia de un Parámetro.	395
• Derivación con el Parámetro.	396
2.1.3. Curvas en el Espacio.	396
• Ecuaciones Paramétricas.	396
• Ecuaciones de Frenet-Serret.	396
• Línea de un Campo Vectorial.	397
2.1.4. Superficies en el Espacio.	397
• Ecuaciones Paramétricas.	398
• Tubo de un Campo Vectorial.	398
2.1.5. Regiones Normales y Regulares.	398
• Superficies y Regiones Normales.	398
• Curvas Regulares.	399
• Superficies Regulares.	399



• Regiones Regulares.	400
2.1.6. Regiones Conexas.	400
• Regiones Simplemente conexas.	400
• Regiones Múltiplemente Conexas.	400
2.2. Derivación.	400
2.2.1. Derivación Parcial.	401
2.2.2. Operador Diferencial Nabla.	401
2.2.3. Gradiente.	402
2.2.4. Divergencia.	403
2.2.5. Rotacional.	404
2.2.6. Laplaciano.	405
2.2.7. Propiedades del Operador Nabla.	406
2.3. Transformación de Coordenadas.	408
2.3.1. Regla de la Cadena.	409
2.3.2. Jacobiano de la Transformación.	409
2.3.3. Fórmula de Expansión de Euler.	410
2.4. Integración.	412
2.4.1. Integral de Línea.	412
2.4.2. Integral de Superficie.	412
2.4.3. Integral de Volumen.	413
2.5. Teoremas Integrales.	414
2.5.1. Teorema de Green.	414
• Teorema de Green en el Plano.	414
• Funciones Vectoriales y Tensoriales.	416
• Formas Vectoriales del Teorema de Green.	416
• Teorema de la Divergencia.	416
• Identidades de Green.	417
2.5.2. Teorema de Gauss.	421
• Teorema de Gauss Generalizado.	421
• Contracción Producto Interior.	422
• Contracción Producto Vectorial.	422
2.5.3. Teorema de Stokes.	422
• Teorema de Stokes Generalizado.	422
• Contracción Producto Interior.	423
• Contracción Producto Vectorial.	423
• Teorema de Gauss sobre Superficies Curvas.	423
2.5.4. Regla de Leibniz.	424
• Fórmula de Expansión de Euler.	425
• Regla de Leibniz Generalizada.	425
2.5.5. Relación del Vector Axial.	427
2.5.6. Teoremas de Pappus.	427
• Centroide.	427
• Cuerpo de Revolución.	428

• Teorema Generalizado.	429
2.6. Formas Diferenciales.	430
2.6.1. 0-Forma.	430
2.6.2. 1-Forma.	430
2.6.3. 2-Forma.	430
2.6.4. 3-Forma.	431
2.6.5. Integral de una forma.	431
2.6.6. Multiplicación de formas.	433
2.6.7. Derivada de una forma.	434
2.6.8. Teorema de Green-Gauss-Stokes.	434
2.7. Campos Vectoriales y Tensoriales.	435
2.7.1. Irrotacional.	434
2.7.2. Solenoidal.	437
2.7.3. Complejo-Laminar.	438
2.7.4. Beltrami.	438
2.7.5. Laplaciano.	438
2.7.6. Trkalian.	438
2.7.7. Representación de un campo.	439
• Representación de Helmholtz.	439
• Otras Representaciones.	440
BIBLIOGRAFIA.	440

## 1. ALGEBRA

El Capítulo de El Algebra de los Vectores y Tensores Cartesianos trata básicamente de una descripción muy superficial de la estructura de estas entidades, sus operaciones y sus propiedades, haciendo énfasis que el sistema de coordenadas donde están descritos es siempre cartesiano.

Para la notación siempre se emplearan negrillas para representar las entidades vectoriales y tensoriales como un todo, donde las minúsculas se han dejado para los vectores y las mayúscula para los tensores, salvo pocas excepciones. Cuando se estén trabajando con las componentes de los vectores y tensores, se emplearán siempre letras itálicas subindicadas. Los superíndices se utilizarán solamente para denotar atributos especiales. Se empleará el tilde para indicar a las nuevas componentes en un cambio de sistema de coordenadas.

Para los vectores y tensores cartesianos normalmente se trabaja sobre un espacio de dimensión 3, pero muchos de los resultados pueden extrapolarse a espacios de dimensión finita superior. Cuando este sea el caso se mencionará oportunamente de forma explícita.

### 1.1. INTRODUCCION

En el estudio del álgebra de vectores y tensores cartesianos se emplea una notación muy práctica para expresar de una forma bastante simplificada las expresiones que se obtienen. Esta notación es la que se denomina la notación indicial, cuyas reglas y convenciones se describirán a continuación.

#### 1.1.1. Elemento Indicial

Un *elemento indicial* representa de forma resumida las componentes de un vector o de un tensor (o cualquier otra entidad). Se indica con un símbolo con índices (subíndices y superíndices). Por ejemplo,

$$v_i \quad T_{ij} \quad R_{jkl}^i \quad (1)$$

El *orden* del elemento indicial viene dado por el número total de índices. Si el número de índices es 0 el elemento representa un escalar, si el número de índices es 1 el elemento representa las componentes de un vector, y si el número de índices es igual o superior a 2 el elemento representa a un tensor de un orden igual al número de índices.

El *rango* del elemento indicial viene dado por el rango de valores que toman o pueden tomar los índices. Por ejemplo, si se está en una región espacial de una, dos o tres dimensiones, el rango será, respectivamente, 1, 2 ó 3.

La *dimensión* del elemento indicial es el número total de componentes de la entidad que representa, y se identifica claramente con la dimensión del espacio vectorial (en el sentido algebraico) al cual pertenece la entidad. Esta dimensión se calcula fácilmente como  $(Dimension) = (Rango)^{Orden}$ .

### 1.1.2. Convención de Suma

La *convención de suma*, debida inicialmente a Einstein, se emplea para resumir de una manera apreciable ciertas operaciones algebraicas entre entidades (escalares, vectores, tensores, etc.), y se expresa de la siguiente forma: Un índice repetido dos veces dentro de un término implica una suma sobre este a lo largo de todo su rango. A este índice se le denomina índice *mudo*. Cualquier otro índice que aparezca una sola vez dentro de cada término implica que la expresión es válida para cualquier valor dentro de su rango, y se denomina índice *libre*.

### 1.1.3. Sistema de Coordenadas Cartesiano

Un *sistema de coordenadas cartesiano* es aquel sistema de coordenadas con los ejes perpendiculares entre sí, y con la misma escala de medidas, cuya intersección mutua es única y representa el origen. Normalmente se numeran o se denotan los ejes en un espacio tridimensional siguiendo la *regla de la mano derecha*: Si el primero y el segundo eje se alinean con los dedos índice y medio, respectivamente, el pulgar indica la dirección del tercero. En este caso el sistema se denominan *dextrorso*. Cuando los ejes se numeran o se denotan sin seguir la regla de la mano derecha se denominan *siniestrorso*.

## 1.2. VECTORES BASES

Un vector  $\mathbf{v}$  posee dimensión tres, luego, si se desea expresar como combinación lineal de tres vectores  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  y  $\mathbf{a}_3$  linealmente independientes entre sí, el resultado será

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{a}_i \quad (1)$$

Se denominarán *componentes* o *coordenadas* de un vector a los elementos indiciales  $v_i$ , y la *base* en este caso estará formada por los vectores  $\mathbf{a}_i$ . Los valores de las componentes de un vector están ligados de forma biunívoca a la elección de una cierta base (En álgebra lineal el término de *coordenadas* es el que se aplica para cualquier espacio vectorial incluyendo los tensores y las matrices).

Un Tensor de orden dos  $\mathbf{T}$  posee dimensión nueve, luego, si se desea expresar en función de tres vectores  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  y  $\mathbf{a}_3$  linealmente independientes entre sí, el resultado será

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \quad (2)$$

Se denominarán *componentes* de un tensor de segundo orden a los elementos indiciales  $T_{ij}$ , y la *base* en este caso estará formada por los productos diádicos  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ . Al igual que para los vectores, los valores de las componentes de un tensor están ligados de forma biunívoca a la elección de una cierta base. El producto *diádico* de dos vectores se define como el producto tensorial entre ellos

$$\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \quad (3)$$

siendo este producto no conmutativo (más adelante se definirá con mayor detalle lo que es el producto tensorial, y cuales son sus propiedades). Para los tensores de orden superior a dos el procedimiento es similar.

De ahora en adelante, para evitar decir “las componentes de un vector o un tensor”, se empleará simplemente el denominativo de “vector o tensor”, para referirse tanto a la entidad como a sus componentes en algún sistema de coordenadas particular, siempre y cuando esto no conlleve a confusión. Específicamente para los tensores, cuando se indique la matriz  $[\mathbf{T}]$  del tensor  $\mathbf{T}$ , se estará refiriéndose a la matriz formada por los elementos correspondientes a las componentes del mencionado tensor.

### 1.2.1. Delta de Kronecker

La *delta de Kronecker* se define como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

Definida de esta forma la delta de Kronecker representa las componentes del tensor identidad con respecto al producto interior. Además, el tensor identidad se considera un tensor isótropo, es decir, posee las mismas componentes bajo cualquier cambio del sistema de coordenadas.

### 1.2.2. Regla de Substitución

La *regla de substitución* consiste en que la multiplicación interior con el tensor identidad es equivalente a la substitución de un índice por otro en las componentes del otro factor. En otras palabras, la multiplicación del tensor identidad por un vector o un tensor, en notación simbólica y notación indicial se expresa como

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \delta_{ij} v_j = v_i \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \quad \delta_{ij} T_{jk} = T_{ik} \quad (5)$$

donde en la notación indicial se observa que se ha producido una substitución del índice  $j$  por el índice  $i$ .

### 1.2.3. Bases Ortonormales

Una *base ortonormal* está constituida por vectores perpendiculares entre sí y con módulos iguales a la unidad. A estos vectores con módulos iguales a la unidad se le denominan *versores*. Normalmente, a los vectores base se les alinean y se les numeran de igual forma que los ejes de un sistema de coordenadas cartesiano (dextrorso), apuntando hacia el lado positivo.

Un vector  $\mathbf{v}$  cualquiera se puede expresar siempre como una combinación lineal de una base ortonormal  $\mathbf{e}_i$  en la forma

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i \quad (6)$$

donde la terna de versores  $\mathbf{e}_i$  representan a la base ortonormal y los elementos indiciales  $v_i$  representan a las componentes cartesianas del vector.

Una base cartesiana es entonces una base ortonormal si cumple con la *condición de ortogonalidad*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (7)$$

que significa que la proyección de un vector base sobre otro distinto es siempre nula, y también con la *condición de normalidad*

$$\|\mathbf{e}_i\| = 1 \quad (8)$$

que significa que el módulo de todos los vectores base es unitario.

### 1.2.4. Transformación de Bases

Se pueden obtener una base nueva  $\tilde{\mathbf{e}}_a$  a partir de una base vieja  $\mathbf{e}_i$ , cuando se rotan los vectores de esta última mediante una transformación de rotación con un giro arbitrario, conservando las condiciones de normalidad y ortogonalidad. A esta transformación de rotación la denotaremos como  $\mathbf{Q}$ , cumpliéndose que

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i \quad (9)$$

y sus elementos expresados en el sistema de coordenadas viejo o nuevo son  $Q_{ij}$ . Los tanspuestos de estos elementos coinciden con los cosenos directores descritos a continuación.

Un cambio del sistema de coordenadas es aquel inducido por una transformación de los vectores base.

### 1.2.5. Cosenos Directores

Los *cosenos directores*  $Q_{ia}$  son las proyecciones ortogonales de los vectores base nuevos  $\tilde{\mathbf{e}}_a$  sobre los vectores base viejos  $\mathbf{e}_i$  o viceversa. Esto es,

$$Q_{ia} = \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_a \quad (10)$$

y debido a la condición de normalidad el resultado de esta operación numéricamente dan el coseno del ángulo que forma dichos vectores entre sí, lo cual origina su nombre.

De la definición (10) se deduce la relación que existe entre los vectores base nuevos y los viejos. Expresando los vectores  $\mathbf{e}_i$  como combinación lineal de los vectores  $\tilde{\mathbf{e}}_a$ , se tiene

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_a) \tilde{\mathbf{e}}_a = Q_{ia} \tilde{\mathbf{e}}_a \quad (11)$$

De la condición de ortogonalidad, se tiene

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot Q_{ja} \tilde{\mathbf{e}}_a = \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_a Q_{ja} = Q_{ia} Q_{ja} \quad (12)$$

lo cual indica que

$$\mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad \mathbf{Q}^t = \mathbf{Q}^{-1} \quad (13)$$

y significa que la matriz  $[\mathbf{Q}]$  de los componentes de  $\mathbf{Q}$  (en el sistema de coordenadas viejo o nuevo) es ortogonal.

## 1.3. VECTORES CARTESIANOS.

### 1.3.1. Definición

Un *vector cartesiano*  $\mathbf{v}$  es una entidad con componentes  $v_i$  en un sistema de coordenadas cartesiano, que bajo una transformación de la base, las nuevas componentes se obtienen de las viejas como

$$\tilde{v}_a = Q_{ia} v_i \quad (1)$$

De la relación 1.2.(11) se obtiene que

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v_i Q_{ia} \tilde{\mathbf{e}}_a = \tilde{v}_a \tilde{\mathbf{e}}_a \quad (2)$$

y por invariancia al cambio del sistema de coordenadas se deduce que se cumple (1).

### 1.3.2. Multiplicación Escalar

La *multiplicación escalar* entre un escalar  $\alpha$  y un vector  $\mathbf{v}$  se define como

$$\alpha \mathbf{v} = \alpha v_i \mathbf{e}_i = (\alpha v_i) \mathbf{e}_i = (\alpha \mathbf{v})_i \mathbf{e}_i \quad (3)$$

con lo cual se deduce que

$$(\alpha \mathbf{v})_i = \alpha v_i \quad (4)$$

### 1.3.3. Adición

La *adición* entre dos vectores se define como

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = v_i \mathbf{e}_i + w_i \mathbf{e}_i = (v_i + w_i) \mathbf{e}_i = (\mathbf{v} + \mathbf{w})_i \mathbf{e}_i \quad (5)$$

con lo cual se deduce que

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w})_i = v_i + w_i \quad (6)$$

### 1.3.4. Vectores Coplanares

Tres vectores son *coplanares* si se cumple que uno de ellos puede ser obtenido mediante combinación lineal de los otros dos (esta condición implica que el espacio a donde pertenecen estos tres vectores es de dimensión dos). Esta condición es equivalente a decir que un vector perpendicular a dos de estos vectores es también perpendicular al tercero en el caso de tres vectores coplanares. Sean los vectores coplanares designados como  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ , entonces se cumple que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

Estas últimas operaciones se verán con mayor detalle más adelante.

### 1.3.5. Producto Escalar

El *producto escalar* de dos vectores se define como

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i \cdot w_j \mathbf{e}_j = v_i w_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = v_i w_j \delta_{ij} = v_i w_i = \tilde{v}_i \tilde{w}_i = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \theta \quad (8)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forman los dos vectores y donde se ha empleado la condición de ortogonalidad y la regla de substitución. Como se observa, el producto escalar de dos vectores es commutativo y es un caso particular del producto interior entre tensores, el cual no es commutativo.

Dos vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son ortogonales si se cumple que su producto escalar es nulo. Esto es

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ son perpendiculares} \quad (9)$$

El producto escalar de dos vectores permite definir la norma-2 de un vector en la forma

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (10)$$

Cuando se emplee esta norma normalmente se suprimirá el subíndice, al menos que se estén empleando al mismo tiempo normas de otros tipos.

## 1.4. MATRICES Y DETERMINANTES

En esta parte denotaremos a la matriz de elementos (cuadrada) que forman las componentes de un tensor  $\mathbf{T}$  de segundo orden mediante la notación  $[\mathbf{T}]$ .

### 1.4.1. Producto de Matrices

El *producto de dos matrices*  $[\mathbf{A}]$  y  $[\mathbf{B}]$  cuadradas es una matriz  $[\mathbf{C}]$  también cuadrada, cuyos elementos se obtienen a partir de los elementos de las matrices factores, en la forma

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}][\mathbf{B}] \quad C_{ik} = A_{ij}B_{jk} \quad (1)$$

### 1.4.2. Símbolo Alternante

El símbolo alternante o símbolo de Levi-Civita se define como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{Si los índices } ijk \text{ son una permutación par de los números } 123 \\ -1 & \text{Si los índices } ijk \text{ son una permutación impar de los números } 123 \\ 0 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

El símbolo alternante representa las componentes (en un sistema de coordenadas cartesiano) de un tensor alternante.

### 1.4.3. Determinante

El *determinante*  $|\mathbf{A}|$  de un tensor  $\mathbf{A}$  o su correspondiente matriz  $[\mathbf{A}]$  se define como

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \quad (3)$$

Más adelante se verá que el determinante de un tensor de segundo orden o de una matriz da el mismo resultado, puesto que el determinante es una función invariante con el cambio de sistema de coordenadas. El símbolo escogido para el determinante, en este sentido, es apropiado.

También se cumple que

$$\epsilon_{ijk} A_{ip} A_{jq} A_{kr} = \epsilon_{pqr} |\mathbf{A}| \quad (4)$$

Aplicando esta relación y considerando a (1), se obtiene que el determinante de un producto de matrices es

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}| &= \epsilon_{ijk} C_{1i} C_{2j} C_{3k} = \epsilon_{ijk} A_{1a} B_{ai} A_{2b} B_{bj} A_{3c} B_{ck} \\ &= A_{1a} A_{2b} A_{3c} \epsilon_{ijk} B_{ai} B_{bj} B_{ck} = A_{1a} A_{2b} A_{3c} \epsilon_{abc} |\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \end{aligned} \quad (5)$$

Otras propiedades del determinante de tensores de segundo orden que pueden ser útiles son:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \\ |\mathbf{A}^t| &= |\mathbf{A}| \\ |\mathbf{A}^{-1}| &= |\mathbf{A}|^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

### 1.4.4. Propiedades del Símbolo Alternante

El símbolo alternante cumple con las siguiente propiedades importantes:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ipq} = \delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp} \quad (9)$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijp} = 2 \delta_{kp} \quad (10)$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6 \quad (11)$$

## 1.5. OTRAS OPERACIONES VECTORIALES

### 1.5.1. Producto Vectorial

El *producto vectorial* de dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se define como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \quad (1)$$

De acuerdo a esto, dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son paralelos si su producto vectorial es nulo. Es decir,

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Los vectores base del sistema de coordenadas cartesiano de esta definición cumplen con

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (3)$$

Sea el mapa

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

un isomorfismo del grupo vectorial  $\mathbb{R}_3$  (Grupo de traslaciones en el espacio), en todo el grupo aditivo  $\mathbb{L}(\emptyset_3)$  (conjunto de todas las transformaciones lineales sobre  $\emptyset$ , el grupo de matrices ortogonales). Este difeomorfismo permite transferir la estructura del álgebra de  $\mathbb{L}(\emptyset_3)$  en el espacio de  $\mathbb{R}_3$ . De acuerdo a esto el producto vectorial también se puede definir como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -2\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{M}(\mathbf{a}).\mathbf{M}(\mathbf{b}) - \mathbf{M}(\mathbf{b}).\mathbf{M}(\mathbf{a})] \quad (5)$$

### 1.5.2. Producto Tensorial

El *producto tensorial*  $\mathbf{ab} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  (en lo que sigue se continuará empleando la notación diádica  $\mathbf{ab}$ ) de dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se define como el tensor (de segundo orden) que asigna a cada vector  $\mathbf{c}$  al vector  $\mathbf{a}(\mathbf{b}.\mathbf{c})$ . Es decir,

$$(\mathbf{ab}).\mathbf{c} \equiv (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}).\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}.\mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{V} \quad (6)$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} (\mathbf{ab})^t &= \mathbf{ba} \\ (\mathbf{ab}).(\mathbf{cd}) &= (\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{ad} \\ (\text{no suma}) \quad (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i).(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_j) &= \begin{cases} \mathbf{0} & i \neq j \\ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i & i = j \end{cases} \\ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (7)$$

Sea  $\mathbf{e}$  un vector unitario (es decir un versor). Entonces  $\mathbf{ee}$  aplicado al vector  $\mathbf{v}$  da

$$(\mathbf{ee}).\mathbf{v} = (\mathbf{v}.\mathbf{e})\mathbf{e} \quad (8)$$

lo cual es la proyección de  $\mathbf{v}$  en la dirección de  $\mathbf{e}$ , mientras que  $\mathbf{I} - \mathbf{ee}$  aplicado sobre  $\mathbf{v}$  da

$$(\mathbf{I} - \mathbf{ee}).\mathbf{v} = \mathbf{v} - (\mathbf{v}.\mathbf{e})\mathbf{e} \quad (9)$$

lo cual es la proyección de  $\mathbf{v}$  sobre todo el plano perpendicular a  $\mathbf{e}$ .

### 1.5.3. Producto Exterior

El *producto exterior*  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  de dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se define en función del producto tensorial de dos vectores en la forma

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{ab} - \mathbf{ba} \quad \mathbf{ab} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad (10)$$

El producto exterior cumple con las siguientes propiedades importantes, todas ellas relacionadas con el producto vectorial y con el vector axial:

$$\nabla.(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (11)$$



$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_{\mathbf{x}} = 2\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (\mathbf{T}_{\mathbf{x}})_i = \epsilon_{ijk} T_{jk} \quad (12)$$

$$\mathbf{W} : (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = -\mathbf{W}_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\mathbf{W} \text{ antisimetrico}) \quad (13)$$

$$\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \sqrt{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad \|\mathbf{T}\| = \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{T}} \quad (14)$$

Todas las operaciones involucradas en estas propiedades se explicarán con mayor detalle más adelante.

Los tensores

$$\frac{1}{2} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) \quad i < j \quad (15)$$

forman una base de dimensión  $n(n-1)/2$  para el subespacio de todos los tensores antisimétricos de segundo orden y de rango  $n$ . De igual forma que los tensores

$$\frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) \quad i \leq j \quad (16)$$

forman una base de dimensión  $n(n+1)/2$  para el subespacio de todos los tensores simétricos de segundo orden y de rango  $n$ . Obsérvese que las dimensiones de estos dos subespacios se complementan y suman  $n^2$ , que es la dimensión del espacio  $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$  de todos los tensores de segundo orden y rango  $n$ .

#### 1.5.4. Triple Producto Escalar

El *triple producto escalar* se define como

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k \quad (17)$$

A veces este producto se denota como  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$  o como  $(\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w})$ . Este producto cambia sólo de signo cuando se realiza una permutación impar de los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ . En caso contrario permanece invariante.

El triple producto escalar en valor absoluto se identifica con el volumen de un paralelepípedo cuyos lados tienen como longitudes los módulos de los vectores que intervienen.

La expresión (17) permite establecer la transformación  $\mathbf{T}$  del triple producto escalar, obteniéndose la siguiente identidad

$$[(\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})] \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}) = |\mathbf{T}| (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \quad (18)$$

la cual se demuestra fácilmente al observar que

$$[(T_{i\alpha} u_\alpha \mathbf{e}_i) \times (T_{j\beta} u_\beta \mathbf{e}_j)] \cdot (T_{k\gamma} u_\gamma \mathbf{e}_k) = \epsilon_{ijk} T_{i\alpha} T_{j\beta} T_{k\gamma} u_\alpha u_\beta u_\gamma = |\mathbf{T}| \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha u_\beta u_\gamma \quad (19)$$

De la identidad (18) se establece también la transformación  $\mathbf{T}$  del producto vectorial, al eliminar  $\mathbf{w}$  y reorganizar los factores, obteniéndose la identidad

$$[(\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})] = |\mathbf{T}| \mathbf{T}^{-t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \quad (20)$$

Esta identidad y la identidad (18) se emplearán más adelante para obtener la transformaciones de elementos diferenciales de áreas y volúmenes, respectivamente [Gurtin, 1981, §.6, pp. 51-54].

Existe también el producto escalar de dos productos vectoriales. El resultado es conocido como la *identidad de Lagrange* y se expresa en la forma

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix} \quad (21)$$

La identidad de Lagrange se deduce a partir de las propiedades del símbolo alternante 1.4.(9).

### 1.5.5. Triple Producto Vectorial

El *triple producto vectorial* se define basándose en la dos siguientes identidades:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (22.a)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \quad (22.b)$$

Estas identidades se deducen a partir de las propiedades del símbolo alternante 1.4.(9).

### 1.5.6. Bases No Ortonormales

En determinadas ocasiones es recomendable emplear un sistema de coordenadas donde se define una base  $\{\mathbf{b}_i\}$  que no es ortonormal, es decir, el módulo de los vectores base no son iguales a uno y dichos vectores no son perpendiculares entre sí. Cuando este es el caso los vectores y tensores se expresan de la forma

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = \nu_i \mathbf{b}_i \quad \nu_i \neq v_i \quad (23)$$

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathcal{T}_{ij} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j \quad \mathcal{T}_{ij} \neq T_{ij} \quad (24)$$

donde la componentes respectivas  $v_i$  y  $T_{ij}$  si son para un sistema de coordenadas cartesiano. El triple producto escalar de los vectores base no ortonormales en este caso no es igual a la unidad, sino que

$$\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) = \sqrt{|\mathbf{B}|} \quad B_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j \quad (25)$$

donde  $[\mathbf{B}]$  es la matriz simétrica formada por las proyecciones de los vectores base no ortonormales entre si. Esto es

### 1.5.7. Sistema de Bases Recíprocas

Un sistema de nuevos vectores base pueden formarse a partir de los vectores no ortonormales base de la sección anterior. Estos vectores son

$$\mathbf{b}^1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{\sqrt{|\mathbf{B}|}} \quad \mathbf{b}^2 = \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{\sqrt{|\mathbf{B}|}} \quad \mathbf{b}^3 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\sqrt{|\mathbf{B}|}} \quad (26)$$

y cumplen con la propiedad

$$\mathbf{b}^1 \cdot (\mathbf{b}^2 \times \mathbf{b}^3) = \sqrt{|\mathbf{B}|^{-1}} \quad \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}^j = \delta_{ij} \quad (27)$$

donde  $[\mathbf{B}]$  se define de manera igual que en la sección anterior.

## 1.6. TENSORES CARTESIANOS

### 1.6.1. Definición

Un *tensor cartesiano*  $\mathbf{T}$  de segundo orden es una entidad con componentes  $T_{ij}$  en un sistema de coordenadas cartesiano, que bajo una transformación de la base, las nuevas componentes se obtienen de las viejas como

$$\tilde{T}_{ab} = Q_{ia} Q_{jb} T_{ij} \quad (1)$$

De la relación 1.2.(11) se obtiene que

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T_{ij} Q_{ia} \tilde{\mathbf{e}}_a Q_{jb} \tilde{\mathbf{e}}_b = T_{ij} Q_{ia} Q_{jb} \tilde{\mathbf{e}}_a \tilde{\mathbf{e}}_b = \tilde{T}_{ab} \tilde{\mathbf{e}}_a \tilde{\mathbf{e}}_b \quad (2)$$

y por invariancia al cambio del sistema de coordenadas se deduce que (1) se cumple.

Para tensores de orden superior la definición es similar. Se denomina un tensor de orden  $n$ , a la entidad con componentes en un sistema de coordenadas cartesianas, que bajo una transformación de las bases, las nuevas componentes se obtienen de las viejas como

$$\tilde{T}_{\alpha\beta\gamma\cdots\omega} = Q_{i\alpha}Q_{j\beta}Q_{k\gamma}\cdots Q_{z\omega}T_{ijk\cdots z} \quad (3)$$

siendo la matriz  $[Q_{ia}]$  la matriz que encierra todos los cosenos directores definidos por 1.2.(10), y siendo el número total de índices griegos o latinos igual a  $n$ .

### 1.6.2. Base Diádica

Una *base diádica* está compuesta por los pares

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \equiv \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (4)$$

formada mediante el producto tensorial entre dos vectores cualesquiera de la base. Como el producto tensorial no es conmutativo, estas bases no conmutan. De la misma forma se pueden formar triádicas, cuaternas, etc. para definir tensores de orden tres, cuatro, etc., respectivamente. Salvo en ocasiones donde se pueda tener confusión, el símbolo  $\otimes$  se suprimirá para efecto de hacer las expresiones más sencillas y compactas.

### 1.6.3. Multiplicación Escalar

La *multiplicación escalar* entre un escalar  $\alpha$  y un Tensor  $\mathbf{T}$  de segundo orden se define como

$$\alpha\mathbf{T} = \alpha T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = (\alpha T_{ij})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = (\alpha\mathbf{T})_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad (5)$$

con lo cual se deduce que

$$(\alpha\mathbf{T})_{ij} = \alpha T_{ij} \quad (6)$$

De forma similar se opera con los tensores de orden superior a dos.

### 1.6.4. Adición

La *adición* entre dos tensores de segundo orden se define como

$$\mathbf{T} + \mathbf{U} = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + U_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = (T_{ij} + U_{ij})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = (\mathbf{T} + \mathbf{U})_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad (7)$$

con lo cual se deduce que

$$(\mathbf{T} + \mathbf{U})_{ij} = T_{ij} + U_{ij} \quad (8)$$

De forma similar se opera con los tensores de orden superior a dos.

### 1.6.5. Producto de un Tensor por un Vector

El *producto interior de un tensor por un vector* se define en la forma

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \cdot v_k\mathbf{e}_k = T_{ij}v_k\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = T_{ij}v_k\mathbf{e}_i\delta_{jk} = T_{ij}v_j\mathbf{e}_i \quad (9)$$

Este producto puede verse como una transformación lineal de un vector en la forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad (10.a)$$

o trabajando con las componentes sería la multiplicación de una matriz por un vector (Matriz Columna) en la forma

$$([\mathbf{T}]\{\mathbf{v}\})_i = T_{ij}v_j \quad (10.b)$$

Para tensores de orden superior, este producto, válido también entre tensores, debe interpretarse como un producto escalar entre los vectores base adyacentes al punto.

### 1.6.6. Producto Interior de Tensores

El *producto interior de tensores* se indica con un punto y se define de manera idéntica que el producto anterior. De igual manera, debe interpretarse como un producto escalar entre los vectores base adyacentes al punto. El resultado final va a ser un tensor cuyo orden será la suma de los órdenes de los dos factores, menos dos. Esto último puede verificarse para el caso del producto anterior, puesto que un vector es un tensor de orden uno.

Por ejemplo, se presentará el producto interior de dos tensores de segundo orden en la forma

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot U_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = T_{ij} U_{kl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = T_{ij} T_{kl} \mathbf{e}_i \delta_{jk} \mathbf{e}_l = T_{ij} T_{jl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l \quad (11)$$

En estas operaciones debe tomarse en consideración siempre que el producto interior y el producto tensorial cumplen con la propiedad asociativa, por lo cual no se han empleado paréntesis en el desarrollo anterior.

Dos tensores de segundo orden se dicen que *conmutan* si se cumple que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (12)$$

Un tensor  $\mathbf{A}$  es *invertible* si existe un tensor  $\mathbf{A}^{-1}$ , llamado la inversa de  $\mathbf{A}$ , tal que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (13)$$

De las propiedades del determinante de un tensor sigue que un tensor  $\mathbf{A}$  es invertible, si su determinante  $|\mathbf{A}| \neq 0$ .

Las identidades que siguen pueden ser útiles:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ (\mathbf{A}^{-1})^t &= (\mathbf{A}^t)^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

Por conveniencia, se usará la siguiente notación para abreviar

$$\mathbf{A}^{-t} = (\mathbf{A}^{-1})^t \quad (15)$$

El producto interior de tensores de segundo orden, por su característica de dar como resultado tensores del mismo orden, permite definir la potencia de tensores de segundo orden dentro de alguna expresión tensorial. En este sentido, siempre y cuando sea consistente con la expresión tensorial, se definirán la potencias de tensores de segundo orden en la forma

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \quad (16)$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \quad (17)$$

y así sucesivamente.

### 1.6.7. Producto Escalar de Tensores

El *producto escalar de tensores* de segundo orden se define como

$$\mathbf{T} : \mathbf{U} = \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{U}) = T_{ij} U_{ji} \quad (18)$$

y se debe interpretar como un producto interior repetido dos veces entre dos tensores. Esta operación puede emplearse entre tensores de mayor orden, pero el resultado ya no será un escalar, sino un tensor cuyo orden es la suma de los órdenes de los dos factores, menos cuatro.

Este producto cumple con las siguientes propiedades

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A} \quad \mathbf{A}^t : \mathbf{B} = \mathbf{A} : \mathbf{B}^t \quad \mathbf{A} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{C} \quad (19)$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son todos tensores de segundo orden.

El producto escalar de dos tensores de segundo orden permite definir la norma-2 de un tensor de segundo orden en la forma

$$\|\mathbf{T}\|_2 = \sqrt{\mathbf{T}^t : \mathbf{T}} \quad (20)$$

Cuando se emplee esta norma normalmente se suprimirá el subíndice, al menos que se estén empleando al mismo tiempo normas de otros tipos. En el Apéndice F se definen otros tipos de normas para matrices, que muy poco frecuentemente se emplean para tensores, debido a que no son invariantes con respecto a un cambio del sistema de coordenadas. Por el contrario la norma-2 si lo es.

### 1.6.8. Contracción de Tensores

La *contracción de tensores* se define cuando en sus componentes representadas como elementos indiciales, se colocan dos índices iguales. De esta forma se obtiene un nuevo tensor, cuyo orden se habrá disminuido en dos.

Esta contracción aplicada a tensores de segundo orden permiten definir la *traza* de un tensor como

$$\text{tr} \mathbf{T} = \text{tr} \mathbf{T}^t = T_{ii} \quad (21)$$

La traza de un tensor de segundo orden es una invariante con respecto a un cambio de base.

El producto de tensor por un vector, el producto interior de tensores y el producto escalar de vectores y tensores se pueden definir como contracción de aquellos índices (cuando se trabaja con las componentes) ubicados a uno y otro lado del símbolo de multiplicación interior indicado con un punto o con dos puntos en el caso de una doble contracción. De acuerdo a esto, la traza cumple con varias propiedades que enunciaremos a continuación

$$\text{tr} \mathbf{T} = \mathbf{I} : \mathbf{T} = \mathbf{T} : \mathbf{I} \quad (22)$$

$$\text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{U}) = \text{tr}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{T}) \quad (23)$$

$$\sqrt{\text{tr}(\mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T})} = \sqrt{\mathbf{T}^t : \mathbf{T}} = \|\mathbf{T}\|_2 \quad (24)$$

### 1.6.9. Producto Vectorial de Tensores

El *producto interior de tensores* se indica con una cruz y se define de manera similar al producto vectorial entre vectores, pero debe interpretarse que dicho producto vectorial debe efectuarse entre los vectores base adyacentes a la cruz. El resultado final va a ser un tensor cuyo orden será la suma de los órdenes de los dos factores, menos uno. Esto último puede verificarse para el caso del producto vectorial entre vectores, puesto que un vector es un tensor de orden uno.

Por ejemplo, el producto vectorial de un tensor de segundo orden y un vector sería efectuado como

$$\mathbf{T} \times \mathbf{v} = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \times v_k \mathbf{e}_k = T_{ij} v_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = T_{ij} v_k \mathbf{e}_i \epsilon_{jkl} \mathbf{e}_l = \epsilon_{jkl} T_{ij} v_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l \quad (25)$$

En otras palabras,

$$(\mathbf{T} \times \mathbf{v})_{il} = \epsilon_{jkl} T_{ij} v_k \quad (26)$$

En estas operaciones debe tomarse en consideración siempre que el producto vectorial y el producto tensorial cumplen con la propiedad asociativa, por lo cual no se han empleado paréntesis en el desarrollo anterior.

### 1.6.10. Producto Tensorial de Tensores

El *producto tensorial* de tensores se define de manera muy sencilla, colocando los vectores base de un tensor al lado del otro tensor, formando así una base nueva cuyo orden en la suma de los órdenes de los factores. Este producto no cumple con la propiedad conmutativa.

Como ejemplo, se presentará el producto de un tensor de segundo orden multiplicado tensorialmente por un vector. Esto es,

$$\mathbf{T} \mathbf{v} \equiv \mathbf{T} \otimes \mathbf{v} = T_{ij} v_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \quad (27)$$

### 1.6.11. Regla del Cociente

La regla del cociente lo que establece de manera muy radical es que una expresión algebraica que contiene tensores de distintos órdenes operando entre sí, debe, por un lado, dar como resultado de cada término, tensores del mismo orden, y por otro lado, esta expresión algebraica debe ser invariante cuando se hace un cambio de la base, si se siguen las reglas de transformación de componentes.

Un ejemplo de la Regla del Cociente se presenta cuando se tiene el producto

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad A_{ij}b_j = c_i \quad (28)$$

con  $\mathbf{A}$  como un tensor de segundo orden y  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  como vectores. Supongamos que existe una entidad  $\tilde{\mathbf{A}}$ , de la cual no se sabe todavía si es un tensor, tal que

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{c}} \quad \tilde{A}_{ij}\tilde{b}_j = \tilde{c}_i \quad (29)$$

donde  $\tilde{\mathbf{b}}$  y  $\tilde{\mathbf{c}}$  son los mismos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  pero con sus componentes expresadas en un sistema de coordenadas distintas  $\tilde{\mathbf{e}}$ . Sean los  $Q_{i\alpha} = \mathbf{e}_i \tilde{\mathbf{e}}_\alpha$  los cosenos directores del cambio de la base, entonces

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}\tilde{b}_\beta = \tilde{c}_\alpha = Q_{i\alpha}c_i = Q_{i\alpha}A_{ij}b_j = Q_{i\alpha}A_{ij}Q_{j\beta}\tilde{b}_\beta \quad (30)$$

Restando el primer y último miembro de la expresión anterior y extrayendo  $\tilde{b}_\beta$  como factor común resulta que

$$(\tilde{A}_{\alpha\beta} - Q_{i\alpha}Q_{j\beta}A_{ij})\tilde{b}_\beta = 0 \quad (31)$$

Como  $\mathbf{b}$  es independiente de  $\mathbf{A}$  y  $\tilde{\mathbf{A}}$ , se obtiene que

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = Q_{i\alpha}Q_{j\beta}A_{ij} \quad (32)$$

lo que quiere decir que  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$  es un tensor, porque sigue las reglas de transformación de sus componentes bajo un cambio de la base.

## 1.7. TIPOS DE TENSORES

### 1.7.1. Tensor Transpuesto

El *tensor transpuesto* de segundo orden,  $\mathbf{T}^t$ , de un tensor  $\mathbf{T}$ , se define como aquel tensor que cumple con la siguiente propiedad

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \quad (1)$$

y sus componentes se relacionan mediante

$$(\mathbf{T})_{ij} = (\mathbf{T}^t)_{ji} \quad (2)$$

Cuando un tensor  $\mathbf{T}$  de orden mayor o igual a dos se define como el producto tensorial de otro dos tensores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , el tensor transpuesto se halla transponiendo el producto tensorial en la forma

$$\mathbf{T} = \mathbf{AB} \equiv \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \quad \mathbf{T}^t = \mathbf{BA} \equiv \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} \quad (3)$$

En el caso particular de un producto diádico se tiene que

$$\mathbf{T} = \mathbf{ab} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad \mathbf{T}^t = \mathbf{ba} \equiv \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \quad (4)$$

Por último, se dirá que la traza de un tensor de segundo orden no se ve afectada por la transposición. Esto es,

$$\text{tr} \mathbf{T}^t = \text{tr} \mathbf{T} \quad (5)$$

### 1.7.2. Tensor Simétrico

Un *tensor simétrico* es aquel que es igual a su transpuesto. Esto es

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^t \quad (6)$$

En el caso de tensores de orden superior a dos, la simetría se debe definir con respecto al producto tensorial que originó a dicho tensor, o también se puede expresar en función de las componentes especificando los índices que pueden permutarse sin cambiar su valor.

La *forma canónica de un tensor simétrico* de segundo orden  $\mathbf{S}$ , generado en un espacio de dimensión 3, se obtiene cuando se expresa a dicho tensor en el sistema de coordenadas principal (dextrorso), mediante los autovalores  $\lambda_i$  y los autovectores unitarios  $\mathbf{e}_i$  que definen las direcciones principales. Esto se hace de la forma

$$\mathbf{S} = \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \quad (\text{se suma en } k) \quad (7)$$

cuando los tres autovalores son diferentes. Cuando dos de los autovalores son iguales,  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ , se tiene que

$$\mathbf{S} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) \quad (8)$$

Cuando los tres autovalores son iguales a  $\lambda$ , se tiene que

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{I} \quad (9)$$

y es un tensor isótropo. Para estas tres alternativas la matriz de componentes del tensor  $\mathbf{S}$  en el sistema de coordenadas será

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Más adelante se verá que la forma canónica de un tensor simétrico corresponde a lo que también se denomina la Descomposición espectral, descrita en la Sección 1.7.12.

### 1.7.3. Tensor Antisimétrico

Un *tensor antisimétrico* es aquel que es opuesto a su transpuesta, o sea,

$$\mathbf{T} = -\mathbf{T}^t \quad (11)$$

En el caso de tensores de orden superior a dos, la antisimetría se debe definir con respecto al producto tensorial que originó a dicho tensor, o también se puede expresar en función de las componentes especificando los índices que cuando se permutan cambian el signo de su valor.

La *forma canónica de un tensor antisimétrico* de segundo orden  $\mathbf{W}$  se obtiene cuando se expresa a dicho tensor como la combinación de tres componentes  $w_i$ , que forman las componentes de un vector  $\mathbf{w}$ . Así se tiene que

$$\mathbf{W} = -\epsilon_{ijk} w_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \quad (12)$$

que en componentes sería

$$\{\mathbf{w}\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad [\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Adicionalmente, se cumple que

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \quad (14)$$

lo que indica que el vector  $\mathbf{w}$  apunta en la dirección del espacio nulo de la transformación lineal

$$\mathbf{W}(\mathbf{v}) = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad (15)$$

Recuérdese que el espacio nulo de una transformación lineal  $\mathbf{W}$  es el conjunto de vectores  $\mathbf{v}$ , tales que

$$\mathbf{W}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (16)$$

Más adelante se verá que el vector  $\mathbf{w}$  no es más que el opuesto de la mitad del vector axial  $\mathbf{W}_x$ . Esto es,

$$\mathbf{w} = -\frac{1}{2}\mathbf{W}_x \quad (17)$$

Sin embargo, el lector podrá encontrar que en algunos textos se denomina erróneamente al vector  $\mathbf{w}$  como el vector axial.

#### 1.7.4. Descomposición Simétrica-Antisimétrica

Todo tensor  $\mathbf{T}$  se puede descomponer en su parte simétrica  $\mathbf{S}$  y su parte antisimétrica  $\mathbf{W}$  en la forma

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{W} \quad (18)$$

De manera que

$$\mathbf{T}^t = \mathbf{S} - \mathbf{W} \quad (19)$$

por las propiedades del tensor simétrico y antisimétrico. Sumando y restando estas dos últimas expresiones se obtiene que los tensores  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{W}$  se pueden hallar en función del tensor  $\mathbf{T}$  como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^t) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^t) \quad (20)$$

#### 1.7.5. Tensor Ortogonal

Un *tensor ortogonal*  $\mathbf{Q}$  es aquel que preserva el producto interior

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (21)$$

para todos los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Una condición necesaria y suficiente para que  $\mathbf{Q}$  sea ortogonal es que

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^t = \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (22)$$

o equivalentemente,

$$\mathbf{Q}^t = \mathbf{Q}^{-1} \quad (23)$$

Un tensor ortogonal con un determinante positivo es llamado una *rotación*. A veces una rotación es llamada un tensor ortogonal propio. Todo tensor ortogonal es una rotación o el producto de una rotación por (internamente)  $-\mathbf{I}$ . Si  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$  es una rotación distinta de  $\mathbf{I}$ , entonces, el conjunto de todos los vectores  $\mathbf{v}$ , tal que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad (24)$$

forma un subespacio vectorial unidimensional denominado el *eje de la rotación*.

#### 1.7.6. Tensor Semejante

Dos tensores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son *tensores semejantes*, si dado cualquier tensor invertible  $\mathbf{T}$ , se tiene que  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$ . La semejanza entre tensores es una relación de equivalencia, y el conjunto de los tensores semejantes entre sí forman una clase de equivalencia. Algunos textos emplean el término de “similares” en lugar de “semejantes”, pero el significado es el mismo.



### 1.7.7. Tensor Isótropo

Un *tensor isótropo* es aquel que, bajo cualquier cambio de base del sistema de coordenadas, mantiene sus componentes iguales. Un ejemplo de este tipo de tensor es el tensor identidad  $\mathbf{I}$ . Otro ejemplo, pero solamente cuando la base es cartesiana y es transformada mediante una rotación, es el tensor alternante relativo  $\epsilon$ . Sea la siguiente transformación de los componentes del tensor alternante relativo

$$\tilde{\epsilon}_{ijk} = Q_{ia}Q_{jb}Q_{kc}\epsilon_{abc} = \begin{vmatrix} Q_{i1} & Q_{i2} & Q_{i3} \\ Q_{j1} & Q_{j2} & Q_{j3} \\ Q_{k1} & Q_{k2} & Q_{k3} \end{vmatrix} \quad (25)$$

Como se ve el resultado el posee exactamente los mismos valores en las componentes que el tensor antes de transformar debido a que la matriz  $[\mathbf{Q}]$  de los cosenos directores representa un tensor de rotación y su determinante cambia de signo cuando se intercambian las filas. En el Apéndice B se verá que el tensor alternante absoluto  $\epsilon$  es isótropo en cualquier sistema de coordenadas y bajo cualquier transformación de la base. En estas circunstancias también lo es el tensor identidad.

Todo tensor formado mediante una multiplicación escalar del tensor identidad, es también isótropo. Es decir, cualquier tensor que tenga la forma

$$\mathbf{T} = \lambda \mathbf{I} \quad (26)$$

es isótropo.

### 1.7.8. Descomposición Isótropa-Desviatoria

Todo tensor  $\mathbf{T}$  se puede descomponer en su parte isótropa  $\mathbf{T}^\circ$  y su parte desviatoria  $\mathbf{T}'$  en la forma

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^\circ + \mathbf{T}' \quad \mathbf{T}^\circ = \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{T})\mathbf{I} \quad \mathbf{T}' = \mathbf{T} - \mathbf{T}^\circ \quad (27.a)$$

De manera que

$$\text{tr}\mathbf{T}' = \text{tr}\mathbf{T} - \text{tr}\mathbf{T}^\circ = 0 \quad (27.b)$$

### 1.7.9. Tensor Definido Positivo

Un *tensor definido positivo*  $\mathbf{T}$ , es aquel que satisface

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \mathbf{v} : \mathbf{T} > 0 \quad (28)$$

para todo vector  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ .

**Teorema 1.** Sea  $\mathbf{A}$  un tensor definido positivo. Si  $\mathbf{Q}$  es un tensor ortogonal, entonces  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^t$  es también un tensor definido positivo.

### 1.7.10. Vector Axial de un Tensor

El *vector axial*,  $\mathbf{T}_x$ , de un tensor  $\mathbf{T}$  se define como aquel vector que cumple con la siguiente propiedad

$$\mathbf{T}_x \times \mathbf{v} = -(\mathbf{T} - \mathbf{T}^t) \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \quad (29)$$

Esto en componentes sería

$$(\mathbf{T}_x)_i = \epsilon_{ijk} T_{jk} \quad T_{ij} - T_{ji} = \epsilon_{ijk} (\mathbf{T}_x)_k \quad (30)$$

Para los casos particulares de un tensor simétrico  $\mathbf{S}$  y un tensor antisimétrico  $\mathbf{W}$  se tiene que

$$\mathbf{S}_x = \mathbf{0} \quad \mathbf{W}_x \times \mathbf{v} = -2\mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad (W_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\mathbf{W}_x)_k) \quad (31)$$

y para el caso antisimétrico en notación matricial se tiene

$$\{\mathbf{W}_x\} = -2 \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = -2\{\mathbf{w}\} \quad [\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Como se podrá observar, de acuerdo a lo que se planteó antes en la Sección 1.7.3, el vector axial de un tensor representa la dirección (opuesta) del espacio nulo de la parte antisimétrica de un tensor que caracteriza a una transformación lineal.

Los vectores axiales de dos tensores antisimétricos  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{W}$  cumplen con las propiedades

$$\mathbf{K} : \mathbf{W} = -\frac{1}{2} \mathbf{K}_x \cdot \mathbf{W}_x = -2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{w} \quad (33.a)$$

$$(\mathbf{K} \cdot \mathbf{W})_x = \frac{1}{2} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{K})_x = -\frac{1}{4} \mathbf{K}_x \times \mathbf{W}_x \quad (33.b)$$

### 1.7.11. Tensor Axial

El *tensor axial*, al igual que el vector axial, se define en componentes de la forma

$$(\mathbf{T}_x)_{ilm\cdots} = \epsilon_{ijk} T_{jklm\cdots} \quad (34)$$

Esto en notación simbólica se puede expresar como

$$\mathbf{T}_x = -\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{T} \quad (35)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor alternante absoluto de orden tres.

### 1.7.12. Descomposición Espectral

Un escalar  $\lambda$  es un *autovalor* del tensor  $\mathbf{A}$ , si existe un vector unitario  $\mathbf{e}$  tal que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e} \quad (36)$$

en cuyo caso  $\mathbf{e}$  es un *autovector*. El espacio característico para  $\mathbf{A}$  correspondiente a  $\lambda$  es el subespacio vectorial consistente de todos los vectores  $\mathbf{v}$  que satisfagan (36) en el lugar de  $\mathbf{e}$ . Si este espacio tiene dimensión  $n$ , luego se dice que  $\lambda$  tiene *multiplicidad*  $n$ . El *espectro* de  $\mathbf{A}$  es la lista  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ , donde  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  son los autovalores de  $\mathbf{A}$ , con cada autovalor repetido un número de veces igual a su multiplicidad.

#### Proposición 1.

- (a) Los autovalores de un tensor definido positivo son estrictamente positivos.
- (b) Los espacios característicos de un tensor simétrico son mutuamente ortogonales.

Demostración. Sea  $\lambda$  un autovalor de un tensor definido positivo  $\mathbf{A}$ , y sea  $\mathbf{e}$  el correspondiente autovector unitario. Entonces, ya que se cumple que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}$  y  $\|\mathbf{e}\| = 1$ , se cumple que

$$\lambda = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} > 0 \quad (37)$$

con lo cual queda demostrado (a).

Para demostrar (b) tómese  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  dos autovalores distintos del tensor simétrico  $\mathbf{S}$ , y sean

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \quad (38)$$

tal que  $\mathbf{v}_1$  pertenezca al espacio característico de  $\lambda_1$  y  $\mathbf{v}_2$  pertenezca al espacio característico de  $\lambda_2$ . Entonces

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \quad (39)$$

y ya que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , entonces  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ .  $\triangle$

De (36) se obtiene mediante la manipulación de los términos que

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (40)$$

Para que exista una solución distinta de la trivial, debe cumplirse que el determinante del tensor  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} - \lambda \mathbf{I})$  sea nulo, con lo cual se obtiene la ecuación que deben cumplir los autovalores  $\lambda$ . Dado un tensor  $\mathbf{A}$  generado en un espacio de dimensión tres, esta ecuación, denominada la *ecuación característica*, admite la forma polinómica

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = -\lambda^3 + \mathbf{I}_\mathbf{A} \lambda^2 - \mathbf{II}_\mathbf{A} \lambda + \mathbf{III}_\mathbf{A} = 0 \quad (41)$$

para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , donde

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\mathbf{A} &= \text{tr} \mathbf{A} = \frac{1}{1!} \delta_a^i A_{ia} = A_{ii} \\ \mathbf{II}_\mathbf{A} &= \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2)] = \frac{1}{2!} \delta_{ab}^{ij} A_{ia} A_{jb} = A_{22} A_{33} - A_{23} A_{32} + A_{33} A_{11} - A_{31} A_{13} + A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} \\ \mathbf{III}_\mathbf{A} &= \frac{1}{6} [2 \text{tr} \mathbf{A}^3 - 3(\text{tr} \mathbf{A}^2)(\text{tr} \mathbf{A}) + (\text{tr} \mathbf{A})^3] = |\mathbf{A}| = \frac{1}{3!} \delta_{abc}^{ijk} A_{ia} A_{jb} A_{kc} = \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \end{aligned} \quad (42)$$

son los tres *invariantes principales* del tensor  $\mathbf{A}$ . Los símbolos  $\delta_{abc\dots}^{ijk\dots}$  se denominan las deltas de Kronecker generalizadas y se definirán en el Apéndice B (Sec.B.1.2.2).

Cuando se tiene un tensor simétrico  $\mathbf{S}$ , los invariantes principales están completamente caracterizados por su espectro  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . En realidad, un simple cálculo muestra que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\mathbf{S} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \mathbf{II}_\mathbf{S} &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 \\ \mathbf{III}_\mathbf{S} &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \quad (43)$$

Más aún, la caracterización de arriba tiene una correspondencia uno a uno. Para ver esto nótese primero que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un autovalor del tensor  $\mathbf{S}$ , si y sólo si,  $\lambda$  satisface la ecuación característica

$$|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (44.a)$$

o equivalentemente,

$$-\lambda^3 + \mathbf{I}_\mathbf{S} \lambda^2 - \mathbf{II}_\mathbf{S} \lambda + \mathbf{III}_\mathbf{S} = 0 \quad (44.b)$$

Adicionalmente la multiplicidad de un autovalor  $\lambda$  es igual a su multiplicidad como raíz de la ecuación polinómica (44.b).

Los autovectores se calculan de la ecuación fundamental

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e} \quad A_{ij} e_j = \lambda e_i \quad (45)$$

Cuando el tensor es simétrico los autovalores unitarios se pueden ordenar de tal forma, que las direcciones principales formen un sistema de coordenadas cartesiano (dextrorso), con lo cual las componentes de los vectores unitarios principales en el sistema de coordenadas original forman una matriz ortogonal y unimodular positiva (con determinante unitario positivo). Esto es

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} Q_{1k} \\ Q_{2k} \\ Q_{3k} \end{bmatrix} \quad Q_{ij} Q_{ik} = \delta_{jk} \quad \epsilon_{ijk} Q_{1i} Q_{2j} Q_{3k} = 1 \quad (46)$$

**Teorema 2.** (Teorema Espectral). Sea  $\mathbf{S}$  un tensor de segundo orden simétrico, generado en un espacio  $\mathbf{V}$  de dimensión tres. Entonces existe una base ortonormal para dicho espacio consistente enteramente por autovectores de  $\mathbf{S}$ . Adicionalmente, para cada una de esas bases  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , los correspondientes autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , cuando están ordenadas, forman el espectro completo del tensor  $\mathbf{S}$  y

$$\mathbf{S} = \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \quad (\text{se suma en } i) \quad (47)$$

Recíprocamente, si  $\mathbf{S}$  tiene la forma (47) con  $\{\mathbf{e}_i\}$  ortonormales, entonces  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , son autovalores de  $\mathbf{S}$  con  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  siendo los correspondientes autovectores. Además, se pueden tener cualquiera de estos tres casos:

- (a)  $\mathbf{S}$  tiene exactamente tres autovalores distintos, si y sólo si, el espacio característico de  $\mathbf{S}$  son tres líneas mutuamente perpendiculares, intersectándose en el origen del sistema de coordenadas.
- (b)  $\mathbf{S}$  tiene exactamente dos autovalores distintos, si y sólo si,  $\mathbf{S}$  admite la representación

$$\mathbf{S} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) \quad \|\mathbf{e}_1\| = 1 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 \quad (48)$$

En este caso  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son dos autovalores distintos y sus correspondientes espacios característicos son el subespacio  $sp\{\mathbf{e}_1\}$  de la línea generada por el vector  $\mathbf{e}_1$  y el subespacio  $sp\{\mathbf{e}_1\}^\perp$  del plano perpendicular al vector  $\mathbf{e}_1$ , respectivamente. Recíprocamente, si  $sp\{\mathbf{e}_1\}$  y  $sp\{\mathbf{e}_1\}^\perp$  son los espacios característicos para  $\mathbf{S}$ , entonces  $\mathbf{S}$  debe tener la forma (48).

- (c)  $\mathbf{S}$  tiene exactamente un sólo autovalor, si y sólo si,

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{I} \quad (49)$$

En este caso  $\lambda$  es el único autovalor de multiplicidad tres y  $\mathbf{V}$  es el correspondiente espacio característico. Recíprocamente, si  $\mathbf{V}$  es el espacio característico para  $\mathbf{S}$ , entonces  $\mathbf{S}$  tiene la forma (49).

La expresión (47) es denominada la *descomposición espectral* de  $\mathbf{S}$  y corresponde a la forma canónica de dicho tensor simétrico. Para las tres alternativas mencionadas en el teorema anterior la matriz de componentes del tensor  $\mathbf{S}$  en el sistema de coordenadas principal sería

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

**Proposición 2.** Sean  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$  son tensores simétricos de segundo orden y supóngase que poseen los mismos invariantes principales. Entonces  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$  tienen el mismo espectro.

**Teorema 3.** (Caley-Hamilton). Todo tensor  $\mathbf{A}$  satisface su ecuación característica. Esto es,

$$-\mathbf{A}^3 + \mathbf{I}_\mathbf{A} \mathbf{A}^2 - \mathbf{II}_\mathbf{A} \mathbf{A} + \mathbf{III}_\mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (51)$$

o en componentes cartesianas

$$-A_{ik} S_{km} A_{mj} + \mathbf{I}_\mathbf{A} A_{ik} S_{kj} - \mathbf{II}_\mathbf{A} A_{ij} + \mathbf{III}_\mathbf{A} \delta_{ij} = 0 \quad (52)$$

**Teorema 4.** (Teorema de la Conmutación). Supóngase que un tensor simétrico  $\mathbf{S}$  y otro tensor  $\mathbf{B}$  conmutan. Entonces,  $\mathbf{T}$  deja cada espacio característico de  $\mathbf{S}$  invariante; esto es, si  $\mathbf{v}$  pertenece al espacio característico de  $\mathbf{S}$ , entonces  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$  pertenece al mismo espacio característico. Recíprocamente, si  $\mathbf{T}$  deja cada espacio característico de un tensor simétrico  $\mathbf{S}$  invariante, entonces  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$  conmutan.

Demostración. Sean  $\mathbf{S}$  un tensor simétrico que conmuta con el tensor  $\mathbf{B}$ . Supóngase que  $\mathbf{v}$  pertenece al espacio característico de  $\mathbf{S}$  correspondiente al autovalor  $\lambda$  y que  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ . Entonces,

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad (53)$$

así que  $(\mathbf{T}.\mathbf{v})$  pertenece al mismo espacio característico que  $\mathbf{v}$ . Para demostrar la afirmación recíproca, escójase un vector cualquiera

$$\mathbf{u} = c_i \mathbf{v}_i \quad (54)$$

siendo  $\mathbf{v}_i$  los vectores que definen los espacios característicos correspondientes a los autovalores  $\lambda_i$ . Como estos espacios son perpendiculares entre sí, los vectores  $\mathbf{v}_i$  forman una base del espacio completo. Si  $\mathbf{T}$  deja cada espacio característico del tensor simétrico  $\mathbf{S}$  invariante, entonces  $(\mathbf{T}.\mathbf{v}_i)$  pertenece al espacio característico de  $\mathbf{S}$  y

$$\mathbf{S}(\mathbf{T}.\mathbf{v}_i) = \lambda_i(\mathbf{T}.\mathbf{v}_i) = \mathbf{T}(\lambda_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{T}(\mathbf{S}.\mathbf{v}_i) \quad (i \text{ no suma}) \quad (55)$$

Por consiguiente se concluye, con la ayuda de (54), que

$$(\mathbf{S}.\mathbf{T}).\mathbf{u} = c_i(\mathbf{S}.\mathbf{T}).\mathbf{v}_i = c_i \mathbf{S}(\mathbf{T}.\mathbf{v}_i) = c_i \mathbf{T}(\mathbf{S}.\mathbf{v}_i) = \mathbf{T}(\mathbf{S}.\mathbf{u}) = (\mathbf{T}.\mathbf{S}).\mathbf{u} \quad (56)$$

De esta forma, como  $\mathbf{u}$  fue escogido arbitrariamente,  $\mathbf{S}.\mathbf{T} = \mathbf{T}.\mathbf{S}$ .  $\triangle$

**Teorema 5.** Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dos tensores semejantes con  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{T}$ , entonces  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  comparten los mismos autovalores con las mismas multiplicidades. Si  $\mathbf{e}$  es un autovector de  $\mathbf{A}$ , entonces  $\mathbf{T}^{-1}.\mathbf{e}$  es un autovector del tensor semejante  $\mathbf{B}$ .

Demostración. Los autovalores de  $\mathbf{B}$  son las raíces de la ecuación característica

$$|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = |\mathbf{T}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}| = |\mathbf{T}^{-1}.(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}).\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}|.|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|.|\mathbf{T}| = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| \quad (57)$$

Como  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tienen el mismo polinomio característico, entonces tienen los mismos autovalores con sus respectivas multiplicidades.

Sea  $\mathbf{e}$  un autovector del tensor  $\mathbf{A}$ , para su correspondiente autovalor  $\lambda$ . Entonces,

$$\mathbf{A}.\mathbf{e} = \lambda \mathbf{e} \implies (\mathbf{T}.\mathbf{B}.\mathbf{T}^{-1}).\mathbf{e} = \lambda \mathbf{e} \implies \mathbf{B}(\mathbf{T}^{-1}.\mathbf{e}) = \lambda(\mathbf{T}^{-1}.\mathbf{e}) \quad (58)$$

Esto prueba nuevamente que  $\lambda$  es también un autovalor de  $\mathbf{B}$ , y su correspondiente autovector es  $\mathbf{T}^{-1}.\mathbf{e}$ .  $\triangle$

### 1.7.13. Descomposición Polar

Para el desarrollo de la demostración del teorema de la descomposición polar se requiere previamente el siguiente teorema.

**Teorema 6.** (Teorema de la Raíz Cuadrada). Sea  $\mathbf{C}$  un tensor simétrico y definido positivo. Entonces, existe un único tensor  $\mathbf{A}$  simétrico y definido positivo, tal que

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{C} \quad (59)$$

y se escribe que  $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{C}}$ .

Demostración. Se demostrará primero la existencia. Sea

$$\mathbf{C} = \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \quad (\text{se suma en } i) \quad (60)$$

la descomposición espectral de  $\mathbf{C}$  y definimos a  $\mathbf{A}$  como

$$\mathbf{A} = \sqrt{\lambda_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \quad (\text{se suma en } i) \quad (61)$$

Ya que  $\lambda_i$  es positivo, esta definición es consistente. Entonces  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{C}$  es una consecuencia directa del producto interior de dos tensores.

Ahora se demostrará la unicidad. Supóngase que

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2 = \mathbf{C} \quad (62)$$

con  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  siendo tensores simétricos y definidos positivos. Sea  $\mathbf{e}$  un autovector de  $\mathbf{C}$  con  $\lambda > 0$  el correspondiente autovalor. Entonces, tomando  $\gamma = \sqrt{\lambda}$ ,

$$\mathbf{0} = (\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{A}^2 - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{A} + \gamma \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{A} - \gamma \mathbf{I}) \quad (63)$$

Sea

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \gamma \mathbf{I}) \cdot \mathbf{e} \quad (64)$$

Entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = -\gamma \mathbf{v} \quad (65)$$

y  $\mathbf{v}$  debe ser nulo, porque de otra forma  $-\gamma$  sería un autovalor de  $\mathbf{A}$ , lo que es imposible, puesto que  $\mathbf{A}$  es definido positivo y sus autovalores deben ser positivos. De aquí que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \gamma \mathbf{e} \quad (66)$$

Similarmente,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{e} = \gamma \mathbf{e} \quad (67)$$

y  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}$  para todo autovector  $\mathbf{e}$  de  $\mathbf{C}$ . Puesto que se puede formar una base de los autovectores de  $\mathbf{C}$ , entonces  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  deben coincidir.  $\triangle$

**Teorema 7.** (Descomposición Polar). Sea  $\mathbf{F}$  un tensor cualquiera con determinante positivo. Entonces existe un par de tensores simétricos y definidos positivos, y un tensor de rotación, tales que

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{R} \quad (68)$$

Adicionalmente, cada una de estas descomposiciones es única; de hecho

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}} \quad \mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^t} \quad (69)$$

Se denominará a la primera representación de (69) la *descomposición polar derecha* y a la segunda representación *descomposición polar izquierda* del tensor  $\mathbf{F}$

Demostración. El primer paso será mostrar que  $\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}$  y  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^t$  son tensores simétricos y definidos positivos. Ambos tensores son claramente simétricos. Adicionalmente,

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \geq 0 \quad (70)$$

y este producto escalar puede ser cero solamente cuando  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , o equivalentemente, puesto que  $\mathbf{F}$  es invertible, solamente si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . De esta forma  $\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}$  es simétrico y definido positivo. Procediendo de manera similar, también se muestra que  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^t$  es simétrico y definido positivo.

Se demostrará ahora la unicidad de la descomposición. Sea  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}$  una descomposición polar de  $\mathbf{F}$ . Luego, como  $\mathbf{R}$  es una rotación,

$$\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^t) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 \quad (71)$$

Pero por el Teorema de la Raíz Cuadrada existe un único tensor  $\mathbf{A}$  cuyo cuadrado es  $\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}$ . De esta forma (69.a) es válida; ya que  $\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ , entonces  $\mathbf{R}$  es también único. Por otra parte, y procediendo de manera similar, si  $\mathbf{F} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}$  es una descomposición izquierda, entonces

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{B}^2 \quad (72)$$

y  $\mathbf{B}$  está determinada por (69.b), y la rotación  $\mathbf{R}$  por la relación  $\mathbf{R} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{F}$ .

Para demostrar la existencia se define un tensor  $\mathbf{A}$  simétrico y definido positivo mediante (69.a) y sea

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (73)$$

Para verificar que  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}$  es una descomposición polar derecha, se tiene sólo que mostrar que  $\mathbf{R}$  es una rotación. Puesto que los determinante de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{A}$  son positivos (en este último caso porque los autovalores son estrictamente positivos), el determinante de  $\mathbf{R}$  también es positivo. De esta forma se tiene sólo que mostrar adicionalmente que  $\mathbf{R}$  es ortogonal. Pero esto se consigue fácilmente del siguiente cálculo

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^t = (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{F}^t) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad (74)$$

Finalmente, se define

$$\mathbf{B} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^t \quad (75)$$

Entonces  $\mathbf{B}$  es positivo definido por ser una transformación mediante una rotación de un tensor también definido positivo (aplicando el teorema 1), y

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^t) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (76)$$

lo que concluye la demostración.  $\triangle$

## 2. CALCULO.

### 2.1. INTRODUCCION.

En esta parte del cálculo de vectores y tensores cartesianos se expondrá de una forma concisa todas las propiedades de los vectores y tensores bajo operaciones como la derivación y la integración. Se describirán como afectan a los vectores y tensores los diferentes operadores diferenciales y se expondrán de una forma bastante general los teoremas integrales. Para realizar esto se describirán algunos aspectos fundamentales de la geometría como las definiciones de línea curva y superficie, pero los aspectos más avanzados se ha dejado para la Sección 3. del Apéndice B. Esto último se ha estructurado así para evitar ser demasiado repetitivo en los temas comunes de los dos primeros apéndices.

#### 2.1.1. Campo Vectorial o Tensorial

Un campo vectorial o tensorial es toda aquella función puntual vectorial o tensorial, respectivamente, que depende de la posición espacial y/o de un parámetro. La posición espacial puede ser uni, bi o tridimensional (el concepto se puede generalizar a  $\mathbb{R}^n$ ) y al parámetro normalmente se le asigna las características del tiempo o está relacionado con una longitud. Para una geometría de H. Minkowski el parámetro (el tiempo en algunos de los casos) forma parte de la posición espacial de cuatro dimensiones. La función vectorial o tensorial que genera el campo puede estar definida en todo el espacio o en una región de éste.

**Teorema.** Sea  $\varphi$  un campo continuo en una región  $\mathcal{V}$  del espacio. Supóngase que

$$\int_{\mathcal{V}'} \varphi(\mathbf{P}) \, d\mathcal{V}_p = \mathbf{0} \quad \forall \mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \quad (1)$$

entonces

$$\varphi(\mathbf{P}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{P} \in \mathcal{V} \quad (2)$$

#### 2.1.2. Vectores y Tensores Paramétricos

Los campos vectoriales o tensoriales no necesariamente dependen de manera exclusiva de la posición espacial, sino que también pueden depender de un parámetro  $t$ , el cual puede interpretarse como un parámetro temporal de evolución del campo.

**Dependencia de un Parámetro.** Sea, por ejemplo, un tensor  $\mathbf{T}$  de segundo orden, dependiente del parámetro  $t$  (también dependerá de la posición espacial  $\mathbf{x}$ ). Bajo un cambio de la base las componentes de este tensor se transforman de acuerdo a su definición como

$$\tilde{T}_{ab}(t, \mathbf{x}) = Q_{ia} Q_{jb} T_{ij}(t, \mathbf{x}) \quad (3)$$

La extensión de esta dependencia a tensores de distintos órdenes es similar. Normalmente, para todos los casos de estudio en coordenadas cartesianas se suponen a los elementos de la matriz de los cosenos directores  $Q_{ai}$  independientes del parámetro  $t$  y de la posición espacial  $\mathbf{x}$ . En el Apéndice B se estudiarán los casos con sistemas de coordenadas curvilíneas cuya métrica depende de un parámetro  $t$ .

**Derivación con el Parámetro.** La derivación de un tensor de segundo orden con respecto a un parámetro  $t$  se hace sin ninguna dificultad en la forma

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} \tilde{T}_{ab}(t, \mathbf{x}) = Q_{ia} Q_{jb} \frac{\partial^p}{\partial t^p} T_{ij}(t, \mathbf{x}) \quad (4)$$

Esta expresión indica que las derivadas con respecto al parámetro se comportan también como las componentes de un tensor de segundo orden. En otras palabras, los tensores conservan su carácter tensorial bajo la derivación.

### 2.1.3. Curvas en el Espacio

La *curvas en el espacio* puede definirse como un sucesión continua de puntos en el espacio. En el sentido estricto, una curva en el espacio posee dimensión uno. En otras palabras, la curva siempre se puede definir en función de una sólo variable. Cuando esta variable es un parámetro se dice la curva se expresa en forma paramétrica.

**Ecuaciones Paramétricas.** Una curva se puede definir en función de un parámetro de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \quad a \leq t \leq b \quad (5)$$

Cuando  $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b)$  se dice que la *curva es cerrada*. De otra forma se dice que la *curva es abierta*. Un *punto doble* de la curva es todo aquel punto para el cual se tiene que  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$  con  $t_1 \neq t_2$  ( $t_1, t_2 \in [a, b]$ ). Una curva que no posee puntos dobles se denomina *curva simple*.

La longitud de la curva (5) se puede calcular empleando los procedimiento del cálculo diferencial en la forma

$$l(t) = \int_a^t \sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}} = \int_a^t \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)} dt \quad (6)$$

Cuando esta integral se puede calcular, se dice que la curva es *rectificable*. La expresión (6) puede permitir que la longitud de la curva pueda también emplearse como parámetro para definir la curva. La derivación con respecto a  $l$  se hará empleando la regla de la cadena y usando la relación

$$\frac{dl(t)}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)} \quad (7)$$

obtenida de derivar (6). Una curva cerrada se dice que está *orientada*, cuando al recorrerla un observador, siempre deja del lado izquierdo a la superficie sostenida por dicha curva. En este caso, el sentido del recorrido se define como *sentido positivo*. Normalmente se acostumbra a escoger al parámetro para definir una curva, de manera que se incremente de forma continua cuando se recorra la curva en el sentido positivo. Una curva simple se dice que está orientada cuando forma parte de una curva cerrada orientada.

**Ecuaciones de Frenet-Serret.** Cuando se emplea la longitud de la curva como parámetro para definirla, se puede encontrar el *vector unitario tangente*  $\boldsymbol{\lambda}$  a la curva mediante

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{d\mathbf{x}}{dl} \quad (8)$$

La derivada de este vector unitario tangente permite definir un dirección mediante un vector unitario  $\boldsymbol{\mu}$ , perpendicular a la curva y dirigido hacia en centro de curvatura de dicha curva. El *radio de curvatura*  $\rho$  de la curva en un punto de ella, permite construir un círculo tangente a la curva en dicho punto. Este círculo contenido en el plano generado por los vectores  $\boldsymbol{\lambda}$  y  $\boldsymbol{\mu}$ , se denomina el *círculo osculador* y el plano que lo



contiene se denomina el *plano osculador*. Se puede definir también un vector unitario  $\boldsymbol{\nu}$  normal al plano osculador de manera que

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu}) = 1 \quad \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu} \quad (9)$$

con lo cual se tiene que el trío  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\nu}$  forma un sistema de coordenadas dextrorso. A este trío se le denomina el *triedro de Frenet*, al vector  $\boldsymbol{\mu}$  se le denomina *vector normal principal* y a  $\boldsymbol{\nu}$  el *vector unitario binormal*. El plano generado por los vectores  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\nu}$  se le denomina el *plano normal* a la curva. El plano generado por los vectores  $\boldsymbol{\lambda}$  y  $\boldsymbol{\nu}$  se le denomina el *plano rectificante*.

Los vectores unitarios definidos antes cumplen con unas relaciones denominadas la *ecuaciones de Frenet-Serret*

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dl} &= \kappa \boldsymbol{\mu} \\ \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dl} &= \tau \boldsymbol{\nu} - \kappa \boldsymbol{\lambda} \\ \frac{d\boldsymbol{\nu}}{dl} &= -\tau \boldsymbol{\mu} \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $\kappa = 1/\rho$  es la *curvatura* y  $\tau = 1/\sigma$  es la *torsión* de la curva, con  $\sigma$  siendo el *radio de torsión*. Una generalización de estas ecuaciones se pueden ver en la sección B.3.1.3

Para una curva plana sobre el plano  $xy$ , su ecuación paramétrica se puede escribir como

$$y = f(x) \quad (11)$$

En este caso, el radio de curvatura se calcula como

$$\rho = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}{|f''(x)|} \quad (12)$$

Existe también una forma especial de expresar la ecuación (11) mediante

$$g(x, y) = c \quad (13)$$

que se denomina *curva de nivel* (el caso trivial es con el nivel  $c = 0$ ). La forma (13) es más general que la forma (11), puesto que permite la definición de curvas que no se pueden expresar mediante (11).

**Línea de un Campo Vectorial.** Las *líneas del campo* vectorial se definen como aquellas curvas que siempre son tangentes a los vectores  $\mathbf{v}$  del campo en cada uno de sus puntos. De acuerdo a esto, ellas son las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (14)$$

sujeto a la condición

$$s = 0 \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^o \quad (15)$$

donde  $s$  es un parámetro a lo largo de la línea de corriente. Este parámetro puede ser la longitud de la curva. Para la ecuación (14) el parámetro  $t$  es mantenido fijo, mientras las ecuaciones son integradas, y las curvas resultantes son las líneas del campo para un valor del parámetro igual a  $t$ . Estas pueden variar de un valor del parámetro  $t$  a otro, y, en particular, dicho parámetro puede interpretarse como un parámetro temporal de evolución del campo.

#### 2.1.4. Superficies en el Espacio

Una *superficie en el espacio* puede definirse como un conjunto de puntos distribuidos de forma continua en dos direcciones, necesariamente no paralelas entre sí. En el sentido estricto, una superficie en el espacio posee dimensión dos. En otras palabras, una superficie siempre se puede definir en función de dos variables. Cuando estas variables son parámetros se dice la curva se expresa en forma paramétrica.

**Ecuaciones Paramétricas.** Un superficie se puede definir en función de dos parámetros de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) \quad a \leq u \leq b \quad c \leq v \leq d \quad (16)$$

Cuando la frontera de una superficie es una curva cerrada se dice que la superficie está *acotada*.

Un representación particular de una superficie en el espacio es mediante la ecuación paramétrica

$$z = f(x, y) \quad (17)$$

donde los parámetros son las coordenadas en el plano  $xy$  de los puntos de una región plana. Esta representación paramétrica particular siempre se puede llevar a la forma

$$h(x, y, z) = c \quad (18)$$

que se denomina *superficie de nivel* (en el caso trivial el nivel  $c$  puede ser nulo). El vector normal exterior de un superficie acotada, expresada como una superficie de nivel, se calcula como

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{\|\nabla h\|} \quad (19)$$

Cualquier vector  $\boldsymbol{\lambda}$  tangente a la superficie cumple con

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (20)$$

Existe un número infinito de vectores tangentes en cada punto de la superficie. La forma (18) es más general que la forma (17), puesto que permite la definición de superficies que no se pueden expresar mediante (17).

**Tubo de un Campo Vectorial.** Si  $\mathcal{L}$  es una curva cerrada simple (este concepto se dará más adelante) en una región del espacio donde está definido el campo vectorial  $\mathbf{v}$ , las líneas del campo a través de cada punto de  $\mathcal{L}$  generan una superficie conocida como tubo del campo vectorial. Sea  $\mathcal{A}$  una superficie con  $\mathcal{L}$  como curva limitante, luego la integral

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (21)$$

es conocida como la fuerza del tubo del campo en su sección transversal  $\mathcal{A}$ . Esta fuerza del tubo del campo representa en el caso del campo de velocidades el caudal volumétrico que atraviesa la superficie  $\mathcal{A}$ . Debido a que el campo vectorial es tangente a la línea del campo en cada punto, la fuerza del campo a través del tubo del campo es nula.

### 2.1.5. Regiones Normales y Regulares

**Superficies y Regiones Normales.** Las regiones que se considerarán son aquellas llamadas *regiones normales*. Una región  $\mathcal{N}$  es normal si es un poliedro convexo o si está acotada por una superficie  $\mathcal{S}$  consistente de un número finito de partes de planos y una superficie curva  $\mathcal{A}$ , tal que, para alguna orientación de los ejes de coordenadas, las siguientes condiciones son cumplidas:

- La proyección  $\mathcal{A}'$  de  $\mathcal{A}$  sobre el plano  $xy$  esta acotada por una curva simple cerrada consistente de un número finito de arcos, cada uno de los cuales posee una tangente con variación continua; la proyección de todos los lados de  $\mathcal{S}$  en el plano  $xy$  divide ese plano en un número finito de regiones, cada una de las cuales está acotada por una curva simple cerrada (más adelante se definirá este concepto).
- Cualquier paralela al eje  $z$  conteniendo un punto interior de  $\mathcal{N}$  tiene en común con  $\mathcal{N}$  un único segmento y ningún otro punto, y  $\mathcal{A}$  está dada por una ecuación de la forma  $z = f(x, y)$ , donde  $f(x, y)$  es una función biyectiva y continua, junto con sus derivadas parciales de primer orden, en  $\mathcal{A}'$ .
- Las condiciones anteriores son cumplidas también cuando los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  son intercambiados de cualquier forma.

Una superficie se denomina un *elemento de superficie normal* si satisfacen las condiciones impuestas sobre  $\mathcal{S}$  en una región normal. Cualquier parte de un elemento de superficie normal será también un elemento de superficie normal.

**Curvas Regulares.** Un *arco regular* es un conjunto de puntos los cuales, para alguna orientación de los ejes, admite un representación

$$y = f(x) \quad z = g(x) \quad a \leq x \leq b \quad (22)$$

donde  $f(x)$  y  $g(x)$  son continuas y tienen derivadas continuas en  $[a, b]$ . A este tipo de representación para un arco se le denomina *estándar*.

Una *curva regular* es un conjunto de puntos consistente de un número finito de arcos regulares arreglados en orden, y tal que el punto terminal de cada uno (otro diferente al último) es el punto inicial del arco que sigue a continuación. Los arcos no tienen otro punto en común, excepto que el punto terminal del último arco sea el punto inicial del primero. En este caso, la curva regular es una *curva cerrada*. De otra forma es una *curva abierta*. Las curvas regulares no tienen puntos dobles. Esto significa que si  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , es una representación paramétrica de la curva en términos de la longitud de su arco, las ecuaciones

$$x(s) = x(t) \quad y(s) = y(t) \quad z(s) = z(t) \quad (23)$$

no tienen otra solución que  $s = t$  para  $s$  y  $t$  en el intervalo cerrado  $[0, l]$ , si la curva es abierta, y sólo las dos soluciones adicionales  $s = 0$ ,  $t = l$ , y  $s = l$ ,  $t = 0$ , si la curva es cerrada. Una curva sin doble puntos es llamada una *curva simple*.

**Superficies Regulares.** Una *región plana regular* es una región plana  $\mathcal{R}$  cerrada y acotada, cuya frontera es una curva regular cerrada.

Una región plana regular  $\mathcal{R}$  es la suma de las regiones regulares  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$ , considerando que cada punto de  $\mathcal{R}$  está en una de las regiones  $\mathcal{R}_i$ , cada punto de cada  $\mathcal{R}_i$  está en  $\mathcal{R}$ , y dos de las regiones de  $\mathcal{R}_i$  no tienen más puntos comunes que los siguientes: Un arco regular de la frontera de una de estas regiones y un arco regular de la frontera de otra pueden tanto coincidir, o tener uno o ambos puntos extremos en común.

Un *elemento de superficie regular* es un conjunto  $\mathcal{A}$  de puntos el cual, para alguna orientación de los ejes, admite una representación

$$z = f(x, y) \quad (x, y) \in \mathcal{R} \quad (24)$$

donde  $\mathcal{R}$  es una región plana regular del plano  $xy$ , y donde  $f(x, y)$  es continuamente diferenciable en  $\mathcal{R}$ . A esta se le denomina *representación estándar*. La *frontera* de un elemento de superficie regular es el conjunto  $\mathcal{L}$  de aquellos de sus puntos  $(x, y, z)$  para los cuales  $(x, y)$  está sobre la frontera de  $\mathcal{R}$ .

**Teorema.** La frontera de un elemento de superficie regular es una curva regular.

Una *superficie regular* es un conjunto de puntos consistente de un número finito de elementos de superficie regular, relacionados entre sí como sigue:

- Dos de los elementos de superficie regular pueden tener en común tanto un sólo punto, el cual es el vértice para ambos, o un sólo arco regular, el cual es un lado para ambos, pero ningún otro punto.
- Tres o más de los elementos de superficie regular pueden tener, al menos, los vértices en común.
- Cualesquiera dos de los elementos de superficie regular son el primero y el último de una cadena, tal que cada uno tiene un lado en común con el siguiente.
- Todos los elementos de superficie regular teniendo un vértice en común forman una cadena, tal que cada uno tiene un lado, terminando en ese vértice, en común con el siguiente. El último puede, o no puede, tener un lado en común con el primero.

Aquí *lado* de un elemento de superficie regular significa uno de los tantos (finitos) arcos regulares de los cuales su frontera está compuesta. Un *vértice* es un punto en el cual dos lados se encuentran. La frontera de un elemento de superficie regular no necesita experimentar un quiebre en su dirección en un vértice, pero

el número de vértices debe ser finito. Uno de los elementos de superficie regular es llamado una *cara* de la superficie regular.

Si todos los lados de los elementos de superficie regular de una superficie regular pertenecen, cada uno a dos de los elementos, la superficie se dice que es *cerrada*. De otra forma es *abierta*.

**Regiones Regulares.** Una *región regular del espacio* es una región cerrada y acotada  $\mathcal{V}$ , cuya frontera es una superficie regular cerrada  $\mathcal{A}$ .

Una región regular  $\mathcal{V}$  del espacio es la suma de las regiones regulares  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ , considerando que cada punto de  $\mathcal{V}$  está en uno de los  $\mathcal{V}_i$ , y cada punto de cualquier  $\mathcal{V}_i$  está en  $\mathcal{V}$ , y considerando que dos de los  $\mathcal{V}_i$  no tengan más puntos en común que un sólo punto el cual es un vértice de cada uno, o un sólo arco regular el cual es un lado de cada uno, o una sola superficie regular, la cual es la cara de cada uno. Una región regular del espacio es una región simplemente conexa. Este concepto se describirá en la próxima sección.

### 2.1.6. Regiones Conexas

**Regiones Simplemente Conexas.** Una *región simplemente conexa* es una región del espacio, tal que cualquier curva cerrada simple en él puede ser deformada de manera continua (sin romperse), hasta llevarla a un punto, sin que en ningún momento de este proceso alguna porción de ella deje de estar en la región.

La definición dada antes es equivalente a decir que una región es simplemente conexa, si cualquier par de *pasos* o recorridos sobre curvas simples, con los mismos puntos terminales, pueden ser continuamente deformados uno en el otro, sin dejar la región.

**Regiones Múltiplemente Conexas.** Una *región múltiplemente conexa* es una región que no es simplemente conexa. El *módulo* o circulación de un campo conservativo (campo cuyo rotacional es cero, por lo que se origina del gradiente de una función llamada potencial) puede ser nulo o no en una región múltiplemente conexa. En una región simplemente conexa el módulo siempre es nulo. Este último resultado puede verificarse más adelante aplicando el Teorema de Stokes. Cuando el módulo es nulo en una región múltiplemente conexa se dice que el campo conservativo es acíclico y posee una función potencial única. En el caso contrario el campo se dice que es cíclico.

Un ejemplo de una región doblemente conexa es el toroide (parecido a una rosquilla), puesto que existen en total dos pasos, con los dos mismos puntos terminales, tales que no pueden ser continuamente deformados uno en el otro, sin dejar la región. El *número de conectividad* de la región viene dado por el número total de pasos (con los mismos puntos terminales dos a dos) que no pueden ser continuamente deformados unos en los otros, sin dejar la región. El conjunto de pasos que sí pueden ser deformados a un paso en especial forma una clase de equivalencia. De esta forma, el número de conectividad será igual al número total de clases de equivalencia encontrados en la región. Un ejemplo ilustrativo es una rosquilla con dos agujeros, la cual es una región cinco veces conexa. Una rosquilla con tres agujeros será diez veces conexa. En general, una rosquilla con  $n$  agujeros será  $(n^2 + 1)$  veces conexa. En este caso general, el número total de curvas cerradas simples que no se pueden deformar continuamente en otra sin dejar la región, vendrá dado por

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n \quad (25)$$

o sea, las sumas de las filas del triángulo de pascal. Este resultado se justifica cuando se observa que el número de curvas con la característica mencionada que contengan dos agujeros será la combinación del número total de agujeros  $n$ , agrupados de dos en dos. El número curvas que contengan tres agujeros será la combinación de  $n$  en grupos de tres, y así sucesivamente.

## 2.2. DERIVACION

En esta sección se presentarán la reglas que rigen para la derivación de vectores y tensores. Especial énfasis tendrán las reglas de aplicación del operador diferencial “nabla”. En este sentido se describirán las diferentes formas de aplicar el operador diferencial nabla como lo son: el gradiente, la divergencia, el

rotacional, el laplaciano. Junto con esto se expondrán también las propiedades de las distintas formas mencionadas y la interrelación que existe entre ellas.

### 2.2.1. Derivación Parcial

La derivación de escalares, vectores y tensores cartesianos con respecto a alguna de las coordenadas espaciales  $x_i$ , cuando las coordenadas son cartesianas, forman vectores y tensores también cartesianos. Esta derivación se calcula fácilmente considerando que los vectores base son invariantes en el sistema de coordenadas cartesiano. Por ejemplo, un tensor de segundo orden  $\mathbf{T}$  derivado con respecto a la variable  $x_k$  daría como resultado

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1)$$

Una forma de mostrar la operación anterior consiste en emplear índices después de una coma para denotar la derivación parcial. Ejemplos de lo dicho se pueden encontrar a continuación:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_{,i} \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k} \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} = u_{i,jk} \quad (2)$$

En el Apéndice B se definirá un tipo de derivación parcial que incluye la influencia del sistema de coordenadas curvilíneo (donde los vectores base varían de punto a punto), y que se denomina “derivación covariante”. La notación para este tipo de derivación será la misma que para el caso cartesiano, pero el significado incluirá el efecto mencionado.

### 2.2.2. Operador Diferencial Nabla

El *operador diferencial nabla* es un operador vectorial de tipo lineal definido de la siguiente forma

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3)$$

Este operador cuando actúa sobre un campo escalar, vectorial o tensorial en general, genera un campo escalar, vectorial o tensorial, dependiendo del tipo de operación existente entre el operador y la correspondiente entidad.

Para un sistema coordenadas cartesianas tridimensionales el operador diferencial nabla se expresa como

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4)$$

con los vectores unitarios siempre constantes.

Para un sistema de coordenadas cilíndricas el operador diferencial nabla se expresa como

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (5)$$

donde se debe tener en cuenta la derivación de los siguientes vectores unitarios

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (6)$$

cuando se aplica a campos vectoriales o tensoriales.

Para un sistema de coordenadas esférico el operador diferencial nabla se expresa como

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (7)$$

donde se debe tener en cuenta la derivación de los siguientes vectores unitarios

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{e}_\theta & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{e}_r & \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} &= \sin \theta \mathbf{e}_\phi & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} &= \cos \theta \mathbf{e}_\phi & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} &= -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (8)$$

cuando se aplica a campos vectoriales o tensoriales. En las expresiones (6) y (8) se han colocado los cambio de variables correspondientes para convertir los sistemas de coordenadas al cartesiano.

### 2.2.3. Gradiente

El *gradiente* es la operación más pura realizada con el operador nabla, puesto que consiste en hacer

$$\nabla(\varphi) \equiv \nabla \varphi \equiv \nabla \otimes \varphi = \mathbf{e}_i \otimes \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (9)$$

Si  $\varphi$  es un escalar, el gradiente origina un vector. Si  $\varphi$  es un vector, el gradiente origina un tensor de segundo orden. Si  $\varphi$  es un tensor de segundo orden, el gradiente origina un tensor de tercer orden, y así sucesivamente.

Por ejemplo, el gradiente de un campo escalar, vectorial y tensorial se calcularía como

$$\nabla \phi = \phi_{,i} \mathbf{e}_i \quad \nabla \mathbf{v} = v_{i,j} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \quad \nabla \mathbf{T} = T_{ij,k} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (10)$$

respectivamente.

La siguiente tabla muestra los gradientes de una función escalar en distintos sistemas de coordenadas ortogonales (Nota: En el sistema de coordenadas cilíndricas, las coordenadas se transforman como  $[x, y, z] = [r \cos \theta, r \sin \theta, z]$ , la distancia al eje  $z$  es  $r$  y el ángulo acimutal  $\theta$  se mide alrededor del eje  $z$ , positivo en el sentido anti-horario desde el eje  $x$  positivo. En el sistema de coordenadas esféricas, las coordenadas se transforman como  $[x, y, z] = [r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta]$ , la distancia al origen es  $r$ , el ángulo cenital  $\theta$  se mide siempre desde el cenit en el extremo positivo del eje  $z$  y el ángulo acimutal  $\phi$  se mide igual que antes.)

**Tabla 1.** Gradiente de un escalar  $\nabla \psi$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\nabla \psi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\nabla \psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\nabla \psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$

La siguiente tabla muestra los gradientes de una función vectorial en los distintos sistemas de coordenadas

**Tabla 2.** Matriz transpuesta del gradiente de un vector  $[\nabla \mathbf{v}]$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} v_\phi & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} v_\theta + \frac{v_r}{r} \end{bmatrix}$

En esta última tabla se han considerado las derivadas (6) y (8) del campo vectorial y es por ello que aparecen términos adicionales.

#### 2.2.4. Divergencia

La *divergencia* consiste en aplicar el operador nabla, pero substituyendo la operación de producto tensorial “ $\otimes$ ” por la operación de producto interior “ $\cdot$ ”, en la expresión (4). De acuerdo a esto, entonces, la divergencia de un vector y de un tensor sería

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = v_{i,j} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = v_{i,i} \quad \nabla \cdot \mathbf{T} = T_{ij,k} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T_{ij,i} \mathbf{e}_j \quad (11)$$

respectivamente. Es evidente que la divergencia de un campo escalar no está definida.

La siguiente tabla muestra las divergencias de un campo vectorial en distintos sistemas de coordenadas ortogonales

**Tabla 3.** Divergencia de un vector  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

La divergencia de un tensor es un vector y en la siguiente tabla se presentan sus tres componentes en distintos sistemas de coordenadas.

**Tabla 4.** Divergencia de un tensor  $\nabla \cdot \mathbf{T}$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$[\nabla \cdot \mathbf{T}]_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}$ $[\nabla \cdot \mathbf{T}]_y = \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z}$ $[\nabla \cdot \mathbf{T}]_z = \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$[\nabla \cdot \mathbf{T}]_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r T_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z}$ $[\nabla \cdot \mathbf{T}]_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z}$ $[\nabla \cdot \mathbf{T}]_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r T_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$[\nabla \cdot \mathbf{T}]_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(T_{\theta r} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi}}{r}$ $[\nabla \cdot \mathbf{T}]_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(T_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\theta}}{r} - \frac{T_{\phi\phi} \cot \theta}{r}$ $[\nabla \cdot \mathbf{T}]_\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi}}{r} + \frac{2 T_{\theta\phi} \cot \theta}{r}$

### 2.2.5. Rotacional

El *rotacional* consiste en aplicar el operador nabla, pero substituyendo la operación de producto tensorial “ $\otimes$ ” por la operación de producto vectorial “ $\times$ ”, en la expresión (9). De acuerdo a esto, entonces, el rotacional de un vector y de un tensor sería

$$\nabla \times \mathbf{v} = v_{j,k} \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ikj} v_{j,k} \mathbf{e}_i \quad \nabla \times \mathbf{T} = T_{jk,l} \mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \epsilon_{ilj} T_{jk,l} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \quad (12)$$

respectivamente. Es evidente que el rotacional de un campo escalar no está definido.



La siguiente tabla muestra los rotacionales de campos vectoriales en distintos sistemas de coordenadas ortogonales

**Tabla 5.** Rotacional de un vector  $\nabla \times \mathbf{v}$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\phi \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_r$ $+ \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi$

donde para coordenadas esféricas a veces se suele sacar factor común de la forma

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta}(rv_\phi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi}(rv_\theta) \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi \sin \theta) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi$$

para luego substituir las variables  $rv_\theta$  y  $rv_\phi \sin \theta$ .

### 2.2.6. Laplaciano

El *laplaciano* es un operador resultado de hacer el producto interior del operador nabla con sigo mismo. Esto es,

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \quad (13)$$

El operador laplaciano, a diferencia del operador nabla, es un operador escalar, por lo que actúa de forma similar a la operación de derivación parcial. El laplaciano está definido tanto para campos escalares como para campos vectoriales y tensoriales.

El laplaciano de un campo escalar, de un campo vectorial y de un campo tensorial se calcularían como

$$\nabla^2 \phi = \phi_{,ii} \quad \nabla^2 \mathbf{v} = v_{i,jj} \mathbf{e}_i \quad \nabla^2 \mathbf{T} = T_{ij,kk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (14)$$

respectivamente.

La siguiente tabla muestra los laplacianos de funciones escalares en distintos sistemas de coordenadas ortogonales

**Tabla 6.** Laplaciano de un escalar  $\nabla^2\psi$ .

Coordenadas	Ecuaciones
Cartesianas $(x, y, z)$	$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$
Cilíndricas $(r, \theta, z)$	$\nabla^2\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$
Esféricas $(r, \theta, \phi)$	$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial \phi^2}$

donde el primer término del laplaciano en coordenadas esféricas se suele substituir a veces como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi)$$

para facilitar los cálculos.

### 2.2.7. Propiedades del Operador Nabla

El operador diferencial nabla cumple con ciertas propiedades cuando aparece combinado con otras operaciones vectoriales. La deducción de estas diferentes expresiones se dejará al lector para que aplique los procedimientos explicados en los capítulos anteriores. En las siguientes fórmulas,  $\phi$  es cualquier escalar,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son un par de vectores cualesquiera,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son cualquier tensor de segundo orden.  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{G}$  son un par de tensores cualesquiera de segundo orden simétricos y  $\mathbf{W}$  es cualquier tensor de segundo orden antisimétrico.

El superíndice “t” de “transpuesto”, cuando afecta el producto tensorial de dos tensores (no necesariamente del mismo orden como en el caso trivial de una diádica), se debe interpretar como el intercambio en el orden de la multiplicación de dichos tensores, es decir, la transposición de los factores u operandos. Cuando se tengan dudas, en el caso de una triádica, la transposición se indicará con  $t^*$  cuando sea un intercambio de factores, con  $t^+$  cuando sea un intercambio de las bases de la derecha de la triádica, y con  $t^-$  cuando sea un intercambio de las bases de la izquierda de la triádica. Este mismo símbolo, por supuesto, se interpreta igual para un tensor de segundo orden transpuesto, equivalente a suponer que proviene de un producto diádico. El subíndice “x” se usa para indicar el vector axial de un tensor de segundo orden (ver sección 1.7.10).

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \phi &= \mathbf{0} \\
\nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) &= \phi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \phi \\
\nabla \times (\phi \mathbf{a}) &= \nabla \phi \times \mathbf{a} + \phi (\nabla \times \mathbf{a}) \\
\nabla (\phi \mathbf{a}) &= (\nabla \phi) \mathbf{a} + \phi \nabla \mathbf{a} \\
\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b})^t \\
&= \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} \\
&\quad + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \\
\nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) &= \nabla \cdot (\nabla \mathbf{a})^t \\
\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \\
\nabla \cdot (\mathbf{a} \mathbf{b}) &= (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} \\
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= 0 \quad (15) \\
\nabla \times \nabla \mathbf{a} &= \mathbf{0} \\
(\mathbf{a} \times \nabla) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\
\nabla (\nabla \times \mathbf{a}) &= [\nabla \times (\nabla \mathbf{a})^t]^t \\
\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\
\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}) &= (\nabla \mathbf{a}) : (\nabla \mathbf{b}) + \mathbf{a} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{b}) \\
\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) \\
&\quad - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} \\
(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot [\nabla \mathbf{a} - (\nabla \mathbf{a})^t] \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \\
\nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla \mathbf{b}) &= (\nabla \cdot \mathbf{a}) \nabla \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \nabla (\nabla \mathbf{b}) \\
\frac{1}{2} \nabla^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) &= (\nabla^2 \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} + \nabla \mathbf{a} : (\nabla \mathbf{a})^t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla (\nabla \cdot \mathbf{T}) &= [\nabla \cdot (\nabla \mathbf{T})^t]^t \\
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{T}) &= \mathbf{0} \quad \nabla \times \nabla \mathbf{T} = \mathbf{0} \\
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{T})^t &= \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{T}^t) \\
\nabla (\nabla \times \mathbf{T}) &= [\nabla \times (\nabla \mathbf{T})^t]^t \\
\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) &= (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{T} : (\nabla \mathbf{a})^t \\
\nabla \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{r}) &= (\nabla \cdot \mathbf{T}) \times \mathbf{r} - \mathbf{T}_x \quad (\mathbf{r} \text{ vector posición}) \\
\nabla \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) &= (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} - [\mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{a})^t]_x \\
\nabla \times (\mathbf{T} \times \mathbf{a}) &= (\nabla \times \mathbf{T}) \times \mathbf{a} - \{ [\mathbf{T} \times (\nabla \mathbf{a})^t]^t \}_x \\
\nabla \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \{ [\mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B})^t]^t \}_x \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{T}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{T}) - \nabla^2 \mathbf{T} \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{T})^t &= [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{T}^t)]^t \\
\text{tr}(\nabla \times \mathbf{S}) &= 0 \quad (\mathbf{S} \text{ simétrico}) \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{S})^t &= [\nabla^2 (\text{tr} \mathbf{S}) - \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{S})] \mathbf{I} \\
&\quad - \nabla^2 \mathbf{S} - \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{S}) \\
&\quad + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{S}) + [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{S})]^t \\
\text{tr}[\nabla^2 \mathbf{S} + \nabla \nabla (\text{tr} \mathbf{S}) - 2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{S})] &= \\
&= 2 [\nabla^2 (\text{tr} \mathbf{S}) - \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{S})] \\
\text{tr}[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{S})^t] &= [\nabla^2 (\text{tr} \mathbf{S}) - \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{S})] \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{S})^t &= -[\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{G})] \mathbf{I} - \nabla^2 \mathbf{G} \\
&\quad + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{G}) + [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{G})]^t \\
(\mathbf{S} = \mathbf{G} - (\text{tr} \mathbf{G}) \mathbf{I}, \quad \mathbf{G} \text{ simétrico}) & \\
\nabla \times \mathbf{W} &= \frac{1}{2} [(\nabla \cdot \mathbf{w}) \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{w})^t] \\
(\mathbf{w} = \mathbf{W}_x, \quad \mathbf{W} \text{ antisimétrico}) &
\end{aligned} \tag{16}$$

Todas la operaciones indicadas arriba son de tipo tensorial, y, por consiguiente, cumplen con la Regla del Cociente. En otras palabra, estas expresiones son invariantes bajo una transformación de la base. Inclusive son invariantes, aunque el sistema de coordenadas empleado sea no cartesiano.

Si  $\mathbf{x}$  es el vector de posición de un punto con respecto a algún origen, cuya magnitud es  $r = |\mathbf{x}|$ , el vector  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$  es el vector unitario radial exterior, y  $f(r)$  es una función isótropa de  $r$  (de buen comportamiento),

entonces se satisfacen las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{x} &= 3 & \nabla \times \mathbf{x} &= \mathbf{0} \\
 \nabla \cdot [\mathbf{n} f(r)] &= \frac{2}{r} f + \frac{\partial f}{\partial r} & \nabla \times [\mathbf{n} f(r)] &= \mathbf{0} \\
 (\mathbf{a} \cdot \nabla) [\mathbf{n} f(r)] &= \frac{f(r)}{r} [\mathbf{a} - \mathbf{n} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})] + \mathbf{n} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial f}{\partial r} \\
 \nabla (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) &= \mathbf{a} + \mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{L} \times \mathbf{a}) i
 \end{aligned} \tag{17}$$

donde

$$\mathbf{L} = (\mathbf{x} \times \nabla)/i \tag{18}$$

es el operador de momento angular.

### 2.3. TRANSFORMACION DE COORDENADAS

Sean las  $x_i$  las coordenadas en un sistema de coordenadas cartesiano  $ox_1x_2x_3$ . Sean las  $X_a$  las coordenadas en un sistema de coordenadas cartesiano  $OX_1X_2X_3$ . Las funciones que denotan el cambio de coordenadas serán

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3) \quad X_a = X_a(x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

Las derivaciones parciales con respecto a las coordenadas en cada sistema se denotarán

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_{,i} \quad \frac{\partial \phi}{\partial X_a} = \phi_{,a} \tag{2}$$

Sean las matrices jacobianas definidas mediante

$$J_{ia} = \frac{\partial x_i}{\partial X_a} = x_{i;a} \quad j_{ai} = \frac{\partial X_a}{\partial x_i} = X_{a,i} \tag{3}$$

De esta forma, se tiene que los diferenciales de las coordenadas son

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_a} dX_a = x_{i;a} dX_a = J_{ia} dX_a \quad dX_a = \frac{\partial X_a}{\partial x_i} dx_i = X_{a,i} dx_i = j_{ai} dx_i \tag{4}$$

Substituyendo una expresión en la otra, resulta

$$dX_a = j_{ai} dx_i = j_{ai} J_{ib} dX_b \implies \delta_{ab} dX_b = j_{ai} J_{ib} dX_b \implies (\delta_{ab} - j_{ai} J_{ib}) dX_b = 0 \tag{5}$$

con lo cual se obtiene finalmente que

$$j_{ai} J_{ib} = \delta_{ab} \quad J_{ia} j_{aj} = \delta_{ij} \tag{6}$$

debido a que  $dX_b$  es arbitrario. La expresión de la derecha se obtuvo procediendo de manera similar, pero substituyendo las expresiones al revés.

Los elementos de las matrices jacobianas  $J_{ia}$  y  $j_{ai}$  pueden verse como las componentes de tensores mixtos  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{j}$ , respectivamente, los cuales se definen como

$$\mathbf{J} = J_{ia} \mathbf{e}_i \tilde{\mathbf{e}}_a = [\tilde{\nabla} \mathbf{x}(\mathbf{X})]^t \quad \mathbf{j} = j_{ai} \tilde{\mathbf{e}}_a \mathbf{e}_i = [\nabla \mathbf{X}(\mathbf{x})]^t \tag{7}$$

donde se ha empleado la tilde para indicar las entidades correspondientes al sistema de coordenadas  $OX_1X_2X_3$ . Con esta definición, las ecuaciones (6) se pueden expresar como

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{I} \tag{8}$$

Cuando los sistemas de coordenadas son cartesianos y se definen únicos para describir todo el espacio, los valores de los elementos de las matrices jacobianas son constantes y no depende de la posición de los puntos. Sin embargo, se puede pensar en el sistema de coordenadas  $OX - 1X - 2X_3$  como un sistema cartesiano único en el espacio, y en el sistema de coordenadas  $ox_1x_2x_3$  como un sistema cartesiano que define una transformación de coordenadas diferente para cada punto del espacio observado desde el sistema de coordenada  $OX_1X_2X_3$ . En este caso, los elementos de las matrices jacobianas no son constantes para todo el espacio, como se pudo haber supuesto en un principio, y son funciones de los puntos para los cuales se han evaluado.

### 2.3.1. Regla de la Cadena

La *regla de la cadena* se aplica cuando se tiene derivación funciones compuestas. Sea la función

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = f(x_i) \quad (9)$$

Bajo un cambio del sistema de coordenadas, de  $ox_1x_2x_3$  a  $OX_1X_2X_3$ , se puede obtener una función equivalente  $F$ , tal que

$$y = f[x_i(X_1, X_2, X_3)] = F(X_1, X_2, X_3) \quad (10)$$

De manera que la derivada parcial de la función  $f$ , respecto a  $X_a$ , se calcularía como

$$\frac{\partial f}{\partial X_a} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_a} = f_{,i} J_{ia} \quad (11)$$

De forma recíproca, la derivada parcial de la función  $F$ , respecto a  $x_i$ , se calcularía como

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial X_a} \frac{\partial X_a}{\partial x_i} = F_{,a} j_{ai} \quad (12)$$

Las expresiones (11) y (12) representan la forma de aplicar la Regla de la Cadena cuando se tiene un cambio del sistema de coordenadas. Empleando la notación simbólica dada al final de la sección anterior, estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\tilde{\nabla} f = \nabla f \cdot \mathbf{J} \quad \nabla f = \tilde{\nabla} f \cdot \mathbf{j} \quad (13)$$

### 2.3.2. Jacobiano de la Transformación

Cuando la matriz jacobiana  $[\mathbf{J}]$  es cuadradas (hay casos en donde no lo es, como por ejemplo en las ecuaciones paramétrica de una superficie), el *jacobiano*  $J$  del cambio del sistema de coordenadas se define como el determinante de dicha matriz. O sea,

$$J = J(X_1, X_2, X_3) \equiv |\mathbf{J}| \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \epsilon_{abc} x_{1;a} x_{2;b} x_{3;c} \quad (14)$$

De manera recíproca

$$j = j(x_1, x_2, x_3) \equiv |\mathbf{j}| \equiv \frac{\partial(X_1, X_2, X_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} X_{1,i} X_{2,j} X_{3,k} \quad (15)$$

De acuerdo a (8), entonces

$$Jj = 1 \quad (16)$$

Fíjese que se han colocado los jacobianos de las transformaciones como funciones dependientes de la posición de los puntos, basándose en el comentario hecho al final del párrafo ubicado después de la ecuación (8), en la parte introductoria de la Sección 2.3.

### 2.3.3. Fórmula de Expansión de Euler

Cuando el cambio de sistema de coordenadas depende de un parámetro, por ejemplo  $t$ , entonces las expresiones (1) se escriben como

$$x_i = x_i(t, X_1, X_2, X_3) \quad X_a = X_a(t, x_1, x_2, x_3) \quad (17)$$

En este caso, se definen los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{V}$ , cuyas componentes son

$$v_i = v_i(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad V_a = V_a(t, X_1, X_2, X_3) = \frac{\partial X_a}{\partial t} \quad (18)$$

Cuando el parámetro  $t$  se identifica con el tiempo, estos vectores se denominan vectores de velocidad del flujo (el flujo del espacio transformándose junto con un sistema de coordenadas y relativo al otro). Dichos vectores permiten obtener la ley de variación de los jacobianos  $J(t, X_1, X_2, X_3)$  y  $j(t, x_1, x_2, x_3)$ . Esta ley se denomina la *fórmula de la expansión de Euler* y se expresa como

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \frac{1}{j} \frac{\partial j}{\partial t} = \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{V} \quad (19)$$

Cuando el parámetro  $t$  se identifica con el tiempo,  $J$  y  $j$  se denominan la dilataciones del espacio, puesto que son la relación del volumen medidos en el sistema de coordenadas que fluye y el volumen medido en el sistema de coordenadas de referencia. Esto es

$$d\mathcal{V} = dx_1 dx_2 dx_3 = J dX_1 dX_2 dX_3 = J d\tilde{\mathcal{V}} \quad d\tilde{\mathcal{V}} = dX_1 dX_2 dX_3 = j dx_1 dx_2 dx_3 = j d\mathcal{V} \quad (20)$$

lo cual está de acuerdo con la expresión (16).

La demostración de la Fórmula de la Expansión de Euler no se debería dar esta sección, debido a que en el Apéndice B se ha hecho la demostración para sistemas de coordenadas cartesianos y no cartesianos de dimensión  $n$ , y no se desea repetir en esencia lo mismo. Sin embargo, hacer las acotaciones necesarias para el caso de dimensión  $n = 3$ , y solamente para la expresión (19.a), es muy sencilla, y la haremos a continuación.

Sea  $\mathbf{x}$  el vector de posición de la región del espacio  $\mathcal{V}$  y de su frontera  $\mathcal{A}$ . Esta región del espacio se deforma dependiendo de un parámetro  $t$ , de manera tal, que las posiciones de los puntos  $\mathbf{x}$  de la frontera  $\mathcal{A}$  y de la región  $\mathcal{V}$  dependen de dicho parámetro. Sean las posiciones  $\mathbf{X}$  los vectores de posición que poseen los puntos de la región  $\mathcal{V}$  para un valor dado (fijo) del parámetro  $t$  (sin pérdida de generalidad puede ser  $t = 0$ ). Llamaremos al conjunto de todos los  $\mathbf{X}$  la *Configuración de Referencia*, y se denotará como  $\mathcal{V}_0$ . La función que denota la evolución de los vectores de posición de los puntos de la región  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$  y su frontera  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ , se puede expresar como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \quad (21)$$

donde los vectores de posición  $\mathbf{X}$  funcionan como etiquetas de los puntos de la región y su frontera, puesto que dichos valores no cambian al evolucionar los mismos. Cada punto poseerá un único valor de  $\mathbf{X}$ .

Los valores de la derivada de la función (21), respecto al parámetro  $t$  es lo que se denomina la *Velocidad del Flujo* de los puntos  $\mathbf{X}$  al evolucionar, y es diferente para cada punto. La velocidad del flujo se calcula entonces como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \quad (22)$$

y es una función, tanto del parámetro  $t$ , como de la posición actual de los puntos  $\mathbf{x}$ . La velocidad del flujo forma así un campo vectorial que evoluciona con el parámetro  $t$ .

La expresión

$$d\mathcal{V} = dx_1 dx_2 dx_3 = J dX_1 dX_2 dX_3 = J d\mathcal{V}_o \quad (23)$$

se puede interpretar como un cambio de la métrica, donde

$$J = J(t, \mathbf{X}) \equiv |\mathbf{J}| \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} x_{1,i} x_{2,j} x_{3,k} \quad (24)$$

es el jacobiano de la transformación (21), y donde  $d\mathcal{V}_o$  es el diferencial de volumen de la región medido cuando está ubicada en la configuración de referencia.  $J$  is called the dilatation or expansion. The assumption that the equation (21) can be inverted is equivalent to requiring that neither  $J$  nor  $J^{-1}$  vanish. Thus  $0 < J < \infty$ .

Se puede preguntar ahora como cambia la dilatación cuando se sigue el movimiento. Para responder esto, la derivada  $dJ/dt$  debe ser calculada. Ahora como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} \quad (25)$$

con  $d/dt$  siendo la diferenciación con  $\mathbf{X}$  constante, así que el orden puede ser intercambiado. Si se considera que  $\mathbf{v}$  es una función de  $\mathbf{x}$  (para cada  $t$ )

$$\frac{\partial v_i}{\partial X_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad (26)$$

Se puede demostrar que la derivada de un determinante de rango tres es la suma de tres términos, en cada uno de los cuales sólo una fila es derivada. Así, para  $dJ/dt$  el resultado consiste en la suma de tres términos, el primero de los cuales sería

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial X_2} & \frac{\partial v_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \quad (27)$$

Expandiendo este determinante por la primera fila se puede observar que sólo el primer término ( $k = 1$ ) de los elementos en la primera fila sobreviven, y para  $k = 2, 3$  el coeficiente de  $\partial v_1 / \partial x_k$  es una determinante con dos filas iguales y por lo tanto nulo. El valor de este determinante es así  $(\partial v_1 / \partial x_1) J$ . Considerando también los otros dos términos en la diferenciación, el resultado es la *Fórmula de la Expansión de Euler*

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (28)$$

Se obtiene así una interpretación cinemática para la divergencia del campo de velocidades. Es la velocidad de cambio relativo de la dilatación siguiendo a los puntos con  $\mathbf{X}$  constantes.

Sea  $f$  una campo escalar, vectorial o tensorial. Tomando en consideración la velocidad del flujo, se puede calcular la derivada respecto a  $t$  siguiendo la configuración de referencia, o lo que es lo mismo, manteniendo  $\mathbf{X}$  constante para todo  $t$ . Esto es

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_X \equiv \frac{d}{dt} f[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})] = \frac{d}{dt} f(t, \mathbf{x}) \Big|_X = \frac{df}{dt} \quad (29)$$

De ahora en adelante emplearemos el símbolo de derivación total simple para indicar este tipo de derivación. Con esta premisa se tiene entonces, aplicando la Regla de la cadena, que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla f)^t \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla f)^t \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (30)$$

Algunas veces se acostumbra a expresar este tipo de derivación de forma simbólica mediante el operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (31)$$

## 2.4. INTEGRACION

En esta sección se describirán de forma muy consisa los procedimientos más frecuentemente usados para realizar integraciones a lo largo de curvas, en superficies o en otras regiones espaciales.

### 2.4.1. Integral de Línea

Sea  $\varphi$  un campo escalar, vectorial o tensorial. La integral de la función  $\varphi(\mathbf{x})$  a lo largo de una curva  $\mathcal{L}$  definida de forma paramétrica, donde el parámetro es  $t$ , se calcula como

$$\int_a^b \varphi(\mathbf{x}) dt = \int_a^b \varphi[\mathbf{x}(t)] dt \quad (1)$$

Cuando se escoge la longitud  $l$  de la curva como parámetro, entonces

$$\int_{\mathcal{L}} \varphi(\mathbf{x}) dl = \int_{\mathcal{L}} \varphi[\mathbf{x}(l)] dl = \int_a^b \varphi[\mathbf{x}(t)] \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}} dt \quad (2)$$

donde

$$dl = \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}} \quad (3)$$

La *integral de línea* se define como la integral de un campo vectorial o tensorial multiplicado mediante un producto interior con el vector diferencial de arco de curva (vector tangente a la curva, de magnitud igual a  $dl$ , y con sentido hacia el incremento del parámetro). De acuerdo a esto, entonces

$$\int_{\mathcal{L}} \varphi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{L}} \varphi[\mathbf{x}(l)] \cdot \boldsymbol{\lambda} dl \quad (4)$$

donde el vector  $\boldsymbol{\lambda}$  es el vector unitario tangente a la curva con sentido hacia el incremento del parámetro  $l$ . El vector  $\boldsymbol{\lambda}$  se puede multiplicar con  $\varphi$  tanto por la derecha, tal como está mostrado en (4), como por izquierda, en el caso de que  $\varphi$  se trate de un tensor. Cuando la integral (4) se hace sobre una curva cerrada se la denomina *circulación*.

### 2.4.2. Integral de Superficie

Sea  $\varphi$  un campo escalar, vectorial o tensorial. La integral de la función  $\varphi(\mathbf{x})$  en la superficie  $\mathcal{A}$  definida de forma paramétrica, donde los parámetros son  $x_1$  y  $x_2$ , se calcula como

$$\int_{\mathcal{A}} \varphi(\mathbf{x}) d\mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{A}} \varphi[x_1, x_2, x_3(x_1, x_2)] \frac{dx_1 dx_2}{n_3} \quad (5)$$

donde

$$d\mathcal{A} = \frac{dx_1 dx_2}{|n_3|} = \|\mathbf{n} d\mathcal{A}\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| du dv \quad (6)$$

y  $n_3$  es la tercera componente del vector unitario normal exterior  $\mathbf{n}$ . El significado del último miembro de (6) se explicará a continuación.

Similar como existe la integral de línea, también se define la *integral de flujo* como la integral de un campo vectorial o tensorial multiplicado mediante un producto interior con el vector diferencial de superficie



(vector normal a la superficie, de magnitud igual a  $d\mathcal{A}$ , y con sentido hacia el exterior de dicha superficie, si la superficie está orientada). De acuerdo a esto, entonces

$$\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{A}_{uv}} \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}(u, v)] \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv \quad (7)$$

donde el vector diferencial de superficie viene dado por

$$\mathbf{n} d\mathcal{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du dv = \left[ \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k} \right] du dv \quad (8)$$

y donde los parámetros  $u$  y  $v$  se han escogidos de manera tal que el vector  $n$  calculado con (8) tenga el sentido exterior de la superficie. El vector  $\mathbf{n}$  se puede multiplicar con  $\boldsymbol{\varphi}$  tanto por la derecha, tal como está mostrado en (7), como por la izquierda, en el caso de que  $\boldsymbol{\varphi}$  se trate de un tensor. Las componentes del último término de (8) vienen definidos en función de los jacobianos de las transformaciones de coordenadas dos a dos, en la forma

$$dy dz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv \quad dz dx = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv \quad dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \quad (9.a)$$

con los jacobianos expresados por los determinantes

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (9.b)$$

Otra forma de plantear la integral (7) es mediante un cambio del sistema de coordenadas dado por  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}(X_1, X_2, X_3)$ . En esta circunstancia, entonces

$$\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \int_{\tilde{\mathcal{A}}} \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}(\mathbf{X})] \cdot \mathbf{G} \cdot \tilde{\mathbf{n}} \, d\tilde{\mathcal{A}} \quad (10)$$

donde

$$\mathbf{G} = J\mathbf{J}^{-t} = \text{cof}(\mathbf{J}) \quad \mathbf{J} = [\nabla \mathbf{x}(\mathbf{X})]^t \quad J = |\mathbf{J}| \quad (11.a)$$

y donde  $\tilde{\mathbf{n}}$  es el vector unitario normal exterior a la superficie  $\tilde{\mathcal{A}}$  expresado con componentes en el sistema de coordenadas  $OX_1X_2X_3$ , y

$$d\tilde{\mathcal{A}} = \frac{dX_1 dX_2}{|\tilde{n}_3|} \quad (11.b)$$

La transformación (10) de la integral sobre una superficie se deduce de aplicar la identidad 1.5.(20) al elemento diferencial de área vectorial al segundo miembro de (7).

### 2.4.3. Integral de Volumen

Sea  $\boldsymbol{\varphi}$  un campo escalar, vectorial o tensorial. La integral de la función  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  en el volumen  $\mathcal{V}$  definido como los puntos de una región del espacio con coordenadas  $x_1, x_2$  y  $x_3$ , se calcula como

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \, d\mathcal{V} = \int \int \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3) \, dx_1 dx_2 dx_3 \quad (12)$$

Bajo un cambio del sistema de coordenadas, se tiene que

$$d\mathcal{V} = dx_1 dx_2 dx_3 = (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3 = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} dX_1 \frac{\partial x_j}{\partial X_2} dX_2 \frac{\partial x_k}{\partial X_3} dX_3 = J dX_1 dX_2 dX_3 = J d\tilde{\mathcal{V}} \quad (13)$$

donde

$$d\mathbf{x}_a = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_a} dX_a = \mathbf{x}_{;a} dX_a \quad (a \text{ no suma}) \quad (14)$$

y  $J$  está definido por 2.3.(14). En estas circunstancias, la integral (12) se transforma en

$$\int_V \varphi(\mathbf{x}) dV = \int \int \int_{\tilde{V}} \varphi[\mathbf{x}(X_1, X_2, X_3)] J dX_1 dX_2 dX_3 = \int_{\tilde{V}} \varphi[\mathbf{x}(\mathbf{X})] J d\tilde{V} \quad (15)$$

expresión contiene de nuevo el resultado 2.3.(20). Obsérvese que la transformación (13) del diferencial de volumen se puede deducir también al aplicar la identidad 1.5.(18) al elemento diferencial  $(d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3$ .

## 2.5. TEOREMAS INTEGRALES

Los Teoremas Integrales los conforma los teoremas de: Green, Gauss, Stokes, Leibniz y Pappus. Muchos autores designan con nombres diferentes a los teoremas que aquí se explicarán. Nombres como Green-Gauss o Gauss-Ostrogradsky son empleados para lo que aquí denominaremos el Teorema de Gauss simplemente. Se verá más adelante que los teoremas de Green, Gauss y Stokes se entremezclan cuando se generalizan, y se puede obtener, por ejemplo, una forma del Teorema de Gauss, mediante el Teorema de Stokes. También se puede obtener una forma particular del teorema de Stokes o de Gauss mediante el Teorema de Green. El nombre de Teorema de la Divergencia se ha reservado a la forma particular que toma el Teorema de Gauss cuando se aplica la divergencia al vector o al tensor involucrado.

La Regla de Leibniz y los Teoremas de Pappus son bastantes conocidos, pero en este texto se explicarán para configuraciones más complejas que la que normalmente se ve en los cursos de Cálculo y Geometría Analítica. En el primero, el cual se presenta normalmente para funciones de una sola variable, se extenderá la aplicación a campos vectoriales y tensoriales dependientes de la posición en el espacio tridimensional, dejando la formulación del teorema para funciones tensoriales de varias variables en hiperespacios para el Apéndice B. En el segundo, el cual normalmente se aplica a formas geométricas con simetría puntual o axial, se extenderá la aplicación a formas geométricas más complejas, como, por ejemplo, los tubos de campos vectoriales o tensoriales.

### 2.5.1. Teorema de Green

El *teorema de Green* [Green, 1828] puede verse como un caso particular del Teorema de la Divergencia, pero aplicado a campos definidos en el plano  $xy$ . Sin embargo, es necesario el paso previo de deducir el Teorema de Green antes de llegar a los otros Teoremas, puesto que estos lo necesitan para su propia deducción. En este contexto, la lógica que se seguirá será la de inducción, yendo de lo particular a lo general. Una vez que se llegue a las formulaciones generales se deducirán algunos casos particulares que no se habían descrito antes.

**Teorema de Green en el Plano.** Sea  $\mathcal{R}$  una región cerrada que está limitada por una o más curvas cerradas  $\mathcal{C}$ . Entonces, el *sentido positivo* sobre la frontera es aquel que deja a  $\mathcal{R}$  siempre a la izquierda del observador que recorre la frontera. En este caso, se dice que la región está *orientada*. El vector unitario  $\mathbf{n}$  normal a una región orientada, es aquel vector unitario perpendicular a la superficie de la región y que apunta en el sentido hacia arriba del observador que recorre la región. Estos conceptos se emplearán más adelante también para el teorema de Stokes y son válidos para superficies planas, como para superficies curvas cerradas.

**Teorema 1.** (Green, [1828]). Sea  $\mathcal{R}$  una región regular en el plano, y capaz de ser dividida en subregiones, cuyos límites estén formados por líneas paralelas a los ejes coordenados y/o por porciones de la frontera  $\mathcal{C}$  de la región, de manera que, cada límite de un subregión se pueda cortar a lo sumo en dos puntos con cualquier recta paralela a los ejes coordenados. Si  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\partial P/\partial y$  y  $\partial Q/\partial x$  son continuas en  $\mathcal{R}$ , entonces,

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\mathcal{C}} (P dx + Q dy) \quad (1)$$

donde la integral de línea se toma sobre  $\mathcal{C}$  en el sentido positivo.

Demostración. Supongamos en primera instancia que  $\mathcal{R}$  está limitada por una curva cerrada  $\mathcal{C}$ , que puede ser cortada a lo sumo en dos puntos con cualquier recta paralela a los ejes coordenados.

Calculemos primero la integral

$$\int \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (2)$$

como una integral doble, integrando con respecto a  $y$ , entre las curvas  $y = y_1(x)$  y  $y = y_2(x)$ , y luego con respecto a  $x$  entre las paralelas  $x = a$  y  $x = b$ , que limitan las curvas a la izquierda y a la derecha, respectivamente. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)] dx \\ &= - \int_a^b P(x, y_1) dx - \int_b^a P(x, y_2) dx \end{aligned} \quad (3)$$

en la que las integrales se toman sobre los arcos  $(x, y_1(x))$  y  $(x, y_2(x))$ , en el sentido positivo, por lo que

$$- \int \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\mathcal{C}} P(x, y) dx \quad (4)$$

Calculemos ahora la integral

$$\int \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \quad (5)$$

como una integral doble, integrando con respecto a  $x$ , entre las curvas  $x = x_1(y)$  y  $x = x_2(y)$ , y luego con respecto a  $y$  entre las paralelas  $y = c$  y  $y = d$ , que limitan las curvas por debajo y por arriba, respectivamente. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)] dy \\ &= \int_c^d Q(x_2, y) dy + \int_d^c Q(x_1, y) dy \end{aligned} \quad (6)$$

en la que las integrales se toman sobre los arcos  $(x_1(y), y)$  y  $(x_2(y), y)$ , en el sentido positivo, por lo que

$$\int \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\mathcal{C}} Q(x, y) dy \quad (7)$$

Sumando los dos resultados parciales obtenidos, se completa la primera parte de la demostración.

En segunda instancia, para aquellas regiones regulares que sean capaces de ser dividida en subregiones, como la región estudiada en la primera parte de esta demostración, se tiene que la integral sobre toda la región puede ser interpretada como la sumatoria de las integrales de superficie sobre las subregiones. Para cada subregión se puede aplicar el resultado de la primera parte, y considerar que las integrales sobre las fronteras de las subregiones también se suman. De aplicar este procedimiento se obtiene que las integrales sobre las fronteras de dos subregiones adyacentes se anulan por estar realizadas en sentidos opuestos, y el resultado final es la integral sobre la frontera de toda la región en el sentido positivo. Como conclusión, resulta que (1) también es válido para toda la región, bajo la condición de que esta pueda ser subdividida en subregiones como la estudiada antes. El teorema también permite la aplicación de (1) a regiones múltiplemente conexas, mediante el procedimiento de división en subregiones explicado antes, pero conservando la definición del

sentido positivo para las integrales de línea sobre las curvas interiores que bordean los agujeros. Esto completa la segunda parte de la demostración.  $\triangle$

**Funciones Vectoriales y Tensoriales.** El Teorema de Green (1) es también válido cuando  $P$  y  $Q$  se reemplazan por funciones vectoriales

$$\mathbf{P}(x, y) = P_i(x, y)\mathbf{e}_i \quad \mathbf{Q}(x, y) = Q_i(x, y)\mathbf{e}_i \quad (8)$$

cuyas componentes  $P_i$  y  $Q_i$  satisfagan los requisitos exigidos por el teorema. Para demostrar esto, sólo necesitamos aplicar el teorema a las funciones  $P_i(x, y)$  y  $Q_i(x, y)$ , multiplicar las ecuaciones por los vectores base  $\mathbf{e}_i$  y sumarlas.

Se mostrará también que el Teorema de Green es válido cuando  $P$  y  $Q$  se reemplazan por diádicas o tensores de segundo orden. La integral de tensores no requiere una nueva definición, ya que cualquier tensor  $\mathbf{P}$  de segundo orden puede expresarse en la forma

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}_i \mathbf{p}_i \quad (9)$$

Así, cuando  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  son tensores de segundo orden

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y} \right) dx dy = \mathbf{e}_i \int \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial y} \right) dx dy = \mathbf{e}_i \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{p}_i dx + \mathbf{q}_i dy) \quad (10)$$

y por lo tanto

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{P} dx + \mathbf{Q} dy) \quad (11)$$

Para tensores de orden superior, el razonamiento es similar.

**Formas Vectoriales del Teorema de Green.** El Teorema de Green admite dos interpretaciones vectoriales, cuando se emplea un sistema de coordenadas cartesianas particular.

◦ Pongamos

$$\boldsymbol{\varphi} = (P, Q, 0) \quad \nabla \times \boldsymbol{\varphi} = (0, 0, \partial Q / \partial x - \partial P / \partial y) \quad (12)$$

Puesto que el vector tangente en la frontera  $\mathcal{C}$  es

$$\boldsymbol{\lambda} = (dx/dl, dy/dl, 0) \quad (13)$$

el Teorema de Green se convierte en

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi} dl = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varphi}) dA \quad (14)$$

que es un caso especial del Teorema de Stokes para una región plana.

◦ Pongamos

$$\boldsymbol{\varphi} = (Q, -P, 0) \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (15)$$

Puesto que el vector unitario normal exterior a la frontera es

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{e}_3 = (dy/dl, -dx/dl, 0) \quad (16)$$

el Teorema de Green se convierte en

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi} dl = \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} dA \quad (17)$$

que es un caso especial del Teorema de la Divergencia para una región plana.

Un caso particular se tiene cuando  $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{r} = (x, y, 0)$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \nabla \cdot \mathbf{r} = 2 \quad \oint_C \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r} \, dl = 0 \quad \oint_C \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \, dl = 2\mathcal{A} \quad (18)$$

**Teorema de la Divergencia.** Sea  $\mathcal{V}$  una región cerrada del espacio que está limitada por una o más superficies cerradas  $\mathcal{A}$ . Entonces, la *parte interior* sobre la frontera es aquella que pertenece a  $\mathcal{V}$ , y la *parte exterior* sobre la frontera es aquella que no pertenece a  $\mathcal{V}$ . En este caso, se dice que la región está *orientada*. El vector unitario  $\mathbf{n}$  normal exterior en una región orientada, es aquel vector unitario perpendicular a la superficie en la frontera de la región y que apunta hacia la parte exterior de dicha región. Estos conceptos se emplearán más adelante también para el Teorema de Gauss.

El *teorema de la divergencia* puede verse como la extensión del teorema de Green en el plano, al espacio de tres dimensiones. En este sentido se puede decir que la demostración del Teorema de la divergencia es muy similar a la del Teorema de Green.

**Teorema 2.** (Gauss). Sea  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$  un campo vectorial o tensorial continuo con las primeras derivadas parciales continuas a trozos en la región regular  $\mathcal{V}$ , la cual está limitada por una superficie regular cerrada  $\mathcal{A}$ , sobre la cual la normal unitaria exterior  $\mathbf{n}$  es continua en secciones. Entonces,

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathcal{V} \quad (19)$$

Demostración. Puesto que para un campo vectorial o tensorial se tiene que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i} \quad (20)$$

la integral de volumen en (19) es la suma de tres integrales. Con el fin de calcular la integral de  $\mathbf{e}_3 \cdot \partial \boldsymbol{\varphi} / \partial x_3$ , considérese primero una superficie  $\mathcal{A}$ , tal que una recta cualquiera paralela al eje coordenado  $z$  (correspondiente a  $i = 3$ ) la corta a lo sumo dos veces; denótese estos puntos de corte por  $(x, y, z_1)$  y  $(x, y, z_2)$ , donde  $z_1 \leq z_2$  ( $x = x_1$  y  $y = x_2$ ). Entonces,  $\mathcal{A}$  tiene una porción inferior  $\mathcal{A}_1$  que consiste en los puntos  $(x, y, z_1)$ , y una porción superior  $\mathcal{A}_2$  que consiste en los puntos  $(x, y, z_2)$ . Los puntos, para los cuales  $z_1 = z_2$  forman una curva cerrada que separa a  $\mathcal{A}_1$  de  $\mathcal{A}_2$ . Ahora, si  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  se proyectan en una región  $\mathcal{R}$  del plano  $xy$ , entonces

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial z} \, dx dy dz &= \int \int_{\mathcal{R}} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial z} \, dz \, dx dy \\ &= \int \int_{\mathcal{R}} [\boldsymbol{\varphi}(x, y, z_2) - \boldsymbol{\varphi}(x, y, z_1)] \, dx dy \end{aligned} \quad (21)$$

Si se toman  $x$  y  $y$  como los parámetros en las superficies  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$ , el elemento vectorial de área es

$$\mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \pm \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) dx dy = \pm \left( -\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx dy \quad (22)$$

donde

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{k} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{k} \quad (23)$$

Sobre  $\mathcal{A}_2$ ,  $z = z_2(x, y)$  y el vector  $\partial \mathbf{r} / \partial x \times \partial \mathbf{r} / \partial y$  tiene la dirección de la normal externa  $\mathbf{n}$ , pero sobre  $\mathcal{A}_1$ ,  $z = z_1(x, y)$  y el mismo vector tiene la dirección normal interna  $-\mathbf{n}$ . Entonces, en la expresión de  $\mathbf{n} \mathcal{A}$ , el

signo  $+$  se aplica a  $\mathcal{A}$  y el signo  $-$  se aplica a  $\mathcal{A}_1$ . Las dos integrales de (21) sobre  $\mathcal{R}$  pueden ahora ser combinadas en una sólo integral sobre  $\mathcal{A}$  y se puede escribir

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx dy dz = \oint_{\mathcal{A}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \varphi(x, y, z) d\mathcal{A} \quad (24)$$

Recuérdese que  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})d\mathcal{A}$  es la proyección del área  $d\mathcal{A}$  sobre el plano  $xy$ .

Cuando  $x, y$  y  $z$  forman un sistema de coordenadas dextrorso, el mismo resultado es válido para los ordenamientos  $y, z, x$  y  $z, x, y$  de los ejes coordenados. Por lo tanto, si en la expresión obtenida se hacen los intercambios cíclicos mencionados en  $x, y, z$ , se obtiene las fórmulas correspondientes

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\mathcal{V} = \oint_{\mathcal{A}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \varphi d\mathcal{A} \quad (25)$$

Ahora, multiplicamos escalarmente (con el producto interior) por la izquierda con  $\mathbf{e}_i$  a los dos miembro de (25). Entonces, la expresión encontrada se convierte en

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\mathcal{V} = \oint_{\mathcal{A}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i \cdot \varphi) d\mathcal{A} \quad (26)$$

El integrando de la integral de volumen es claramente la divergencia  $\nabla \cdot \varphi$ . En la integral de superficie el integrando se resume como  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i \cdot \varphi) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \cdot \varphi) = \mathbf{n} \cdot \varphi$ , con lo cual, queda finalmente demostrado la primera parte del Teorema.

Una observación es necesaria aquí: si el campo  $\varphi$  es escalar, entonces los productos escalares efectuados en la demostración, no son más que productos por un escalar, exceptuando  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i$ , y, en lugar de la divergencia se tiene el gradiente del campo. En este caso el teorema se hace llamar Teorema del Gradiente.

Se puede ahora liberar las condiciones impuesta a la superficie  $\mathcal{A}$ . Cuando  $\mathcal{A}$  está limitada lateralmente por una parte de un cilindro paralelo al eje  $z$  que separa  $\mathcal{A}_1$  de  $\mathcal{A}_2$ , la integral de superficie empleada en la deducción sigue siendo válida, puesto que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre el cilindro, de tal manera, que no contribuye a la integral sobre  $\mathcal{A}$ . Esto mismo se puede extender a los otros ejes coordenados.

También se puede liberar la condición de que  $\mathcal{A}$  sea cortada sólomente en dos puntos a lo sumo, por una recta cualquiera paralela al eje  $z$ . Dividimos a  $\mathcal{V}$  en subregiones limitadas por superficies que satisfagan esta condición, y aplicamos el Teorema de la divergencia (en el contexto mostrado en la primera parte de esta demostración) a cada subregión, sumando después los resultados. Las integrales de volumen se combinan agregándose para formar la integral de volumen sobre toda la región. Algunas integrales de superficie sobre las fronteras de cada subregión se cancelan si estas son adyacentes, puesto que cada una de estas integrales aparece con valores opuestos de  $\mathbf{n}$ . Las integrales de superficie restantes se combinan para completar la integral sobre la frontera  $\mathcal{A}$  de toda la región. Finalmente, se puede extender el teorema a regiones limitadas por dos o más superficies cerradas que no se cortan entre sí y que contiene a una región del espacio entre ellas. Esto es, regiones con cavidades dentro de ellas. Esto se hace mediante el mismo procedimiento de división de la región en subregiones. Deben introducirse superficies adicionales de tal manera, que cada una de las subregiones de  $\mathcal{V}$  esté acotada por una sólo superficie cerrada, y las integrales de superficie sobre todas la subregiones se cancelen por pareja, como se explicó antes. De todo este proceso, quedará como resultado la integral de superficie sobre todas las fronteras de  $\mathcal{V}$  (es decir,  $\mathcal{A}$ ), igualada a la integral de volumen sobre toda la región  $\mathcal{V}$ . La convención de la dirección del vector normal exterior  $\mathbf{n}$  seguirá siendo válida para las superficies de las cavidades. Esto completa la segunda parte de la demostración.  $\triangle$

**Identidades de Green.** Usaremos ahora el Teorema de la Divergencia para demostrar tres importantes identidades debidas a George Green.

Sean  $\phi$  y  $\psi$  dos campos escalares continuos, con derivadas parciales de primer orden continuas, y con derivadas parciales de segundo orden continuas a trozos, definidas en una región regular  $\mathcal{V}$ , acotada por una superficie cerrada  $\mathcal{A}$ . El Teorema de la Divergencia aplicado al vector  $\varphi = \phi \nabla \psi$  da

$$\oint_{\mathcal{A}} \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) d\mathcal{V} \quad (27)$$

En el caso que  $\psi$  no esté definida en el exterior de  $\mathcal{V}$ , se reemplaza  $\nabla\psi.\mathbf{n}$  por su límite a lo largo de la normal interior  $-\mathbf{n}$ .

Ahora, se tiene que

$$\nabla.(\phi\nabla\psi) = \nabla\phi.\nabla\psi + \phi\nabla^2\psi \quad (28)$$

por lo tanto,

$$\oint_{\mathcal{A}} \phi\nabla\psi.\mathbf{n} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \nabla\phi.\nabla\psi d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \phi\nabla^2\psi d\mathcal{V} \quad (29)$$

Esta fórmula se conoce como la *primera identidad de Green*.

Se pueden intercambiar los órdenes de  $\phi$  y  $\psi$  en la primera identidad, obteniéndose una fórmula similar a (29), que al restarla a esta misma identidad, resulta en la *segunda identidad de Green*

$$\oint_{\mathcal{A}} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi).\mathbf{n} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi) d\mathcal{V} \quad (30)$$

Las Identidades de Green se pueden obtener también para campos vectoriales  $\phi$  y  $\psi$ . En este caso, el Teorema de la Divergencia es aplicado al tensor  $\varphi = \phi\nabla\psi$ , dando

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n}(\phi\nabla\psi) d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \nabla.(\phi\nabla\psi) d\mathcal{V} \quad (31)$$

Cuando las funciones no están definidas en el exterior de  $\mathcal{V}$ , se reemplazan por su límite a lo largo de la normal interior  $-\mathbf{n}$ .

Ahora, aplicando la identidad

$$\nabla.(\phi\nabla\psi) = (\nabla.\phi)\nabla\psi + \phi.\nabla(\nabla\psi) \quad (32)$$

se obtiene una forma vectorial de la Primera identidad de Green

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n}(\phi\nabla\psi) d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} (\nabla.\phi)\nabla\psi d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \phi.\nabla(\nabla\psi) d\mathcal{V} \quad (33)$$

Otras formas vectoriales de las Identidades de Green se pueden obtener, aplicando el Teorema de la Divergencia al vector  $\varphi = \phi.\nabla\psi$ , y empleando la identidad

$$\nabla.(\phi.\nabla\psi) = \nabla\phi : \nabla\psi + \phi.\nabla(\nabla.\psi) \quad (34)$$

De este procedimiento resulta una forma vectorial simétrica de la Primera Identidad de Green

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n}(\phi.\nabla\psi) d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \nabla.(\phi.\nabla\psi) d\mathcal{V} \quad (35)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \nabla\phi : \nabla\psi d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \phi.\nabla(\nabla.\psi) d\mathcal{V} \quad (36)$$

Cómparese esta expresión con la forma escalar de la Primera Identidad de Green (29). Ahora se pueden intercambiar  $\phi$  y  $\psi$  en (36), y restarla a esta misma identidad, obteniéndose la Segunda Identidad de Green en su forma vectorial

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n}(\phi.\nabla\psi - \psi.\nabla\phi) d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} [\phi.\nabla(\nabla.\psi) - \psi.\nabla(\nabla.\phi)] d\mathcal{V} \quad (37)$$

Compárese esta expresión con la forma escalar de la Segunda Identidad de Green (30).

Tomemos ahora  $\psi = 1/r$  en (30), donde  $r$  es la distancia desde un punto P. Si P es interior a  $\mathcal{A}$ , no se puede aplicar la Segunda Identidad de Green a toda la región  $\mathcal{V}$ , puesto que  $1/r$  se hace infinito en P. Por lo tanto, se excluye a P rodeándolo por una esfera  $\sigma$  de radio  $\epsilon$  y se aplica la Segunda identidad de Green a la región  $\mathcal{V}'$ , entre  $\mathcal{A}$  y  $\sigma$ . Entonces, puesto que

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \quad \text{en } \mathcal{V}' \quad (38)$$

tenemos

$$\oint_{\mathcal{A}} \left[ \phi \nabla \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla \phi \right] \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} + \oint_{\sigma} \left[ \phi \nabla \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla \phi \right] \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = - \int_{\mathcal{V}'} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \, d\mathcal{V} \quad (39)$$

En la esfera  $\sigma$ ,  $r = \epsilon$ , y la normal externa está dirigida hacia P, entonces

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} = -\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\epsilon^2} \quad \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (40)$$

y  $d\mathcal{A} = \epsilon^2 d\omega$ , donde  $\omega$  es el ángulo sólido sustentado por  $d\mathcal{A}$  en P. La integral sobre  $\sigma$  es, por lo tanto

$$\oint_{\sigma} \left( \frac{\phi}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \epsilon^2 d\omega \quad (41)$$

y se acerca a  $4\pi\phi(P)$  a medida que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Más aún, a medida que  $\epsilon \rightarrow 0$ , la integral de volumen

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \, d\mathcal{V} \longrightarrow \int_{\mathcal{V}'} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \, d\mathcal{V} \quad (42)$$

puesto que el integrando permanece finito y se puede tomar  $d\mathcal{V} = r^2 dr d\omega$  como elemento de volumen en la vecindad de P. Así, pasando al límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , se obtiene la tercera identidad de Green

$$\oint_{\mathcal{A}} \left[ \frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}'} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \, d\mathcal{V} + 4\pi\phi(P) \quad (\text{P interior}) \quad (43)$$

Cuando P es exterior a  $\mathcal{A}$ , podemos poner  $\psi = 1/r$  directamente en la Segunda Identidad, obteniéndose

$$\oint_{\mathcal{A}} \left[ \frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}'} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \, d\mathcal{V} \quad (\text{P exterior}) \quad (44)$$

Con el fin de aplicar las Identidades de Green a la “región infinita”, que consiste en una superficie cerrada  $\mathcal{A}$  y de todo el espacio exterior a ella, se requiere que las funciones  $\phi$  y  $\psi$  sean regulares en el infinito.

Una función  $\varphi$  se llama *regular en el infinito* cuando  $r|\varphi|$  y  $r^2\|\nabla\varphi\|$  están uniformemente limitadas a medida que  $r \rightarrow \infty$ . Esto es,

$$r|\varphi| < M \quad r^2\|\nabla\varphi\| < M' \quad \text{cuando } r > R \quad (45)$$

con  $R$  un valor suficientemente grande. Estas expresiones son equivalentes a

$$\varphi = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \|\nabla\varphi\| = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (46)$$

Supongamos ahora que  $\phi$  es regular en el infinito y que  $\nabla^2\phi$  es continua a trozos en todo el espacio, excepto en P. Entonces, si aplicamos la tercera identidad a la región infinita al más allá de  $\mathcal{A}$ , y suponemos que  $\mathcal{A}$  se contrae hasta el punto P, obtenemos

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \, d\mathcal{V} \quad (\text{en todo el espacio}) \quad (47)$$



siempre y cuando la integral sea convergente.

### 2.5.2. Teorema de Gauss

El *Teorema de Gauss* es válido en la región  $\mathcal{V}$  en algunos de los siguientes casos:

- a.  $\mathcal{V}$  es una región normal y el campo  $\varphi$  y sus derivadas de primer orden son continuas dentro de la región y en su frontera.
- b. La región  $\mathcal{V}$  está formada por la unión de un número finito de regiones normales y el campo  $\varphi$  es continuo en toda la región, pero puede tener las derivadas parciales de primer orden continuas a trozo.

El Teorema de Gauss también es válido en la región  $\mathcal{V}$  en algunos de los siguientes casos menos restringidos:

- c.  $\mathcal{V}$  es cualquier región regular y el campo  $\varphi$  es continuo en toda la región, y continuamente diferenciable a trozo en la región hasta las derivadas parciales de primer orden.
- d. La región  $\mathcal{V}$  es cualquier región cerrada formada por un número finito de regiones regulares y el campo  $\varphi$  es continuo en el “interior” de la región, las derivadas parciales de primer orden son continuas en el “interior” de cada una de las regiones regulares, y la integral

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \varphi \, d\mathcal{V}$$

es convergente (por ejemplo, para integrales impropias).

**Teorema de Gauss Generalizado.** Sea  $\varphi$  un campo escalar, vectorial o tensorial. Entonces el *teorema de Gauss generalizado* expresa que

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \varphi \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \varphi \, d\mathcal{V} \quad (48)$$

bajo las condiciones antes impuestas.

Para demostrar el teorema, obsérvese que la integral de volumen es igual a

$$\mathbf{e}_i \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, d\mathcal{V} \quad (49)$$

y, puesto que

$$\mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \quad (50)$$

Entonces,

$$\mathbf{n} \varphi = \mathbf{e}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \varphi = \mathbf{e}_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i \varphi \quad (51)$$

y la integral de superficie es igual a

$$\mathbf{e}_i \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i \varphi \, d\mathcal{A} = \mathbf{e}_i \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\mathbf{e}_i \varphi) \, d\mathcal{V} = \mathbf{e}_i \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, d\mathcal{V} \quad (52)$$

Nótese que se ha empleado el Teorema de la Divergencia para llevar la integral sobre la superficie a una integral de volumen en (52), y se ha empleado la propiedad del operador diferencial nabla sobre un producto, siendo

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (53)$$

Finalmente, puesto que las integrales correspondientes (49) y (52) son iguales, queda establecido la generalización.

**Contracción Producto Interior.** Sea  $\varphi$  un campo vectorial o tensorial. Cuando se realiza una contracción mediante un producto escalar, se obtiene de nuevo el Teorema de la Divergencia (19)

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \cdot \varphi \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \varphi \, d\mathcal{V} \quad (54)$$

Para el caso particular  $\varphi = \mathbf{r}$ , se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \, d\mathcal{A} = 3\mathcal{V} \quad (55)$$

**Contracción Producto Vectorial.** Sea  $\varphi$  un campo vectorial o tensorial. Cuando se realiza una contracción mediante un producto vectorial, se obtiene un nuevo teorema

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \times \varphi \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \times \varphi \, d\mathcal{V} \quad (56)$$

Para el caso particular  $\varphi = \mathbf{r}$ , se tiene

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \times \mathbf{r} \, d\mathcal{A} = \mathbf{0} \quad (57)$$

### 2.5.3. Teorema de Stokes

El *Teorema de Stokes* es válido en la superficie  $\mathcal{A}$  en algunos de los siguientes casos:

- la superficie  $\mathcal{A}$  es de dos lados, y puede ser resuelta en un número finito de elementos de superficies normales. El campo  $\varphi$  es continuo en todos los puntos de  $\mathcal{A}$ , y sus derivadas parciales son continuas en todos los puntos de cada elemento de superficie en los que está dividido  $\mathcal{A}$ .
- $\mathcal{A}$  es cualquier superficie regular de dos lados, siendo el campo  $\varphi$  continuamente diferenciable en una región conteniendo la superficie en su interior.

**Teorema de Stokes Generalizado.** Sea  $\varphi$  un campo escalar, vectorial o tensorial. Entonces el *teorema de Stokes generalizado* expresa que

$$\oint_{\mathcal{L}} \lambda \varphi \, d\mathcal{L} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \times \nabla \varphi \, d\mathcal{A} \quad (58)$$

bajo las condiciones impuestas antes.

Para demostrar el teorema, obsérvese que en la integral de superficie, el vector diferencial de área (con  $u$  y  $v$  como parámetros)

$$\mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du \, dv \quad (59)$$

se multiplica vectorialmente por la izquierda con

$$\nabla \varphi = \mathbf{e}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (60)$$

de manera que, aplicando la identidad

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \quad (61)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \times \mathbf{e}_i \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \left( \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \varphi \right) \end{aligned} \quad (62)$$

ya que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v \partial u} \quad (63)$$

Por consiguiente, aplicando el Teorema de Green, se obtiene

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \times \nabla \varphi \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \varphi \right) \right] du dv \quad (64)$$

$$= \oint_{\mathcal{L}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \varphi \, dv + \oint_{\mathcal{L}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \varphi \, du = \oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\lambda} \varphi \, d\mathcal{L} \quad (65)$$

Lo cual demuestra (58). En esta expresión el orden de los vectores es esencial.

**Contracción Producto Interior.** Sea  $\varphi$  un campo vectorial o tensorial. Cuando se realiza una contracción mediante un producto escalar en la expresión (58), para la integral de superficie se tiene que

$$(\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \varphi = \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \varphi) \quad (66)$$

con lo cual resulta el Teorema de Stokes en su forma más usada

$$\oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \varphi \, d\mathcal{L} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \varphi) \, d\mathcal{A} \quad (67)$$

Fíjese que la expresión (14) es un caso particular de (67) aplicado al plano  $xy$ .

Para el caso particular  $\varphi = \mathbf{r}$ , se tiene

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \oint_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r} \, d\mathcal{L} = 0 \quad (68)$$

**Contracción Producto Vectorial.** Sea  $\varphi$  un campo vectorial o tensorial. Cuando se realiza una contracción mediante el producto vectorial, el integrando de la integral de superficie de (58) se convierte en

$$(\mathbf{n} \times \nabla) \times \varphi = \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi - \mathbf{n} \nabla \cdot \varphi \quad (69)$$

y así, se obtiene un nuevo teorema

$$\oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\lambda} \times \varphi \, d\mathcal{L} = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi - \mathbf{n} \nabla \cdot \varphi) \, d\mathcal{A} \quad (70)$$

Para el caso particular  $\varphi = \mathbf{r}$ , se tiene

$$\nabla \mathbf{r} = \mathbf{I} \quad \nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad \oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r} \, d\mathcal{L} = -2 \int_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \quad (71)$$

**Teorema de Gauss sobre Superficies Curvas.** Sea  $\phi$  un campo escalar, vectorial o tensorial. Del resultado anterior (70), se puede obtener el Teorema de Gauss aplicado a superficies curvas. Sea  $\varphi = \mathbf{n}\phi$ , entonces

$$\nabla \varphi = \nabla(\mathbf{n}\phi) = \mathbf{n} \nabla \phi + (\nabla \mathbf{n}) \phi \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi = \mathbf{n} \cdot \nabla(\mathbf{n}\phi) = \nabla \phi \quad (72.a)$$

$$\nabla \cdot \varphi = \nabla \cdot (\mathbf{n}\phi) = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi + (\nabla \cdot \mathbf{n})\phi \quad \mathbf{n} \nabla \cdot \varphi = \mathbf{n} \nabla \cdot (\mathbf{n}\phi) = (\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\phi \quad (72.b)$$

donde

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{n})\phi = 0 \quad \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (73)$$

debido a que los vectores  $\nabla n_i$  y  $\nabla \phi_{i...}$  son tangentes a la superficie  $\mathcal{A}$ , y, por consiguiente,  $\mathbf{n} \cdot \nabla n_i$  y  $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_{i...}$  son nulos. Recuérdese que el gradiente de cualquier función escalar definida sobre una superficie es tangente a dicha superficie.

Entonces, el resultado (70) para este caso da

$$\oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\eta} \phi \, d\mathcal{L} = \int_{\mathcal{A}} [\nabla \phi - (\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\phi] \, d\mathcal{A} \quad 2\kappa = -(\nabla \cdot \mathbf{n}) \quad (74)$$

donde  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n}$  es el vector unitario perpendicular a la curva  $\mathcal{L}$  y tangente a la superficie  $\mathcal{A}$ , y  $-\nabla \cdot \mathbf{n}$  es igual a dos veces la curvatura media  $\kappa$  de la superficie ( $\kappa$  es positiva cuando  $\mathbf{n}$  apunta hacia centro medio de curvatura, en caso contrario es negativa).

En el caso que  $\phi$  sea un campo vectorial o tensorial, la expresión (74) se puede contraer mediante el producto interior o mediante el producto vectorial obteniéndose dos nuevos teoremas

$$\oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\eta} \cdot \phi \, d\mathcal{L} = \int_{\mathcal{A}} [\nabla \cdot \phi - (\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \cdot \phi] \, d\mathcal{A} \quad (75)$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\eta} \times \phi \, d\mathcal{L} = \int_{\mathcal{A}} [\nabla \times \phi - (\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \times \phi] \, d\mathcal{A} \quad (76)$$

#### 2.5.4. Regla de Leibniz

La *regla de Leibniz* es una de las herramienta más importantes para la deducción y el desarrollo de las ecuaciones de transporte. Básicamente esta regla lo que permite es realizar la derivación con respecto a un parámetro de una integral cuyo límites o dominio depende de dicho parámetro.

Casi todo lo que se expondrá en esta sección está esbozado para cambios de sistemas de coordenadas en la Sección 2.3. Sin embargo, una deducción formal de la Fórmula de la Expansión de Euler y la Regla de Leibniz se puede conseguir en el Apéndice B.

Sea  $\mathbf{x}$  el vector de posición de los de la región del espacio  $\mathcal{V}$  y de su frontera  $\mathcal{A}$ . Esta región del espacio se deforma dependiendo de un parámetro  $t$ , de manera tal, que las posiciones de los puntos  $\mathbf{x}$  de la frontera  $\mathcal{A}$  y la región  $\mathcal{V}$  dependen de dicho parámetro. Sean las posiciones  $\mathbf{X}$  los vectores de posición que poseen los puntos de la región  $\mathcal{V}$  para un valor dado (fijo) del parámetro  $t$ . Llamaremos al conjunto de todos los  $\mathbf{X}$  la *configuración de referencia*. La función que denota la evolución de los vectores de posición de los puntos de la región  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$  y su frontera  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ , se puede expresar como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \quad (77)$$

donde los vectores de posición  $\mathbf{X}$  funcionan como etiquetas de los puntos de la región y su frontera, puesto que dichos valores no cambian al evolucionar los mismos. Cada punto poseerá un único valor de  $\mathbf{X}$ .

Los valores de la derivada de la función (77), respecto al parámetro  $t$  es lo que se denomina la *velocidad del flujo* de los puntos  $\mathbf{X}$  al evolucionar, y es diferente para cada punto. La velocidad del flujo se calcula entonces como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \quad (78)$$

y es una función, tanto del parámetro  $t$ , como de la posición actual de los puntos  $\mathbf{x}$ . La velocidad del flujo forma así un campo vectorial que evoluciona con el parámetro  $t$ .

**Fórmula de Expansión de Euler.** La expresión 2.3.(20.a) se puede interpretar como un cambio de la métrica, y, por consiguiente, se puede decir que

$$d\mathcal{V}(t) = J d\tilde{\mathcal{V}} \quad (79)$$

donde

$$J = J(t, \mathbf{X}) \equiv |\mathbf{J}| \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \epsilon_{abc} X_{1;a} X_{2;b} X_{3;c} \quad (80)$$

es el jacobiano de la transformación (77), y donde  $d\tilde{\mathcal{V}}$  es el diferencial de volumen de la región medido cuando está ubicada en la configuración de referencia.

La variación del jacobiano cumple con la fórmula de la Expansión de Euler definida por 2.3.(19.a). De esta forma,

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (81)$$

donde la derivación parcial se ha colocado como total con respecto al parámetro  $t$ , debido a que la configuración de referencia  $\mathbf{X}$ , que es la otra variable de dependencia de  $J$ , se ha supuesto fija con respecto a dicho parámetro.

Sea  $\varphi$  una campo escalar, vectorial o tensorial. Tomando en consideración la velocidad del flujo, se puede calcular la derivada respecto a  $t$  siguiendo la configuración de referencia, o lo que es lo mismo, manteniendo  $\mathbf{X}$  constante para todo  $t$ . Esto es

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_X \equiv \frac{d}{dt} \varphi[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})] = \frac{d}{dt} \varphi(t, \mathbf{x}) \Big|_X = \frac{d\varphi}{dt} \quad (82)$$

De ahora en adelante emplearemos el símbolo de derivación total simple para indicar este tipo de derivación. Con esta premisa se tiene entonces, aplicando la Regla de la cadena, que

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\nabla \varphi)^t \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\nabla \varphi)^t \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \end{aligned} \quad (83)$$

Algunas veces se acostumbra a expresar este tipo de derivación de forma simbólica mediante el operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (84)$$

**Regla de Leibniz Generalizada.** Una importante regla geométrica puede ser derivada de la relación (81), llamada Regla de Leibniz. Conocida más comúnmente por su frecuente uso en  $\mathbb{R}$ , esta regla permite poder derivar respecto a  $t$  la integral de una función en un dominio  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$  dependiente del parámetro  $t$ .

Sea  $\varphi$  una campo escalar, vectorial o tensorial definido en un dominio  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$ , cuya frontera es  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ . Sea la integral

$$\mathbf{G}(t) = \int_{\mathcal{V}} \varphi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} \quad (85)$$

dependiente de  $t$ . Se está interesado en obtener la derivada con respecto al parámetro  $t$  de la función  $\mathbf{G}$ , o sea

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \varphi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} \quad (86)$$

Ahora la integral es calculada sobre un dominio  $\mathcal{V} = V(t)$  variable con respecto al paámetro  $t$ , así que no podemos efectuar la diferenciación a través del signo de la integral. Pero, sin embargo, si la integración fuera hecha con respecto al dominio  $\tilde{\mathcal{V}}$ , sería posible intercambiar la diferenciación y la integración, puesto que el operador  $d/dt$  es la devivada con respecto a  $t$ , manteniendo  $X$  constante. Por consiguiente, el cambio de variables  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ , junto con la relación de volúmenes  $d\mathcal{V} = J d\tilde{\mathcal{V}}$ , nos permite hacer justo esto para un dominio  $\mathcal{V} = V(t)$  definido como el flujo realizado sobre alguna configuración de referencia  $\tilde{\mathcal{V}}$  definida para  $t = 0$ . Así se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \varphi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\tilde{\mathcal{V}}} \varphi[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})] J d\tilde{\mathcal{V}} = \int_{\tilde{\mathcal{V}}} \left( \frac{d\varphi}{dt} J + \varphi \frac{dJ}{dt} \right) d\tilde{\mathcal{V}} \\ &= \int_{\tilde{\mathcal{V}}} \left[ \frac{d\varphi}{dt} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] J d\tilde{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{d\varphi}{dt} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (87)$$

en donde se ha empleado el Fórmula de la Expansión de Euler (81) como se habrá podido observar.

Substituyendo ahora la expresión (84) para la derivada del primer término del integrando y agrupando los términos que contienen el operador nabla, queda que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \varphi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \varphi) \right] d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (88)$$

Por último, vamos a aplicar el Teorema de Gauss (Teorema de la Divergencia) al segundo término del integrando, obteniéndose finalmente

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \varphi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}} \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (89)$$

donde  $\mathcal{A} = A(t)$  es la frontera de  $\mathcal{V} = V(t)$  para todo  $t$ , y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $\mathcal{A}$ , que apunta hacia el exterior de  $\mathcal{V}$ .

Un ejemplo de aplicación de (89), frecuentemente usado, es el caso unidimensional de una función escalar, particularmente expresado como

$$\frac{d}{dt} \int_{g(t)}^{h(t)} f(t, x) dx = \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[t, h(t)] \frac{dh}{dt} - f[t, g(t)] \frac{dg}{dt} \quad (89')$$

donde  $dh/dt$  es la componente de la velocidad en la dirección de la normal exterior en la frontera derecha y  $-dg/dt$  es la componente de la velocidad en la dirección de la normal exterior en la frontera de la izquierda (suponiendo que  $x$  crece de izquierda a derecha). Extender (89') al caso de una función vectorial o tensorial no cambia en nada a la expresión. El caso bidimensional es muy parecido a (89), y se expresa como

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \varphi(t, \mathbf{x}) d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{C}} \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{L} \quad (89'')$$

slo que el dominio ahora es una superficie plana  $\mathcal{A} = A(t)$ , limitada por una frontera que es una curva cerrada  $\mathcal{C} = C(t)$ . La velocidad con que se mueve la frontera es  $\mathbf{v}$  y la normal exterior  $\mathbf{n}$  es coplanar con la superficie. El caso bidimensional con una superficie no plana, se plantea de manera similar que en la sección B.2.4.9, para una superficie interfaz (ver ecuación B.2.4.(54)). Interpretado como un teorema de transporte, se puede también encontrar en la sección I.2.2.7, con observaciones particulares (ver ecuaciones (17)–(19) y (23)–(31) de esta sección).

### 2.5.5. Relación del Vector Axial

Sea  $\mathbf{T}$  un tensor de segundo orden definido sobre la región  $\mathcal{V}$ , cuya frontera es  $\mathcal{A}$ . Se establecen las condiciones para que se pueda aplicar el Teorema de la Divergencia. Entonces, se cumple la siguiente relación

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{r} \, d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \mathbf{T}) \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T}_x \, d\mathcal{V} = \mathbf{0} \quad (90)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal exterior sobre  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbf{r}$  es el vector de posición y  $\mathbf{T}_x$  es el vector axial del tensor  $\mathbf{T}$ .

La relación (90) se demuestra empleando un vector auxiliar  $\mathbf{t}$  y un tensor auxiliar  $\mathbf{H}$  definidos como

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad (t_k = n_l T_{lk}) \quad \mathbf{H} = \mathbf{T} \mathbf{r} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (H_{li} = T_{lk} r_j \epsilon_{jki}) \quad (91)$$

y que cumplen con la relación

$$\mathbf{t} \times \mathbf{r} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (92.a)$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} -(\mathbf{t} \times \mathbf{r})_i &= -\epsilon_{ikj} t_k r_j = \epsilon_{ijk} t_k r_j = \epsilon_{ijk} n_l T_{lk} r_j \\ &= n_l (\epsilon_{ijk} T_{lk} r_j) = n_l (T_{lk} r_j \epsilon_{jki}) = n_l H_{li} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})_i \end{aligned} \quad (92.b)$$

Integrando (92.a) sobre toda la superficie  $\mathcal{A}$  y aplicando el Teorema de la Divergencia se obtiene

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \times \mathbf{r} \, d\mathcal{A} + \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \, d\mathcal{A} = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \times \mathbf{r} \, d\mathcal{A} + \oint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{H} \, d\mathcal{V} = \mathbf{0} \quad (93)$$

donde

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \mathbf{T}) + \mathbf{T}_x \quad (94.a)$$

o lo que es lo mismo

$$(\nabla \cdot \mathbf{H})_i = H_{li,l} = (\epsilon_{ijk} T_{lk} r_j)_{,l} = \epsilon_{ijk} T_{lk,l} r_j + \epsilon_{ijk} T_{lk} \delta_{jl} = [\mathbf{r} \times (\nabla \cdot \mathbf{T})]_i + (\mathbf{T}_x)_i \quad (94.b)$$

Esto completa la demostración de (90).

### 2.5.6. Teoremas de Pappus

Pappus de Alenjandría, que vivió en la segunda mitad del siglo tercero, fue uno de los últimos geómetras de la escuela de Alejandría de matemáticos griegos. Escribió un compendio de ocho libros en los que recogió gran parte de los conocimientos matemáticos de aquel tiempo, de los cuales se conservan los seis últimos y una parte del segundo. Pappus descubrió numerosas propiedades interesantes de los centroides, dos de las cuales se expondrán en esta sección.

**Centroide.** El Teorema de Pappus que sigue, establece que el centroide de la reunión de dos regiones disjuntas  $A$  y  $B$  está sobre el segmento de recta que une el centroide de  $A$  con el centroide de  $B$ . Con mayor generalidad, sean  $A$  y  $B$  dos regiones disjuntas (o sea, que su intersección es vacía). Designen con  $\mathcal{V}_A$  y  $\mathcal{V}_B$  sus volúmenes y con  $\mathbf{r}_A$  y  $\mathbf{r}_B$  los vectores de posición que unen el origen del sistema de coordenadas con los respectivos centroides de cada región. La unión  $A \cup B$  tiene entonces un volumen igual a  $\mathcal{V}_A + \mathcal{V}_B$  y su centroide está determinado por la expresión

$$\mathbf{r}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_A \mathcal{V}_A + \mathbf{r}_B \mathcal{V}_B}{\mathcal{V}_A + \mathcal{V}_B} \quad (95)$$

El cociente que da  $\mathbf{r}_{AB}$  es una combinación lineal de la forma  $a\mathbf{r}_A + b\mathbf{r}_B$ , en la que  $a$  y  $b$  son escalares llamados factores de peso, no negativos, cuya suma es uno. Una combinación lineal de este tipo se dice que es convexa. El vector de posición  $\mathbf{r}_{AB}$  está situado en el segmento de recta que une los extremos de  $\mathbf{r}_A$  y  $\mathbf{r}_B$ .

La fórmula (95) se deduce inmediatamente de la definición del centroide de una región del espacio

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV \quad V = \int_V dV \quad (96)$$

Dicha fórmula puede generalizarse de manera sencilla a la reunión de varias regiones  $V_i$  en la forma

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i V_i}{\sum_i V_i} \quad \mathbf{r}_i = \langle \mathbf{r} \rangle_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \mathbf{r} dV \quad V_i = \int_{V_i} dV \quad (97)$$

Dos casos particulares de (97) se puede tener cuando se trabajan con regiones de dimensión dos (o superficies), o de dimensión uno (o curvas), donde los factores de peso son la áreas o la longitudes de las regiones, en lugar de los volúmenes.

**Cuerpos de Revolución.** Otro Teorema de Pappus es el siguiente, que relaciona el centroide de una región plana con el volumen del sólido (o el área de la superficie) de revolución obtenido por la rotación de la citada región alrededor de un eje contenido en su plano.

Considérese una región plana  $\mathcal{R}$  situada entre las gráficas de dos funciones continuas  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ , siendo  $0 \leq g(x) \leq f(x)$ . Sea  $\mathcal{B}$  el sólido de revolución generado al hacer girar la región  $\mathcal{R}$  alrededor del eje  $x$ . Désígnese por  $\mathcal{A}(\mathcal{R})$  y  $\mathcal{L}(\mathcal{R})$  el área de  $\mathcal{R}$  y la longitud de su frontera, por  $V(\mathcal{B})$  y  $\mathcal{S}(\mathcal{B})$  el volumen del sólido  $\mathcal{B}$  y el área de la superficie que conforma su frontera, y por  $\bar{Y}$  y  $\bar{y}$  los centroides de la región  $\mathcal{R}$  y de su frontera. Al hacer girar  $\mathcal{R}$  para generar  $\mathcal{B}$ , los centroides  $\bar{Y}$  y  $\bar{y}$  se desplazan a lo largo de circunferencias de radios  $\bar{Y}$  y  $\bar{y}$ , respectivamente. El teorema de Pappus establece que el volumen  $V$  de  $\mathcal{B}$  y el área  $\mathcal{S}$  de su frontera son iguales al producto de las longitudes de las circunferencias de radios  $\bar{Y}$  y  $\bar{y}$  por el área  $\mathcal{A}$  y la longitud  $\mathcal{L}$ , respectivamente. Esto es,

$$V = 2\pi \bar{Y} \mathcal{A} \quad \mathcal{S} = 2\pi \bar{y} \mathcal{L} \quad (98)$$

Para demostrar (98.a), obsérvese tan sólo que el volumen viene dado por la integral

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx \quad (99.a)$$

y que  $\bar{Y}$  se obtiene con la fórmula

$$\bar{Y} \mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{R}} y dy dx = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{f(x)} y dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx \quad (99.b)$$

Comparando estas dos últimas fórmulas se obtiene inmediatamente (98.a).

Para demostrar (98.b), defínase el vector de posición de los puntos de la porción de la superficie generada por la función  $y = f(x)$ , de forma paramétrica, como

$$\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + f(u) \cos v \mathbf{j} + f(u) \sin v \mathbf{k} \quad (100.a)$$

donde  $(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$ . Los parámetros  $u$  y  $v$  pueden interpretarse como el radio y ángulo polares. Como  $a \leq u \leq b$ , todos los puntos  $(x, y, z)$  situados a la misma distancia  $f(u)$  del eje  $x$ , tiene la misma coordenada  $x = u$ . El vector diferencial de área para esta superficie expresada de manera paramétrica viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{n} dS &= - \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(u) \cos v & f'(u) \sin v \\ 0 & -f(u) \sin v & f(u) \cos v \end{vmatrix} du dv \\ &= f(u) [-f'(u) \mathbf{i} + \cos v \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}] du dv \end{aligned} \quad (100.b)$$



y por tanto

$$\|\mathbf{n} d\mathcal{S}\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv = \{ f(u) \sqrt{1 + [f'(u)]^2} \} du dv \quad (100.c)$$

De aquí que el área de la porción generada por  $y = f(x)$  sea

$$\int_0^{2\pi} \left[ \int_a^b f(u) \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du \right] dv = 2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du \quad (100.d)$$

La integral que resulta puede expresarse como

$$\bar{y}_f \mathcal{L}_f = \int_{\mathcal{L}_f} y d\mathcal{L} \quad (100.e)$$

que es una integral de línea respecto a la longitud de arco, que permite obtener la coordenada del centroide  $\bar{y}_f$  de la curva dada por  $(x, f(x))$ . Este mismo resultado puede obtenerse para la porción de curva generada por la función  $y = g(x)$ . Finalmente, aplicando el Primer Teorema de Pappus a las dos curvas mencionadas queda demostrada la fórmula (98.b). El proceso demostrativo anterior permite expresar que la fórmula (98.b) continúa siendo válida, aunque la curva no sea cerrada.

**Teorema Generalizado.** El Segundo Teorema de Pappus se puede generalizar a la generación de sólidos más compleja que la descrita anteriormente. Cuando el centroide de la región plana o de la curva plana se desplaza sobre una línea curva, no necesariamente cerrada, siempre manteniéndolo el plano perpendicular a ella, genera un sólido o una superficie. Este sólido o superficie se puede considerar formado por rebanadas, cada una de las cuales corresponde a un desplazamiento infinitesimal sobre un arco de la línea curva, cuyo radio de curvatura desplazándose por el plano osculador permite aplicar el Segundo Teorema de Pappus. En el límite, el volumen del sólido y el área de su superficie lateral (sin considerar las tapas) generados mediante el proceso descrito, se pueden calcular mediante

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(t) \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}} dt \quad \mathcal{S} = \int_a^b \mathcal{L}(t) \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}} dt \quad (101)$$

respectivamente. En esta expresión, la curva  $\mathbf{x}(t)$  con  $a \leq t \leq b$ , dada de forma paramétrica, representa el recorrido que han seguido los centroides de las regiones planas  $\mathcal{A}(t)$  o  $\mathcal{L}(t)$ , para generar el sólido  $\mathcal{V}$  o la superficie  $\mathcal{S}$ , respectivamente, siempre considerando que el plano que contiene a la región plana se desplaza perpendicular a dicho recorrido.

Las expresiones (101) pueden generalizarse todavía más considerando el problema de encontrar las siguientes integrales

$$\tilde{\mathcal{V}} = \int_a^b \int_{\mathcal{A}(t)} \varphi d\mathcal{A} \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}} dt \quad \tilde{\mathcal{S}} = \int_a^b \int_{\mathcal{L}(t)} \phi d\mathcal{L} \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}} dt \quad (102)$$

donde se puede asumir que  $d\tilde{\mathcal{A}} = \varphi d\mathcal{A}$  y  $d\tilde{\mathcal{L}} = \phi d\mathcal{L}$ , por lo que

$$\tilde{\mathcal{A}}(t) = \int_{\mathcal{A}(t)} \varphi d\mathcal{A} \quad \tilde{\mathcal{L}}(t) = \int_{\mathcal{L}(t)} \phi d\mathcal{L} \quad (103)$$

con lo cual (102) se hace equivalente a (101). Solamente hay que hacer la observación de que la curva  $\mathbf{x}(t)$  debe representar el recorrido que se hace con los centroides de las regiones planas  $\tilde{\mathcal{A}}(t)$  o  $\tilde{\mathcal{L}}(t)$ , para generar el sólido  $\tilde{\mathcal{V}}$  o la superficie  $\tilde{\mathcal{S}}$ , respectivamente.

## 2.6. FORMAS DIFERENCIALES

La teoría de las formas diferenciales proporciona una manera conveniente y elegante de expresar los Teoremas de Green, Gauss y Stokes. De hecho, el uso de formas diferenciales muestra que todos estos teoremas son manifestaciones de una sola teoría matemática subyacente y proporciona el lenguaje necesario para generalizarlos a dimensión  $n$ . En esta sección se hará una exposición muy elemental de la teoría de las formas diferenciales. En el Apéndice B, se hará una presentación más completa de las formas diferenciales en un espacio de dimensión  $n$ . Como el objetivo principal es mostrar que los Teoremas de Green, Gauss y Stokes se pueden unificar bajo un solo teorema, este se dará por satisfecho con algo menos que la versión más fuerte de estos teoremas. Más aún, se introducirán formas de manera puramente axiomática y no constructiva, evadiendo así la tremenda cantidad de preliminares algebraicos formales, que por lo general se requieren para su construcción, los cuales han sido dejados para los Apéndices B y C.

### 2.6.1. 0-Forma

Se comenzará el tema introduciendo el concepto de una 0-forma diferencial. **Definición 1.** Sea  $\mathcal{V}$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^3$ . Una 0-forma en  $\mathcal{V}$  es una función con valores reales  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . Cuando diferenciamos  $f$  una vez, se supone que es de clase  $C^1$ , y de clase  $C^2$  cuando la diferenciamos dos veces.

Dadas dos 0-formas  $f_1$  y  $f_2$  de  $\mathcal{V}$  en  $\mathbb{R}$ , se pueden sumar de la manera usual para obtener una nueva 0-forma  $f_1 + f_2$ , o multiplicar para obtener la 0-forma  $f_1 f_2$ .

### 2.6.2. 1-Forma

**Definición 2.** Las 1-formas básicas son las expresiones  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ . En este momento se considerarán sólo símbolos formales. Una 1-forma  $\omega$  en un conjunto abierto  $\mathcal{V}$  es una forma lineal formal

$$\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (1)$$

o simplemente

$$\omega = P dx + Q dy + R dz \quad (2)$$

donde  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son funciones con valores reales, definidas en  $\mathcal{V}$ . Por la expresión  $P dx$  se entenderá la 1-forma  $P dx + 0 dy + 0 dz$  y de manera similar  $Q dy$  y  $R dz$ . Además, el orden de  $P dx$ ,  $Q dy$  y  $R dz$  no tiene importancia, de modo que se pueden permutar los términos sin alterar la 1-forma.

Dadas dos 1-formas  $\omega_1 = P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz$  y  $\omega_2 = P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz$ , se pueden sumar para obtener una nueva 1-forma  $\omega_1 + \omega_2$ , definida por

$$\omega_1 + \omega_2 = (P_1 + P_2) dx + (Q_1 + Q_2) dy + (R_1 + R_2) dz \quad (3)$$

y dada una 0-forma  $f$ , se puede formar la 1-forma  $f\omega$ , definida por

$$f\omega = (fP) dx + (fQ) dy + (fR) dz \quad (4)$$

### 2.6.3. 2-Forma

**Definición 3.** Las 2-formas básicas son las expresiones formales  $dydz$ ,  $dzdx$  y  $dx dy$ . Estas expresiones deben pensarse como los productos de  $dyx$  y  $dz$ ,  $dz$  y  $dx$ , y  $dx$  y  $dy$ .

Una 2-forma  $\eta$  en  $\mathcal{V}$  es una expresión formal

$$\eta = F(x, y, z) dydz + G(x, y, z) dzdx + H(x, y, z) dx dy \quad (5)$$

donde  $F$ ,  $G$  y  $H$  son funciones reales definidas en  $\mathcal{V}$ . El orden de los términos en (5) no es importante. En este punto es importante notar que en una 2-forma, las 1-formas básicas  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  siempre aparecen en pares cíclicos, comenzando con  $dy$ . Esto es, multiplicadas entre sí en el orden  $y, z$  y  $x$  mencionado antes.

Por analogía con las 0-formas y las 1-formas, se pueden sumar dos 2-formas  $\eta_1$  y  $\eta_2$

$$\eta_1 = F_1 dydz + G_1 dzdx + H_1 dxdy \quad \eta_2 = F_2 dydz + G_2 dzdx + H_2 dxdy \quad (6)$$

para obtener una nueva 2-forma

$$\eta_1 + \eta_2 = (F_1 + F_2) dydz + (G_1 + G_2) dzdx + (H_1 + H_2) dxdy \quad (7)$$

De manera análoga, si  $f$  es una 0-forma y si  $\eta$  es una 2-forma, se puede tomar el producto

$$f\eta = (fF) dydz + (fG) dzdx + (fH) dxdy \quad (8)$$

Finalmente, por la expresión  $F dydz$  se entiende la 2-forma  $F dydz + 0 dzdx + 0 dxdy$ .

#### 2.6.4. 3-Forma

**Definición 4.** Una 3-forma básica es una expresión formal  $dx dy dz$  (en el orden cíclico). Una 3-forma  $\nu$  en un conjunto abierto  $\mathcal{V}$ , es una expresión de la forma  $\nu = f(x, y, z) dx dy dz$ , donde  $f$  es una función con valores reales definida en  $\mathcal{V}$ .

Se pueden sumar dos 3-formas y multiplicarlas por una 0-forma de la manera obviamente análoga a las otras formas descritas antes. A simple vista pareciera no haber diferencia entre una 0-forma y una 3-forma, pues ambas incluyen una sola función con valores reales. Pero se distinguirán con un propósito que se aclarará más adelante, cuando se multipliquen y diferencien formas.

#### 2.6.5. Integral de una Forma

Aunque se pueda sumar dos 0-formas, dos 1-formas, dos 2-formas o dos 3-formas, no se necesita sumar una  $k$ -forma y una  $j$ -forma si  $k \neq j$ . Por ejemplo, no se necesita escribir

$$f(x, y, z) dx dy + g(x, y, z) dz \quad (9)$$

Ahora que se ha definido estos objetos formales (formas), resulta válido preguntarse para qué sirven, cómo se usan, y quizás lo más importante, que significan. La respuesta a la primera pregunta se aclarará conforme se siga avanzando, pero de manera inmediata se puede describir cómo usarlas e interpretarlas.

Una función con valores reales definida en un dominio  $\mathcal{V}$  en  $\mathbb{R}^3$  es una regla que asigna a cada punto en  $\mathcal{V}$  un número real. Las formas diferenciales son, en cierto sentido, generalizaciones de las funciones con valores reales que se han estudiado antes con el nombre de campos escalares. De hecho, las 0-formas en un conjunto abierto  $\mathcal{V}$  son simplemente funciones (o campos escalares) definidos en  $\mathcal{V}$ . Así, una 0-forma  $f$  manda puntos de  $\mathcal{V}$  a números reales.

Se prefiere interpretar las  $k$ -formas diferenciales (para  $k \geq 1$ ), no como funciones definidas en puntos de  $\mathcal{V}$ , sino como funciones definidas en objetos geométricos, tales como curvas, superficies y volúmenes. Muchos de los antiguos geómetras griegos consideraron a las rectas y curvas formadas por una infinidad de puntos, y a los planos y rectas formados por una infinidad de rectas y curvas. En consecuencia, hay al menos cierta justificación histórica para aplicar esta jerarquía geométrica a la interpretación de las formas diferenciales.

Dado un subconjunto abierto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ , se distinguirán cuatro tipos de subconjuntos de  $\mathcal{V}$

- (i) Puntos en  $\mathcal{V}$ .
- (ii) Curvas simples orientadas y curvas  $\mathcal{L}$  cerradas simples y orientadas, en  $\mathcal{V}$ .
- (iii) Superficies orientadas  $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ .
- (iv) Subregiones regulares elementales (Volumétricas).  $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$ .

Se comenzará con las 1-formas. Sea

$$\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (10)$$

una 1-forma en  $\mathcal{V}$  y sea  $\mathcal{L}$  una curva orientada simple. El número real que  $\omega$  asigna a  $\mathcal{L}$ , está dado por la fórmula

$$\int_{\mathcal{L}} \omega = \int_{\mathcal{L}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (11)$$

Recuérdese que esta integral se evalúa como sigue. Sea  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathcal{V}$  una parametrización  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  que preserve la orientación de  $\mathcal{L}$ . Entonces

$$\int_{\mathcal{L}} \omega = \int_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\lambda} dl \quad (12)$$

donde, en el sistema de coordenadas  $xyz$ ,

$$\boldsymbol{\varphi} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\lambda} dl = d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt \quad (13)$$

y el resultado de (12) es independiente de la parametrización escogida.

Podemos entonces interpretar una 1-forma  $\omega$  en  $\mathcal{V}$ , como una regla que asigna un número real a cada curva orientada  $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ . Una 2-forma  $\eta$ , de manera similar, se verá como una regla que asigna un número real a cada superficie orientada  $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ . Una 3-forma  $\nu$  será una regla que asigne un número real a cada subregión elemental  $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$ . Las reglas para asociar números reales con curvas, superficies y regiones están contenidas por entero en las expresiones formales que se han definido.

Una 2-forma  $\eta$  definida en un conjunto abierto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ , se puede interpretar de manera análoga, como una función que asocia con cada superficie orientada  $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$  un número real. Esto se logra por medio del concepto de integración de 2-formas sobre superficies. Sea

$$\eta = F(x, y, z) dydz + G(x, y, z) dzdx + H(x, y, z) dxdy \quad (14)$$

una 2-forma en  $\mathcal{V}$ , y sea  $\mathcal{A}$  una superficie orientada, parametrizada por la función  $\mathbf{x} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{V}$ , con  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$  y con  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ . Entonces,

$$\int_{\mathcal{A}} \eta = \int \int_{\mathcal{A}} F(x, y, z) dydz + G(x, y, z) dzdx + H(x, y, z) dxdy = \int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}; d\mathcal{A} \quad (15)$$

donde, en el sistema de coordenadas  $xyz$ ,

$$\boldsymbol{\varphi} = F\mathbf{i} + G\mathbf{j} + H\mathbf{k} \quad (16)$$

y

$$\mathbf{n} d\mathcal{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du dv = \left[ \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k} \right] du dv \quad (17)$$

con

$$dy dz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv \quad dz dx = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv \quad dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \quad (18.a)$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (18.b)$$

El resultado (15) no depende de la parametrización empleada.

Finalmente, se debe interpretar las 3-formas como funciones en las subregiones elementales de  $\mathcal{V}$ . Sea  $\nu = f(x, y, z) dx dy dz$  una 3-forma, y sea  $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$  una subregión elemental de  $\mathcal{V}$ . Entonces, a cada  $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$  se asigna el número real

$$\int_{\mathcal{D}} \nu = \int \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathcal{D}} f d\mathcal{D} \quad (19)$$

que es simplemente la integral triple ordinaria de  $f$  sobre  $\mathcal{D}$ . En la integral (19), bajo un cambio del sistema de coordenadas  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$  y  $z = z(u, v, w)$ , el diferencial de volumen  $\mathcal{D} = dx dy dz$  se transforma en

$$dx dy dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du dv dw = J du dv dw \quad J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (20)$$

De esta forma la integral de la 3-forma  $\nu$  también puede expresarse como

$$\int_{\mathcal{D}} \nu = \int \int \int_{\mathcal{D}'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] J du dv dw \quad (21)$$

donde  $\mathcal{D}'$  es la expresión de la región  $\mathcal{D}$  en el nuevo sistema de coordenadas  $ouvw$ .

### 2.6.6. Multiplicación de Formas

Se estudiará ahora el álgebra (o reglas de multiplicación) de formas diferenciales, que junto con la diferenciación de formas, permitirá enunciar los Teoremas de Green, Stokes y Gauss, en términos de formas diferenciales.

Si  $\omega$  es una  $j$ -forma y  $\eta$  es una  $k$ -forma en  $\mathcal{V}$ , con  $0 \leq j + k \leq 3$ , existe un producto llamado exterior  $\omega \wedge \eta$  que es una  $(j + k)$ -forma en  $\mathcal{V}$ . El producto exterior satisface las siguientes reglas:

- (i) Para cada  $j$ , existe una  $j$ -forma llamada “cero”, denotada  $0$ , con la propiedad de que  $0 + \omega = \omega$ , para toda  $j$ -forma  $\omega$ , y  $0 + \eta = \eta$ , para toda  $k$ -forma  $\eta$ , con  $0 \leq j + k \leq 3$ .
- (ii) (Distributividad) Si  $f$  es una 0-forma, entonces

$$\omega \wedge (f\eta_1 + \eta_2) = f(\omega \wedge \eta_1) + (\omega \wedge \eta_2) \quad (f\eta_1 + \eta_2) \wedge \omega = f(\eta_1 \wedge \omega) + (\eta_2 \wedge \omega) \quad (22)$$

- (iii) (Anticonmutatividad)

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{jk}(\eta \wedge \omega) \quad (23)$$

- (iv) (Asociatividad) Si  $\omega_1, \omega_2$  y  $\omega_3$  son  $j_1, j_2, j_3$ -formas, respectivamente, con  $j_1 + j_2 + j_3 \leq 3$ , entonces

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 \quad (24)$$

- (v) (Homogeneidad respecto a las funciones) Si  $f$  es una 0-forma, entonces

$$\omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta) \quad (25)$$

Nótese que las reglas (ii) y (iii) en realidad implican la regla (v).

- (vi) Se cumplen las siguientes reglas de multiplicación para las 1-formas:

$$dy dz = dy \wedge dz \quad dz dx = dz \wedge dx \quad dx dy = dx \wedge dy \quad (26.a)$$

$$dx dx = 0 \quad dy dy = 0 \quad dz dz = 0 \quad (26.b)$$

$$dx dy dz = (dx \wedge dy) \wedge dz = dx \wedge (dy \wedge dz) \quad (26.c)$$

- (vii) Si  $f$  es cualquier 0-forma y  $\omega$  cualquier  $j$ -forma, entonces

$$f\omega = f \wedge \omega \quad (27)$$

Usando las reglas (i) a la (vii), se puede hallar ahora un producto único de cualquier  $j$ -forma  $\omega$  y cualquier  $k$ -forma  $\eta$  en  $\mathcal{V}$ , con  $0 \leq j + k \leq 3$ . Un ejemplo del uso de estas reglas se dejará al lector cuando trate de encontrar las expresiones (18) y (20 a partir de la multiplicación exterior de la siguientes 1-formas

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw \quad (28)$$

donde  $du$ ,  $dv$  y  $dw$  son también 1-formas. Para la expresión (18), considérese que las derivadas  $\partial/\partial w$  son todas nulas.

### 2.6.7. Derivada de una Forma

El último paso importante en el desarrollo de esta teoría es mostrar como diferenciar formas. La derivada de una  $j$ -forma es una  $(j+1)$ -forma si  $j \leq 3$ , y la derivada de una 3-forma siempre es cero. Si  $\omega$  es una  $j$ -forma, denotaremos la derivada de  $\omega$  por  $d\omega$ . El operador  $d$  tiene las siguientes propiedades:

(i) Si  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  es una 0-forma, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (29)$$

(ii) (Linealidad) Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son dos  $j$ -formas, entonces

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2 \quad (30)$$

(iii) Si  $\omega$  es una  $j$ -forma y  $\eta$  es una  $k$ -forma, entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^j (\omega \wedge d\eta) \quad (31)$$

(iv) La aplicación doble del operador diferencial  $d$  anula a cualquier forma. Esto es,

$$d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0 \quad d(df) = 0 \quad d(d\omega) = 0 \quad d(d\eta) = 0 \quad (32)$$

Las propiedades (i) a (iv) proporcionan información suficiente para permitir de manera única cualquier forma.

### 2.6.8. Teorema de Green-Gauss-Stokes

Se han desarrollado todos los conceptos necesarios para reformular los Teoremas de Green, Stokes y Gauss en el lenguaje de las formas diferenciales.

**Teorema 1.** (Teorema de Green). Sea  $\mathcal{R}$  una región plana regular orientada en el plano  $xy$ , con una frontera  $\mathcal{C} = \partial\mathcal{R}$  que es una curva cerrada con orientación positiva. Suponer que  $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  es una 1-forma en algún conjunto abierto  $\mathcal{V}$  en  $\mathbb{R}^3$  que contenga a  $\mathcal{R}$ . Entonces,

$$\int_{\mathcal{R}} d\omega = \oint_{\partial\mathcal{R}} \omega \quad (33)$$

Aquí  $d\omega$  es una 2-forma en  $\mathcal{V}$ , y  $\mathcal{R}$  es de hecho una superficie en  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, 0)$ . Como  $P$  y  $Q$  no son explícitamente funciones de  $z$ , entonces  $\partial P/\partial z$  y  $\partial Q/\partial z$  son nulas y  $d\omega = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y) dx dy$ . En consecuencia, (33) es equivalente al Teorema de Green 2.5.(1).

**Teorema 2.** (Teorema de Stokes). Sea  $\mathcal{A}$  una superficie regular plana orientada en  $\mathbb{R}^3$ , con una frontera formada por una curva cerrada simple  $\mathcal{L} = \partial\mathcal{A}$ , orientada según  $\mathcal{A}$ . Suponer que  $\omega$  es una 1-forma como la expresión (1) en algún conjunto abierto  $\mathcal{V}$  que contiene a  $\mathcal{A}$ . Entonces

$$\int_{\mathcal{A}} d\omega = \oint_{\partial\mathcal{A}} \omega \quad (34)$$

con

$$d\omega = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (35)$$

En consecuencia, la expresión (34) es equivalente al Teorema de Stokes 2.5.(67).

**Teorema 3.** (Teorema de Gauss). Sea  $\mathcal{D}$  una región regular cerrada en  $\mathbb{R}^3$ , con una frontera formada por una superficie regular cerrada  $\mathcal{A} = \partial\mathcal{D}$ , orientada según el exterior de  $\mathcal{D}$ . Suponer que  $\eta$  es una 2-forma como (5) en algún conjunto abierto  $\mathcal{V}$  que contiene a  $\mathcal{D}$ . Entonces

$$\int_{\mathcal{D}} d\eta = \oint_{\partial\mathcal{D}} \eta \quad (36)$$

con

$$d\eta = \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (37)$$

En consecuencia, la expresión (36) es equivalente al Teorema de Gauss 2.5.(54).

Quizas los lectores ya notaron la fuerte analogía de los enunciados en estos tres teoremas. En las formulaciones para campos vectoriales se han usado divergencia para regiones en  $\mathbb{R}^3$  (Teorema de Gauss), rotacional para superficies en  $\mathbb{R}^3$  (Teorema de Stokes) y rotacional para regiones planas en  $\mathbb{R}^2$  (Teorema de Green). Aquí se usó sólo el concepto de derivada de una forma diferencial para los tres teoremas; y de hecho se pueden enunciar todos los teoremas como uno, si se introduce un poco más de terminología.

Por una 2-variedad orientada con frontera, en  $\mathbb{R}^3$ , se entenderá una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , cuya frontera es una curva cerrada simple con una orientación positiva. Por una 3-variedad orientada con frontera, en  $\mathbb{R}^3$ , se entenderá una región regular en  $\mathbb{R}^3$ , cuya frontera es una superficie cerrada con una orientación exterior (como en el teorema 3.). Al siguiente teorema unificado se le llamará el Teorema General de Green-Gauss-Stokes por razones evidentes.

**Teorema 4.** (Teorema de Green-Gauss-Stokes). Sea  $M$  una  $k$ -variedad en  $\mathbb{R}^3$  ( $k = 2, 3$ ), contenida en algún conjunto abierto  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Suponer que  $\omega$  es una  $(k-1)$ -forma en  $\mathcal{V}$ . Entonces,

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega \quad (38)$$

unificando de esta forma los Teoremas de Green, Gauss y Stokes.

## 2.7. CAMPOS VECTORIALES Y TENSORIALES

Existen diferentes tipos de campos, tanto vectoriales como tensoriales, que cumplen con ciertas propiedades que son importantes para el desarrollo de la teoría de campo. En esta sección se hará una descripción breve de los diferentes tipos de campos más conocidos, dentro de los cuales se pueden mencionar los siguientes: Solenoidal, Irrotacional, Complejo-Laminar, Beltrami, Laplaciano y Trkalian. En los dos primeros se expondrán los teoremas que se aplican para estos dos tipos de campos y que serán de uso obligatorio en el desarrollo de algunos modelos físicos.

### 2.7.1. Irrotacional

Un campo se denomina *irrotacional*, si su rotacional es nulo. Esto es,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (1)$$

para un campo vectorial  $\mathbf{v}$  o un campo tensorial  $\mathbf{T}$ .

**Teorema 1.** (Campo Irrotacional). Sea  $\mathcal{D}$  una región simplemente conexa donde están definidos los campos descritos abajo.

(i) Sea  $\mathbf{u}$  un campo vectorial de la clase  $C^n$  ( $n \geq 1$ ) sobre  $\mathcal{D}$  que satisface

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Entonces existe un campo escalar  $\varphi$  de la clase  $C^{n+1}$  sobre  $\mathcal{D}$ , tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi \quad (3)$$

(ii) Sea  $\mathbf{T}$  un campo tensorial de la clase  $C^n$  ( $n \geq 1$ ) sobre  $\mathcal{D}$  que satisface

$$\nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Entonces existe un campo vectorial  $\mathbf{u}$  de la clase  $C^{n+1}$  sobre  $\mathcal{D}$ , tal que

$$\mathbf{T} = \nabla \mathbf{u} \quad (5)$$

(iii) Sea  $\mathbf{T}$  un campo tensorial igual que en (ii), y que, adicionalmente, cumple con

$$\text{tr} \mathbf{T} = 0 \quad (6)$$

Entonces existe un campo tensorial antisimétrico  $\mathbf{W}$  de la clase  $C^{n+1}$  sobre  $\mathcal{D}$ , tal que

$$\mathbf{T} = (\nabla \times \mathbf{W})^t \quad (7)$$

Demostración. La parte (i) es bien conocida. De hecho, la función  $\varphi$  definida por

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \quad (8)$$

tiene las propiedades deseadas. Aquí  $\mathbf{x}_o$  es un punto fijo de  $\mathcal{D}$ , y la integral es tomada a lo largo de una curva que conecta  $\mathbf{x}_o$  con  $\mathbf{x}$

Para establecer (ii) tómese

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i \quad (9)$$

Entonces,

$$\nabla \times \mathbf{t}_i = \nabla \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i) = (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad (10)$$

y por (i), entonces existe un campo escalar  $u_i$ , tal que

$$\mathbf{t}_i = \nabla u_i \quad (11)$$

Sea  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ . Entonces, ya que  $u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$ , sigue que

$$\nabla u_i = (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_i \quad (12)$$

y (10), (11) y (12) implican (5).

Para probar (iii) tómese  $\mathbf{u}$  como un campo vectorial como el establecido en (ii), y sea  $\mathbf{W}$  el doble del transpuesto del tensor antisimétrico, del cual  $\mathbf{u}$  es su vector axial. De (6), se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (13)$$

puesto que  $\text{tr} \mathbf{T} = 0$ , y de la última identidad de 2.2.(16) se concluye que

$$\nabla \times \mathbf{W} = (\nabla \mathbf{u})^t \quad (14)$$



lo que concluye la demostración.  $\triangle$

### 2.7.2. Solenoidal

Un campo se denomina *solenoidal*, si su divergencia es nula. Esto es,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (15)$$

para un campo vectorial  $\mathbf{v}$  o un campo tensorial  $\mathbf{T}$ .

Aplicando el Teorema de la divergencia se obtiene que la fuerza de un tubo en un campo solenoidal es la misma para todas las secciones de dicho tubo. El rotacional de un campo solenoidal es también un campo solenoidal. Est último es equivalente al siguiente teorema.

**Teorema 2.** (Campo Solenoidal). Asíumese que  $\partial\mathcal{D}$  es de la clase  $C^3$ . Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de todos los campos de clase  $C^2$  sobre  $\bar{\mathcal{D}}$  y de clase  $C^3$  sobre  $\mathcal{D}$  ( $\mathcal{F} = C^2(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^3(\mathcal{D})$ ).

(i) Sea  $\mathbf{u} \in \mathcal{F}$  un campo vectorial, y supóngase que

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = 0 \quad (15)$$

para toda superficie regular cerrada  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ . Entonces, existe un campo vectorial  $\mathbf{w} \in \mathcal{F}$ , tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{w} \quad (16)$$

(ii) Sea  $\mathbf{T} \in \mathcal{F}$  un campo tensorial, y supóngase que

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \mathbf{0} \quad (17)$$

para toda superficie regular cerrada  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ . Entonces, existe un campo tensorial  $\mathbf{W} \in \mathcal{F}$ , tal que

$$\mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{W} \quad (18)$$

**Demostración.** Se omitirá la demostración de la parte (i). Sin embargo, se menciona que la formulación usual de este teorema, que afirma que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  implica  $\nabla \times \mathbf{w}$ , es correcta sólo cuando  $\partial\mathcal{D}$  consiste en una sola curva cerrada. En esta instancia  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  es equivalente a la afirmación que (15) es cierta para toda superficie regular cerrada  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ .

Para establecer (ii) sea

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \quad (19)$$

Entonces,

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = \mathbf{e}_i \cdot \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} = 0 \quad (20)$$

y se concluye de (i) que debe existir un campo vectorial  $\mathbf{w}_i \in \mathcal{F}$ , tal que

$$\mathbf{t}_i = \nabla \times \mathbf{w}_i \quad (21)$$

Sea

$$\mathbf{W} = \mathbf{e}_i \mathbf{w}_i \quad (22)$$

y nótese que para cualquier vector constante  $\mathbf{a}$ ,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{W} = a_i \mathbf{w}_i \quad (23)$$

Así que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = a_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} = a_i t_i = \nabla(a_i \mathbf{w}_i) = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{W}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{W} \quad (24)$$

y de aquí que

$$\mathbf{T} = \nabla \mathbf{W} \quad (24)$$

lo cual completa la demostración.  $\triangle$

### 2.7.3. Complejo-Laminar

Un campo se denomina *complejo-laminar*, si su rotacional es perpendicular al mismo campo. Esto es,

$$\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad \mathbf{T}^t \cdot (\nabla \times \mathbf{T}) = 0 \quad (25)$$

para un campo vectorial  $\mathbf{v}$  o un campo tensorial  $\mathbf{T}$ .

El nombre *laminar* es también aplicado a un campo irrotacional, el cual es un caso particular del campo complejo-laminar. La condición de que un campo sea ortogonal a su rotacional, es menos restrictiva que la condición de que el rotacional sea nulo.

### 2.7.4. Beltrami

Un campo se denomina *Beltrami*, si su rotacional es paralelo al mismo campo. Esto es,

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{T}^t \times (\nabla \times \mathbf{T}) = \mathbf{0} \quad (26)$$

para un campo vectorial  $\mathbf{v}$  o un campo tensorial  $\mathbf{T}$ .

Un campo que sea complejo-laminar y Beltrami, simultáneamente, resulta ser un campo irrotacional (excepto posiblemente donde  $\mathbf{v}$  ó  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ ), puesto que, para que el rotacional del campo sea tanto perpendicular y paralelo al mismo campo, dicho rotacional debe anularse, si el campo no es nulo.

Para los campo Beltrami de define una función de *anormalidad* del campo  $\Omega$  en la forma

$$\nabla \times \mathbf{v} = \Omega \mathbf{v} \quad \nabla \times \mathbf{T} = \Omega \mathbf{T} \quad (27)$$

que al igual que (26) indica que el rotacional del campo es paralelo al mismo. Esta función de anormalidad se puede calcular para un campo vectorial Beltrami mediante la expresión

$$\Omega = \frac{(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})]}{(\nabla \times \mathbf{v})^2} \quad (28)$$

### 2.7.5. Laplaciano

Un campo que sea irrotacional y solenoidal simultáneamente, se denomina *laplaciano*. Un campo con estas características se deriva del gradiente un función potencial. Esto es,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla^2 \varphi = 0 \quad \mathbf{v} = \nabla \varphi \quad (29.a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla^2 \varphi = 0 \quad \mathbf{T} = \nabla \varphi \quad (29.b)$$

donde  $\varphi$  y  $\varphi$  son las funciones escalar y vectorial potencial de cada caso, respectivamente. La condición de que el campo sea irrotacional se obtiene de la identidad que dice que el rotacional de un gradiente siempre es nulo. La ecuación que se deriva en la función potencial en este caso se denomina la *ecuación de Laplace*.

### 2.7.6. Trkalian

Un campo se denomina *Trkalian*, si su rotacional es no sólo paralelo al mismo campo, sino proporcional a éste, y donde la constante de proporcionalidad es uniforme. Esto es,

$$\nabla \times \mathbf{v} = k \mathbf{v} \quad \nabla \times \mathbf{T} = k \mathbf{T} \quad \nabla k = \mathbf{0} \quad (30)$$

para un campo vectorial  $\mathbf{v}$  o un campo tensorial  $\mathbf{T}$ .

Cuando el rotacional de un campo Beltrami es también un campo Beltrami, entonces el campo es Trkalian. Un campo Beltrami con una anormalidad uniforme es un campo Trkalian. Un campo Trkalian es un campo solenoidal-Beltrami. Esto se ve claramente cuando se despeja  $\mathbf{v}$  o  $\mathbf{T}$  del miembro de la derecha de las expresiones (30.a) y (30.b), respectivamente, y se le extrae la divergencia, la cual da nula. O sea, por ejemplo,

$$\mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v})/k \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (31)$$

Y el rotacional de un campo trkalian es paralelo a dicho campo, ya que, por ejemplo,

$$\nabla \times \mathbf{v} = k\mathbf{v} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = k \nabla \times \mathbf{v} = k^2 \mathbf{v} \quad (32)$$

Sin embargo, existen campos solenoidal-Beltrami que no son Trkalian. Los sucesivos rotacionales de un campo Trkalian son también Trkalian con la misma constante  $k$  de proporcionalidad.

### 2.7.7. Representación de un Campo

**Representación de Helmholtz.** Los resultados que han sido obtenidos para la representación de un campo vectorial irrotacional y solenoidal pueden ser combinados para dar una representación de un campo vectorial arbitrario continuamente diferenciable. Así, para cualquier campo vectorial  $\mathbf{u}$  arbitrario que sea finito y continuamente diferenciable, el cual se desvanece en el infinito, se pueden encontrar tres campos escalares  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $\phi$ , tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times (\psi \nabla \phi) \quad (33)$$

Equivalentemente, se pueden encontrar un campo escalar  $\varphi$  y un campo vectorial solenoidal  $\mathbf{w}$ , tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \mathbf{w} \quad \mathbf{w} = \psi \nabla \phi \quad (34)$$

De esta forma un campo vectorial se puede descomponer en una parte irrotacional y otra parte solenoidal.

**Teorema 3.** (Potencial Newtoniano). Sea  $\varphi$  un campo escalar que es continuo en  $\bar{\mathcal{D}}$  y de clase  $C^n$  ( $n \geq 1$ ) en  $\mathcal{D}$ , y sea

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\varphi(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dV_{\mathbf{y}} \quad (35)$$

Entonces,  $\psi$  es un campo escalar de la clase  $C^{n+1}$  sobre  $\mathcal{D}$ , y cumple con la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \psi = \varphi \quad (36)$$

Adicionalmente, un resultado similar se conserva para campos vectoriales y tensoriales.

**Teorema 4.** (Teorema de Helmholtz). Sea  $\mathbf{u}$  un campo vectorial que sea continuo en  $\bar{\mathcal{D}}$  y de clase  $C^n$  ( $n \geq 1$ ) en  $\mathcal{D}$ . Entonces, existe un campo escalar  $\varphi$  y un campo vectorial  $\mathbf{w}$ , ambos de la clase  $C^n$  sobre  $\mathcal{D}$ , tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \mathbf{w} \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (37)$$

Demostración. Por el Teorema 3 existe un campo vectorial  $\mathbf{v}$  de la clase  $C^{n+1}$  sobre  $\mathcal{D}$ , tal que

$$\mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{v} \quad (38)$$

De la identidad 2.2.(15.m), resulta que

$$\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (39)$$

Así, si se tiene que

$$\varphi = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \mathbf{w} = -\nabla \times \mathbf{v} \quad (40)$$

entonces se sigue la conclusión deseada.  $\triangle$

**Otras Representaciones.** Se puede representar también un campo vectorial  $\mathbf{u}$  arbitrario como la superposición de campo vectorial irrotacional y otro campo vectorial complejo-laminar, en la forma

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \psi\nabla\phi \quad (41)$$

Ciertamente  $\nabla \times \mathbf{u}$  es solenoidal y la representación de Helmholtz permite la representación  $\nabla \times (\psi\nabla\phi)$ . Sin embargo,  $\nabla \times (\mathbf{u} - \psi\nabla\phi) = \mathbf{0}$ , así que  $\mathbf{u} - \psi\nabla\phi$  es un campo vectorial irrotacional y por consiguiente puede ser representado como el gradiente de un campo escalar  $\varphi$ . Los campos escalares  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $\phi$  en la representación (41) se denominan los potenciales de Monge, y cumplen con

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla\varphi \cdot (\nabla\psi \times \nabla\phi) = \frac{\partial(\varphi, \psi, \phi)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \quad (42)$$

Para un campo vectorial Beltrami expresado con la representación (41), la anormalidad en función de los potenciales de Monge viene dada por

$$\Omega = \frac{\nabla\varphi \cdot (\nabla\psi \times \nabla\phi)}{(\nabla\varphi)^2 - (\psi\nabla\phi)^2} \quad (43)$$

y se cumple que

$$\nabla\psi \times \nabla\phi = \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (44)$$

lo que indica que la representación (41) de un campo vectorial Beltrami es en realidad un campo vectorial irrotacional, lo que está de acuerdo a lo dicho antes en la Sección 2.7.4.

Otra forma de descomposición, con cierta similaridad con la representación de Helmholtz, es la siguiente

$$\mathbf{u} = (\mathbf{x} \times \nabla)\varphi + (\mathbf{x} \times \nabla) \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \quad (45)$$

donde el campo escalar  $\varphi$  y el campo vectorial  $\mathbf{w}$  satisfacen

$$(\mathbf{x} \times \nabla) \times (\mathbf{x} \times \nabla)\varphi = -(\mathbf{x} \times \nabla)\varphi \quad (\mathbf{x} \times \nabla) \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (46)$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Apostol, T. M. **Calculus:** Cálculo con Funciones de Varias Variables y Algebra Lineal, con Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales y a las Probabilidades, 2<sup>da</sup> Edición. Editorial Reverté. España, Barcelona, 1972.
- [2] Aris, R. **Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics.** Prentice-Hall, 1962.
- [3] Brand, L. **Análisis Vectorial.** Compañía Editorial Continental, S. A., 1959. 9<sup>na</sup> Impresión.
- [4] Bowen, R. M.; Wang, C.-C. **Introduction to Vectors and Tensors.** Part A: "Linear and Multilinear Algebra". Part B: "Vector and Tensor Analysis". Plenum Press (New York), 1976, Second Printing, 1980.
- [5] Bowen, R. M. **Introduction to Continuum Mechanics for Engineers** Plenum Press (New York), 1989. Revised Edition, 2007.
- [6] Bowen, R. M.; Wang, C.-C. **Introduction to Vectors and Tensors,** Second Edition - Two Volumes Bound as One. Dover Publications, 2009.
- [7] Chorlton, F. **Vector and Tensor Methods.** Ellis Horwood Limited - John Wiley & Sons, 1976.
- [8] Do Carmo, M. P. **Differential Geometry of Curves and Surfaces.** Prentice-Hall, 1976.
- [9] Green, G. **Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism.** Nottingham, 1828.
- [10] Gurtin, M. E. **An Introduction to Continuum Mechanics.** Academic Press, Inc., 1981.

- [11] Jeffreys, H. **Cartesian Tensors**. Cambridge University Press, 1952.
- [12] Kay, D. C. **Cálculo Tensorial**, Teoría y Problemas. McGraw-Hill (Serie Schaum), 1990.
- [13] Kellogg, O. D. **Foundations of Potential Theory**. Springer-Verlag, 1929. Reprint, 1967.
- [14] Lass, H. **Vector and Tensor Analysis**. McGraw-Hill - Kōgakusha, 1950.
- [15] Marsden, J. E.; Tromba, A. J. **Cálculo Vectorial**, 3<sup>ra</sup> Edición. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- [16] Santaló, L. A. **Vectores y Tensores con sus Aplicaciones**, 10<sup>ma</sup> Edición. Editorial Universitaria de Buenos Aires (EUDEBA), 1976.
- [17] Urwin, K. M. **Cálculo Superior y Teoría del Vector-Campo**. Editorial Alhambra, 1969.
- [18] Von Seggern, D. H. **CRC Handbook of Mathematical Curves and Surfaces**. CRC Press (Boca Ratón), 1990.
- [19] Weatherburn, C. E. **Differential Geometry of Three Dimensions**. Cambridge University Press, 1927.



# APENDICE B

## ANALISIS TENSORIAL ABSOLUTO

### CONTENIDO

1. ALGEBRA.	444
1.1. Introducción.	444
1.1.1. Punto, Vector y Tensor.	445
1.1.2. Notación Simbólica, Indicial y Diádica.	445
1.1.3. Sistema de Coordenadas Curvilíneo.	445
1.1.4. Primera Forma Cuadrática Fundamental.	446
1.2. Escalares, Vectores y Tensores Fundamentales.	446
1.2.1. Tensor Métrico Fundamental.	446
1.2.2. Delta de Kronecker Generalizada.	446
1.2.3. Símbolo de Levi-Civita.	446
1.2.4. Bases Recíprocas.	447
1.2.5. Símbolos de Christoffel.	447
1.2.6. Parámetros y Momentos Directores.	448
1.2.7. Determinante del Tensor Métrico.	448
1.2.8. Tensores de Riemann-Chistoffel.	448
1.2.9. Tensor de Ricci.	449
1.2.10. Tensor de Einstein.	449
1.2.11. Fórmulas particulares.	449
2. CALCULO.	450
2.1. Derivación.	450
2.1.1. Derivación Covariante.	450
2.1.2. Derivación Intrínseca.	452
2.1.3. Operador Diferencial Nabla.	453
2.1.4. Gradiente.	454
2.1.5. Divergencia.	454
2.1.6. Rotor.	454
2.1.7. Laplaciano.	454
2.2. Transformación de Coordenadas.	454
2.2.1. Jacobiano de la Transformación.	455

2.2.2. Tensores Relativos.	455
2.2.3. Transformación del Tensor Métrico.	455
2.2.4. Transformación del Símbolo Christoffel.	455
2.3. Teoremas Integrales.	455
2.3.1. Teorema de Green.	456
2.3.2. Teorema de la Divergencia.	456
2.3.3. Teorema de Stokes.	456
2.4. Deducción de la Regla de Leibniz.	456
2.4.1. Flujo del Espacio.	456
2.4.2. Coordenadas Curvilíneas.	458
2.4.3. Formula de Expansión de Euler.	458
2.4.4. Regla de Leibniz.	460
2.4.5. Cambio de la Métrica.	461
2.4.6. Vector Unitario Normal.	462
2.4.7. Función Conservativa.	462
2.4.8. Superficie Singular.	463
2.4.9. Superficie Interfaz.	465
3. GEOMETRIA.	466
3.1. Curvas en el Espacio.	466
3.1.1. Definición.	466
3.1.2. Base Ortonormal.	466
3.1.3. Ecuaciones de Frenet.	466
3.1.4. Curvaturas y Torsión.	467
BIBLIOGRAFIA.	468

## 1. ALGEBRA

El Capítulo de El Algebra de los Vectores y Tensores Absolutos trata básicamente de una descripción muy superficial de la estructura de estas entidades, sus operaciones y sus propiedades, recalando en todo momento que el sistema de coordenadas puede ser curvilíneo, y donde, como caso particular se tendrá al sistema de coordenadas cartesiano.

Para la notación siempre se emplearan negrillas para representar las entidades vectoriales y tensoriales como un todo, donde las minúsculas se han dejado para los vectores y las mayúscula para los tensores, salvo pocas excepciones, como, por ejemplo, el tensor métrico que por tradición siempre se ha denotado con minúscula. Cuando se estén trabajando con las componentes de los vectores y tensores, se emplearán siempre letras itálicas subindicadas o superindicadas, dependiendo si dichas componentes con covariantes o contravariantes, respectivamente. Algunos superíndices se utilizarán sólo para denotar atributos especiales. Se empleará el tilde para indicar a las nuevas componentes en un cambio de sistema de coordenadas.

Para los vectores y tensores absolutos normalmente se trabaja sobre espacios de dimensión menor o igual a tres, sin embargo, muchos de los resultados pueden directamente extrapolarse a espacios de dimensión finita superior. Cuando este no sea el caso se mencionará oportunamente de forma explícita.

### 1.1. INTRODUCCION

En el estudio del álgebra de vectores y tensores absolutos se emplea la misma notación indicial que la empleada en el Apéndice A, con la característica fundamental de que en esta oportunidad serán usados



índices y superíndices mudos en parejas para cada término, salvo esporádicas excepciones. La demás reglas mencionadas en el apéndice anterior seguirán aplicándose de igual forma. En muchos casos, las deducciones se harán en notación indicial, pero los resultados finales (si son aplicables a toda la entidad) podrán ser expresados en notación simbólica con negrillas.

### 1.1.1. Punto, Vector y Tensor

Un punto en el espacio se puede designar como un vector de posición que va desde el origen del sistema de coordenadas al punto en cuestión. Esto es aplicable fácilmente cuando se tiene un sistema de coordenadas cartesiano, donde las componentes del vector de posición son directamente las coordenadas del punto. Cuando se está empleando un sistema de coordenadas curvilíneo, esto ya no es posible, puesto que el vector de posición posee componentes distintas según que la base empleada sea la del punto de partida o la del punto de llegada del vector. En un sistema de coordenadas curvilíneo la base se define punto a punto, y en cada punto es diferente. Debido a esta circunstancia, cuando se trabaja con coordenadas curvilíneas, los puntos se designan con sus coordenadas directamente, y el vector de posición se expresa en notación simbólica para no depender de ningún sistema de coordenadas en particular.

Debido a las circunstancias expuestas en el párrafo anterior, los vectores y tensores que se quieran expresar en función de las componentes, en una base de un sistema de coordenadas curvilíneo, deberán estar definidos para un punto del espacio, de modo que su descomposición como una combinación lineal de la base, sea única. En este sentido, un vector  $\mathbf{v}$  y un tensor  $\mathbf{T}$  se pueden expresar como

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i = v_i \mathbf{a}^i \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i \quad v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^i \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = T_{ij}^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = T^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = T_{i.}^j \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j = T_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \quad (2.a)$$

$$T_{.j}^i = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_j \quad T^{ij} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^j \quad T_{i.}^j = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^j \quad T_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_j \quad (2.b)$$

donde  $\{\mathbf{a}_i\}$  son las bases covariantes y  $\{\mathbf{a}^i\}$  son las bases contravariantes, distintas entre sí. Estas bases se definirán más adelante en la Sección 1.1.3. Las componentes con subíndices se denominan covariantes, las componentes con superíndices se denominan contravariantes, y las componentes con subíndices y superíndices mezclados se denominan mixtas. Todas estas definiciones se aclararán con detalle más adelante.

### 1.1.2. Notación Simbólica, Indicial y Diádica

En este apéndice se emplean indistintamente la notaciones simbólica, indicial y diádica, dependiendo del caso. Se prefiere la notación simbólica cuando los resultados son independientes del sistema de coordenadas escogido. La notación indicial es más apropiada cuando se realizan algunos desarrollos o cálculos genéricos donde se ha establecido de antemano un sistema de coordenadas curvilíneo específico. La notación diádica se usa en substitución del producto tensorial.

### 1.1.3. Sistema de Coordenadas Curvilíneo

Un *sistema de coordenadas curvilíneo* es aquel cuya base cambia de punto a punto de forma continua, de tal manera que los ejes coordenados son líneas curvas. Los vectores bases  $\mathbf{a}_i$  del sistema de coordenadas curvilíneo permiten definir una *base recíproca*, tal que

$$\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = \epsilon_{ijk} \sqrt{g} = \epsilon_{ijk} \quad \mathbf{a}^i \times \mathbf{a}^j \cdot \mathbf{a}^k = \epsilon^{ijk} / \sqrt{g} = \epsilon^{ijk} \quad (3.a)$$

$$\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} \mathbf{a}^k = \epsilon_{ijk} \mathbf{a}^k \quad \mathbf{a}^i \times \mathbf{a}^j = \frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} \mathbf{a}_k = \epsilon^{ijk} \mathbf{a}_k \quad (3.b)$$

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \mathbf{a}^j \times \mathbf{a}^k \quad \mathbf{a}^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k \quad (3.c)$$

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \mathbf{e}_k \quad \mathbf{a}^i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \mathbf{e}^k \quad (4.a)$$

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i \quad y^i = y_i \quad \mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i \quad (4.b)$$

#### 1.1.4. Primera Forma Cuadrática Fundamental

La *primera forma cuadrática fundamental* se establece hallando el cuadrado de una diferencia de longitud en la forma

$$\Phi = (dl)^2 = dy^k dy^k = g_{ij} dx^i dx^j = g^{ij} dx_i dx_j = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (5)$$

donde

$$d\mathbf{r} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{x} \quad \mathbf{J} = J_i^\alpha \mathbf{e}_\alpha \mathbf{a}^i \quad J_i^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \quad J = |\mathbf{J}| \quad (6)$$

### 1.2. ESCALARES, VECTORES Y TENSORES FUNDAMENTALES

#### 1.2.1. Tensor Métrico Fundamental

El *tensor métrico fundamental* se define como

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} = J_i^\alpha J_j^\alpha \quad \mathbf{g} = \mathbf{J}^t \cdot \mathbf{J} \quad g = |\mathbf{g}| = J^2 \quad (1.a)$$

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{I} \quad \mathbf{g}^{-1} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{J}^{-t} \quad (1.b)$$

El adjunto del elemento  $g_{ij}$  es

$$\check{g}^{ij} = g g^{ji} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \quad g_{ik} \check{g}^{ik} = g \quad (i \text{ fijo}) \quad (1.c)$$

$v_i / \sqrt{g_{ii}}$  Proyección ortogonal de  $\mathbf{v}$  sobre la tangente a la curva coordenada  $x^i$ .

$v^i \sqrt{g_{ii}}$  Longitud de la arista del paralelepípedo cuya diagonal es  $\mathbf{v}$ , siendo dicha arista tangente a la curva coordenada  $x^i$ .

#### 1.2.2. Delta de Kronecker Generalizada

La *delta de Kronecker generalizada* se define como

$$\delta_{ij k \dots v}^{\alpha \beta \gamma \dots \nu} = \begin{cases} +1 & \text{Los números de permutaciones de los superíndices y de los subíndices} \\ & \text{son de la misma paridad.} \\ -1 & \text{Los números de permutaciones de los superíndices y de los subíndices} \\ & \text{son de distinta paridad.} \\ 0 & \text{Los demás casos.} \end{cases} \quad (2)$$

Las delta de Kronecker son las componentes del tensor  $\delta$ .

#### 1.2.3. Símbolo de Levi-Civita

Los *símbolos de Levi-Civita* se definen en función de la delta de Kronecker generalizada como

$$\epsilon^{\alpha \beta \gamma \dots \nu} = \delta_{123 \dots n}^{\alpha \beta \gamma \dots \nu} \quad \epsilon_{ij k \dots v} = \delta_{ij k \dots v}^{123 \dots n} \quad (3)$$

Los símbolos de Levi-Civita son las componentes de un tensor de permutación  $\epsilon$  que es relativo con exponentes de peso  $\pm 1$ , en los superíndices y subíndices, respectivamente.

Las componentes de los *tensores de Levi-Civita*,  $\epsilon$ , los cuales son absolutos, se definen como

$$\varepsilon^{\alpha \beta \gamma \dots \nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\alpha \beta \gamma \dots \nu} \quad \varepsilon_{ij k \dots v} = \sqrt{g} \epsilon_{ij k \dots v} \quad (4)$$

Los tensores  $\delta$  y  $\epsilon$  son completamente antisimétricos en superíndices y subíndices, es decir, el valor del símbolo no cambia al efectuar un número par de permutaciones de índices, y cambia sólo de signo, al efectuar un número impar de permutaciones.

Las delta de Kronecker generalizadas y los símbolos de Levi-Civita cumplen con ciertas propiedades, algunas de las cuales se exporndrán a continuación

$$\delta_\beta^\alpha \delta_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\alpha = n \quad (5.a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} &= \delta_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{n!}{(n-3)!} \\ \epsilon^{i\alpha\beta} \epsilon_{j\alpha\beta} &= \delta_{j\alpha\beta}^{i\alpha\beta} = \frac{(n-1)!}{(n-3)!} \delta_j^i \\ \epsilon^{ij\alpha} \epsilon_{kl\alpha} &= \delta_{kl\alpha}^{ij\alpha} = \frac{(n-2)!}{(n-3)!} \delta_{kl}^{ij} = (n-2) (\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j) \end{aligned} \quad (5.b, c, d)$$

$$\delta_{j_1 j_2 j_3 \dots j_r i_{r+1} \dots i_k}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_r i_{r+1} \dots i_k} = \frac{(n-r)!}{(n-k)!} \delta_{j_1 j_2 j_3 \dots j_r}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_r} \quad \delta_{j_1 j_2 j_3 \dots j_k}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} T_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} = \begin{cases} 0 & \text{Si } \mathbf{T} \text{ es simétrico en} \\ & \text{dos o más índices.} \\ k! T_{j_1 j_2 j_3 \dots j_k} & \text{Si } \mathbf{T} \text{ es antisimétrico} \\ & \text{completo.} \end{cases} \quad (5.e)$$

#### 1.2.4. Bases Recíprocas

Se denominan bases recíprocas a las bases  $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_i\}$  y  $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{a}^i\}$ . Se dice que la Base  $\mathcal{B}^*$  es la base dual de la base  $\mathcal{B}$  (Ver sección C.4.2.3) y se satisface que

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j \quad (6)$$

#### 1.2.5. Símbolos de Christoffel

Los *símbolos de Christoffel* se definen como expresiones que permiten obtener el resultado de derivar a los vectores base del sistema de coordenadas curvilíneo de manera simplificada como

$$\Gamma_{ijk} = \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^k} \quad \Gamma_{\cdot jk}^i = \mathbf{a}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^k} = -\frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{a}_k \quad \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial x^j} \quad (7.a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{\cdot ij}^k \mathbf{a}_k = \Gamma_{kij} \mathbf{a}^k \quad \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial x^j} = -\Gamma_{\cdot jk}^i \mathbf{a}^k \quad (7.b)$$

El *símbolo de Christoffel de primera especie* se define como

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^j \partial x^k} = [jk, i] = \begin{bmatrix} jk \\ i \end{bmatrix} \quad (8.a)$$

El *símbolo de Christoffel de segunda especie* se define como

$$\Gamma_{\cdot jk}^i = g^{ia} \Gamma_{ajk} = \frac{\partial y^i}{\partial x^a} \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^j \partial x^k} = \{jk, i\} = \begin{Bmatrix} jk \\ i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \quad (8.b)$$

$$\Gamma_{ijk} = g_{ia} \Gamma_{\cdot jk}^a \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ijk} - \Gamma_{kij} \quad (8.c)$$

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj} \quad \Gamma_{\cdot jk}^i = \Gamma_{\cdot kj}^i \quad \Gamma_{\cdot \alpha i}^\alpha = \Gamma_{\cdot i \alpha}^\alpha = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sqrt{g}) \quad (8.d)$$

### 1.2.6. Parámetros y Momentos Directores

Los *parámetros y momentos directores* se definen como

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{dl} = g^{ij} \lambda_j \quad \lambda_i = \frac{dx_i}{dl} = g_{ij} \lambda^j \quad (9)$$

$$\lambda \cdot \lambda = \lambda^i \lambda_i = g_{ij} \lambda^i \lambda^j = \lambda_i \lambda^i = g^{ij} \lambda_i \lambda_j = 1 \quad (10)$$

$$\cos \theta = g_{ij} \lambda^i \mu^j \quad \sin \theta = \varepsilon_{ij} \lambda^i \mu^j \quad (n = 2) \quad (11)$$

$$\frac{\delta \lambda^i}{\delta t} = \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2 l / dt^2}{dl/dt} \quad (12)$$

La *ecuación de las geodésicas* se establecen al hacer.

$$\frac{dl}{dt} = 1 \quad \implies \quad \frac{d^2 l}{dt^2} = 0 \quad (13)$$

### 1.2.7. Determinante del Tensor Métrico

El determinante  $g$  del tensor métrico  $\mathbf{g}$  covariante se calcula como el determinante de la matriz  $[g_{ij}]$ . O sea,

$$g = |\mathbf{g}| = \epsilon^{ijk} g_{1i} g_{2j} g_{3k} \quad (14)$$

El determinante del tensor métrico contravariante con elementos  $g^{ij}$  se calcula como el inverso de  $g$ . O sea,  $|\mathbf{g}^{-1}| = 1/g$ .

### 1.2.8. Tensores de Riemann-Christoffel

Los *tensores de Riemann-Christoffel* o *tensores de curvatura* se definen como

$$\begin{aligned} R_{\cdot jkl}^i &= \frac{\partial \Gamma_{\cdot jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\cdot jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{\cdot jl}^a \Gamma_{\cdot ak}^i - \Gamma_{\cdot jk}^a \Gamma_{\cdot al}^i \\ &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^k} & \frac{\partial}{\partial x^l} \\ \Gamma_{\cdot jk}^i & \Gamma_{\cdot jl}^i \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \Gamma_{\cdot ak}^i & \Gamma_{\cdot al}^i \\ \Gamma_{\cdot jk}^a & \Gamma_{\cdot jl}^a \end{array} \right| = \{ji, lk\} \end{aligned} \quad (15.a)$$

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial x^l} - \Gamma_{jl}^a \Gamma_{aik} + \Gamma_{jk}^a \Gamma_{ail} \\ &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^k} & \frac{\partial}{\partial x^l} \\ \Gamma_{ijk} & \Gamma_{ijl} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} \Gamma_{jl}^a & \Gamma_{jk}^a \\ \Gamma_{ail} & \Gamma_{aik} \end{array} \right| = (ji, lk) \end{aligned} \quad (15.b)$$

$$R_{ijkl} = g_{ia} R_{\cdot jkl}^a \quad R_{\cdot jkl}^i = g^{ia} R_{ajkl} \quad (15.c)$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klji} = R_{lkji} \quad (16.a)$$

$$R_{\cdot jkl}^i = -R_{\cdot jlk}^i \quad R_{\cdot jkk}^i = 0 \quad R_{\cdot kji}^k = 0 \quad (k \text{ fijo}) \quad (16.b)$$

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0 \quad R_{\cdot jkl}^i + R_{\cdot klj}^i + R_{\cdot ljk}^i = 0 \quad (16.c)$$

Como parte de las propiedades de los tensores de Riemann-Christoffel se establecen las *identidades de Bianchi*

$$R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = 0 \quad R_{\cdot jkl,m}^i + R_{\cdot jlm,k}^i + R_{\cdot jmk,l}^i = 0 \quad (16.d)$$

y las *identidades de Ricci*

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{\cdot jl}^i \mathbf{a}_i) - \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{\cdot jk}^i \mathbf{a}_i) = R_{\cdot jkl}^i \mathbf{a}_i \quad (17)$$

$$u^i_{,jk} - u^i_{,kj} = -R^i_{.ajk} u^a \quad u_{i,jk} - u_{i,kj} = R^a_{.ijk} u_a \quad (18.a)$$

$$T^{i.}_{j,kl} - T^{i.}_{j,lk} = -R^i_{.akl} T^{a.}_{.j} + R^a_{.jkl} T^{i.}_{.a} \quad T^{ij}_{..,kl} - T^{ij}_{..,lk} = -R^i_{.akl} T^{aj} - R^j_{.akl} T^{ia} \quad (18.b)$$

$$T^{.j}_{i.,kl} - T^{.j}_{i.,lk} = R^a_{.ikl} T^{.j}_{a.} - R^j_{.akl} T^{.a}_{i.} \quad T_{ij,kl} - T_{ij,lk} = R^a_{.jkl} T_{ia} + R^a_{.ikl} T_{aj} \quad (18.c)$$

Al menos que los tensores de Riemann-Christoffel sean nulos no se puede cambiar el orden de la doble derivación covariante. Debido a las diferentes simetrías que presentan los tensores de Riemann-Christoff, de los 256 ( $n = 4$ ), solo son independientes 20.

### 1.2.9. Tensor de Ricci

El *tensor de Ricci* se define como

$$\begin{aligned} R_{ij} = R^a_{.ija} &= \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^a_{.ij}}{\partial x^a} + \Gamma^a_{.il} \Gamma^l_{.ja} - \Gamma^a_{.ij} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^a} \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \frac{\partial}{\partial x^a} \right| \left| \begin{matrix} \Gamma^a_{.ij} & \Gamma^a_{.ia} \end{matrix} \right| \\ &\quad - \left| \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \frac{\partial}{\partial x^a} \right| \left| \begin{matrix} \Gamma^a_{.ij} & \Gamma^a_{.ia} \end{matrix} \right| \end{aligned} \quad (19)$$

y cumple con las siguientes propiedades

$$R_{ij} = g^{kl} R_{kijl} \quad R_{ij} = R_{ji} \quad R^i_j = g^{ik} R_{kj} \quad R_{ij} = g_{ik} R^k_j \quad R^{ij} = g^{ik} g^{jl} R_{kl} \quad (20)$$

La contracción del tensor de Ricci

$$R = R^i_i = g^{ij} R_{ij} = g_{ij} R^{ij} \quad (21)$$

da como resultado  $R$ , la *curvatura escalar* o la *curvatura total*.

### 1.2.10. Tensor de Einstein

El *tensor gravitacional* o *tensor de Einstein* se define en función del tensor de Ricci como

$$G^i_j = R^i_j - \frac{1}{2} R \delta^i_j \quad G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \quad G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij} \quad (22)$$

donde  $R$ , definida en (21), es a veces también denominada la *curvatura de Einstein*. Al igual que el tensor de Ricci también es simétrico. El tensor de Einstein satisface que su divergencia siempre es nula o sea

$$G_{ij,j} = 0 \quad G^{ij}_{..,j} = 0 \quad G^i_{j,j} = 0 \quad G^j_{i,j} = 0 \quad (23)$$

expresiones que no son más que las identidades de Bianci para los tensores de Ricci.

### 1.2.11. Fórmulas Particulares

Para un espacio bidimensional curvo ( $n = 2$ ) inmerso en un espacio tridimensional se tiene que la *curvatura de Gauss* se define como

$$K = \frac{1}{4} \varepsilon^{ij} \varepsilon^{kl} R_{ijkl} = \frac{R_{1212}}{g} \quad (24)$$

En función de esta curvatura se pueden definir los tensores de Riemann-Christoffel y de Ricci (para  $n = 2$ ) como sigue

$$R_{ijkl} = K \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad R_{ij} = -K g_{ij} \quad (25)$$

El tensor de Ricci se define únicamente para este espacio tridimensional en la forma

$$R^{ij} = \frac{1}{4} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} R_{klmn} \quad (26)$$

En función de este tensor se obtienen los tensores de Riemann-Christoffel y de Einstein como

$$R_{ijkl} = \varepsilon_{ijm} \varepsilon_{kln} R^{mn} \quad G_{ij} = R_{ij} + K g_{ij} \quad (27)$$

donde

$$K = -R/2 \quad (28)$$

es la *curvatura de Gauss* (producto de las curvaturas principales).

Para que los tensores de Riemann-Christoffel se anulen es condición suficiente que se anulen los tensores de Ricci. Estas relaciones se conocen como las *relaciones de Lamé*, y se expresan en la forma

$$R_{ij} = 0 \quad \implies \quad R_{ijkl} = 0 \quad (29)$$

con lo cual se puede intercambiar el orden de la doble derivación covariante.

Cuando el espacio  $\mathbb{V}^n$  es isótropo ( $n = \text{dimensión} \geq 2$ ) se satisfacen las siguientes expresiones [Rindler,2006]

$$R^{ijkl} = K (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \quad R_{ij} = -(n-1) K g_{ij} \quad R = -n(n-1) K \quad (n-1)(n-2) K_{,i} = 0 \quad (30)$$

y consecuentemente el *Teorema de Schur*: Si  $n > 2$  para un espacio  $\mathbb{V}^n$  isótropo, entonces  $K$  es constante para todos sus puntos. Un espacio con curvatura constante (y cualquier  $\mathbb{V}^2$ ) se denomina *Espacio de Einstein* y satisface la siguiente proporcionalidad

$$R_{ij} = \phi g_{ij} \quad \phi = R/n \quad (31)$$

para algún escalar  $\phi$  constante (para  $n = 2$  no es constante).

## 2. CALCULO

### 2.1. DERIVACION

La derivación de vectores y tensores con respecto a las coordenadas curvilíneas no igual que cuando se hace con respecto a coordenadas cartesianas. Esto se debe a que la base en coordenadas curvilínea no son independiente de la posición, y, por consiguiente, al derivar un vector o un tensor se deben considerar, no sólo las componentes, sino también la base. En esta sección se verá como afecta este hecho a los resultados, en lo que se refiere a las componentes de las cantidades vectoriales y tensoriales, luego de la derivación. También se definirán otros tipos de derivación, como lo son la derivación intrínseca y la derivación direccional.

#### 2.1.1. Derivación Covariante

Las *derivadas covariantes* de vectores y tensores en general se calculan teniendo en consideración las derivadas de su base.

$$\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^i} \quad \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{a}_k = \Gamma_{kij} \mathbf{a}^k \quad \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial x^j} = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{a}^k \quad (1)$$

La primera de estas expresiones se deduce de substituir la definición de la base covariante

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \mathbf{e}_k \quad (2)$$

y considerar que las derivadas mixtas son iguales, para lo cual se debe exigir que las funciones  $y^i(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)$  pertenezcan a la clase  $C^2$ .

Para deducir la segunda expresión se debe considerar la derivada parcial del tensor métrico

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \quad (3)$$

Esto es,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^k} \quad (4.a)$$

de manera similar

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial x^j} \quad (4.b)$$

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial x^i} \cdot \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^i} \quad (4.c)$$

Sumando (4.a) a (4.b) y restando (4.c) y considerando (1.a) se obtiene

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = 2\Gamma_{ijk} = 2\frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^k} \cdot \mathbf{a}_i \quad (5)$$

lo que demuestra la expresión (1.b) (multiplicada por la base contravariante).

La tercera expresión se obtiene de derivar la relación entre la base covariante y la base contravariante. Esto es,

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i \quad \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{a}_j + \mathbf{a}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^k} = 0 \quad (6)$$

De aquí, teniendo en cuenta (5), resulta que

$$\frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{a}_j = -\frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^k} \cdot \mathbf{a}^i = -\Gamma_{ijk} \quad (7)$$

Considerando el símbolo de Christoffel de segunda especie, finalmente se obtiene la expresión (1.c) (multiplicada por la base covariante). Recuérdese que las bases están relacionadas también por  $\mathbf{a}^i = g^{ij} \mathbf{a}_j$ , de manera similar que los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i = g^{ia} \Gamma_{ajk}$ .

La derivada de covariante para un vector  $\mathbf{v}$  y para un Tensor de segundo orden  $\mathbf{T}$ , se establecen substituyendo las expresiones (1) deducidas anteriormente. Esto se hace cuando se expresan el vector y el tensor en función de sus componentes y los vectores base, dentro de la derivación parcial. Al aplicar la regla de derivación de un producto el resultado final de esto es,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^j} = v_{i,j}^i \mathbf{a}_i = v_{i,j} \mathbf{a}^i \quad v_{i,j}^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i v^k \quad v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^k v_k \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^k} = T_{j,k}^{i\cdot} \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = T_{\cdot\cdot,k}^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = T_{i\cdot,k}^j \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j = T_{ij,k} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \quad (10.a)$$

$$T_{j,k}^{i\cdot} = \frac{\partial T_{\cdot j}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i T_{\cdot j}^l - \Gamma_{kj}^l T_{\cdot l}^i \quad T_{\cdot\cdot,k}^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i T^{lj} + \Gamma_{kl}^j T^{il} \quad (10.b)$$

$$T_{i\cdot,k}^j = \frac{\partial T_{i\cdot}^j}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^l T_{\cdot l}^j + \Gamma_{kl}^j T_{i\cdot}^l \quad T_{ij,k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^l T_{lj} - \Gamma_{kj}^l T_{il} \quad (10.c)$$

$$x_{i,j}^i = \delta_j^i \quad (11)$$

Un caso particular de derivación covariante es el *lema de Ricci*, que establece que

$$g_{ij,k} = g_{\cdot\cdot,k}^{ij} = 0 \quad (12)$$

### 2.1.2. Derivación Intrínseca

Suponiendo que  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  y  $\mathbf{T}(t, \mathbf{x})$  son las funciones involucradas,  $\mathbf{x}(t)$  es la función de posición dependiente del parámetro  $t$  y  $\{\mathbf{a}_i(\mathbf{x}), \mathbf{a}^i(\mathbf{x})\}$  son las bases del sistema de coordenadas empleado, fijas para todo  $t$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} = \left( \frac{\partial u^i}{\partial t} + u_{i,j}^i \frac{dx^j}{dt} \right) \mathbf{a}_i = \frac{\delta u^i}{\delta t} \mathbf{a}_i \\ &= \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} \frac{dx^j}{dt} \right) \mathbf{a}^i = \frac{\delta u_i}{\delta t} \mathbf{a}^i \end{aligned} \quad (13.a)$$

donde

$$\frac{\delta u^i}{\delta t} = \frac{du^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i u^j \frac{dx^k}{dt} \quad \frac{\delta u_i}{\delta t} = \frac{du_i}{dt} - \Gamma_{ik}^j u_j \frac{dx^k}{dt} \quad (13.b)$$

es la *derivada intrínseca* de las componentes contravariantes  $u^i$ .

Para el caso particular de las coordenadas se cumple

$$\frac{\delta x^i}{\delta t} = \frac{dx^i}{dt} \quad (14)$$

Con los tensores de segundo orden se puede obtener un resultado parecido al obtenido con los vectores, pero agregando un término adicional. Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} = \left( \frac{\partial T_{j,k}^i}{\partial t} + T_{j,k}^i \frac{dx^k}{dt} \right) \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = \frac{\delta T_{j,k}^i}{\delta t} \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j \\ &= \left( \frac{\partial T_{j,k}^{ij}}{\partial t} + T_{j,k}^{ij} \frac{dx^k}{dt} \right) \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = \frac{\delta T_{j,k}^{ij}}{\delta t} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \\ &= \left( \frac{\partial T_{i,k}^j}{\partial t} + T_{i,k}^j \frac{dx^k}{dt} \right) \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j = \frac{\delta T_{i,k}^j}{\delta t} \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j \\ &= \left( \frac{\partial T_{ij,k}}{\partial t} + T_{ij,k} \frac{dx^k}{dt} \right) \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j = \frac{\delta T_{ij,k}}{\delta t} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \end{aligned} \quad (15.a)$$

$$\frac{\delta T_{j,k}^i}{\delta t} = \frac{dT_{j,k}^i}{dt} + \Gamma_{kl}^i T_{j,k}^l \frac{dx^k}{dt} - \Gamma_{kj}^l T_{i,l}^j \frac{dx^k}{dt} \quad \frac{\delta T_{j,k}^{ij}}{\delta t} = \frac{dT_{j,k}^{ij}}{dt} + \Gamma_{kl}^i T^{lj} \frac{dx^k}{dt} + \Gamma_{kl}^j T^{il} \frac{dx^k}{dt} \quad (15.b)$$

$$\frac{\delta T_{i,k}^j}{\delta t} = \frac{dT_{i,k}^j}{dt} - \Gamma_{ki}^l T_{i,l}^j \frac{dx^k}{dt} + \Gamma_{kl}^j T_{i,l}^k \frac{dx^k}{dt} \quad \frac{\delta T_{ij,k}}{\delta t} = \frac{dT_{ij,k}}{dt} - \Gamma_{ki}^l T_{lj} \frac{dx^k}{dt} - \Gamma_{kj}^l T_{il} \frac{dx^k}{dt} \quad (15.c)$$

Se considerará ahora el caso más general donde todas las cantidades, incluyendo las bases del sistema de coordenadas, dependen del parámetro  $t$ . Suponiendo que  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  y  $\mathbf{T}(t, \mathbf{x})$  son las funciones involucradas,  $\mathbf{x}(t)$  es la función de posición dependiente del parámetro  $t$  y  $\{\mathbf{a}_i(t, \mathbf{x}), \mathbf{a}^i(t, \mathbf{x})\}$  son las bases del sistema de coordenadas empleado, dependientes del parámetro  $t$ , se tiene que

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} \quad (16)$$

donde

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial u^i}{\partial t} \mathbf{a}_i + u^i \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} = u_{i,j}^i \mathbf{a}_i = \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i u^k \right) \mathbf{a}_i \quad \mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \quad (17)$$



Derivando la base se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial y^j} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \\ &= \left[ \nabla \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \right]^t \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} = \left[ \nabla \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \right]^t \cdot \mathbf{a}_i = \left[ \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,j}^k \mathbf{a}_k \mathbf{a}^j \right] \cdot \mathbf{a}_i = \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,i}^k \mathbf{a}_k\end{aligned}\quad (18.a)$$

y en consecuencia

$$\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} u^i = \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,i}^k u^i \mathbf{a}_k = \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,j}^i u^j \mathbf{a}_i \quad (18.b)$$

Substituyendo esta expresión en el segundo término de (17.a), y luego al substituir las expresiones (17.a) y (17.b) en (16), resulta finalmente que

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left[ \frac{\partial u^i}{\partial t} + u^i_{\cdot,j} \frac{dx^j}{dt} + \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,j}^i u^j \right] \mathbf{a}_i = \left[ \frac{\delta u^i}{\delta t} + \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,j}^i u^j \right] \mathbf{a}_i \quad (19)$$

donde sigue siendo válida la definición (13.b) para la derivada intrínseca.

Para obtener un resultado similar para las componentes covariantes se debe considerar que

$$\mathbf{a}^j \cdot \mathbf{a}_i = \delta_i^j \quad \frac{\partial \mathbf{a}^j}{\partial t} \cdot \mathbf{a}_i + \mathbf{a}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} = 0 \quad (20.a)$$

con lo que se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{a}^j}{\partial t} \cdot \mathbf{a}_i = -\mathbf{a}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial t} = -\left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,i}^j \quad \frac{\partial \mathbf{a}^j}{\partial t} = -\left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,i}^j \mathbf{a}^i \quad (20.b)$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial t} u_i = -\left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,i}^j u_j \mathbf{a}^i \quad (20.c)$$

Procediendo de manera similar a como se hizo con las componentes contravariantes de  $\mathbf{u}$  en (16), se obtiene

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} \frac{dx^j}{dt} - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,i}^j u_j \right] \mathbf{a}^i = \left[ \frac{\delta u_i}{\delta t} - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,i}^j u_j \right] \mathbf{a}^i \quad (21)$$

Para los tensores de segundo orden los resultados en (20) se pueden extender a los otros índices de las componentes respectivas. De esta forma, se tiene que

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \left[ \frac{\partial T_{\cdot,j}^i}{\partial t} + T_{\cdot,j,k}^i \frac{dx^k}{dt} + \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,k}^i T_{\cdot,j}^k - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,j}^k T_{\cdot,k}^i \right] \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = \left[ \frac{\delta T_{\cdot,j}^i}{\delta t} + \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,k}^i T_{\cdot,j}^k - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,j}^k T_{\cdot,k}^i \right] \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j \quad (22.a)$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \left[ \frac{\partial T^{ij}}{\partial t} + T^{ij,k} \frac{dx^k}{dt} + \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,k}^i T^{kj} + \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,k}^j T^{ik} \right] \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = \left[ \frac{\delta T^{ij}}{\delta t} + \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,k}^i T^{kj} + \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,k}^j T^{ik} \right] \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \quad (22.b)$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \left[ \frac{\partial T_{i,\cdot}^j}{\partial t} + T_{i,\cdot,k}^j \frac{dx^k}{dt} - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,i}^k T_{k,\cdot}^j + \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,k}^j T_{i,\cdot}^k \right] \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j = \left[ \frac{\delta T_{i,\cdot}^j}{\delta t} - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,i}^k T_{k,\cdot}^j + \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,k}^j T_{i,\cdot}^k \right] \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j \quad (22.c)$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \left[ \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} + T_{ij,k} \frac{dx^k}{dt} - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,i}^k T_{kj} - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,j}^k T_{ik} \right] \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j = \left[ \frac{\delta T_{ij}}{\delta t} - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,i}^k T_{kj} - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\cdot,j}^k T_{ik} \right] \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \quad (22.d)$$

### 2.1.3. Operador Diferencial Nabla

El operador diferencial nabla se define de forma muy parecida a la que se tiene en coordenadas cartesianas

$$\nabla = \mathbf{a}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (23)$$

pero la derivación parcial debe interpretarse como una derivada covariante cuando se aplica a elementos de tensores expresados en notación indicial.

### 2.1.4. Gradiente

El gradiente de un campo escalar  $\varphi$ , vectorial  $\mathbf{v}$  o tensorial  $\mathbf{T}$  se define en sus componentes como

$$\varphi_{,i} \quad v_{i,j} \quad T_{ij,k} \quad (24)$$

Como podrá observarse, el gradiente agrega un índice adicional derivando covariantemente a los elementos indiciales originales.

### 2.1.5. Divergencia

La divergencia vectorial  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  o tensorial  $\nabla \cdot \mathbf{T}$  se define en sus componentes como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = v^i_{,i} \quad \{\nabla \cdot \mathbf{T}\}_j = T^i_{,j,i} \quad (25)$$

Como podrá observarse, la divergencia contrae el índice de la derivación covariante del gradiente (24) con el primer índice del tensor. Los campos escalares no tienen definida la divergencia.

### 2.1.6. Rotor

El rotor de un vector  $\nabla \times \mathbf{v}$  o de un tensor  $\nabla \times \mathbf{T}$  se define en sus componentes como

$$\{\nabla \times \mathbf{v}\}^k = \varepsilon^{ijk} v_{j,i} \quad [\nabla \times \mathbf{T}]^{k,l} = \varepsilon^{ijk} T_{jl,i} \quad (26)$$

Como podrá observarse el rotor afecta solamente al primer índice del tensor. Los campos escalares no tienen definido el rotor.

### 2.1.7. Laplaciano

El laplaciano de un campo escalar  $\varphi$  se define como

$$\nabla^2 \varphi = g^{ij} \varphi_{,ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left( g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) + \Gamma^j_{jk} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( g^{1/2} g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) \quad (27)$$

Cuando el campo es vectorial o tensorial, es igual, solamente que las derivadas parciales se convierten en derivadas covariantes de los elementos del vector o del tensor.

## 2.2. TRANSFORMACION DE COORDENADAS

El cambio de coordenadas de un par de sistemas curvilíneos con coordenadas  $x^i$  y  $\tilde{x}^i$ , a uno cartesiano con coordenadas  $y^i$ , se puede expresar en forma diferencial como

$$d\mathbf{r} = \mathbf{J}_x \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{J}_{\tilde{x}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}} \quad d\mathbf{r} = dy^i \mathbf{e}_i \quad \mathbf{J}_x = (\nabla \mathbf{r})^t \quad \mathbf{J}_{\tilde{x}} = (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^t \quad (1)$$

siendo  $d\mathbf{x}$  y  $d\tilde{\mathbf{x}}$  el diferencial del vector de posición  $d\mathbf{r}$  expresado en las bases  $\{\mathbf{a}_i\}$  y  $\{\tilde{\mathbf{a}}_i\}$ , respectivamente.

El cambio de coordenadas de un sistema curvilíneo con coordenadas  $\tilde{x}^i$  a otro sistema curvilíneo con coordenadas  $x^i$ , se puede expresar en forma diferencial como

$$d\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{J}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}} \quad \tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J}_x^{-1} \cdot \mathbf{J}_{\tilde{x}} \quad (2.a)$$

o de manera inversa

$$d\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{x} \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_{\tilde{x}}^{-1} \cdot \mathbf{J}_x \quad (2.b)$$

### 2.2.1. Jacobiano de la Transformación

los determinantes de los tensores jacobianos  $\mathbf{J}_x$  y  $\mathbf{J}_{\tilde{x}}$  se relacionan con los determinantes de los tensores jacobianos  $\mathbf{J}$  y  $\tilde{\mathbf{J}}$  mediante ( Nota:  $dV = dy^1 dy^2 \dots dy^n$ ,  $dV_x = dx^1 dx^2 \dots dx^n$ ,  $dV_{\tilde{x}} = d\tilde{x}^1 d\tilde{x}^2 \dots d\tilde{x}^n$  )

$$\tilde{J} = |\tilde{\mathbf{J}}| = \frac{1}{J} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} = \frac{J_{\tilde{x}}}{J_x} = \sqrt{\frac{\tilde{g}}{g}} = \frac{\mathcal{V}_x}{\mathcal{V}_{\tilde{x}}} \quad J_x = |\mathbf{J}_x| \quad J_{\tilde{x}} = |\mathbf{J}_{\tilde{x}}| \quad J_x dV_x = J_{\tilde{x}} dV_{\tilde{x}} = dV \quad (3)$$

### 2.2.2. Tensores Relativos

Un tensor se define como aquella entidad, que bajo un cambio del sistema de coordenadas, sus componentes se transforman mediante la regla

$$\tilde{T}_{ijk\dots u}^{lmn\dots s} = (\tilde{J})^w (J_{\alpha}^l J_{\beta}^m J_{\gamma}^n \dots J_{\delta}^s) (\tilde{J}_i^{\rho} \tilde{J}_j^{\sigma} \tilde{J}_k^{\tau} \dots \tilde{J}_u^{\mu}) T_{\rho\sigma\tau\dots\mu}^{\alpha\beta\gamma\dots\delta} \quad (4.a)$$

donde

$$J_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \quad \tilde{J}_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \quad (4.b)$$

y donde  $w$  indica el grado de relatividad del tensor. Si  $w \neq 0$  el tensor es relativo. Si  $w = 0$  el tensor es absoluto. Sin embargo, el tensor

$$T_{ijk\dots u}^{lmn\dots s} / (\sqrt{g})^w \quad (5)$$

siempre es absoluto.

La derivación covariante de un tensor relativo se realiza mediante

$$T_{ijk\dots u,p}^{lmn\dots s}(\text{relativo}) = T_{ijk\dots u,p}^{lmn\dots s}(\text{como si fuese absoluto}) - w T_{ijk\dots u}^{lmn\dots s} \Gamma_{\alpha p}^{\alpha} \quad (6)$$

### 2.2.3. Transformación del Tensor Métrico

El tensor métrico se transforma, para un cambio de coordenadas de  $x_i$  a  $\tilde{x}_i$ , mediante la siguiente relación

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde{x}^j} g_{\alpha\beta} \quad (7)$$

### 2.2.4. Transformación del Símbolo de Christoffel

El símbolo de Christoffel se transforma, para un cambio de coordenadas de  $x_i$  a  $\tilde{x}_i$ , mediante la siguiente relación

$$\tilde{\Gamma}_{\cdot jk}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \tilde{x}^k} \Gamma_{\cdot\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^k} \quad (8)$$

donde

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^k} = \tilde{\Gamma}_{\cdot jk}^{\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} - \Gamma_{\cdot\alpha\beta}^i \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde{x}^k} \quad \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma_{\cdot jk}^{\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^{\alpha}} - \tilde{\Gamma}_{\cdot\alpha\beta}^i \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^k} \quad (9)$$

## 2.3. TEOREMAS INTEGRALES

Los teoremas integrales ya fueron expuestos con suficiente extensión en la sección A.2.5. Sin embargo, en esta sección se repetirán resumidamente estos mismos teoremas, pero empleando la notación indicial. Con esta notación hay que tener cuidado de hacer la contracción de los índices solamente covariante-contravariantes, y hay que substituir la derivación parcial con respecto a  $x^i$  por la derivación covariante  $[\cdot]_{,i}$ .

### 2.3.1. Teorema de Green

El teorema de Green en notación indicial se expresa para un campo escalar como

$$\oint_{\mathcal{A}} \varphi_{,i} n^i d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} g^{ij} \varphi_{,ij} d\mathcal{V} \quad (1)$$

La identidad A.2.5.(29) se escribiría en notación indicial de la siguiente manera

$$\oint_{\mathcal{A}} \phi \psi_{,i} n^i d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} g^{ij} \phi_{,i} \psi_{,j} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \phi g^{ij} \psi_{,ij} d\mathcal{V} \quad (2)$$

### 2.3.2. Teorema de la Divergencia

El teorema de la divergencia en notación indicial se expresa para un campo vectorial o tensorial como

$$\oint_{\mathcal{A}} v^i n_i d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} v^i_{,i} d\mathcal{V} \quad \oint_{\mathcal{A}} T^i_{;j} n_i d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} T^i_{;j,i} d\mathcal{V} \quad (3)$$

### 2.3.3. Teorema de Stokes

El teorema de Stokes puede ser escrito en notación indicial como

$$\oint_{\mathcal{L}} v_k \lambda^k d\mathcal{L} = \int_{\mathcal{A}} \varepsilon^{ijk} v_{k,j} n_i d\mathcal{A} \quad (4)$$

## 2.4. DEDUCCION DE LA REGLA DE LEIBNIZ

El primer aspecto a ser considerado será la deducción general de la Regla de Leibniz con aplicaciones a superficies singulares e interfaces inmersas en  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.4.1. Flujo del Espacio

Sea  $\mathcal{V}$  un subconjunto regular cerrado del espacio  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\mathcal{A} = \partial\mathcal{V}$  la frontera de dicho subconjunto. El concepto de región regular del espacio en  $\mathbb{R}^n$  es una extensión de aquel dado para  $\mathbb{R}^3$  en [Kellogg,1967], y es una condición necesaria para la aplicación del Teorema de la Divergencia más adelante.

Sea  $\varphi_t : \mathcal{V}_o \longrightarrow \mathcal{V}$  un difeomorfismo uniparamétrico [Lang,1967;lang,1972] dependiente del parámetro  $t$ , que define un flujo de  $\mathcal{V}_o$  en  $\mathcal{V}$ , tal que

$$\mathcal{V} = \varphi_t(\mathcal{V}_o) \equiv \mathcal{V}(t) \quad \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \quad (1)$$

siendo  $\mathcal{V}_o$  la configuración de referencia para  $t = 0$ . También se tiene que  $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$  es el difeomorfismo inverso y  $\varphi_o$  es el difeomorfismo identidad del flujo antes definido [Arnold,1988;Guckenheimer,1983].

Sea  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^m$  un difeomorfismo perteneciente a la clase  $C^1$ , definido sobre el flujo de  $\mathcal{V}_o$ , tal que

$$\mathbf{f}(t, \mathcal{V}) = \mathbf{f}(t, \varphi_t(\mathcal{V}_o)) \equiv \mathbf{g}_t(\mathcal{V}_o) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{g}_t$  representa la evolución de  $\mathbf{f}$  para cada elemento de  $\mathcal{V}_o$ , en función del parámetro  $t$ . Al conjunto de todos los difeomorfismo que tengan estas características de  $\mathbf{f}$  lo denominaremos  $\mathcal{F}$ . Al conjunto de todos los difeomorfismos con las características de  $\mathbf{g}_t$  lo denominaremos  $\mathcal{G}$ . De este modo,  $\varphi_t$  pertenece al conjunto  $\mathcal{G}$ .

Sea  $\mathbf{X}$  un elemento de  $\mathcal{V}_o$  al cual le corresponde un único elemento  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{V}$ , tal que

$$\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X}) \equiv \chi(t, \mathbf{X}) \quad (3)$$

siendo  $\chi : \mathbb{R} \times \mathcal{V}_o \longrightarrow \mathcal{V}$  un difeomorfismo definido en función del flujo  $\varphi_t$ . Similarmente, existe un difeomorfismo inverso, que asigna, a cada elemento  $\mathbf{x}$ , un elemento  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}) \equiv \chi(t, \mathbf{x}) \quad (4)$$

siendo  $\chi$  un caso particular del conjunto  $\mathcal{F}$ .

Definimos a la velocidad del flujo como

$$\mathbf{v} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \chi(t, \mathbf{X}) \right|_{\mathbf{X}=\chi(t, \mathbf{x})} \equiv \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (5)$$

donde  $\mathbf{v}$  también pertenece al conjunto  $\mathcal{F}$ . La velocidad del flujo debe interpretarse como un campo vectorial en  $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$  donde a cada punto  $(t, \mathbf{x})$  se le hace corresponder la velocidad del punto que para  $t = 0$  estaba en la posición  $\mathbf{X} = \chi(t, \mathbf{x})$ .

Tomando en consideración la velocidad del flujo se puede calcular la derivada respecto a  $t$  siguiendo la configuración de referencia, o lo que es lo mismo, manteniendo  $\mathbf{X}$  constante para todo  $t$ . Esto se justifica bien, si consideramos que, para poder describir el movimiento de los puntos durante el flujo, el sistema de coordenadas  $OX_1X_2X_3 \cdots X_n$  (desde el cual se toma los vectores de posición  $\mathbf{X}$ ), debe ser fijo. De otra forma sería imposible describir el movimiento. De acuerdo a esto, la derivación mencionada se ejecuta de la forma

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_X = \left. \frac{d}{dt} f(t, \chi(t, \mathbf{X})) \right|_X = \left. \frac{d}{dt} f(t, \mathbf{x}) \right|_X \equiv \frac{df}{dt} \quad (6)$$

donde  $f$  es un representante cualquiera del conjunto  $\mathcal{F}$ . De ahora en adelante emplearemos el símbolo de derivación total simple para indicar este tipo de derivación. Con esta premisa se tiene entonces, aplicando la Regla de la cadena, que

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla_x f)^t \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla_x f)^t \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f \end{aligned} \quad (7)$$

Algunas veces se acostumbra a expresar este tipo de derivación de forma simbólica mediante el operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x \quad (8)$$

La expresión (3) se puede interpretar como un cambio de la métrica, y, por consiguiente, se puede decir que

$$d\mathcal{V} = J d\mathcal{V}_o \quad (9)$$

donde

$$J = J(t, \mathbf{X}) = |\nabla_x \varphi_t(\mathbf{X})| \equiv \frac{\partial(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)}{\partial(X^1, X^2, X^3, \dots, X^n)} \quad (10)$$

o lo que es lo mismo en un sistema de coordenadas particular invariante respecto a  $t$

$$J = \epsilon_{k_1 k_2 k_3 \dots k_n} \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \quad (11)$$

Es decir,  $J$  representa el determinante de la transformación  $\nabla_x \varphi_t(\mathbf{X})$  y es denominado “dilatación” por el significado geométrico sugerido por la relación (9). La condición de que  $\varphi_t$  sea un difeomorfismo, y por

consiguiente tenga definida su inversa para todo  $t$ , es equivalente a decir que  $J$  nunca se anula, o sea,  $J$  es definido positivo de forma estricta.

### 2.4.2. Coordenadas Curvilíneas

En el caso más general cuando el tensor métrico de cada sistema de coordenadas curvilíneas es distinto se tiene que

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j = G_{ij} dX^i dX^j \quad (12)$$

Entonces el diferencial de volumen se expresa como

$$dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \dots dx^n = \sqrt{G} dX^1 dX^2 dX^3 \dots dX^n \quad (13)$$

y la relación (9) realmente debería ser

$$dx^1 dx^2 dx^3 \dots dx^n = J dX^1 dX^2 dX^3 \dots dX^n \quad \sqrt{G} = J\sqrt{g} \quad (14)$$

donde  $J$  es el mismo jacobiano de la transformación (3), y que viene dado por (10) para el instante  $t$  (Nota:  $g$  y  $G$  también están definidos para el mismo instante  $t$ ), sólomente que las derivadas que se emplean en este caso son del tipo covariantes y no parciales. Nótese que para el caso particular donde  $g = 1$ , que es el planteado en la expresión (9)

$$dV = \sqrt{G} dV_o = J dV_o \quad (15)$$

donde

$$dV_o = dX^1 dX^2 dX^3 \dots dX^n \quad (16)$$

Más adelante cuando se deduzca la fórmula de expansión de Euler (ecuaciones (24) y (25)) se podrá verificar que es igualmente válida para el caso más general, con la única salvedad antes expuesta acerca de las derivadas.

### 2.4.3. Fórmula de Expansión de Euler

Calculemos ahora la derivada de  $J$  respecto a  $t$  de la expresión (11). Aplicando la Regla de la derivación de un producto se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = \epsilon_{k_1 k_2 k_3 \dots k_n} & \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \right. \\ & + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \right) \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \\ & + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \right) \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} + \dots \\ & \left. + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \right) \right] \quad (17) \end{aligned}$$

Como la derivación respecto de  $t$  por la definición (7) se hace manteniendo constante  $\mathbf{X}$ , los símbolos de derivación se pueden intercambiar de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \right) = \frac{\partial}{\partial X_k} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} \quad (18)$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = \epsilon_{k_1 k_2 k_3 \dots k_n} & \left[ \frac{\partial v_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \right. \\ & + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial v_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \\ & + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial v_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} + \dots \\ & \left. + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial v_n}{\partial X_{k_n}} \right] \quad (19) \end{aligned}$$

Si ahora tomamos en cuenta que  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  son funciones de  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , vamos a aplicar la Regla de la cadena de la forma

$$\frac{\partial v_j}{\partial X_{k_j}} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_{k_j}} \quad (20)$$

Al substituir estas relaciones en la expresión (19) queda que

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = \epsilon_{k_1 k_2 k_3 \dots k_n} \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_{k_1}} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \right. \\ + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_{k_2}} \right) \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \\ + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_{k_3}} \right) \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} + \dots \\ \left. + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \left( \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_{k_n}} \right) \right] \quad (21) \end{aligned}$$

Así  $dJ/dt$  sería la suma de  $n$  determinantes, el primero de los cuales es

$$\epsilon_{k_1 k_2 k_3 \dots k_n} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_{k_1}} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \quad (22)$$

Expandiendo este determinante por la primera fila ( $k_1 = 1, 2, 3, \dots, n$ ) se puede observar que sólo el primer término ( $i = 1$ ) de cada elemento en la primera fila sobrevive. Para  $i = 2, 3, \dots, n$ , el coeficiente de  $\partial v_1 / \partial x_i$  es un determinante con dos filas iguales, y, por lo tanto nulo.

Si se hacen estas mismas consideraciones a los otros  $(n - 1)$  determinantes restantes de (21), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = \epsilon_{k_1 k_2 k_3 \dots k_n} \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \right. \\ + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \\ + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} + \dots \\ \left. + \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \left( \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \right) \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \right] \quad (23) \end{aligned}$$

Extrayendo el factor común que es el determinante y teniendo en cuenta la definición de  $J$ , se obtiene finalmente

$$\frac{dJ}{dt} = \left( \epsilon_{k_1 k_2 k_3 \dots k_n} \frac{\partial x_1}{\partial X_{k_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{k_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{k_3}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial X_{k_n}} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \right) = J \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \quad (24)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d(\ln J)}{dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \quad (25)$$

Estas expresiones equivalentes se denominan La Fórmula de Expansión de Euler.

De esta forma se tiene un significado geométrico importante para la divergencia del campo de velocidades. Es la tasa relativa de cambio de la dilatación, siguiendo la trayectoria de un punto  $\mathbf{X}$  moviéndose con el flujo. Cuando se tiene que  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0$ ,  $J$  no varía a lo largo del flujo, lo que significa que  $\mathcal{V}$  siempre es igual

a  $\mathcal{V}_o$  para todo  $t$ . En este caso se dice que el flujo o movimiento es isocórico porque conserva el volumen de  $\mathcal{V}$  y que el campo de velocidades  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  es solenoidal.

#### 2.4.4. Regla de Leibniz

Una importante regla geométrica puede ser derivada de la relación (24), llamada Regla de Leibniz. Conocida más comúnmente por su frecuente uso en  $\mathbb{R}$ , esta regla permite poder derivar respecto a  $t$  la integral de una función en un dominio  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$  dependiente del parámetro  $t$ .

Sea  $f$  un difeomorfismo perteneciente al conjunto  $\mathcal{F}$  definido en un dominio  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$ . Sea la integral

$$F = F(t) = \int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} \quad (26)$$

dependiendo de  $t$ . Se está interesado en obtener la derivada (6) de la función  $F$ , o sea

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} f(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} \quad (27)$$

Ahora la integral es calculada sobre un dominio  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$  variable con respecto al parámetro  $t$ , así que no podemos efectuar la diferenciación a través del signo de la integral. Pero, sin embargo, si la integración fuera hecha con respecto al dominio  $\mathcal{V}_o$ , sería posible intercambiar la diferenciación y la integración, puesto que el operador  $d/dt$  es la derivada con respecto a  $t$ , manteniendo  $\mathbf{X}$  constante. Por consiguiente, el cambio de variables  $\mathbf{x} = \chi(t, \mathbf{X})$ , junto con el cambio de la métrica  $d\mathcal{V} = J d\mathcal{V}_o$ , nos permite hacer justo esto para un dominio  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$  definido como el flujo realizado sobre alguna configuración de referencia  $\mathcal{V}_o$  definida para  $t = 0$ . Así se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_o} f(t, \chi(t, \mathbf{X})) J d\mathcal{V}_o \\ &= \int_{\mathcal{V}_o} \left( \frac{df}{dt} J + f \frac{dJ}{dt} \right) d\mathcal{V}_o \\ &= \int_{\mathcal{V}_o} \left[ \frac{df}{dt} + f(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) \right] J d\mathcal{V}_o \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{df}{dt} + f(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (28)$$

en donde se ha empleado el resultado (24) como se habrá podido observar.

Substituyendo ahora la expresión (7) para la derivada del primer término del integrando y agrupando los términos que contienen el operador  $\nabla_{\mathbf{x}}$  queda que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + f(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} f) \right] d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (29)$$

Por último, vamos a aplicar el teorema de Gauss (Teorema de la divergencia) al segundo término del integrando, obteniéndose finalmente

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (30)$$

donde  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$  es la frontera de  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$  para todo  $t$ , y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $\mathcal{A}$  que apunta hacia el exterior de  $\mathcal{V}$ .



### 2.4.5. Cambio de la Métrica

Considérese el caso más general cuando los tensores métricos de los sistemas de coordenadas son distintos y son dependientes del parámetro  $t$ . En este caso se debe emplear la expresión correcta (13), junto con la expresión (14). De acuerdo a esto, la deducción (28) se debe modificar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \frac{dF}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_o} f(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})) J\sqrt{g} dX^1 dX^2 dX^3 \dots dX^n \\
 &= \int_{\mathcal{V}_o} \left( \frac{df}{dt} J\sqrt{g} + f \frac{dJ}{dt} \sqrt{g} + f J \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{dg}{dt} \right) dX^1 dX^2 dX^3 \dots dX^n \\
 &= \int_{\mathcal{V}_o} \left[ \frac{df}{dt} + f(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) + \left( \frac{f}{2g} \right) \frac{dg}{dt} \right] J\sqrt{g} dX^1 dX^2 dX^3 \dots dX^n \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{df}{dt} + f(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) + \left( \frac{f}{2g} \right) \frac{dg}{dt} \right] d\mathcal{V}
 \end{aligned} \tag{31}$$

Como podrá observarse ha aparecido un nuevo término originado por la dependencia de la métrica  $g$  con respecto al parámetro (la dependencia de  $g$  respecto a  $\mathbf{x}$  es bien clara de (13)).

De manera similar la deducción (29) queda modificada, por consiguiente, como

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + f(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) + \left( \frac{f}{2g} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g \right) \right] d\mathcal{V} \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{f}{2g} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} f) \right] d\mathcal{V}
 \end{aligned} \tag{32}$$

Finalmente, empleando la definición de la derivación total y aplicando el teorema de Gauss al último término de (32), la deducción (30) resulta en

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{f}{2g} \right) \frac{dg}{dt} \right] d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{f}{2g} \right) \frac{dg}{dt} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} f) \right] d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{df}{dt} + f \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V}
 \end{aligned} \tag{33}$$

donde

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}_n = \frac{1}{2g} \frac{dg}{dt} \tag{34}$$

y donde el vector  $\mathbf{v}_n$  representa la velocidad con la cual se desplaza  $\mathcal{V}$  a través de su complemento ortogonal en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dentro del cual se encuentra inmerso. En la expresión (34) y en la última parte de (33) se ha incrementado la dimensión de los vectores en una unidad, o sea, que  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_n$  y  $\nabla_{\mathbf{x}}$  pertenecen a  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La componente  $(n+1)$  de  $\mathbf{v}$  por supuesto debe ser nula, y  $\mathbf{v}_n$  solamente posee componente no nula en la posición  $(n+1)$ .

Las características mencionadas arriba para la expresión (34) se deben al hecho de que ella se deriva de la aplicación de la Fórmula de Expansión de Euler (24) a un volumen inmerso en un espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$  y considerando al jacobiano en dicho espacio como  $J_x = \sqrt{g}$ , siendo

$$J_x \equiv \frac{\partial(y^1, y^2, y^3, \dots, y^{n+1})}{\partial(x^1, x^2, x^3, \dots, x^{n+1})} = \sqrt{g} \tag{35}$$

con  $y_i$  representando las componentes del vector de posición respecto a un sistema de coordenadas cartesiano en el espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

La métrica  $g$  del volumen en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tiene que ser igual que la métrica del volumen en  $\mathbb{R}^n$ , debido a que se cumple que las componentes son  $g_{i,j} = 1$  para  $i = j = n + 1$ , y son nulas en los casos cuando  $i$  o  $j$  son diferentes a  $(n + 1)$ . Por esta razón  $\mathbf{v}_n$  apunta en la dirección del eje de coordenadas perpendicular al espacio  $\mathbb{R}^n$ , y representa la velocidad con la cual se deforma el volumen  $\mathcal{V}$  en una dirección ortogonal, respecto a un sistema de coordenadas cartesiano inmóvil. La velocidad tangencial del volumen  $\mathcal{V}$  en el espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$  está contemplada en el vector  $\mathbf{v}$  de la expresión (33).

Las últimas expresiones obtenida (30) y (33) para cada caso son conocidas como la Regla de Leibniz y nos permite tener una visión geométrica inmediata: La tasa de cambio de la integral de  $f$  dentro de un dominio  $\mathcal{V}$  en movimiento, es la integral de la tasa de cambio para una posición determinada fija (En el caso más general hay que agregar un término que refleja el cambio de la métrica  $g$ ), más el flujo neto de  $f$  sobre la frontera  $\mathcal{A} = \partial\mathcal{V}$ . El difeomorfismo  $f$  puede estar definido en un rango de dimensión  $\mathbb{R}^m$  con  $m \neq n$ , así que este resultado es de muy amplia aplicación.

#### 2.4.6. Vector Unitario Normal

El vector unitario normal  $\mathbf{n}$  se puede calcular como

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_x h}{\|\nabla_x h\|} \quad (36)$$

donde

$$h(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (37)$$

representa la ecuación de la superficie  $\mathcal{A}$  en  $\mathbb{R}^n$ . Ahora se pueden aplicar las expresiones (29) para el caso particular de  $h(t, \mathbf{x}) = 0$ , y así se obtiene que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x h = 0 \quad (38)$$

de donde, teniendo en consideración (36), finalmente queda que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial h / \partial t}{\|\nabla_x h\|} \quad (39)$$

Esta última relación puede emplearse para calcular la segunda integral del miembro de la derecha de (30).

#### 2.4.7. Función Conservativa

Tomemos ahora el caso particular de una función  $\rho(t, \mathbf{x})$  que se conserva. Es decir,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} = 0 \quad (40)$$

Si aplicamos ahora la Regla de Leibniz para el caso más general, en donde se ha empleado el Teorema de la Divergencia a la segunda integral sobre  $\mathcal{A}$ , obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\rho}{2g} \right) \frac{dg}{dt} \right] d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\rho}{2g} \right) \frac{dg}{dt} + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Como esta expresión es válida para cualquier volumen  $\mathcal{V}$ , entonces el integrando es nulo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\rho}{2g} \right) \frac{dg}{dt} + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (42)$$

Ahora apliquemos de nuevo la Regla de Leibniz, pero a la función  $\rho f$  empleando la regla de derivación de un producto y reagrupando luego los términos con su factor común

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \left( \frac{\rho f}{2g} \right) \frac{dg}{dt} \right] d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}} \rho f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \left\{ f \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\rho}{2g} \right) \frac{dg}{dt} + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] + \rho \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f \right) \right\} d\mathcal{V} \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{df}{dt} d\mathcal{V}
 \end{aligned} \tag{43}$$

Nótese que un término del integrando se ha anulado debido a que se cumple la expresión (42) y que todo este desarrollo es válido también para el caso donde  $g = 1$  simplemente anulando la  $dg/dt$ .

#### 2.4.8. Superficie Singular

Existe la posibilidad de presentarse el caso donde la función  $f$  se discontinua en una superficie  $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{V}$ . Sin embargo, la métrica es continua para todo el volumen  $\mathcal{V}$ . La superficie mencionada  $\mathcal{A}_i$ , denominada superficie singular por la razón antes mencionada, divide el volumen  $\mathcal{V}$  en dos partes a la que denominaremos  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$ . Cada uno de estos volúmenes está rodeado por una superficie compuesta, en una parte, por una porción de la superficie  $\mathcal{A}$ , a la que denominaremos  $\mathcal{A}^-$  o  $\mathcal{A}^+$ , según se esté refiriendo al volumen  $\mathcal{V}_1$  o  $\mathcal{V}_2$ , y, en otra parte, por la superficie singular  $\mathcal{A}_i$ . Esto es

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^- \cup \mathcal{A}^+ \quad \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^- \cup \mathcal{A}_i^- \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}^+ \cup \mathcal{A}_i^+ \tag{44.a}$$

$$\mathcal{A} = \partial \mathcal{V} \quad \mathcal{A}_1 = \partial \mathcal{V}_1 \quad \mathcal{A}_2 = \partial \mathcal{V}_2 \tag{44.b}$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \tag{44.c}$$

coincidiendo  $\mathcal{A}_i^-$  o  $\mathcal{A}_i^+$  con  $\mathcal{A}_i$ , pero no ambas ( $\mathcal{A}_i^- \cap \mathcal{A}_i^+ = \emptyset$ ). Sin embargo, para los efectos de calcular la integrales sobre las superficies, se pueden considerar las tres superficies  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{A}_i^-$  y  $\mathcal{A}_i^+$  como si fuesen coincidentes. La diferencia entre estas superficies es sólomente con respecto a cual es el valor de la función  $f$  sobre ellas. Esta descripción es similar al caso de dos intervalos adyacentes, donde uno de ellos es cerrado y el otro es abierto, siendo su intersección el conjunto vacío.

La velocidad del flujo de los volúmenes en la superficie singular también puede ser discontinua, siendo denotada como  $\mathbf{v}_1$  o  $\mathbf{v}_2$ , dependiendo si se está del lado de  $\mathcal{V}_1$  o de  $\mathcal{V}_2$ , respectivamente. La velocidad de la superficie singular, que puede ser distintas a las velocidades anteriores, se denotará como  $\mathbf{v}_i$ . Los volúmenes  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$  siempre están y fluyen separados por la superficie singular, con la salvedad hecha al principio del párrafo anterior. Sin embargo, considerando el volumen total  $\mathcal{V}$ , se puede decir que existe un flujo volumétrico a través de la superficie singular, siendo la velocidad de este flujo  $\mathbf{v}_1$  o  $\mathbf{v}_2$ , dependiendo del caso. La superficie singular posee una velocidad independiente de la velocidad del flujo del espacio.

Con respecto a la velocidad de flujo tangencial, se debe imponer la condición de que sean continuas en la superficie singular

$$\mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2} = \mathbf{v}_t(t, \mathbf{x}) \tag{45}$$

para que el problema sea cerrado. Es decir, para que al aplicar la expresión (33) a la superficie singular  $\mathcal{A}_i$ , la función  $\mathbf{v}$  en dicha expresión tenga una connotación única (De otra forma, el problema de la superficie interfaz de la próxima sección carecería de sentido como se verá más adelante). La expresión (45) se conoce como la condición de no deslizamiento y no siempre se cumple. Sin embargo, si esta condición no se cumple, todo lo dicho en esta sección es igualmente válido, siempre que no se tenga que aplicar la expresión (33) a la superficie singular  $\mathcal{A}_i$ . La velocidad de flujo tangencial  $\mathbf{v}_t$  no debe confundirse nunca con la velocidad tangencial de la superficie singular.

En estas circunstancias entonces se puede aplicar la expresión (30), o su equivalente cuando hay cambio de la métrica, (33), a los dos volúmenes separados por la superficie singular, debido a que la función  $f$  debe

ser continua para aplicar dichas expresiones. Recuérdese que  $f$  pertenece al conjunto  $\mathcal{F}$ , y, por lo tanto, es de clase  $C^1$ . De acuerdo a esto, y para el caso más general, se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_1} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{f}{2g} \right) \frac{dg}{dt} \right] d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}^-} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}_i^-} f_1 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \, d\mathcal{A} \quad (46.a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_2} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{f}{2g} \right) \frac{dg}{dt} \right] d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}^+} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_i^+} f_2 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \, d\mathcal{A} \quad (46.b)$$

con  $f_1$  expresando el valor de la función en la superficie singular del lado de  $\mathcal{V}_1$ , y con  $f_2$  expresando el valor de la función en la superficie singular del lado de  $\mathcal{V}_2$ , y donde el último término tiene signo negativo debido a que se ha considerado la normal  $\mathbf{n}_i$  sobre la superficie singular dirigiéndose del volumen  $\mathcal{V}_1$  al volumen  $\mathcal{V}_2$ . El valor de la función sobre la superficie singular puede ser  $f_1$  o  $f_2$ , según se haya hecho coincidir  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i^-$  o  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i^+$ , respectivamente.

Sumando ahora las expresiones (46.a) y (46.b), y agrupando las integrales con dominios complementarios y los términos semejantes, finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_2} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{f}{2g} \right) \frac{dg}{dt} \right] d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} - \int_{\mathcal{A}_i} \llbracket f \rrbracket \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \, d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (47)$$

donde se ha empleado el símbolo especial  $\llbracket \cdot \rrbracket$  para indicar la condición de salto

$$\llbracket f \rrbracket = f_2 - f_1 \quad (48)$$

de la función  $f(t, \mathbf{x})$  en la superficie singular.

Fíjese que en la expresión (47) no aparecen las velocidades de flujo  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , porque se ha aplicado la Regla de Leibniz por separado a los volúmenes  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$  y luego se ha realizado la suma de ambas expresiones. Sin embargo, en las expresiones (46.a) y (46.b) se pueden completar las integrales sobre  $\mathcal{A}^-$  y  $\mathcal{A}^+$ , respectivamente, con las integrales de las mismas funciones (con  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  en lugar de  $\mathbf{v}_i$ ) sobre  $\mathcal{A}_i^-$  y  $\mathcal{A}_i^+$ . Claro está, que esta cantidad agregada también habría que restarla para que no se alterara el resultado. De esta forma, y sumando de nuevo las expresiones (46.a) y (46.b), y agrupando las integrales con dominios complementarios y los términos semejantes, finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}_1} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{f}{2g} \right) \frac{dg}{dt} \right] d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_1} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}_i^-} f_1 (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}_1 \, d\mathcal{A} \\ &\quad + \int_{\mathcal{V}_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{f}{2g} \right) \frac{dg}{dt} \right] d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}_2} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}_i^+} f_2 (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}_2 \, d\mathcal{A} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{df}{dt} + f \nabla_x \cdot (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{A}_i} \llbracket f (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \rrbracket \cdot \mathbf{n}_i \, d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (49)$$

donde debe interpretarse la integral sobre  $\mathcal{V}$  como la integral sobre  $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$  y donde se ha empleado la definición  $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ . Nótese también que se ha empleado las expresiones obtenidas de la deducción (33) junto con la expresión (34).

En la deducción (49) se pudo aplicar el Teorema de la Divergencia a las integrales sobre  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$ , debido a que las funciones son continuas de la clase  $C^1$  en estos dominios. En la deducción (47), esto sin embargo no se pudo hacer, porque el dominio contiene a la superficie singular donde existen las discontinuidades ya mencionadas arriba.

### 2.4.9. Superficie Interfaz

Una superficie interfaz  $\mathcal{A}_i$  es aquella superficie singular que no coincide ni con  $\mathcal{A}_i^-$  ni con  $\mathcal{A}_i^+$  ya definidas en la sección anterior. Es decir,

$$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_i^- = \emptyset \quad \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_i^+ = \emptyset \quad (50)$$

En la superficie interfaz el valor de la función  $f$  no es  $f_1$  ni  $f_2$ , sino  $f_i$ , pero se expresa como una función específica por unidad de superficie.

Adicionalmente, para los efectos del análisis, las relaciones (44.a) y (44.b) se consideran que siguen aquí siendo válidas, pero el volumen en su totalidad está compuesto como

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{A}_i \quad (51)$$

La analogía que se puede hacer en esta oportunidad es la del caso de dos intervalos abiertos adyacentes a un sólo punto, siendo la intersección entre estos tres conjunto, el conjunto vacío.

Hecha la descripción geométrica de los volúmenes y superficies y sabiendo como son los valores de la función  $f$  en cada porción, se puede hacer un análisis muy parecido al realizado en la sección anterior. En este contexto se establece que al aplicar la Fórmula de Leibniz (33) a los dos volúmenes  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$ , se obtienen los mismos resultados que en (46.a) y (46.b), respectivamente. Sin embargo, es necesario mencionar que, debido a la relación (51), hay que agregar la integral sobre la superficie interfaz en la forma

$$\int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_1} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_2} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_i} f_i(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{A} \quad (52)$$

y derivando respecto a  $t$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_1} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_2} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}_i} f_i(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{A} \quad (53)$$

A la última integral de (53) se le puede aplicar la Regla de Leibniz (33) en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}_i} f_i(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}_i} \left[ \frac{df_i}{dt} + f_i \nabla_x \cdot (\mathbf{v}_{ni} + \mathbf{v}_t) \right] d\mathcal{A} \quad (54)$$

donde

$$\mathbf{v}_{ni} = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad (55)$$

y  $\mathbf{v}_t$  es la velocidad de flujo tangencial en la superficie singular ya definida en (45) en la forma

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2} \quad \mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad \mathbf{v}_{t2} = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad (56)$$

La velocidad  $\mathbf{v}_t$  no debe confundirse con la velocidad tangencial de la superficie singular, como se mencionó en la sección anterior. Es bueno acotar aquí que cuando se está aplicando la Regla de Leibniz en (54), se está haciendo a una porción del espacio que fluye con velocidad  $\mathbf{v}$ , distinta e independiente a  $\mathbf{v}_i$  (en  $\mathbb{R}^n$ ), y está contenido, para un instante particular, en la superficie singular, con velocidad  $\mathbf{v}_t$  (en  $\mathbb{R}^{n-1}$ ). La velocidad  $\mathbf{v}_{ni}$  es la velocidad ortogonal a la superficie singular originada por el cambio de su métrica.

Sumando ahora las expresiones (46.a) y (46.b), en cualquiera de las dos formas como se hizo en la sección anterior, incorporando la derivada de la integral de la función  $f_i$  sobre la superficie interfaz  $\mathcal{A}_i$ , (54), y agrupando las integrales con dominios complementarios y los términos semejantes, finalmente se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_*} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}_i} \left( \frac{df_i}{dt} + f_i \nabla_x \cdot \mathbf{v}_p \right) d\mathcal{A} \quad (57)$$

donde

$$\mathcal{V}_* = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{ni} + \mathbf{v}_t \quad (58)$$

y donde se debe interpretar que el primer término del miembro de la derecha de (57) contiene el mismo resultado obtenido en las expresiones (47) o (49), según el modo que se desee. (Nota: no debe confundirse  $\mathbf{v}_n$  en (49) con  $\mathbf{v}_{ni}$  en (58), puesto que tienen una interpretación distinta cuando se usan simultáneamente).

### 3. GEOMETRIA

#### 3.1. CURVAS EN EL ESPACIO

Lo expuesto en esta sección sigue básicamente el desarrollo presentado por Postnikov [1994] en su libro sobre “Linear Algebra and Differential Geometry”.

##### 3.1.1. Definición

Lo que aquí se expondrá es una generalización, de lo que ya se presentó en la sección A.2.1.3, a espacios euclídeos de dimensión  $n$ .

Una curva  $\mathbf{r}(s)$ , referida al *parámetro natural*  $s$  en un espacio euclídeo  $n$ -dimensional orientado  $\mathbb{R}^n$  se llama una *curva genérica*, si para cualquier  $s$  los vectores

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}, \dots, \frac{d^{n-1}\mathbf{r}(s)}{ds^{n-1}} \quad (1)$$

son linealmente independientes entre sí.

##### 3.1.2. Base Ortonormal

Mediante la aplicación del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (ver sección C.5.1.3) a los vectores de (1), se puede obtener una familia de vectores ortonormales  $\boldsymbol{\lambda}_1(s), \boldsymbol{\lambda}_2(s), \dots, \boldsymbol{\lambda}_{n-1}(s)$ . Sea el vector  $\boldsymbol{\lambda}_n(s)$ , uniformemente definido. La extensión de la familia de los anteriores vectores a una base ortonormal positivamente orientada

$$\mathbb{B} = \{\boldsymbol{\lambda}_1(s), \boldsymbol{\lambda}_2(s), \dots, \boldsymbol{\lambda}_{n-1}(s), \boldsymbol{\lambda}_n\} \quad (2)$$

La base (2) se denomina una *base móvil de Frenet* para la curva genérica  $\mathbf{r}(s)$ . El calificativo de móvil se debe a que dicha base también depende del parámetro  $s$ .

##### 3.1.3. Ecuaciones de Frenet

Sea cualquiera de los vectores  $d\boldsymbol{\lambda}_i/ds$ , expresado en la base (2) de la forma

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}_i(s)}{ds} = A_{ij}(s) \boldsymbol{\lambda}_j(s) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Se omitirá de ahora en adelante el argumento  $s$  donde no sea imprescindible, para simplificar las expresiones. Ya que por construcción el vector  $\boldsymbol{\lambda}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) es expresado linealmente en términos de los vectores  $d\mathbf{r}/ds, \dots, d^i\mathbf{r}/ds^i$ , entonces el vectores  $d\boldsymbol{\lambda}_i/ds$  es expresado linealmente en términos de  $d\mathbf{r}/ds, \dots, d^{i+1}\mathbf{r}/ds^{i+1}$ . Ahora, puesto que por el mismo proceso de ortogonalización, estos últimos vectores pueden ser expresados linealmente en términos de  $\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{i+1}$ , esto prueba que  $A_{ij} = 0$  cuando  $j > i+1$ .

Por otra parte, ya que  $\boldsymbol{\lambda}_i \cdot \boldsymbol{\lambda}_j = \delta_{ij}$ , se tiene que  $\boldsymbol{\lambda}_i \cdot d\boldsymbol{\lambda}_j/ds + \boldsymbol{\lambda}_j \cdot d\boldsymbol{\lambda}_i/ds = 0$ , es decir,

$$A_{ij} + A_{ji} = 0 \quad (4)$$

Por lo tanto  $A_{ii} = 0$  and  $A_{ij} = 0$  cuando  $j < i-1$ .

Así, los únicos coeficientes no nulos son

$$A_{i,i+1} = -A_{i+1,i} = \kappa_i \quad (5)$$

De esta forma las ecuaciones (3) se reducen al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\lambda_1}{ds} = \kappa_1 \lambda_2 \\ \frac{d\lambda_2}{ds} = \kappa_2 \lambda_3 - \kappa_1 \lambda_1 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{d\lambda_i}{ds} = \kappa_i \lambda_{i+1} - \kappa_{i-1} \lambda_{i-1} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{d\lambda_{n-1}}{ds} = \kappa_{n-1} \lambda_n - \kappa_{n-2} \lambda_{n-2} \\ \frac{d\lambda_n}{ds} = -\kappa_{n-1} \lambda_{n-1} \end{array} \right. \quad (6)$$

Esta expresiones en su conjunto son llamadas *fórmulas de Frenet* para una curva en un espacio  $n$ -dimensional. Las funciones  $\kappa_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , son llamadas las curvaturas de una curva. Estas pueden sólo ser definidas para una curva genérica.

### 3.1.4. Curvaturas y Torsión

En las fórmulas

$$\lambda_i = B_{ij} \frac{d^i \mathbf{r}}{ds^i} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (7)$$

resultantes de aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, los coeficientes  $B_{ii}$  son positivos. Por lo tanto, en las fórmulas inversas

$$\frac{d^i \mathbf{r}}{ds^i} = C_{ij} \lambda_i(s) \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (8)$$

los coeficientes  $C_{ii} = B_{ii}^{-1}$  son también positivos (recuérdese que si la matriz  $[B_{ij}]$  es triangular inferior, entonces la matriz  $[C_{ij}]$  es triangular superior y la diagonal principal de una es la inversa de la otra). Diferenciando las fórmulas (7) se obtiene

$$\frac{d\lambda_i}{ds} = \frac{dB_{ij}}{ds} \frac{d^i \mathbf{r}}{ds^i} + B_{ij} \frac{d^{i+1} \mathbf{r}}{ds^{i+1}} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (9)$$

Remplazando ahora (8) en (9), para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , se debería tener de nuevo las fórmulas (6). Una simple comparación muestra que

$$\kappa_i = B_{ii} C_{i+1, i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (10)$$

Se sigue, en particular, que para cualquier curva del tipo general mostrado aquí, las curvaturas  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}$  son todas positivas. La curvatura  $\kappa_{n-1}$  (la análoga de la torsión en A.2.1.(10)), por otra parte, puede tener cualquier signo.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Aris, R. **Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics**. Prentice-Hall, 1962.
- [2] Arnold, V. I. **Geometrical Methods of Theory of Ordinary Differential Equations**. Springer-Verlag, 1988.
- [3] Arnold, V. I. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. Springer-Verlag, 1978.
- [4] Aubin, T. **Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations**. Springer-Verlag, 1982.
- [5] Auslander, L.; Mackenzie, R. E. **Introduction to Differentiable Manifolds**. Dover Publications, 1977.
- [6] Bishop, R. L.; Goldberg, S. I. **Tensor Analysis on Manifolds**. Dover Publications, 1980.
- [7] Bowen, R. M.; Wang, C.-C. **Introduction to Vectors and Tensors**. Vol.1: "Linear and Multilinear Algebra". Vol.2: "Vector and Tensor Analysis". Plenum Press, 1976, Second Printing, 1980.
- [8] Burke, W. L. **Applied Differential Geometry**. Cambridge University Press, 1985. Reprinted, 1987.
- [9] Brand, L. **Análisis Vectorial**. Compañía Editorial Continental, S. A., 1959. 9<sup>na</sup> Impresión.
- [10] Darling, R. W. R. **Differential Forms and Connections**. Cambridge University Press, 1994.
- [11] Do Carmo, M. P. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Prentice-Hall, 1976.
- [12] Dodson, C. T. J.; Poston, T. **Tensor Geometry**, The Geometric Viewpoint and its Uses, Second Edition. Springer-Verlag, 1991.
- [13] Dubrovin, B. A.; Fomenko, A. T.; Novikov, S. P. **Modern Geometry**. Methods and Applications. Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields, Second Edition. Part II: The Geometry and Topology of Manifolds. Part III: Introduction to Homology Theory. Springer-Verlag (New York), 1992/1985/1990.
- [14] Ericksen, J. L. "Tensor Fields". **Encyclopedia of physics**. Ed. S. Flügge, Vol.III/1. pp. 794 - 858. Springer - Verlag, 1960.
- [15] Flanders, H. **Differential Forms With Applications to the Physical Sciences**. Dover Publications, 1990. Academic Press, 1963.
- [16] Flügge, W. **Tensor Analysis and Continuum Mechanics**. Springer-Verlag, 1972.
- [17] Gökeler, M.; Schücker, T. **Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity**. Cambridge University Press, 1987.
- [18] Granados M., A. L. "Reynolds Transport Theorems as a Special Application of Leibniz Rule". **Proceedings of The Third Caribbean Congress on Fluid Dynamics and The Third Latin-American Symposium on Fluid Mechanics**. Universidad Simón Bolívar, Caracas - Venezuela. Sartenejas, del 5 al 9 de Febrero de 1995.
- [19] Guckenheimer, J.; Holmes, P. J. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields**. Springer-Verlag, 1983. 3<sup>rd</sup> Printing, 1990.
- [20] Guggenheimer, H. W. **Differential Geometry**. Dover Publications, 1977.
- [21] Hicks, N. J. **Notes on Differential Geometry**. Van Nostrand Reinhold Company, 1971.
- [22] Kellogg, O. D. **Foundations of Potential Theory**. Springer-Verlag, 1929. Reprint, 1967.
- [23] Kreyszig, E. **Differential Geometry**. Dover Publications, 1991.
- [24] Lang, S. **Introduction to Differentiable Manifolds**. Interscience Publishers, 1967. John Wiley & Sons, 1962. 3<sup>rd</sup> Printing, 1967.
- [25] Lang, S. **Differential Manifolds**. Addison-Wesley, 1972.
- [26] Lass, H. **Vector and Tensor Analysis**. McGraw-Hill - Kōgakusha, 1950.
- [27] Levi-Civita, T. **The Absolute Differential Calculus**, Calculus of Tensors. Dover Publications, 1977.



- [28] Lipschutz, M. M. **Geometría Diferencial**, Teoría y Problemas. McGraw-Hill (Serie Schaum), 1971.
- [29] Lovelock, D.; Rund, H. **Tensors, Differential Forms, and Variational Principles**. Dover Publications (New York), 1989. John Wiley & Sons (New York), 1975.
- [30] Malliavin, P. **Geometría Diferencial Intrínseca**. Editorial Tecnos, 1975.
- [31] Marsden, J. E.; Tromba, A. J. **Cálculo Vectorial**, 3<sup>ra</sup> Edición. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- [32] McConnel, A. J. **Applications of Tensor Analysis**. Dover Publications, 1957.
- [33] Mishchenko, A.; Fomenko, A. **A Course of Differential Geometry and Topology**. Mir Publishers Moscow, 1988.
- [34] Nash, Ch.; Sen, S. **Topology and Geometry for Physicists**. Academic Press, 1983.
- [35] O'Neill, B. **Elementary Differential Geometry**. Academic Press, 1966. 3<sup>rd</sup> Printing, 1969.
- [36] O'Neill, B. **Semi-Riemannian Geometry**, with Applications to Relativity. Academic Press, 1983.
- [37] Pogorélov, A. V. **Geometría Diferencial**. Editorial MIR (Moscú), 1977.
- [38] Postnikov, M. **Linear Algebra and Differential Geometry**. URSS Publishers (Moscow), 1994.
- [39] Postnikov, M. **Smooth Manifolds**, Vol.1-2. URSS Publishers (Moscow), 1994.
- [40] Rindler, W. **Relativity: Especial, General and Cosmological**. Oxford University Press, 2001. Second Edition, 2006.
- [41] Rudin, W. **Real and Complex Analysis**, Third Edition. McGraw-Hill, 1987.
- [42] Schouten, J. A. **Ricci-Calculus**, 2<sup>nd</sup> Edition. Springer-Verlag, 1954.
- [43] Segel, L. A. **Mathematics Applied to Continuum Mechanics**. Macmillan Publishing Co. (New York), 1977.
- [44] Sokolnikoff, I. S. **Tensor Analysis**, 2<sup>nd</sup> Edition. Editorial Index, 1979.
- [45] Sokolnikoff, I. S. **Análisis Tensorial**, 2<sup>da</sup> Edición. John Wiley & Sons, 1979.
- [46] Spivak, M. **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry**. Publish or Perish; Vol.1, Second Edition, 1979; Vol.2, 1970; Vol.3-5, 1975.
- [47] Spivak, M. **Cálculo en Variedades**. Editorial Reverté, 1982.
- [48] Synge, J. L.; Schild, A. **Tensor Calculus**. University of Toronto Press, 1956.
- [49] Thompson, A. C. **Minkowski Geometry**. Cambridge University Press (New York), 1996.
- [50] Thorpe, J. A. **Elementary Topics in Differential Geometry**. Springer-Verlag, 1979.
- [51] Urwin, K. M. **Cálculo Superior y Teoría del Vector-Campo**. Editorial Alhambra, 1969.
- [52] Von Westenholz, C. **Differential Forms in Mathematical Physics**. North-Holland Publishing, 1978.
- [53] Warner, F. W. **Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups**. Springer-Verlag: New York, 1983.
- [54] Willmore, T. J. **Riemannian Geometry**. Clarendon Press: Oxford, 1993.



# APENDICE C

## ALGEBRA LINEAL Y SUPERIOR

### CONTENIDO

1. OPERACIONES BINARIAS.	473
1.1. Definición.	473
1.2. Ley de Composición.	473
1.3. Relación de Equivalencia.	473
1.4. Clases de Equivalencias.	473
1.5. Conjunto Cociente.	473
1.6. Homomorfismo entre Conjuntos.	474
2. CUERPO.	474
3. ESPACIO VECTORIAL.	475
3.1. Fundamentos.	475
3.1.1. Espacios.	475
3.1.2. Subespacios.	475
3.2. Combinación Lineal.	475
3.3. Base y Dimensión.	476
3.3.1. Dependencia Lineal.	476
3.3.2. Base.	476
3.3.3. Dimensión.	476
3.4. Coordenadas.	477
3.4.1. Definición.	477
3.4.2. Cambio de Base.	477
4. TRANSFORMACION LINEAL.	478
4.1. Fundamentos.	478
4.1.1. Definición.	478
4.1.2. Espacio Rango.	478
4.1.3. Espacio Nulo.	478
4.1.4. Algebra de las Transformaciones.	479
4.2. Funcionales.	480
4.2.1. Definición.	480
4.2.2. Espacio Dual.	480

4.2.3. Base Dual.	480
4.2.4. Transformación Transpuesta.	481
4.3. Operador Lineal.	482
4.3.1. Definición.	482
4.3.2. Operador Identidad e Inversa.	482
4.3.3. Operador Transpuesto.	483
4.3.4. Operador Adjunto.	483
4.3.5. Potencia de Operadores.	484
4.3.6. Cambio de Base.	484
4.4. Autovalores y Autovectores.	485
5. ESPACIO PRODUCTO INTERIOR.	486
5.1. Fundamentos.	486
5.1.1. Producto Interior.	486
5.1.2. Norma.	486
5.1.3. Ortogonalidad.	487
5.1.4. Complemento Ortogonal.	487
5.1.5. Operador Positivo.	488
5.2. Descomposición Espectral.	488
6. GRUPO.	489
6.1. Definición.	489
6.2. Grupo Abelian.	489
6.3. Homomorfismo entre Grupos.	489
7. ANILLO.	490
8. MODULO.	490
8.1. Definición.	490
8.2. Módulo Dual.	490
9. FORMAS Y TENSORES.	491
9.1. Funciones Multilineales.	491
9.2. Formas Bilineales.	492
9.2.1. Forma Sesquilineal.	492
9.2.2. Forma Hermítica.	492
9.2.3. Forma Positiva.	493
9.2.4. Forma Simétrica.	493
9.3. Teorema de Sylvester.	493
10. ALGEBRA LINEAL.	494
10.1. Definición.	494
10.2. Ideal Lineal.	495
BIBLIOGRAFIA.	495

## 1. OPERACIONES BINARIAS

### 1.1. DEFINICION

Sean tres conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  cualesquiera. Una *operación binaria* es una aplicación  $\# : A \times B \longrightarrow C$  tal que,  $\forall a \in A, b \in B, c \in C$  se asocia al par  $(a, b)$  un elemento  $c$ . En este caso se designa  $a \# b = c$ , donde el símbolo  $\#$  representa la operación involucrada. Este símbolo que designa la operación binaria puede ser cualquiera. Además, la operación  $\#$  no necesariamente tiene que ser una operación algebraica, y en algunos casos puede ser una relación.

### 1.2. LEY DE COMPOSICION

Una *ley de composición* es una operación binaria del tipo  $\# : A \times A \longrightarrow C$ , en la cual a cada par de elementos  $(a, b)$ , con  $a, b \in A$ , se le asigna un elemento  $c \in C$ . Se dice que “ $c$  es el resultado de componer  $a$  con  $b$ ”. Cuando el conjunto  $C$  coincide con  $A$ , se dice que la ley de composición es *interna*. En caso contrario se dice que la ley de composición es *externa*.

### 1.3. RELACION DE EQUIVALENCIA

Una *relación de equivalencia* es una ley de composición externa definida como una operación binaria  $\sim : A \times A \longrightarrow 0, 1$ . Esto es,  $\sim$  asigna a cada par ordenado  $(a, b)$  el valor  $a \sim b = 1$  ó  $a \sim b = 0$ . La idea es que si  $a \sim b = 1$ , entonces  $a$  está en correspondencia dada con  $b$ , y si  $a \sim b = 0$ , no lo está. Como solamente existen estos dos casos exclusivos, entonces solamente se considera válido el primer caso. En este sentido se escribirá simplemente  $a \sim b$  y se sobreentenderá que su valor es 1. En caso contrario, no existe la relación entre  $a$  y  $b$ , y simplemente no se escribe. Con esta descripción de una ley de composición externa se hablará de *relación binaria*, en lugar de operación binaria.

Lo descrito no define completamente una relación de equivalencia. Adicionalmente, una relación de equivalencia debe cumplir con ciertas propiedades para la relación binaria  $\sim$ , o sea debe ser:

- (i) Reflexiva,  $a \sim a$  par todo  $a \in A$ .
- (ii) Simétrica,  $a \sim b$  toda vez que  $b \sim a$ .
- (iii) Transitiva,  $a \sim c$  toda vez que  $a \sim b$  y  $b \sim c$ .

### 1.4. CLASE DE EQUIVALENCIA

Supóngase que  $\sim$  es un relación de equivalencia en el conjunto  $A$ . Si  $a$  es un elemento de  $A$ ,  $\mathcal{E}(a, \sim)$  representa el conjunto de todos los elementos  $b$  de  $A$ , tales que  $a \sim b$ . Este conjunto  $\mathcal{E}(a, \sim)$  se llama la *clase de equivalencia* de  $x$  (para la relación de equivalencia  $\sim$ ). Como  $\sim$  es una relación de equivalencia, las clase de equivalencia tienen las siguientes propiedades:

- (i) Todo  $\mathcal{E}(a, \sim)$  es no vacío; en efecto, como  $a \sim a$ , el elemento  $a$  pertenece a  $\mathcal{E}(a, \sim)$ .
- (ii) Sean  $a$  y  $b$  elementos de  $A$ . Como  $\sim$  es simétrica,  $b$  pertenece a  $\mathcal{E}(a, \sim)$  si, y sólo si,  $a$  pertenece a  $\mathcal{E}(b, \sim)$ .
- (iii) Si  $a$  y  $b$  son elementos de  $A$ , las clases de equivalencias  $\mathcal{E}(a, \sim)$  y  $\mathcal{E}(b, \sim)$  o son idénticas o no tienen elementos en común.

### 1.5. CONJUNTO COCIENTE

Supóngase que  $\sim$  es un relación de equivalencia en el conjunto  $A$ . Se define el *conjunto cociente*  $A/\sim$ , al conjunto formado por las clases de equivalencias disjuntas de todos los elementos del conjunto  $A$ . Esto se describe más precisamente escogiendo elementos  $A_k$  del conjunto  $A$ , tal que todas las clases de equivalencia  $\mathcal{E}(a_k, \sim)$  sean distintas. Entonces el conjunto cociente se puede escribir como

$$A/\sim = \bigcup_k \mathcal{E}(a_k, \sim) \quad (1)$$

En este sentido se puede decir que un conjunto cociente  $A/\sim$  es una partición del conjunto  $A$ . Sin embargo, esto no significa que puedan quedar clases de equivalencias con un solo elemento.

### 1.6. HOMOMORFISMO ENTRE CONJUNTOS

Sean los conjuntos no vacíos  $A$  y  $\tilde{A}$ , y las leyes de composición internas

$$* : A \times A \longrightarrow A \quad \tilde{*} : \tilde{A} \times \tilde{A} \longrightarrow \tilde{A} \quad (1)$$

La función  $f : A \longrightarrow \tilde{A}$  es un homomorfismo respecto de  $*$  y  $\tilde{*}$  si, y sólo si, la imagen de la composición en  $A$  es igual a la composición de las imágenes en  $\tilde{A}$ . Esto es, si

$$f(a * b) = f(a) \tilde{*} f(b) \quad \forall a, b \in A \quad (2)$$

Se ha definido el homomorfismo entre dos conjuntos respecto a dos leyes de composición interna, una para cada uno de ellos. Los conjuntos y las leyes de composición internas pueden no ser necesariamente distintos. Además, el concepto de homomorfismo es aplicable también respecto de relaciones que no son necesariamente operaciones algebraicas.

Existen varios tipos de homomorfismo especiales dependiendo de la función  $f$ :

- (i)  $f$  es un *monomorfismo* si, y sólo si,  $f$  es inyectiva.
- (ii)  $f$  es un *epimorfismo* si, y sólo si,  $f$  es sobreyectiva.
- (iii)  $f$  es un *isomorfismo* si, y sólo si,  $f$  es biyectiva.
- (iv)  $f$  es un *endomorfismo* si, y sólo si,  $A = \tilde{A}$ .
- (v)  $f$  es un *automorfismo* si, y sólo si,  $f$  es un endomorfismo biyectivo.

## 2. CUERPO

Se designa por *cuerpo* (o *campo* como también se le conoce) al conjunto  $\mathbb{F}$  de los números (o escalares) que satisfacen la siguiente lista de propiedades, respecto a las operaciones de adición “+” y de multiplicación “\*”. Estas propiedades también pueden interpretarse de manera axiomática y la siguiente lista pueden considerarse axiomas:

- (i) La adición es conmutativa,  $x + y = y + x$  para cualquier  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{F}$ .
- (ii) La adición es asociativa,  $x + (y + z) = (x + y) + z$  para cualesquiera  $x$ ,  $y$  y  $z$  de  $\mathbb{F}$ .
- (iii) Existe un único elemento 0 (cero) de  $\mathbb{F}$  tal que  $x + 0 = x$ , para todo  $x$  en  $\mathbb{F}$ .
- (iv) A cada  $x$  de  $\mathbb{F}$  corresponde un único elemento  $(-x)$  de  $\mathbb{F}$ , tal que  $x + (-x) = 0$ .
- (v) La multiplicación es conmutativa,  $x * y = y * x$  para cualquiera  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{F}$ .
- (vi) La multiplicación es asociativa,  $x * (y * z) = (x * y) * z$  para cualesquiera  $x$ ,  $y$  y  $z$  de  $\mathbb{F}$ .
- (vii) Existe un único elemento 1 no nulo de  $\mathbb{F}$ , tal que  $x * 1 = x$  para todo  $x$  de  $\mathbb{F}$ .
- (viii) A cada elemento no nulo  $x$  de  $\mathbb{F}$  corresponde un único elemento  $x^{-1}$  de  $\mathbb{F}$ , tal que  $x * x^{-1} = 1$ .
- (ix) La multiplicación es distributiva respecto a la adición; esto es,  $x * (y + z) = x * y + x * z$ , para cualesquiera  $x$ ,  $y$  y  $z$  de  $\mathbb{F}$ .

A los números que forman el cuerpo  $\mathbb{F}$  se les denominarán *escalares*. Los cuerpos más conocidos son los números racionales  $\mathbb{Q}$ , los números reales  $\mathbb{R}$  y los números complejos  $\mathbb{C}$ .

Un *subcuerpo* de un cuerpo  $\mathbb{C}$  de números complejos es un conjunto  $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$  de números complejos que es a su vez un cuerpo respecto de las operaciones usuales de adición y multiplicación de números complejos. Esto significa que el 0 y el 1 están en el conjunto  $\mathbb{F}$ , y que si  $x$  e  $y$  son elementos de  $\mathbb{F}$ , también lo son  $(x + y)$ ,  $-x$ ,  $x * y$ , e  $x^{-1}$  (si  $x \neq 0$ ). De esta forma, los números racionales son un subcuerpo de los números reales, los cuales a su vez forman un subcuerpo de los números complejos ( $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ).

### 3. ESPACIO VECTORIAL

#### 3.1. FUNDAMENTOS

##### 3.1.1. Espacios

Un *espacio vectorial* (o espacio lineal como también se le conoce) consta de lo siguiente:

- (i) Un cuerpo  $\mathbb{F}$  de escalares.
- (ii) Un conjunto  $\mathbb{V}$  de elementos llamados *vectores*.
- (iii) Una operación (u regla) llamada *adición*, que asocia a cada par de vectores  $\alpha, \beta$  de  $\mathbb{V}$  un vector  $\alpha + \beta$ , que se llama suma de  $\alpha$  y  $\beta$ , de tal modo que:
  - (a) La adición es conmutativa,  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ .
  - (b) La adición es asociativa,  $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ .
  - (c) Existe un único vector  $\theta$  de  $\mathbb{V}$ , llamado *vector nulo*, tal que  $\alpha + \theta = \alpha$ , para todo  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$ .
  - (d) Para cada vector  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$ , existe un único vector  $-\alpha$  de  $\mathbb{V}$ , tal que  $\alpha + (-\alpha) = \theta$ .
- (iv) Una operación (u regla), llamada *multiplicación escalar*, que asocia a cada escalar  $c$  de  $\mathbb{F}$  y cada  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$  a un vector  $c\alpha$  en  $\mathbb{V}$ , llamado producto de  $c$  y  $\alpha$ , de tal modo que:
  - (a)  $1\alpha = \alpha$ , para todo  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$ .
  - (b)  $(c_1 * c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$ .
  - (c)  $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$ .
  - (d)  $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$ .

Es importante observar, como la definición establece, que un espacio vectorial es un objeto compuesto, que consta de un cuerpo, de un conjunto de vectores y de dos operaciones con ciertas propiedades espaciales. Cuando no hay posibilidad de confusión, se hará referencia simplemente al espacio vectorial  $\mathbb{V}$ , y cuando se desee especificar el cuerpo, se dirá que  $\mathbb{V}$  es un “espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ ”. El nombre “vector” se da a los elementos del conjunto  $\mathbb{V}$  más bien por conveniencia que por otra cosa, aunque por tradición este nombre se haya asociado al conjunto de flechas de distintos tamaños en el espacio, el cual es un ejemplo particular de espacio vectorial.

##### 3.1.2. Subespacios

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ . Un *subespacio* de  $\mathbb{V}$  es un subconjunto  $\mathbb{W}$  de  $\mathbb{V}$  que, con respecto a las operaciones de adición vectorial y multiplicación escalar sobre  $\mathbb{V}$ , es él mismo un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ . Si  $\mathbb{V}$  es cualquier espacio vectorial, entonces  $\mathbb{V}$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{V}$ . Un *subespacio propio*  $\mathbb{W}$  de un espacio vectorial  $\mathbb{V}$  es aquel subespacio de  $\mathbb{V}$  que jamás coincide con él; es decir,  $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$  y  $\mathbb{W} \neq \mathbb{V}$ . El subconjunto que consta de sólo del vector nulo es un subespacio vectorial de  $\mathbb{V}$ , llamado *subespacio nulo* de  $\mathbb{V}^*$  (esta definición se aclarará cuando se revise el concepto de espacio dual).

**Teorema 1.** Un subconjunto no vacío  $\mathbb{W}$  de  $\mathbb{V}$  es un subespacio de  $\mathbb{V}$  si, y sólo si, para todo par de vectores  $\alpha, \beta$  de  $\mathbb{W}$  y todo escalar  $c$  de  $\mathbb{F}$ , el vector  $c\alpha + \beta$  está en  $\mathbb{W}$ .

**Teorema 2.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ . La intersección de cualquier colección de subespacios de  $\mathbb{V}$  es un subespacio de  $\mathbb{V}$ .

#### 3.2. COMBINACION LINEAL

Un vector  $\beta$  de  $\mathbb{V}$  se dice *combinación lineal* de los vectores  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  en  $\mathbb{V}$ , si existen escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$  de  $\mathbb{F}$ , tales que

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = c_i\alpha_i \quad (1)$$

donde se ha empleado la convención de suma para los índices mudo (aquellos que se repiten dos veces lo que implica que existe una sumatoria en todo su rango). Otras extensiones de la propiedad asociativa de la

adición vectorial (iii.a) y las propiedades asociativas (iv.c-d) de la multiplicación escalar, todas de la sección 3.1, se aplican a las combinaciones lineales:

$$c_i \alpha_i + d_i \alpha_i = (c_i + d_i) \alpha_i \quad c(d_i \alpha_i) = (c d_i) \alpha_i \quad (2)$$

**Definición 1.** Sea  $\mathbb{U}$  un conjunto de vectores de un espacio vectorial  $\mathbb{V}$ . El *subespacio generado* por  $\mathbb{U}$  se define como la intersección  $\mathbb{W}$  de todos los subespacios de  $\mathbb{V}$  que contienen a  $\mathbb{U}$ . Cuando  $\mathbb{U}$  es un conjunto finito de vectores,  $\mathbb{U} = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  se dice simplemente que el subespacio  $\mathbb{W}$  es el subespacio generado por los vectores  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

**Definición 2.** Si  $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_k$  son subconjuntos de un espacio vectorial  $\mathbb{V}$ , el conjunto de todas las sumas  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$  de vectores  $\alpha_i$  de  $\mathbb{W}_i$  se llama *suma* de los subconjuntos  $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_k$ , y se representa por  $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{W}_k$ .

**Teorema 3.** El subespacio generado por un subconjunto  $\mathbb{W}$  no vacío de un espacio vectorial  $\mathbb{V}$  es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de  $\mathbb{W}$ .

### 3.3. BASE Y DIMENSION

#### 3.3.1. Dependencia lineal

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ . Un subconjunto  $\mathbb{W}$  de  $\mathbb{V}$  se dice *linealmente dependiente* (o simplemente dependiente, si existen vectores distintos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  de  $\mathbb{W}$  y escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , no todos nulos, tales que

$$c_i \alpha_i = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_n \alpha_n = c_i \alpha_i = \theta \quad (1)$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice *linealmente independiente*. Si el conjunto  $\mathbb{W}$  tiene solo un número finito de vectores  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  son dependientes (o independientes), en vez de decir que  $\mathbb{W}$  es dependiente (o independiente).

Las siguientes afirmaciones son fáciles consecuencias de la definición anterior:

- (i) Todo conjunto que contiene un conjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.
- (ii) Todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.
- (iii) Todo conjunto que contiene el vector  $\theta$  es linealmente dependiente; en efecto,  $1 \theta = \theta$ .
- (iv) Un conjunto  $\mathbb{W}$  de vectores es linealmente independiente si, y solo si, todo subconjunto finito de  $\mathbb{W}$  es linealmente independiente; es decir, si, y solo si, para vectores diferentes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  de  $\mathbb{W}$ , arbitrariamente elegidos,  $c_i \alpha_i = 0$  implica que todo  $c_i = 0$ .

#### 3.3.2. Base

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial. Una *base* de  $\mathbb{V}$  es un conjunto de vectores linealmente independientes de  $\mathbb{V}$  que genera el espacio  $\mathbb{V}$ . El espacio es de dimensión finita, si tiene una base finita.

**Teorema 1.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ . Entonces todo conjunto independiente de vectores de  $\mathbb{V}$  es finito y no contiene más de  $m$  elementos. **Corolario 1'.** Si  $\mathbb{V}$  es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de  $\mathbb{V}$  tienen el mismo número (finito) de elementos.

#### 3.3.3. Dimensión

El corolario anterior permite definir la *dimensión* de un espacio vectorial de dimensión finita como el número de elementos de una base cualquiera de  $\mathbb{V}$ . Se indicará la dimensión de un espacio  $\mathbb{V}$  de dimensión finita por  $\dim(\mathbb{V})$ . Ello permite enunciar el teorema 1 como sigue.

**Corolario 1''.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita, y sea  $n = \dim(\mathbb{V})$ . Entonces (a) cualquier subconjunto de  $\mathbb{V}$  que contenga más de  $n$  vectores es linealmente dependiente; (b) ningún subconjunto de  $\mathbb{V}$  que contenga menos de  $n$  vectores puede generar  $\mathbb{V}$ .

Si  $\mathbb{V}$  es cualquier espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ , el subespacio nulo de  $\mathbb{V}^*$  es generado por el vector  $\theta$ , pero  $\{\theta\}$  es un conjunto linealmente dependiente y no una base. Por esta razón se conviene que el subespacio nulo



de  $\mathbb{V}^*$  tenga dimensión 0. Se podría llegar a la misma conclusión pensando que el conjunto vacío es una base del subespacio nulo. El conjunto vacío genera  $\{\theta\}$ , pues la intersección de todos los subespacios que contienen el conjunto vacío es  $\{\theta\}$ , y el conjunto vacío es linealmente independiente, porque no contiene vectores.

**Lema 1.** Sea  $\mathbb{W}$  un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial  $\mathbb{V}$ . Supóngase que  $\beta$  es un vector de  $\mathbb{V}$  que no pertenece al subespacio generado por  $\mathbb{W}$ . Entonces, el conjunto que se obtiene agregando  $\beta$  a  $\mathbb{W}$ , es linealmente independiente.

**Teorema 2.** Si  $\mathbb{W}$  es un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita  $\mathbb{V}$ , todo subconjunto linealmente independiente de  $\mathbb{W}$  es finito y es parte de una base (finita) de  $\mathbb{W}$ .

**Corolario 2'.** Si  $\mathbb{W}$  es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimensión finita  $\mathbb{V}$ , entonces  $\mathbb{W}$  es de dimensión finita y  $\dim(\mathbb{W}) < \dim(\mathbb{V})$ .

**Corolario 2''.** En un espacio vectorial  $\mathbb{V}$  de dimensión finita, todo conjunto linealmente independiente de vectores es parte de una base.

**Teorema 3.** Si  $\mathbb{W}_1$  y  $\mathbb{W}_2$  son subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial, entonces  $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$  es de dimensión finita y  $\dim(\mathbb{W}_1) + \dim(\mathbb{W}_2) = \dim(\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2) + \dim(\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2)$ .

### 3.4. COORDENADAS

#### 3.4.1. Definición

Si  $\mathbb{V}$  es un espacio vectorial de dimensión finita, una *base ordenada* del espacio vectorial  $\mathbb{V}$  sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  es una sucesión finita de vectores  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  linealmente independiente y que genera  $\mathbb{V}$ . Una base ordenada se denotará como

$$\mathbb{B} = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \} \quad (1)$$

diciendo que  $\mathbb{B}$  es una base ordenada de  $\mathbb{V}$ .

Dado un vector  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$ , existe un único  $n$ -upla  $(a^1, a^2, \dots, a^n)$  de escalares, tales que

$$\alpha = a^i \alpha_i = a^1 \alpha_1 + a^2 \alpha_2 + \dots + a^n \alpha_n \quad (2)$$

Se llama a  $a^i$  la  $i$ -ésima *coordenada* de  $\alpha$  respecto a la base ordenada (1). Cada base ordenada de  $\mathbb{V}$  determina una correspondencia biunívoca  $\alpha \longrightarrow (a^1, a^2, \dots, a^n)$ , entre el conjunto de todos los vectores de  $\mathbb{V}$  y el conjunto de todas  $n$ -uplas de  $\mathbb{F}^n$ , el cual es también un espacio vectorial. A menudo será de mayor conveniencia usar la matriz de las coordenadas de  $\alpha$  respecto a la base ordenada  $\mathbb{B}$

$$[\alpha]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} \quad (3)$$

en lugar de la  $n$ -upla  $(a^1, a^2, \dots, a^n)$  de coordenadas.

#### 3.4.2. Cambio de Base

Supóngase que  $\mathbb{V}$  es de dimensión  $n$  y que

$$\mathbb{B} = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \} \quad \tilde{\mathbb{B}} = \{ \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n \} \quad (4)$$

sean dos base ordenadas de  $\mathbb{V}$ . Existen escalares únicos  $C_j^i$  tales que,

$$\tilde{\alpha}_j = C_j^i \alpha_i \quad 1 \leq j \leq n \quad (5)$$

Sean  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$  las coordenadas de un vector dado  $\alpha$  en la base ordenada  $\tilde{\mathbb{B}}$ , entonces

$$\alpha = \tilde{a}^j \tilde{\alpha}_j = \tilde{a}^j (C_j^i \alpha_i) = (\tilde{a}^j C_j^i) \alpha_i = a^i \alpha_i \quad (6)$$

Como las coordenadas  $a^1, a^2, \dots, a^n$  de  $\alpha$  en la base ordenada  $\mathbb{B}$  están únivocamente determinadas, se sigue de (6) que

$$a^i = C_j^i a^j \quad 1 \leq i \leq n \quad (7)$$

Sea  $[C]$  la matriz  $n \times n$  cuyo elemento  $i, j$  es el escalar  $C_j^i$  y sean  $[\alpha]_{\mathbb{B}}$  y  $[\alpha]_{\tilde{\mathbb{B}}}$  las matrices de coordenadas del vector  $\alpha$  en las bases ordenadas  $\mathbb{B}$  y  $\tilde{\mathbb{B}}$ . Entonces se puede escribir

$$[\alpha]_{\mathbb{B}} = [C] [\alpha]_{\tilde{\mathbb{B}}} \quad = [\alpha]_{\tilde{\mathbb{B}}} = [C]^{-1} [\alpha]_{\mathbb{B}} \quad (8)$$

**Teorema 1.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ , y sean  $\mathbb{B}$  y  $\tilde{\mathbb{B}}$  bases ordenadas de  $\mathbb{V}$ . Entonces existe una única matriz  $n \times n$ , necesariamente invertible, con elementos de  $\mathbb{F}$ , de modo que satisface (8) para todo vector  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$ . Las columnas de  $[C]$  están dadas por  $C_{(j)} = [\tilde{\alpha}_j]_{\mathbb{B}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema 2.** Supóngase que  $[C]$  es una matriz invertible  $n \times n$  sobre  $\mathbb{F}$ . Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{F}$ , y sea  $\mathbb{B}$  una base ordenada de  $\mathbb{V}$ . Entonces existe una única base ordenada  $\tilde{\mathbb{B}}$  de  $\mathbb{V}$ , tal que se satisface (8) para todo vector  $\alpha$  en  $\mathbb{V}$ .

## 4. TRANSFORMACION LINEAL

### 4.1. FUNDAMENTOS

#### 4.1.1. Definición

Sean  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$  dos espacios vectoriales sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ . Una *transformación lineal* de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$  es una función o aplicación  $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ , tal que

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta) \quad (1)$$

para todos los vectores  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\mathbb{V}$  y todos los escalares  $c$  de  $\mathbb{F}$ . En otras palabras, una transformación lineal preserva las combinaciones lineales.

Si  $\mathbb{V}$  es cualquier espacio vectorial, la *transformación lineal*  $I$ , definida por  $I(\alpha) = \alpha$ , es una transformación lineal. La *transformación cero*  $\theta$ , definida por  $\theta\alpha = \theta$ , es una transformación lineal de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{V}$ .

**Teorema 1.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita  $n$  sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ , sea  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  una base ordenada de  $\mathbb{V}$ . Sean  $\mathbb{W}$  un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo  $\mathbb{F}$  y  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  vectores cualesquiera de  $\mathbb{W}$ . Entonces, existe una única transformación lineal  $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ , tal que  $T(\alpha_j) = \beta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

#### 4.1.2. Espacio Rango

Si  $T$  es una transformación lineal de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$ , entonces la imagen  $\mathcal{R}_T$  de la transformación  $T$  no es sólo un subconjunto de  $\mathbb{W}$ , sino que es un subespacio del espacio lineal  $\mathbb{W}$ . Sea  $\mathcal{R}_T$  la *imagen* o el *espacio rango* de  $T$ ; esto es, el conjunto de todos los vectores  $\beta$  de  $\mathbb{W}$ , tales que  $\beta = T(\alpha)$ , para algún  $\alpha$  en  $\mathbb{V}$ . Sean  $\beta_1$  y  $\beta_2$  de  $\mathcal{R}_T$  y sea  $c$  un escalar de  $\mathbb{F}$ . Existen vectores  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de  $\mathbb{V}$ , tales que  $T(\alpha_1) = \beta_1$  y  $T(\alpha_2) = \beta_2$ . Como  $T$  es lineal entonces  $T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2$ , lo que dice que  $c\beta_1 + \beta_2$  pertenece también a  $\mathcal{R}_T$ . El *rango* de  $T$  es la dimensión de la imagen de  $T$ ,  $\mathcal{R}_T$ .

#### 4.1.3. Espacio Nulo

Otro subespacio interesante asociado a la transformación lineal  $T$  es el conjunto  $\mathcal{N}_T$ , que consta de los vectores  $\alpha$  en  $\mathbb{V}$ , tales que  $T(\alpha) = \theta$ . El conjunto  $\mathcal{N}_T$  es un subespacio de  $\mathbb{V}$ , pues

- (a)  $T(\theta) = \theta$ , con lo que  $\mathcal{N}_T$  no es vacío.

- (b) Si  $T(\alpha_1) = T(\alpha_2) = \theta$ , entonces  $T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\theta + \theta = \theta$ , con lo que  $c\alpha_1 + \alpha_2$  pertenece a  $N_T$ . Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre el cuerpo  $F$  y sea  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . El *espacio nulo* de  $T$  es el conjunto de todos los vectores  $\alpha$  de  $V$ , tales que  $T(\alpha) = \theta$ . Si  $V$  es de dimensión finita. La *nulidad* de  $T$  es la dimensión del espacio nulo de  $T$ ,  $N_T$ .

**Teorema 2.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre el cuerpo  $F$  y sea  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . Supóngase que  $V$  es de dimensión finita. Entonces,

$$\dim(R_T) + \dim(N_T) = \dim(V) \quad (2)$$

O sea que el rango más la nulidad de una transformación lineal es la dimensión de su espacio vectorial dominio.

#### 4.1.4. Algebra de las Transformaciones

Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre el cuerpo  $F$ . Sean  $T$  y  $U$  transformaciones lineales de  $V$  en  $W$ . Si  $\alpha$  es cualquier vector de  $V$ , la función  $(T + U)$  definida por

$$(T + U)(\alpha) = T(\alpha) + U(\alpha) \quad (3)$$

es una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . Si  $c$  es cualquier elemento de  $F$ , la función  $(cT)$  definida por

$$(cT)(\alpha) = c[T(\alpha)] \quad (4)$$

es una transformación lineal de  $V$  en  $W$ .

El conjunto de todas las transformaciones lineales de  $V$  en  $W$ , junto con la adición (3) y la multiplicación escalar (4) es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $F$ . Se representará el espacio de las transformaciones lineales de  $V$  en  $W$  por  $L(V, W)$ . Se debe recordar siempre que  $L(V, W)$  se define sólo cuando  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo  $F$ .

**Teorema 3.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita  $n$  sobre el cuerpo  $F$ , y sea  $W$  un espacio vectorial de dimensión finita  $m$  sobre el cuerpo  $F$ . Entonces el espacio  $L(V, W)$  es de dimensión finita y tiene dimensión  $mn$ .

Sean  $B_\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  y  $B_\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  bases ordenadas de  $V$  y  $W$ , respectivamente. Para cada par de enteros  $(j, k)$  con  $1 \leq j \leq m$  y  $1 \leq k \leq n$  se define una transformación lineal  $\gamma_j^k$  de  $V$  en  $W$  por  $\gamma_j^k(\alpha_i) = \delta_i^k \beta_j$ , donde  $\delta_i^k$  es la delta de kronecker. De acuerdo al teorema 1, existe una transformación lineal única de  $V$  en  $W$  que satisface estas condiciones. Se afirma que las  $mn$  transformaciones  $\gamma_j^k$  forman una base de  $L(V, W)$ .

Sea  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . Para cada  $i$ , con  $1 \leq i \leq n$ , sean  $T_i^1, T_i^2, \dots, T_i^m$  las componentes del vector  $T(\alpha_i)$  en la base ordenada  $B_\beta$ , es decir,  $T(\alpha_i) = T_i^j \beta_j$ . Se quiere demostrar que  $T = T_k^j \gamma_j^k$ . En efecto, tomando  $T_k^j \gamma_j^k(\alpha_i) = T_k^j \delta_i^k \beta_j = T_i^j \beta_j = T(\alpha_i)$ , lo que demuestra lo supuesto. Se debe entender que los escalares  $T_1^1, T_1^2, \dots, T_n^m$  son las coordenadas de  $T$  en la base ordenada  $B_\gamma = \{\gamma_1^1, \dots, \gamma_m^n\}$ . Normalmente estas coordenadas se disponen en arreglos matriciales de  $m \times n$ .

Más adelante cuando se defina el espacio dual de  $V$  se verá que  $B_\gamma = B_\beta \otimes B_\alpha^*$  donde la base de la derecha  $B_\alpha^* = \{f^1, f^2, \dots, f^n\}$  es la base ordenada dual del espacio  $V^*$  que es el espacio dual de  $V$ , siendo los  $f^k$  funcionales lineales sobre  $V$  en el cuerpo  $F$ . La operación  $\otimes$  consiste en hacer la multiplicación ordenada de un elemento de  $B_\beta$  con un elemento de  $B_\alpha^*$ , es decir,  $\gamma_j^k = \beta_j f^k$  (denotado a veces como  $\gamma_j^k = \beta_j \otimes f^k$ ), donde  $f^k(\alpha_i) = \delta_i^k$ .

Cuando el espacio  $V$  es un espacio euclídeo (ver Apéndice D), se escoge como base de la derecha a la base ordenada  $B_\alpha$ , y entonces se deben definir otros funcionales  $f_k(\cdot) = \langle \alpha_k, \cdot \rangle$ . En este caso se tiene entonces que  $T = T^{jk} \gamma_{jk}$  con  $\gamma_{jk} = \beta_j f_k$ , por lo que  $\gamma_{jk}(\alpha_i) = \beta_j f_k(\alpha_i) = g_{ki} \beta_j$ , donde  $g_{ki} = f_k(\alpha_i) = \langle \alpha_k, \alpha_i \rangle$  representa una métrica cuadrática (ver Apéndice B) del espacio  $V$ . Obviamente, las coordenadas  $T_k^j$  y  $T^{jk}$

son diferentes. Las bases ordenadas  $\mathbb{B}_\gamma = \mathbb{B}_\beta \otimes \mathbb{B}_\alpha^* = \{\gamma_j^k\}$  y  $\mathbb{B}'_\gamma = \mathbb{B}_\beta \otimes \mathbb{B}_\alpha = \{\gamma_{jk}\}$  son también diferentes entre sí, no obstante se puede decir que ambas por separado generan el espacio vectorial  $\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ . Todos estos conceptos serán revisados de nuevo más adelante.

**Teorema 4.** Sean  $\mathbb{V}$ ,  $\mathbb{W}$  y  $\mathbb{W}'$  espacios vectoriales sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ . Sea  $T$  una transformación lineal de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$  y  $U$  una transformación lineal de  $\mathbb{W}$  en  $\mathbb{W}'$ . Entonces la función compuesta  $UT = U \circ T$  definida por  $UT(\alpha) = U[T(\alpha)]$  es una transformación lineal de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}'$ .

## 4.2. FUNCIONALES

### 4.2.1. Definición

Si  $\mathbb{V}$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ , una transformación lineal  $f$  de  $\mathbb{V}$  en el cuerpo de escalares  $\mathbb{F}$  se llama un *funcional lineal*. A veces también se le conoce como *forma lineal*. O sea, que  $f \in \mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{F})$ . Esto quiere decir que  $f$  es una función de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{F}$ , tal que

$$f(c\alpha + \beta) = c f(\alpha) + f(\beta) \quad (1)$$

para todos los vectores  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\mathbb{V}$  y todos los escalares  $c$  de  $\mathbb{F}$ . El concepto de funcional lineal es importante para el estudio de los espacios vectoriales de dimensión finita, pues ayuda a organizar y clarificar el estudio de los subespacios, las ecuaciones lineales y las coordenadas.

### 4.2.2. Espacio Dual

Si  $\mathbb{V}$  es un espacio vectorial, el conjunto de todos los funcionales lineales sobre  $\mathbb{V}$  forman, naturalmente, un espacio vectorial. Es el espacio  $\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{F})$ . Se designa este espacio por  $\mathbb{V}^*$  y se le denomina *espacio dual* del espacio  $\mathbb{V}$ . Resumidamente,

$$\mathbb{V}^* = \mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{F}) \quad (2)$$

### 4.2.3. Base Dual

Si  $\mathbb{V}$  es un espacio vectorial de dimensión finita se puede obtener una descripción muy explícita del espacio dual  $\mathbb{V}^*$ . Por el teorema 3 de la sección 4.1 se sabe algo acerca del espacio  $\mathbb{V}^*$

$$\dim(\mathbb{V}^*) = \dim(\mathbb{V}) = n \quad (3)$$

Sea  $\mathbb{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  una base de  $\mathbb{V}$ . Conforme al teorema 1 de la sección 4.1, existe (para cada  $i$ ) un funcional lineal único  $f^i$  en  $\mathbb{V}$ , tal que

$$f^i(\alpha_j) = \delta_j^i \quad (4)$$

De esta forma se obtiene de  $\mathbb{B}$  un conjunto de  $n$  funcionales lineales distintos  $\{f^1, \dots, f^n\}$  sobre  $\mathbb{V}$ . Estos funcionales son también linealmente independientes, pues supóngase que

$$f = \sum_{i=1}^n c_i f^i \quad (5)$$

Entonces

$$f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n c_i f^i(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n c_i \delta_j^i = c_j \quad (6)$$

En particular, si  $f$  es el funcional cero,  $f(\alpha_j) = 0$  para cada  $j$  y, por tanto, los escalares  $c_j$  son todos ceros. Entonces los  $f^1, \dots, f^n$  son  $n$  funcionales linealmente independientes, y como se sabe que  $\mathbb{V}^*$  tiene dimensión  $n$ , deben ser tales que  $\mathbb{B}^* = \{f^1, \dots, f^n\}$  es una base de  $\mathbb{V}^*$ . Esta base se llama *base dual* de  $\mathbb{B}$ .

**Teorema 1.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  y sea  $\mathbb{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  una base de  $\mathbb{V}$ . Entonces existe una única base dual  $\mathbb{B}^* = \{f^1, \dots, f^n\}$  de  $\mathbb{V}^*$ , tal que  $f^i(\alpha_j) = \delta_j^i$ . Para cada funcional lineal  $f$  sobre  $\mathbb{V}$  se tiene

$$f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f^i \quad (7)$$

y para cada vector  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$  se tiene

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f^i(\alpha) \alpha_i \quad (8)$$

La ecuación (8) suministra un buen modo de describir qué es la base dual. Dice que, si  $\mathbb{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  es una base ordenada de  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{B}^* = \{f^1, \dots, f^n\}$  es la base dual, entonces  $f^i$  es precisamente la función que asigna a cada vector  $\alpha$  en  $\mathbb{V}$  la  $i$ -ésima coordenada de  $\alpha$  respecto a la base ordenada  $\mathbb{B}$ . Así que también se pueden llamar los  $f^i$  funciones coordenadas de  $\mathbb{B}$ .

La fórmula (7), cuando se combina con (8), dice que: Si  $f$  pertenece a  $\mathbb{V}^*$  y si  $f(\alpha_i) = c_i$ , entonces

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^n c_i a^i \quad \alpha = \sum_{i=1}^n a^i \alpha_i \quad (9)$$

En otras palabras, si se elige una base ordenada  $\mathbb{B}$  de  $\mathbb{V}$  y se expresa cada vector  $\alpha$  en  $\mathbb{V}$  por su  $n$ -tuple de coordenadas  $(a^1, \dots, a^n)$  respecto a la base  $\mathbb{B}$ , entonces cada funcional lineal en  $\mathbb{V}$  tiene la forma (9). Esta es la generalización natural del caso cuando se tiene el espacio de las  $n$ -uplas ordenadas  $\mathbb{V} = \mathbb{F}^n$  y la base es canónica (cada elemento base es una  $n$ -upla con la unidad en un lugar, cada vez diferente, y los otros lugares ocupados por ceros).

Si  $\mathbb{V}$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  y  $\mathbb{W}$  es un subconjunto de  $\mathbb{V}$ , el *anulador* de  $\mathbb{W}$  es el conjunto  $\mathbb{W}^o \subset \mathbb{V}^*$  de funcionales  $f$  sobre  $\mathbb{V}$ , tales que  $f(\alpha) = 0$ , para todo  $\alpha$  de  $\mathbb{W}$ .

Debe quedar claro que  $\mathbb{W}^o$  es un subespacio de  $\mathbb{V}^*$ , sea o no  $\mathbb{W}$  un subespacio de  $\mathbb{V}$ . Si  $\mathbb{W}$  es el conjunto que consta del solo vector cero, entonces  $\mathbb{W}^o = \mathbb{V}^*$ . Si  $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ , entonces  $\mathbb{W}^o$  es el subespacio cero de  $\mathbb{V}^*$ . Esto es fácil de ver cuando  $\mathbb{V}$  es de dimensión finita.

**Teorema 2.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  y sea  $\mathbb{W}$  un subespacio de  $\mathbb{V}$ . Entonces

$$\dim(\mathbb{W}) + \dim(\mathbb{W}^o) = \dim(\mathbb{V}) \quad (10)$$

#### 4.2.4. Transformación Transpuesta

Supóngase que se tienen dos espacios vectoriales  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$  sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  y una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$ . Entonces  $T$  induce una transformación lineal de  $\mathbb{W}^*$  en  $\mathbb{V}^*$ , como sigue. Supóngase que  $g$  es un funcional lineal en  $\mathbb{W}$ , y sea

$$f(\alpha) = g[T(\alpha)] \quad (11)$$

para cada  $\alpha$  en  $\mathbb{V}$ . Entonces (11) define una función  $f$  de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{F}$ , que es la composición de  $T$ , función de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$ , con  $g$ , función de  $\mathbb{W}$  en  $\mathbb{F}$ . Como ambas,  $T$  y  $g$ , son lineales, entonces  $f$  es también lineal; vale decir que  $f$  es una función lineal en  $\mathbb{V}$ . Así  $T$  suministra una correspondencia  $T^t$  que asocia a cada funcional lineal  $g$  sobre  $\mathbb{W}$  un funcional lineal  $f = T^t \circ g$  sobre  $\mathbb{V}$ , definido por (11). Obsérvese también que  $T^t$  es igualmente una transformación lineal de  $\mathbb{W}^*$ . A la transformación  $T^t$  se la llama *transpuesta* de  $T$ . También se la llama a menudo transformación *adjunta* de  $T$ .

**Teorema 3.** Sean  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$  espacios vectoriales sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ . Para toda transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$ , existe una única transformación lineal  $T^t$  de  $\mathbb{W}^*$  en  $\mathbb{V}^*$ , tal que

$$T^t[g(\alpha)] = [T^t \circ g](\alpha) = [g \circ T](\alpha) = g[T(\alpha)] = f(\alpha) \quad (12)$$

para todo  $g$  de  $\mathbb{W}^*$  y todo  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$ .

**Teorema 4.** Sean  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$  espacios vectoriales sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  y sea  $T$  una transformación lineal de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$ . El espacio nulo de  $T^t$  es el anulador de la imagen de  $T$ . Si  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$  son de dimensión finita, entonces

- (i)  $\dim(\mathcal{R}_{T^t}) = \dim(\mathcal{R}_T)$  (igualdad de rangos de  $T^t$  y  $T$ )
- (ii)  $T^t(\mathbb{W}^*) = N_T^o$  (La imagen de  $T^t$  es el anulador del espacio nulo de  $T$ ).

**Teorema 5.** Sean  $\mathbb{V}$  y  $\tilde{\mathbb{V}}$  espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ . Sea  $\mathbb{B}$  una base ordenada de  $\mathbb{V}$  con base dual  $\mathbb{B}^*$ , y sea  $\tilde{\mathbb{B}}$  una base ordenada de  $\tilde{\mathbb{V}}$  con base dual  $\tilde{\mathbb{B}}^*$ . Sea  $T$  una transformación lineal de  $\mathbb{V}$  en  $\tilde{\mathbb{V}}$  y definamos a la matriz  $[A] = [T]_{\tilde{\mathbb{B}} \otimes \mathbb{B}}$ , o sea la matriz de  $T$  respecto a  $\mathbb{B}$  y  $\tilde{\mathbb{B}}$ , y a la matriz  $[B] = [T]_{\mathbb{B}^* \otimes \tilde{\mathbb{B}}^*}$ , o sea la matriz de  $T^t$  respecto a  $\tilde{\mathbb{B}}^*$  y  $\mathbb{B}^*$ . Entonces,  $[B] = [A]^t$ .

### 4.3. OPERADOR LINEAL

#### 4.3.1. Definición

Si  $\mathbb{V}$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ , un *operador lineal* sobre  $\mathbb{V}$  es una transformación lineal de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{V}$ . En otras palabras, los operadores lineales son transformaciones lineales pertenecientes al conjunto  $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ .

#### 4.3.2. Operador Identidad e Inversa

El *operador identidad*  $I$  sobre  $\mathbb{V}$  se define por  $I(\alpha) = \alpha$  para todo  $\alpha$  en  $\mathbb{V}$ .

**Lema.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ . Sean  $L$ ,  $A_1$  y  $A_2$  operadores lineales sobre  $\mathbb{V}$  e  $I$  el operador identidad también sobre  $\mathbb{V}$ . Sea  $c$  un escalar de  $\mathbb{F}$ . Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

- (i)  $IL = LI = L$ .
- (ii)  $L(A_1 + A_2) = LA_1 + LA_2$  y  $(A_1 + A_2)L = A_1L + A_2L$ .
- (iii)  $c(LA_1) = (cL)A_1 = L(cA_1)$ .

Aún cuando la multiplicación o composición que se tiene en  $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$  no es conmutativa, está muy relacionada con las operaciones en el espacio vectorial  $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ . El contenido del lema anterior, y una parte del teorema 3 de la sección 4.1, dicen que el espacio vectorial  $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ , junto con la operación de composición, es lo que se conoce como *álgebra lineal con identidad*.

Una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$  se dice *invertible* si existe una única transformación  $T^{-1}$  de  $\mathbb{W}$  en  $\mathbb{V}$ , tal que  $T^{-1}T$  es el operador identidad  $I$  sobre  $\mathbb{V}$  y  $TT^{-1}$  es el operador identidad sobre  $\mathbb{W}$ . Más aún,  $T$  es invertible si, y sólo si,

- (a)  $T$  es inyectiva, esto es,  $T(\alpha) = T(\beta)$  implica que  $\alpha = \beta$ .
- (b)  $T$  es sobreyectiva, esto es, la imagen de  $T$  coincide con  $\mathbb{W}$  ( $\mathcal{R}_T = \mathbb{W}$ ).

La simultaneidad de las condiciones (a) y (b) se define como *biyectiva*.

**Teorema 1.** Sean  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$  dos espacios vectoriales sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  y sea  $T$  una transformación lineal de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$ . Si  $T$  es invertible, entonces la transformación inversa  $T^{-1}$  es una transformación lineal de  $\mathbb{W}$  en  $\mathbb{V}$ .

Supóngase que se tiene una transformación lineal invertible  $T$  de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$  y una transformación lineal invertible  $U$  de  $\mathbb{W}$  en  $\mathbb{W}'$ . Entonces  $UT$  es invertible y  $(UT)^{-1} = T^{-1}U^{-1}$ . Esta conclusión no exige la linealidad, ni tampoco implica comprobar separadamente que  $UT$  es inyectiva y sobreyectiva. Todo lo que se necesita es comprobar que  $T^{-1}U^{-1}$  es la inversa a la izquierda e inversa a la derecha de  $UT$ .

Si  $T$  es lineal, entonces  $T(\alpha - \beta) = T(\alpha) - T(\beta)$ , luego  $T(\alpha) = T(\beta)$  si, y sólo si,  $T(\alpha - \beta) = \theta$ . Esto simplifica mucho la comprobación de que  $T$  es inyectiva. Se dice que la transformación lineal  $T$  es *no singular* si  $T(\alpha) = \theta$  implica  $\alpha = \theta$ ; es decir, si el espacio nulo de  $T$  es  $N_T = \{\theta\}$ . Evidentemente,  $T$  es inyectiva si, y sólo si,  $T$  es no singular. El alcance de esta observación es que las transformaciones lineales no singulares son las que preservan la independencia lineal.

**Teorema 2.** Sea  $T$  una transformación lineal de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$ . Entonces  $T$  es no singular si, y sólo si,  $T$  aplica cada subconjunto linealmente independiente de  $\mathbb{V}$  sobre un conjunto linealmente independiente de  $\mathbb{W}$ .

**Teorema 3.** Sean  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$  espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ , tal que  $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$ . Si  $T$  es una transformación lineal de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $T$  es invertible.
- (ii)  $T$  es no singular.
- (iii)  $T$  es sobreyectiva.
- (iv) Si  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  es una base de  $\mathbb{V}$ , entonces  $\{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)\}$  es una base de  $\mathbb{W}$ .
- (v) Existe una base  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de  $\mathbb{V}$ , tal que  $\{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)\}$  es una base de  $\mathbb{W}$ .

El conjunto  $(\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V}), \circ)$  de operadores lineales invertibles sobre el espacio vectorial  $\mathbb{V}$  junto con la operación  $\circ$  de composición proporciona un buen ejemplo de lo que se conoce en álgebra como “grupo” y se definirá más adelante (Sección 6).

#### 4.3.3. Operador Transpuesto

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial euclideo (ver secciones 5.1.1 o D.6.2) sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ . Sea  $A$  un operador lineal sobre  $\mathbb{V}$ . Se denomina el *operador transpuesto* del operador  $A$ , y se denota  $A^t$ , al operador que satisface

$$\langle A(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, A^t(\beta) \rangle \quad (1)$$

La unicidad de  $A^t$  viene establecida por el siguiente teorema.

**Teorema 4.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ , con un producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Entonces existen operadores únicos  $A$  y  $B$  sobre  $\mathbb{V}$ , tales que  $\langle A(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, B(\beta) \rangle$ , para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$  [Lang, 1975].

Resulta que el operador  $B$  que aparece en el teorema es  $A^t$  cuando  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ . El teorema establece que el operador transpuesto del operador  $A$  es único.

Cuando se satisface que  $A = A^t$  se dice que el operador  $A$  es *simétrico*. Cuando se satisface que  $A = -A^t$  se dice que el operador  $A$  es *antisimétrico*. Cuando el operador  $A$  preserva el producto interior en  $\mathbb{R}$ , esto es  $\langle A(\alpha), A(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ , se dice que el operador es un *operador ortogonal*, y se cumple que  $A^t A = A A^t = I$ .

Todo operador  $A$  definido sobre el espacio vectorial real  $\mathbb{V}$  se puede descomponer en

$$S = \frac{1}{2}(A + A^t) \quad W = \frac{1}{2}(A - A^t) \quad (2)$$

donde  $S$  es un operador simétrico y  $W$  es un operador antisimétrico. Es fácil verificar esto y también que  $A = S + W$ .

#### 4.3.4. Operador Adjunto

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial euclideo (ver secciones 5.1.1 o D.6.2) sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$ . Sea  $A$  un operador lineal sobre  $\mathbb{V}$ . Se denomina el *operador adjunto* del operador  $A$ , y se denota  $A^h$ , al operador que satisface

$$\langle A(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, A^h(\beta) \rangle \quad (3)$$

La unicidad del operador adjunto  $A^h$  de nuevo viene establecida por el teorema 4. Resulta que el operador  $B$  que aparece en el teorema 4 es  $A^h$  cuando  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . El teorema establece que el operador adjunto del operador  $A$  es único.

Cuando se satisface que  $A = A^h$  se dice que el operador  $A$  es *hermítico* o *autoadjunto*. Cuando se satisface que  $A = -A^h$  se dice que el operador  $A$  es *anti-hermítico*. Cuando el operador  $A$  preserva el producto interior en  $\mathbb{C}$ , esto es  $\langle A(\alpha), A(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ , se dice que el operador es un *operador unitario*, y se cumple que  $A^h A = A A^h = I$ .

Sean  $\mathbb{V}$  un espacio producto interior complejo de dimensión finita y  $A$  un operador lineal sobre  $\mathbb{V}$ . Se dice que  $A$  es un *operador normal* si conmuta con su adjunto; es decir,  $A A^h = A^h A$ . Todo operador autoadjunto es normal, como también todo operador unitario. Sin embargo, las sumas y productos de operadores normales no son en general normales.

Todo operador  $A$  definido sobre el espacio vectorial complejo  $\mathbb{V}$  se puede descomponer en

$$S = \frac{1}{2}(A + A^h) \quad W = \frac{1}{2}(A - A^h) \quad (4)$$

donde  $S$  es un operador hermítico y  $W$  es un operador antihermítico. Es fácil verificar esto y también que  $A = S + W$ .

#### 4.3.5. Potencia de Operadores

Los operadores se pueden componer un número determinado de veces, entendiéndose esto como una potencia de dicho operador con respecto a la composición de transformaciones lineales, es decir

$$\overbrace{A \circ \cdots \circ A}^{k \text{ veces}} = A^k \quad (5)$$

Un operador lineal  $A$  sobre el espacio vectorial  $\mathbb{V}$  es *idempotente* si  $A^2 = A$ . O sea que  $A(A(\alpha)) = A(\alpha)$  para todo  $\alpha$  en  $\mathbb{V}$ . Este resultado se extiende a cualquier potencia, siendo  $A^k = A$  para  $k > 0$ .

Sea  $A$  un operador lineal sobre el espacio vectorial  $\mathbb{V}$ . Se dice que  $A$  es *nilpotente* si existe un entero positivo  $n$ , tal que  $A^n = 0$ . En este caso se habla de un operador nilpotente de grado  $n$ . El operador  $0$  es el operador nulo que hace  $0(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$ .

Las potencial de operadores lineales se pueden componer linealmente para formar polinomios de operadores lineales. Cuando se procura analizar un operador lineal  $A$ , una de las cosas más útiles de conocer es la clase de los polinomios que anulan a  $A$  (o sea, que producen el operador nulo  $0$ ). Para precisar, supóngase que  $A$  es un operador lineal sobre  $\mathbb{V}$ , espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ . Si  $p$  es un polinomio sobre  $\mathbb{F}$ , entonces  $p(A)$  es también un operador lineal sobre  $\mathbb{V}$ . Si  $q$  es otro polinomio sobre  $\mathbb{F}$ , entonces  $(p+q)(A) = p(A) + q(A)$  y  $(pq)(A) = p(A)q(A)$ . Por tanto, la colección de Polinomios  $p$  que anulan a  $A$ , en el sentido de que  $p(A) = 0$ , es un ideal (ver definición más adelante) en el álgebra  $\mathbb{P}$  de polinomios. Puede ser el ideal cero, es decir, puede ser que  $A$  no sea anulado por cualquier polinomio no nulo. Pero ello no puede suceder si el espacio  $\mathbb{V}$  es de dimensión finita.

Supóngase que  $A$  es un operador lineal sobre el espacio  $\mathbb{V}$  de dimensión  $n$ . Considérese las primeras  $(n^2 + 1)$  potencias  $I, A, A^2, \dots, A^{n^2}$ . Esta es una sucesión de los  $n^2 + 1$  operadores en  $\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ , el espacio de los operadores lineales sobre  $\mathbb{V}$ . El espacio  $\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$  tiene dimensión  $n^2$ . Por tanto, la sucesión de los  $n^2 + 1$  operadores debe ser linealmente dependiente, es decir, se debe tener que  $c_0 I + c_1 A + \cdots + c_{n^2} A^{n^2} = 0$  para los escalares  $c_i$ , no todos nulos. En consecuencia, el ideal de polinomios que anulan a  $A$  tiene un polinomio no nulo de grado  $n^2$  o menor. Todo ideal de polinomios consta de todos los múltiplos de un cierto polinomio mónico fijo, que es el generador del ideal (un polinomio mónico es aquel con el coeficiente de la mayor potencia igual a 1). Así, pues, al operador  $A$  corresponde un múltiplo  $f$  del mónico  $p$  del ideal de polinomios que anulan a  $A$ , con la siguiente propiedad: Si  $f$  es un polinomio sobre  $\mathbb{F}$ , entonces  $f(A) = 0$  si, y sólo si,  $f = pg$ , donde  $g$  es algún polinomio sobre  $\mathbb{F}$ .

Sea  $A$  un operador lineal sobre el espacio vectorial  $\mathbb{V}$  de dimensión finita sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ . El *polinomio minimal* de  $A$  es el polinomio mónico, generador (único) del ideal de polinomios sobre  $\mathbb{F}$  que anulan a  $A$ .

#### 4.3.6. Cambio de Base

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ , y sean  $\mathbb{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  y  $\tilde{\mathbb{B}} = \{\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n\}$  dos bases ordenadas de  $\mathbb{V}$ . Sea  $[Q] = [\{q_1\}, \dots, \{q_n\}]$  una matriz formada por las columnas  $\{q_j\} = \{\tilde{\beta}_j\}_{\mathbb{B}}$  de las coordenadas de los vectores bases  $\tilde{\beta}_j$  en la base  $\mathbb{B}$ . La matriz  $[Q]$  puede interpretarse como las coordenadas de un operador lineal  $\tilde{Q}$  en la base  $\mathbb{B}$ , tal que  $\tilde{\beta}_j = \tilde{Q}(\beta_j)$ . O sea, que  $[Q] = [\tilde{Q}]_{\mathbb{B}}$ .



**Teorema 5.** Bajo las consideraciones arriba mencionadas se satisface, para todo vector  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$  y todo operador lineal  $A$  sobre  $\mathbb{V}$ , que

$$\{\alpha\}_{\tilde{\mathbb{B}}} = [\mathcal{Q}]_{\mathbb{B}}^{-1} \{\alpha\}_{\mathbb{B}} \quad [A]_{\tilde{\mathbb{B}}} = [\mathcal{Q}]_{\mathbb{B}}^{-1} [A]_{\mathbb{B}} [\mathcal{Q}]_{\mathbb{B}}^{-1} \quad (6)$$

En la obtención de la relación (6.b) se ha considerado que  $\{A(\alpha)\}_{\mathbb{B}} = [A]_{\mathbb{B}} \{\alpha\}_{\mathbb{B}}$ . Formalmente, esto es solamente posible si se interpreta que

$$\{A(\alpha)\}_{\mathbb{B}} = [A]_{\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}^*} \{\alpha\}_{\mathbb{B}} \quad \mathbb{B}^* = \{\beta^1, \dots, \beta^n\} \quad (7)$$

donde  $\mathbb{B}^*$  es la correspondiente base del espacio dual  $\mathbb{V}^*$ .

#### 4.4. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  y sea  $A$  un operador lineal sobre  $\mathbb{V}$ . Un *autovalor* (o *valor propio*) de  $A$  es un escalar  $c$  de  $\mathbb{F}$ , tal que existe un vector no nulo  $\alpha$  con

$$A(\alpha) = c\alpha \quad (1)$$

Si  $c$  es un autovalor de  $A$ , entonces

- (a) Cualquier  $\alpha$  tal que  $A(\alpha) = c\alpha$  se llama Un *autovector* (o *vector propio*) de  $A$  asociado al autovalor  $c$ .
- (b) La colección de todos los  $\alpha$ , tales que  $A(\alpha) = c\alpha$  se llama *espacio propio* asociado a  $c$ .

Los autovalores se llaman también a menudo valores propios, raíces características, eigenvalores, valores característicos o valores espectrales. De igual manera se nombran a los autovectores.

Si  $A$  es cualquier operador y  $c$  es cualquier escalar, el conjunto de los vectores  $\alpha$  tales que  $A(\alpha) = c\alpha$  es un subespacio de  $\mathbb{V}$ . Es el espacio nulo del operador lineal  $(A - cI)$ . Se llama a  $c$  un autovalor de  $A$  si este subespacio es distinto del subespacio nulo  $\{\theta\}$ , es decir, si el operador  $(A - cI)$  no es inyectivo. Si el espacio soporte  $\mathbb{V}$  es de dimensión finita, el determinante de la matriz del operador lineal  $(A - cI)$  (en cualquier base) es nulo cuando dicho operador no es inyectivo. Estos resultados se resumen en el siguiente teorema:

**Teorema 1.** Sea  $A$  un operador lineal sobre el espacio vectorial  $\mathbb{V}$  de dimensión finita y sea  $c$  un escalar. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) El escalar  $c$  es un autovalor de  $A$ .
- (ii) El operador  $(A - cI)$  es singular (no invertible).
- (iii)  $\det[A - cI]_{\mathbb{B}} = 0$ .

La base  $\mathbb{B}$  en (iii) no importa ya que todas las matrices del operador  $A$  para las distintas bases, son semejantes entre sí, y las matrices semejantes poseen todas el mismo determinante. Se denomina *polinomio característico* del operador  $A$  a la función  $f(x) = (-1)^n \det[A - xI]_{\mathbb{B}}$ , que se puede observar que es un polinomio mónico de grado  $n$  (coeficiente de  $x^n$  es 1), donde  $n = \dim(\mathbb{V})$ . Así que los autovalores  $c$  de  $A$  son los escalares de  $\mathbb{F}$  raíces del polinomio característico, es decir, los autovalores satisfacen  $f(c) = 0$ .

Sea  $A$  un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita  $\mathbb{V}$ . Se dice que  $A$  es *diagonalizable* si existe una base de  $\mathbb{V}$ , tal que cada vector suyo sea un autovector de  $A$ . En esta base la matriz del operador será diagonal con sus elementos diagonales siendo los autovalores.

La razón del nombre es clara. En efecto, si existe una base ordenada  $\mathbb{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de  $\mathbb{V}$  en la que cada  $\alpha_i$  es un autovector de  $A$ , entonces la matriz  $[A]_{\mathbb{B}}$  es diagonal.

**Lema.** Supóngase que  $A(\alpha) = c\alpha$ . Si  $f$  es cualquier polinomio, entonces  $[f(A)](\alpha) = f(c)\alpha$ .

**Lema.** Sea  $A$  un operador lineal sobre un espacio vectorial  $\mathbb{V}$  de dimensión finita. Sean  $c_1, \dots, c_k$  los autovalores distintos de  $A$ , y sea  $\mathbb{W}_i$  el espacio de los autovectores asociados con el autovalor  $c_i$ . Si  $\mathbb{W} = \mathbb{W}_1 + \dots + \mathbb{W}_k$ , entonces

$$\dim(\mathbb{W}) = \dim(\mathbb{W}_1) + \dots + \dim(\mathbb{W}_k) \quad (2)$$

En efecto, si  $\mathbb{B}_i$  es una base ordenada de  $\mathbb{W}_i$ , entonces  $\mathbb{B} = \{\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_k\}$  es una base ordenada de  $\mathbb{W}$ .

Normalmente, cuando se forma la suma  $\mathbb{W}$  de subespacios  $\mathbb{W}_i$ , se expresa que  $\dim(\mathbb{W}) < \dim(\mathbb{W}_1) + \dots + \dim(\mathbb{W}_k)$ , por las relaciones lineales que pueden existir entre los vectores de los diferentes espacios. Este lema afirma que los espacios propios asociados a los diferentes autovalores son independientes entre sí.

**Teorema 2.** Sea  $A$  un operador lineal sobre un espacio vectorial  $\mathbb{V}$  de dimensión finita. Sean  $c_1, \dots, c_k$  los autovalores distintos de  $A$  y sean  $\mathbb{W}_i$  el espacio nulo de  $(A - c_i I)$ . lo siguiente es equivalente

- (i)  $A$  es diagonalizable.
- (ii) El polinomio característico de  $A$  es  $f(x) = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$  y  $\dim(\mathbb{W}_i) = d_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .
- (iii)  $\dim(\mathbb{W}_1) + \dots + \dim(\mathbb{W}_k) = \dim(\mathbb{V})$ .

**Teorema 3. (Caley-Hamilton).** Sea  $A$  un operador lineal sobre un espacio vectorial  $\mathbb{V}$  de dimensión finita. Si  $f$  es el polinomio característico de  $A$ , entonces  $f(A) = 0$ ; es decir, el polinomio minimal divide al polinomio característico de  $A$ .

## 5. ESPACIO PRODUCTO INTERIOR

### 5.1. FUNDAMENTOS

#### 5.1.1. Producto Interior

Sean  $\mathbb{F}$  el cuerpo de los números reales o complejos, y  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ . Un *producto interior* sobre  $\mathbb{V}$  es una función que asigna a cada par ordenado de vectores  $\alpha, \beta$  de  $\mathbb{V}$  un escalar  $\langle \alpha, \beta \rangle$  de  $\mathbb{F}$  de tal modo que para cualesquiera  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  de  $\mathbb{V}$  y todos los escalares  $c$  de  $\mathbb{F}$

- (a)  $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$
- (b)  $\langle c\alpha, \beta \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle$
- (c)  $\langle \alpha, \beta \rangle = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle}$
- (d)  $\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0$  si  $\alpha \neq 0$ .

Debe observarse que las condiciones (a), (b) y (c) implican que

- (e)  $\langle \alpha, c\beta + \gamma \rangle = \bar{c} \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$

Un *espacio producto interior* (o espacio euclídeo) es un espacio vectorial real o complejo junto con un producto interior definido sobre ese espacio. Un espacio producto interior real de dimensión finita se llama a menudo simplemente *espacio euclideo* (también se acostumbra el término *euclidiano*). Un espacio producto interior complejo se llama a veces *espacio unitario*.

#### 5.1.2. Norma

El producto interior define naturalmente una norma definida por  $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ .

**Teorema 1.** Si  $\mathbb{V}$  es un espacio producto interior, entonces para vectores  $\alpha$  y  $\beta$  cualesquiera de  $\mathbb{V}$  y cualquier escalar  $c$

- (i)  $\|c\alpha\| = |c| \|\alpha\|$
- (ii)  $\|\alpha\| > 0$  para  $\alpha \neq 0$
- (iii)  $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$
- (iv)  $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

La desigualdad en (iii) se llama *desigualdad de Cauchy-Schwarz* y tiene una amplia variedad de aplicaciones.

#### 5.1.3. Ortogonalidad

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  vectores de un espacio producto interior  $\mathbb{V}$ . Entonces  $\alpha$  es *ortogonal* a  $\beta$  si  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ; como esto implica que  $\beta$  es ortogonal a  $\alpha$ , a menudo solo se dirá que  $\alpha$  y  $\beta$  son ortogonales. Si  $\mathbb{W}$  es un conjunto de vectores de  $\mathbb{V}$ , se dice que  $\mathbb{W}$  es un *conjunto ortogonal*, siempre que todos los pares de vectores distintos de

$\mathbb{W}$  sean ortogonales entre sí. Un *conjunto ortonormal* es un conjunto ortogonal  $\mathbb{W}$  con la propiedad adicional de que  $\|\alpha\| = 1$  para todo  $\alpha$  de  $\mathbb{W}$ . El vector cero  $\theta$  es ortogonal a todo vector en  $\mathbb{V}$  y es el único vector con esa propiedad.

**Teorema 2.** Un conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

**Corolario.** Si un vector  $\beta$  es combinación lineal de una sucesión ortogonal de vectores no nulos  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , con  $m \leq \dim(\mathbb{V})$ , entonces  $\beta$  es igual a la combinación lineal particular

$$\beta = \sum_{k=1}^m \frac{\langle \beta, \alpha_k \rangle}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k \quad (1)$$

**Teorema 3.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio producto interior y sean  $\beta_1, \dots, \beta_n$  vectores independientes cualesquiera de  $\mathbb{V}$ . Entonces se puede construir vectores ortogonales  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  en  $\mathbb{V}$  tales que para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ , el conjunto  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  es una base del subespacio generado por  $\beta_1, \dots, \beta_k$ .

La demostración de este teorema se hace mediante un proceso denominado *ortogonalización de Gram-Schmidt*. Este proceso consiste en hallar de forma recurrente los vectores del conjunto  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  en la forma

$$\alpha_k = \beta_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \beta_k, \alpha_i \rangle}{\|\alpha_i\|^2} \alpha_i \quad (2)$$

Para comenzar el proceso recurrente se hace  $\alpha_1 = \beta_1$ .

**Corolario.** Todo espacio producto interior de dimensión finita tiene una base ortonormal.

Supóngase que  $\mathbb{W}$  es un subespacio de un espacio producto interior  $\mathbb{V}$ , y sea  $\beta$  un vector arbitrario en  $\mathbb{V}$ . Una *mejor aproximación* a  $\beta$  por vectores de  $\mathbb{W}$  es un vector  $\alpha$  de  $\mathbb{W}$ , tal que  $\|\beta - \alpha\| \leq \|\beta - \gamma\|$  para todo vector  $\gamma$  en  $\mathbb{W}$ .

**Teorema 4.** Sea  $\mathbb{W}$  un subespacio de un espacio producto interior  $\mathbb{V}$ , y sea  $\beta$  un vector de  $\mathbb{V}$ . Entonces,

- (i) El vector  $\alpha$  en  $\mathbb{W}$  es una mejor aproximación a  $\beta$  por vectores de  $\mathbb{W}$  si, y sólo si,  $\beta - \alpha$  es ortogonal a todo vector de  $\mathbb{W}$ .
- (ii) Si existe una mejor aproximación a  $\beta$  por vectores de  $\mathbb{W}$ , esta es única.
- (iii) Si  $\mathbb{W}$  es de dimensión finita y  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  es cualquier base ortogonal de  $\mathbb{W}$ , entonces el vector

$$\alpha = \sum_{k=1}^m \frac{\langle \beta, \alpha_k \rangle}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k \quad (3)$$

es la (única) mejor aproximación a  $\beta$  por vectores de  $\mathbb{W}$ .

#### 5.1.4. Complemento Ortogonal

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio producto interior y  $\mathbb{U}$  cualquier conjunto de vectores en  $\mathbb{V}$ . El *complemento ortogonal* de  $\mathbb{U}$  es el conjunto  $\mathbb{U}^\perp$  de los vectores de  $\mathbb{V}$  ortogonales a todo vector de  $\mathbb{U}$ . El complemento ortogonal de  $\mathbb{V}$  es el subespacio cero  $\{\theta\}$  y, recíprocamente. Si  $\mathbb{U}$  es cualquier subconjunto de  $\mathbb{V}$ , su complemento ortogonal  $\mathbb{U}^\perp$  es siempre un subespacio de  $\mathbb{V}$ .

En el teorema 4, la propiedad característica del vector  $\alpha$  es que es el único vector de  $\mathbb{W}$  tal que  $\beta - \alpha$  pertenece a  $\mathbb{W}^\perp$ . Siempre que exista el vector  $\alpha$  del teorema 4, se le llama *proyección ortogonal de  $\beta$  sobre  $\mathbb{W}$* . Si todo vector de  $\mathbb{V}$  tiene proyección ortogonal sobre  $\mathbb{W}$ , la aplicación que asigna a cada vector de  $\mathbb{V}$  su proyección ortogonal sobre  $\mathbb{W}$ , se llama *proyección ortogonal de  $\mathbb{V}$  sobre  $\mathbb{W}$* .

Por el teorema 4, la proyección ortogonal de un espacio producto interior sobre un subespacio de dimensión finita siempre existe. Pero también este teorema implica el siguiente resultado.

**Corolario.** Sean  $\mathbb{V}$  un espacio producto interior,  $\mathbb{W}$  un subespacio de dimensión finita y  $P$  la proyección ortogonal de  $\mathbb{V}$  sobre  $\mathbb{W}$ . Entonces, la aplicación  $\beta \rightarrow \beta - P(\beta)$  es la proyección ortogonal de  $\mathbb{V}$  sobre  $\mathbb{W}^\perp$ .

**Teorema 5.** Sea  $\mathbb{W}$  un subespacio de dimensión finita de un espacio producto interior  $\mathbb{V}$  y sea  $P$  la proyección ortogonal de  $\mathbb{V}$  sobre  $\mathbb{W}$ . Entonces  $P$  es un operador lineal idempotente de  $\mathbb{V}$ ,  $\mathbb{W}^\perp$  es el espacio nulo de  $P$  y  $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$ .

**Corolario.** Bajo las condiciones del teorema,  $P' = I - P$  es la proyección ortogonal de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{W}^\perp$ .  $P'$  es un operador lineal idempotente con espacio nulo  $\mathbb{W}$ .

### 5.1.5. Operador Positivo

Un operador lineal  $A$  sobre un espacio producto interior de dimensión finita  $\mathbb{V}$  es *no negativo* (o *positivo de forma no estricta*) si  $A = A^h$  y  $\langle A(\alpha), \alpha \rangle \geq 0$  para todo  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$ . Un operador lineal  $A$  es *positivo* (o *positivo de forma estricta*) si  $A = A^h$  y  $\langle A(\alpha), \alpha \rangle > 0$  para todo  $\alpha \neq 0$  de  $\mathbb{V}$ .

Más adelante se verá que existe una correspondencia biunívoca entre la clase de operadores positivos y la colección de todas las forma positivas de  $\mathbb{V}$ .

## 5.2. DESCOMPOSICION ESPECTRAL

**Teorema 1.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio producto interior real (complejo) de dimensión finita y sea  $A$  un operador lineal simétrico (normal) sobre  $\mathbb{V}$ . Entonces existe una base ortonormal de  $\mathbb{V}$  en la que cada vector es un autovector de  $A$ .

**Teorema 2. (Teorema Espectral).** Sea  $A$  un operador simétrico (normal) sobre un espacio producto interior real (complejo) de dimensión finita  $\mathbb{V}$ . Sean  $c_1, \dots, c_k$  los autovalores distintos de  $A$ . Sea  $\mathbb{W}_j$  el espacio propio asociado a  $c_j$  y  $A_j$  la proyección ortogonal de  $\mathbb{V}$  sobre  $\mathbb{W}_j$ . Entonces,  $\mathbb{W}_j$  es ortogonal a  $\mathbb{W}_i$  si  $i \neq j$ ,  $\mathbb{V}$  es la suma directa de  $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_k$  y

$$A = c_1 A_1 + \dots + c_k A_k \quad (1)$$

La descomposición (1) se llama *descomposición espectral* de  $A$ . Esta terminología proviene en parte de aplicaciones físicas que han hecho que se defina el *espectro* de un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita como el conjunto de autovalores para el operador. Es importante observar que las proyecciones ortogonales  $A_1, \dots, A_k$  están asociadas canónicamente con  $A$ . En realidad, son polinomios en  $A$  como se verá en el siguiente corolario.

**Corolario.** Si el multiplicador de Lagrange  $L_i(x)$  se define como

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \left( \frac{x - c_j}{c_i - c_j} \right) \quad f(x) = \sum_{i=1}^k f(c_i) L_i(x) \quad (2)$$

para la función polinómica  $f(x)$  de grado  $k - 1$ , entonces  $A_i = L_i(A)$  para  $1 \leq i \leq k$ .

El corolario anterior lo que realmente quiere decir es que, como las proyecciones  $A_i$  son ortogonales entre si, entonces

$$A = \sum_{i=1}^k c_i A_i \quad A^m = \sum_{i=1}^k c_i^m A_i \quad f(A) = \sum_{i=1}^k f(c_i) L_i(A) = \sum_{i=1}^k f(c_i) A_i \quad (3)$$

para una función polinómica cualquiera  $f(x)$  de grado  $k - 1$ . La expresión (3.a) se denomina *la resolución espectral* del operador  $A$  diagonalizable.

## 6. GRUPO

### 6.1. DEFINICION

Un grupo  $(\mathcal{G}, *)$  consta de lo siguiente:

- (i) Un conjunto  $\mathcal{G}$  no vacío.
- (ii) Una operación  $*$  (o ley de composición interna) que asocia a cada par de elementos  $x, y$  de  $\mathcal{G}$ , un elemento  $x * y$  de  $\mathcal{G}$  de tal modo que

(a)  $x * (y * z) = (x * y) * z$  para todo  $x, y, z$  en  $\mathcal{G}$  (Asociatividad).

(b) Existe un *elemento neutro*  $e$  en  $\mathcal{G}$ , tal que  $e * x = x * e = x$  para todo  $x$  de  $\mathcal{G}$ .

(c) A cada elemento  $x$  de  $\mathcal{G}$  le corresponde un *elemento inverso*  $x^{-1}$  en  $\mathcal{G}$ , tal que  $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ .

De las propiedades (a) (b) y (c) se deduce fácilmente que en todo grupo, el inverso de la composición de dos elementos es igual a la composición de los inversos en orden permutado; esto es,  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ .

El subconjunto no vacío  $\mathbb{H}$ , del grupo  $\mathcal{G}$ , es un *subgrupo* de  $(\mathcal{G}, *)$  si, y sólo si,  $(\mathbb{H}, *)$  es un grupo.

**Teorema 1.** Si  $\mathbb{H}$  es un subconjunto no vacío del grupo  $(\mathcal{G}, *)$ , que verifica que  $a * b^{-1} \in \mathbb{H}$  para todo  $a, b \in \mathbb{H}$ , entonces  $(\mathbb{H}, *)$  es un subgrupo de  $(\mathcal{G}, *)$ .

### 6.2. GRUPO ABELIANO

Un grupo se dice *grupo abeliano* o grupo conmutativo, si, adicionalmente, la operación  $*$  definida en (ii) satisface la condición:

(d)  $x * y = y * x$  para cada  $x, y$  en  $\mathcal{G}$ .

### 6.3. HOMOMORFISMO ENTRE GRUPOS

Sean los grupos  $(\mathcal{G}, *)$  y  $(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{*})$ . La función  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}$  es un homomorfismo si, y sólo si, la imagen de la composición en  $\mathcal{G}$  es igual a la composición de las imágenes en  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Esto es, si

$$f(a * b) = f(a) \tilde{*} f(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{G} \quad (1)$$

Esta definición de homomorfismo entre grupos puede interpretarse como una particularización del homomorfismo entre conjuntos definido en la sección 1.6. También son válidos en este caso la clasificación de homomorfismo especiales descrita en aquella oportunidad.

El *núcleo*  $N_f$  de un homomorfismo  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}$  es la totalidad de los elementos de  $\mathcal{G}$ , cuyas imágenes por  $f$  se identifican con el elemento neutro de  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Es decir,

$$N_f = \{ x \in \mathcal{G} \mid f(x) = \tilde{e} \} \quad (2)$$

La *imagen* o *rango*  $R_f$  de un homomorfismo  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}$  es la totalidad de las imágenes de los elementos de  $\mathcal{G}$ . Es decir,

$$R_f = \{ f(x) \in \tilde{\mathcal{G}} \mid x \in \mathcal{G} \} \quad (3)$$

El homomorfismo entre grupos posee ciertas propiedades que se enumeran a continuación:

- (i) La imagen del elemento neutro del grupo  $(\mathcal{G}, *)$  es el elemento neutro del grupo  $(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{*})$ , esto es  $f(e) = \tilde{e}$ .
- (ii) La imagen del inverso de todo elemento del grupo  $(\mathcal{G}, *)$  es igual al inverso de su imagen en el grupo  $(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{*})$ , esto es  $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$ .

- (iii) El núcleo  $N_f$  de todo homomorfismo de grupos  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}$  es un subgrupo de  $\mathcal{G}$ .
- (iv) Un homomorfismo  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}$  es un monomorfismo si, y sólo si, el núcleo es unitario, o sea  $N_f = \{e\}$ .
- (v) La imagen  $R_f$  de todo homomorfismo de grupos  $f : \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}$  es un subgrupo de  $\tilde{\mathcal{G}}$ .

## 7. ANILLO

Un *anillo* es un conjunto  $\mathbb{K}$ , junto con dos operaciones: una llamada *adición*  $(x, y) \rightarrow x + y$  y otra llamada *multiplicación*  $(x, y) \rightarrow x * y$ , que satisfacen:

- (a)  $\mathbb{K}$  es un grupo (aditivo) conmutativo para la operación de adición.
- (b)  $(x * y) * z = x * (y * z)$ , la multiplicación es asociativa.
- (c)  $x * (y + z) = x * y + x * z$ ,  $(y + z) * x = y * x + z * x$ , se cumplen las dos leyes distributivas.

Si  $x * y = y * x$  para todo  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{K}$ , se dice que el anillo es un *anillo conmutativo*. Si existe un elemento 1, tal que  $1 * x = x * 1 = x$  para todo  $x$ , se dice que  $\mathbb{K}$  es un *anillo con unidad*, y 1 es la *unidad* de  $\mathbb{K}$ .

Los anillos más usados son los anillos conmutativos con unidad. Tales anillos pueden ser descritos brevemente como un conjunto  $\mathbb{K}$ , junto con dos operaciones que cumplen todos los axiomas de cuerpo dados en el capítulo 2, excepto posiblemente el axioma (viii) y la condición  $1 \neq 0$ . Así, un cuerpo es un anillo conmutativo con unidad distinta de cero, en que a cada  $x$  distinto de 0 (cero) le corresponde un elemento  $x^{-1}$ , tal que  $x * x^{-1} = 1$ .

## 8. MODULO

### 8.1. DEFINICION

Si  $\mathbb{K}$  es un anillo conmutativo con unidad, un módulo sobre  $\mathbb{K}$  es un sistema algebraico que se comporta en forma semejante a un espacio vectorial en que  $\mathbb{K}$  hace las veces del cuerpo escalar. Para precisar, se dice que  $\mathbb{V}$  es un *módulo* sobre  $\mathbb{K}$  si:

- (1) Existe una operación adición  $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha + \beta$  en  $\mathbb{V}$ , respecto de la cual  $\mathbb{V}$  es un grupo conmutativo.
- (2) Existe una operación multiplicación por un escalar  $(c, \alpha) \rightarrow c\alpha$  de elementos  $\alpha$  en  $\mathbb{V}$  y  $c$  en  $\mathbb{K}$ , tal que

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2)\alpha &= c_1\alpha + c_2\alpha & (c_1 c_2)\alpha &= c_1(c_2\alpha) \\ c(\alpha_1 + \alpha_2) &= c\alpha_1 + c\alpha_2 & 1\alpha &= \alpha \end{aligned}$$

Una *base* para el módulo  $\mathbb{V}$  es un subconjunto linealmente independiente que genera el módulo. Esta es la misma definición que se dió para espacios vectoriales. Se sabe que existe una base en todo espacio vectorial generado por un número finito de vectores. Pero este no es el caso para los módulos. Por ello se necesitan nombres especiales para los módulos que tiene base y los que son generados por un número finito de elementos. Un módulo puede ser finititamente generado sin tener una base finita.

El módulo  $\mathbb{V}$  se dice *módulo libre* si tiene una base. Si  $\mathbb{V}$  tiene una base finita de  $n$  elementos, entonces  $\mathbb{V}$  se dice que es un *módulo libre* con  $n$  generadores.

El módulo  $\mathbb{V}$  es *finitamente generado* si tiene un subconjunto finito que genere  $\mathbb{V}$ . El *rango* de un módulo finitamente generado es el menor entero  $k$ , tal que los  $k$  elementos generen  $\mathbb{V}$ .

**Teorema 1.** Sea  $\mathbb{K}$  un anillo conmutativo con unidad. Si  $\mathbb{V}$  es un módulo libre sobre  $\mathbb{K}$  con  $n$  generadores, entonces el rango de  $\mathbb{V}$  es  $n$ .

En pocas palabras lo que este teorema quiere decir es que “módulo libre de rango  $n$ ” es lo mismo que “módulo libre con  $n$  generadores”.

## 8.2. MODULO DUAL

Si  $\mathbb{V}$  es un módulo libre sobre  $\mathbb{K}$ , el *módulo dual*  $\mathbb{V}^*$  consta de todas las funciones lineales  $f$  de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{K}$ . Si  $\mathbb{V}$  es un módulo libre de rango  $n$ , entonces  $\mathbb{V}^*$  es también un módulo libre de rango  $n$ . Si  $\mathbb{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  es una base de ordenada de  $\mathbb{V}$ , existe una *base dual*  $\mathbb{B}^* = \{f^1, \dots, f^n\}$  asociada del módulo  $\mathbb{V}^*$ . La función  $f^i$  asigna a cada  $\alpha$  de  $\mathbb{V}$  su  $i$ -ésima coordenada respecto de  $\mathbb{B}$

$$\alpha = f^1(\alpha) \beta_1 + \dots + f^n(\alpha) \beta_n \quad (1)$$

Si  $f$  es una función lineal sobre  $\mathbb{V}$ , entonces

$$f = f(\beta_1) f^1 + \dots + f(\beta_n) f^n \quad (2)$$

## 9. FORMAS Y TENSORES

### 9.1. FUNCIONES MULTILINEALES

En lo que sigue se puede leer “módulo libre de rango  $n$  sobre el anillo  $\mathbb{K}$  conmutativo y con unidad” en lugar de “espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ ” y los resultados serán igualmente válidos.

Sea  $\mathbb{F}$  un cuerpo y sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ . Si  $r$  es un entero positivo, una función  $L$  de  $\mathbb{V}^r = \mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V}$  ( $r$  veces) en  $\mathbb{F}$  se dice *multilinear* si  $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  es lineal como función de cada  $\alpha_i$ , cuando los otros  $\alpha_j$  se dejan fijos; esto es, si para cada  $i$

$$L(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \beta_i, \dots, \alpha_r) = c L(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r) + L(\alpha_1, \dots, \beta_i, \dots, \alpha_r) \quad (1)$$

Una función multilinear en  $\mathbb{V}^r$  se llama también *forma multilinear* de orden  $r$  (ó simplícadamente *forma  $r$ -lineal*). Tales funciones en un contexto más general se denominan *tensores* sobre  $\mathbb{V}$ . Particularmente en (1), se habla de *tensores covariantes* de orden  $r$  (ó simplemente *formas* de orden  $r$ ).

La colección de todas las funciones multilineales de  $\mathbb{V}^r$  sobre  $\mathbb{F}$  se denotará  $\mathbb{L}_r(\mathbb{V}) = \mathbb{L}(\mathbb{V}^r, \mathbb{F})$ . Cuando  $r = 1$ , entonces se tiene que  $\mathbb{L}_1(\mathbb{V}) = \mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{F}) = \mathbb{V}^*$ , el espacio dual de funciones lineal sobre  $\mathbb{V}$ . Las funciones lineales pueden ser también usadas para construir ejemplos de formas multilineales de órdenes más elevados. Si  $f^1, \dots, f^r$  son funciones lineales sobre  $\mathbb{V}$ , defínase

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = f^1(\alpha_1) f^2(\alpha_2) \dots f^r(\alpha_r) \quad (2)$$

Evidentemente,  $L$  es una forma  $r$ -lineal.

Así como se definió una función multilinear de  $\mathbb{V}^r$  sobre  $\mathbb{F}$ , también se puede definir una función multilinear de  $\mathbb{V}^{*s} = \mathbb{V}^* \times \dots \times \mathbb{V}^*$  ( $s$  veces) en  $\mathbb{F}$ . La colección de todas las funciones multilineales de  $\mathbb{V}^{*s}$  sobre  $\mathbb{F}$  se denotará  $\mathbb{L}^s(\mathbb{V}) = \mathbb{L}(\mathbb{V}^{*s}, \mathbb{F})$ . Todas las funciones multilineales en  $\mathbb{V}^{*s}$ , pertenecientes a  $\mathbb{L}^s(\mathbb{V})$ , se denominan *tensores contravariantes* de orden  $s$  (ó simplemente *tensores* de orden  $s$ ).

Los tensores contravariantes y covariantes se pueden mezclar para dar origen a las funciones multilineales de  $\mathbb{V}^r \times \mathbb{V}^{*s} = \mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V} \times \mathbb{V}^* \times \dots \times \mathbb{V}^*$  ( $r$  veces en  $\mathbb{V}$  y  $s$  veces en  $\mathbb{V}^*$ ) en  $\mathbb{F}$ . La colección de todas las funciones multilineales de  $\mathbb{V}^r \times \mathbb{V}^{*s}$  sobre  $\mathbb{F}$  se denotará  $\mathbb{L}_r^s(\mathbb{V}) = \mathbb{L}(\mathbb{V}^r \times \mathbb{V}^{*s}, \mathbb{F})$ . En este caso las funciones multilineales se denominan *tensores mixtos* covariantes de orden  $r$  y cotrariantes de orden  $s$ . Se tiene los siguientes casos especiales  $\mathbb{L}_0^1(\mathbb{V}) = \mathbb{V}$ ,  $\mathbb{L}_1^0(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^*$ ,  $\mathbb{L}_2^0(\mathbb{V}) = \mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V}^*)$ ,  $\mathbb{L}_1^1(\mathbb{V}) = \mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ , y se hace la convención que  $\mathbb{L}_0^0(\mathbb{V}) = \mathbb{F}$ .

El dominio de las funciones multilineales no necesariamente debe estar ordenado de la forma como se planteó para los tensores mixtos arriba. Generalizando, los dominios pueden formarse con la multiplicación ordenada de los espacios vectoriales  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{V}^*$  en la secuencia y el número de veces que se requiera en cada uno. En este último caso es importante conservar en memoria los lugares ocupados por las componentes covariantes

y cotrariantes, las cuales pueden estar entremezcladas. No obstante, y sin pérdida de generalidad, se agruparán en lo que sigue los componentes covariantes y luego los contravariantes.

Dados  $A \in \mathbb{L}_{r_1}^{s_1}(\mathbb{V})$  y  $B \in \mathbb{L}_{r_2}^{s_2}(\mathbb{V})$ , el *producto tensorial* de  $A$  y  $B$  es el tensor  $A \otimes B \in \mathbb{L}_{r_1+r_2}^{s_1+s_2}(\mathbb{V})$  definido por

$$(A \otimes B)(\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}, \beta_1, \dots, \beta_{r_2}, f^1, \dots, f^{s_1}, g^1, \dots, g^{s_2}) = A(\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}, f^1, \dots, f^{s_1}) B(\beta_1, \dots, \beta_{r_2}, g^1, \dots, g^{s_2}) \quad (3)$$

donde  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{V}$  y  $f^i, g^i \in \mathbb{V}^*$ . El producto tensorial  $\otimes$  es bilineal, asociativo, pero no conmutativo.

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita. Si  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  es una base de  $\mathbb{V}$  y  $\{f^1, \dots, f^n\}$  es la base dual, entonces

$$\{f^{i_1} \otimes \dots \otimes f^{i_r} \otimes \beta_{j_1} \otimes \dots \otimes \beta_{j_s} \mid i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s = 1, \dots, n\} \quad (4)$$

es una base de  $\mathbb{L}_r^s(\mathbb{V})$  y así  $\dim[\mathbb{L}_r^s(\mathbb{V})] = n^{r+s}$ . De hecho, un tensor cualquiera  $T$  se puede expresar como

$$T = t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} f^{i_1} \otimes \dots \otimes f^{i_r} \otimes \beta_{j_1} \otimes \dots \otimes \beta_{j_s} \quad (5)$$

donde los escalares  $t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = T(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}, f^{j_1}, \dots, f^{j_s})$  son llamados las *componentes* de  $T$  relativas a la base  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ . Realmente las componentes de un tensor en  $\mathbb{L}_r^s(\mathbb{V})$  no son más que sus coordenadas en la base (4).

## 9.2. FORMAS BILINEALES

### 9.2.1. Forma Sesquilineal

Una *forma sesquilineal* sobre un espacio vectorial real o complejo  $\mathbb{V}$  es una función  $f$  sobre  $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$  con valores en el cuerpo de los escalares, tal que

$$(a) \quad f(c\alpha + \beta, \gamma) = c f(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma).$$

$$(b) \quad f(\alpha, c\beta + \gamma) = \bar{c} f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma).$$

para todo  $\alpha, \beta, \gamma$  de  $\mathbb{V}$  y todos los escalares  $c$ .

Así, una forma sesquilineal es una función sobre  $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ , tal que  $f(\alpha, \beta)$  es una función lineal de  $\alpha$  para  $\beta$  fijo y función lineal-conjugada de  $\beta$  para  $\alpha$  fijo. En el caso real,  $f(\alpha, \beta)$  es una función lineal de cada argumento; o sea que  $f$  es una *forma bilineal*. En el caso complejo, la forma sesquilineal  $f$  no es bilineal, a menos que  $f = 0$ . En adelante se sobreentenderá que todas las formas son sesquilineales, sin embargo se omitirá el adjetivo “sesquilineal”, salvo que sea importante tenerlo en cuenta.

**Teorema 1.** Sean  $\mathbb{V}$  un espacio producto interior de dimensión finita y  $f$  una forma sobre  $\mathbb{V}$ . Entonces existe un operador lineal único sobre  $\mathbb{V}$ , tal que

$$f(\alpha, \beta) = \langle A(\alpha), \beta \rangle \quad (1)$$

para cualesquiera  $\alpha, \beta$  de  $\mathbb{V}$ , y la aplicación  $f \rightarrow A$  es un isomorfismo del espacio de las formas lineales  $\mathbb{L}(\mathbb{V}^2, \mathbb{F})$  sobre el espacio de los operadores lineales  $\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ .

### 9.2.2. Forma Hermítica

Una forma  $f$  sobre un espacio vectorial real o complejo  $\mathbb{V}$  se llama *hermítica* si

$$f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)} \quad (2)$$

para todo  $\alpha, \beta$  en  $\mathbb{V}$ . Si  $A$  es un operador lineal sobre un espacio producto interior de dimensión finita  $\mathbb{V}$  y  $f$  es la forma (1), entonces  $\overline{f(\beta, \alpha)} = \overline{\langle A(\beta), \alpha \rangle} = \langle \beta, A^h(\alpha) \rangle = \langle A^h(\alpha), \beta \rangle$ ; así que  $f$  es hermítica si, y sólo si,  $A$



es un operador autoadjunto. Cuando  $f$  es hermítica,  $f(\alpha, \alpha)$  es real para todo  $\alpha$ , y en los espacios complejos esta propiedad caracteriza a las formas hermíticas, como lo indica el siguiente teorema.

**Teorema 2.** Sean  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial complejo y  $f$  una forma sobre  $\mathbb{V}$ , tal que  $f(\alpha, \alpha)$  sea real para todo  $\alpha$ . Entonces  $f$  es hermítica.

### 9.2.3. Forma Positiva

Una forma  $f$  en un espacio vectorial real o complejo  $\mathbb{V}$  es *no negativa* (o *positiva de forma no estricta*) si es hermítica y  $f(\alpha, \alpha) \geq 0$  para todo  $\alpha$  en  $\mathbb{V}$ . La forma  $f$  es *positiva* (o *positiva de forma estricta*) si  $f$  es hermítica y  $f(\alpha, \alpha) > 0$  para todo  $\alpha \neq 0$  en  $\mathbb{V}$ .

### 9.2.4. Forma Simétrica

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{F}$ . Una forma bilineal  $f$  en  $\mathbb{V}$  se llama *simétrica* si  $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ . Una forma bilineal  $f$  en  $\mathbb{V}$  se llama *antisimétrica* si  $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$ . Supóngase que  $f$  es cualquier forma sobre  $\mathbb{V}$ . Si se hace

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)] \quad h(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha)] \quad (3)$$

entonces es fácil verificar que  $g$  es una forma bilineal simétrica sobre  $\mathbb{V}$  y que  $h$  es una forma bilineal antisimétrica sobre  $\mathbb{V}$ . También que  $f = g + h$ . Además, esta expresión de  $\mathbb{V}$ , como suma de una forma simétrica y una antisimétrica es única. Así el espacio  $\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{F})$  es la suma directa del subespacio de las formas simétricas y del subespacio de las formas antisimétricas.

## 9.3. TEOREMA DE SYVESTER

Sea  $f$  una forma hermítica sobre un espacio vectorial real o complejo  $\mathbb{V}$  de dimensión finita. Esta forma define un *producto escalar*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = f(\alpha, \beta) \quad (1)$$

similar al producto interior definido en la sección 5.1.1, salvo que en el producto escalar se tolera que la forma no sea necesariamente positiva. En otras palabras, un producto escalar es el producto interior sin satisfacer la condición (d) de la sección 5.1.1.

Sea  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  una base ortogonal ordenada de  $\mathbb{V}$ , respecto al producto escalar (1), o sea que  $\langle \beta_i, \beta_j \rangle = 0$  para  $i \neq j$ . Sean los escalares

$$c_i = \langle \beta_i, \beta_i \rangle \quad (2)$$

con la base ordenada de tal forma que

$$\begin{aligned} c_1, \dots, c_r &> 0 \\ c_{r+1}, \dots, c_s &< 0 \\ c_{s+1}, \dots, c_n &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Generalicemos la noción de base ortonormal. Una base ortogonal  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  es *ortonormal* si para cada  $i$  se tiene que

$$c_i = \langle \beta_i, \beta_i \rangle = 1 \quad -1 \quad \text{ó} \quad 0 \quad (4)$$

El proceso de normalización  $\{\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_n\}$  de una base ortogonal  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  se hace de la siguiente manera

$$\hat{\beta}_i = \begin{cases} \beta_i / \sqrt{c_i} & \text{para } c_i > 0 \\ \beta_i / \sqrt{-c_i} & \text{para } c_i < 0 \\ \beta_i & \text{para } c_i = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Así, entonces, sobre una base ortonormal, se ve claramente el número de escalares  $c_i$  positivos, negativos y nulos. Se puede probar que el número de estos escalares no depende de la base ortonormal escogida

El producto escalar (1) permite, por otro lado, definir un funcional

$$g_\beta(\alpha) = \langle \beta, \alpha \rangle \quad (6)$$

Este funcional, perteneciente al espacio dual  $\mathbb{V}^*$ , permite establecer un isomorfismo  $g_\beta \in \mathbb{V}^* \rightarrow \beta \in \mathbb{V}$ . Por consiguiente, el anulador  $\mathbb{W}^o$  de  $\mathbb{V}$  es isomorfo con el subespacio  $\mathbb{V}^o$  de  $\mathbb{V}$  que consta de todos los vectores  $\beta \in \mathbb{V}$ , tales que  $g_\beta(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha \in \mathbb{V}$ .

**Teorema 1.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita con un producto escalar. Sea  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  una base ortogonal para  $\mathbb{V}$  ordenada según (3). Entonces el número de escalares  $c_i = \langle \beta_i, \beta_i \rangle = 0$  es igual a la dimensión de  $\mathbb{V}^o$ .

De forma resumida el teorema 1 se expresa como

$$n - s = \dim(\mathbb{V}^o) \quad (7)$$

donde el número  $n - s$  se conoce como *índice de nulidad* de la forma  $f$  en (1). Se dice que la forma  $f$  es no degenerada si, y sólo si, su índice de nulidad es igual a 0.

**Teorema 2. (Teorema de Sylvester).** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita con un producto escalar. Si  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  es una base ortogonal para  $\mathbb{V}$  ordenada según (3). Entonces se tiene un número  $r \geq 0$  de escalares  $c_i = \langle \beta_i, \beta_i \rangle > 0$ .

El entero  $r$  que aparece en el teorema de Sylvester se conoce como *índice de positividad*.

## 10. ALGEBRA LINEAL

### 10.1. DEFINICION

Sea  $\mathbb{F}$  un cuerpo. Un *álgebra lineal* sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  es un espacio vectorial  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbb{F}$  con otra operación, llamada *multiplicación de vectores*, que asocia a cada par de vectores  $\alpha, \beta$  de  $\mathbf{A}$ , un vector  $\alpha\beta$  en  $\mathbf{A}$  llamado producto de  $\alpha$  y  $\beta$ , de tal modo que

- (a) La multiplicación es asociativa,  $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ .
- (b) La multiplicación es distributiva con respecto a la adición,  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$  y  $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ .
- (c) Para todo escalar  $c$  de  $\mathbb{F}$ ,  $c(\alpha\beta) = \alpha(c\beta)$ .

Si existe un elemento 1 en  $\mathbf{A}$ , tal que  $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$  para todo  $\alpha$  de  $\mathbf{A}$ , entonces  $\mathbf{A}$  se llama *álgebra con unidad* sobre  $\mathbb{F}$ , y a 1 se le llama la *unidad* de  $\mathbf{A}$ . El álgebra  $\mathbf{A}$  se dice que es *conmutativa* si  $\alpha\beta = \beta\alpha$  para todo  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\mathbf{A}$ .

Sea  $\mathbb{F}$  un cuerpo y  $\mathbb{N}$  el conjunto de los números naturales. El conjunto de funciones de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{F}$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ . Se representará este espacio por  $\mathbb{P}^\infty$ . Los vectores  $\mathbb{P}^\infty$  son, por tanto, sucesiones infinitas  $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$  de escalares  $f_i$  de  $\mathbb{F}$ . El espacio vectorial  $\mathbb{P}^\infty$  es un álgebra lineal.

Sea  $x$  un elemento de  $\mathbb{P}^\infty$  diferente que el elemento 1. La multiplicación de  $x$  por si mismo  $n$  veces se denotará  $x^n$  y se hará  $x^0 = 1$ . Los elementos  $1, x, x^2, \dots$  son independientes, por lo que forman una base que genera un espacio vectorial. Este espacio se llama *álgebra de series de potencias* y no es de dimensión finita.

Sea  $\mathbb{P}^n$  el subespacio de  $\mathbb{P}^\infty$  generado por los vectores  $1, x, x^2, \dots, x^n$ . Este subespacio es de dimensión  $n + 1$ . Cada elemento de dicho subespacio  $\mathbb{P}^n$  se llama polinomio (hasta de grado  $n$ ) sobre  $\mathbb{F}$ . Cada elemento de  $\mathbb{P}^n$  se puede representar como

$$f = \sum_{i=0}^n f_i x^i \quad (1)$$

donde los escalares  $f_0, f_1, \dots, f_n$  son las coordenadas del vector  $f$  en la base  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ . Esta base es la base canónica para estos vectores. Esto hace que este espacio sea isomorfo con respecto al espacio vectorial de las  $n + 1$ -uplas.

## 10.2. IDEAL LINEAL

Sea  $\mathbb{F}$  un cuerpo. Un *ideal* es un subespacio  $\mathbb{I}$  de  $\mathbb{P}^n$ , tal que  $fg$  pertenece a  $\mathbb{I}$ , siempre que  $f$  esté en  $\mathbb{P}^n$ , y  $g$  en  $\mathbb{I}$ . Si  $\mathbb{I}$  contiene un solo elemento  $g$  que genera el resto del espacio, entonces el ideal se denomina el *ideal principal* generado por  $g$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Antosik, P.; Mikusiński, J.; Sikorski, R. **Theory of Distributions**, The Sequential Approach. Elsevier Scientific - PWN-Polish Scientific, 1973.
- [2] Arnold, V. I.; Novikov, S. P.; (Eds.). **Dynamical Systems IV**, Symplectic Geometry and its Applications. Springer-Verlag, 1990.
- [3] Artin, E. **Algebra Geométrica**. Editorial Limusa - Grupo Noriega Editores, 1992.
- [4] Burgos, A. **Iniciación a la Matemática Moderna**, 4<sup>ta</sup> Edición. Selecciones Científicas, 1972.
- [5] Edelen, D. G. B.; Kydonieffs, A. D. **An Introduction to Linear Algebra for Science and Engineering**, Second Edition. American Elsevier Publishing Company, 1976.
- [6] Fraleigh, J. B. **Algebra Abstracta**. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [7] Golovina, L. I. **Algebra Lineal y Algunas de sus Aplicaciones**, Tercera Edición. Editorial MIR-Moscú, 1986.
- [8] Greub, W. H. **Linear Algebra**, Third Edition. Springer-Verlag, 1967.
- [9] Greub, W. H. **Multilinear Algebra**. Springer-Verlag, 1967.
- [10] Halmos, P. R. **Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity**, Second Edition. Chelsea Publishing Company, 1957.
- [11] Halmos, P. R. **Finite Dimensional Vector Spaces**, Second Edition. D. Van Nostrand Company, 1958.
- [12] Halmos, P. R. **Lectures on Boolean Algebras**. Van Nostrand Reinhold Company, 1963.
- [13] Hartley, B.; Hawkes, T. O. **Rings, Modules and Linear Algebra**. Chapman and Hall, 1970.
- [14] Hirsch, M. W.; Smale, S. **Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra**. Academic Press, 1974.
- [15] Hoffman, K.; Kunze, R. **Algebra Lineal**. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1973.
- [16] Kurosch, A. G. **Curso de Algebra Superior**. Editorial MIR-Moscú, 1977. 4<sup>ta</sup> Reimpresión, 1987.
- [17] Lang, S. **Algebra Lineal**. Fondo Educativo Interamericano, 1975.
- [18] Munroe, M. E. **Measure and Integration**, Second Edition. Addison-Wesley, 1971.
- [19] Naylor, A. W.; Sell, G. R. **Linear Operator Theory in Engineering and Science**. Springer-Verlag, 1982.
- [20] Planchart, E. **Geometría Simplética**. Fondo Editorial Acta Científica, Universidad Simón Bolívar, 1984.
- [21] Postnikov, M. **Linear Algebra and Differential Geometry**. URSS Publishers (Moscow), 1994.
- [22] Rojo, A. O. **Algebra**, Vol.I-II, 9<sup>na</sup>/4<sup>ta</sup> Edición. Librería El Ateneo Editorial, 1989/1991.
- [23] Rotman, J. J. **The Theory of Group**, An Introduction. Allyn and Bacon, 1965. Third Printing, 1968.
- [24] Sattinger, D. H.; Weaver, O. L. **Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics**. Springer-Verlag (New York), 1986.
- [25] Sikorski, R. **Boolean Algebra**, Third Edition. Springer-Verlag, 1969.
- [26] Stewart, F. M. **Introduction to Linear Algebra**. Van Nostrand - Reinhold, 1963.
- [27] Strang, G. **Algebra Lineal y sus Aplicaciones**, 2<sup>da</sup> Edición. Addison-Wesley Iberoamericana, 1988.

- [28] Voevodin, V. V. **Algebra Lineal**. Editorial MIR-Moscú, 1982.
- [29] Yákovliev, G. N. **Algebra y Principios del Análisis**, Parte 1/2. Editorial MIR-Moscú, 1984.

# APENDICE D

## TOPOLOGIA Y ANALISIS FUNCIONAL

### CONTENIDO

1. ESPACIOS METRICOS.	498
1.1. Definición.	499
1.2. Distancia entre Conjuntos.	499
1.3. Isometría.	500
1.4. Subespacios.	500
2. CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS.	500
2.1. Bolas y Esferas.	500
2.2. Conjuntos Abiertos.	501
2.3. Puntos de Acumulación.	501
2.4. Clausura y Adherencia.	502
2.5. Frontera y Borde.	503
2.6. Conjuntos Densos.	504
3. CONECTIVIDAD Y COMPACIDAD.	505
3.1. Conjuntos Conexos.	505
3.2. Conjuntos Acotados.	505
3.2.1. Definición.	505
3.2.2. Diámetro del Conjunto.	505
3.3. Conjuntos Compactos.	506
3.3.1. Conjunto Precompacto.	506
3.3.2. Conjunto Separable.	506
3.3.3. Cobertura.	506
3.3.4. Conjunto Compacto.	506
3.3.5. Conjunto Relativamente Compacto.	507
4. SUCESSIONES.	507
4.1. Definición.	507
4.2. Convergencia.	507
4.3. Sucesiones de Cauchy.	507
5. ESPACIOS NORMADOS.	508
5.1. Norma.	508

5.2. Espacios Normados.	508
5.3. Espacios de Banach.	509
6. ESPACIOS EUCLIDEOS.	509
6.1. Producto Interior.	509
6.2. Espacios Producto Interior.	510
6.3. Espacios de Hilbert.	510
7. INTEGRALES ACOTADAS.	510
7.1. Espacios de Lebesgue.	510
7.2. Espacios de Sobolev.	511
8. ANALISIS VARIACIONAL.	512
8.1. Lemas Fundamentales.	512
8.2. Formulaci3n de Euler-Lagrange.	513
8.2.1. Ecuaciones Diferenciales.	513
8.2.2. Restricci3n en las Trayectorias.	515
8.3. Formulaci3n de Euler-Ostrogradski.	518
8.3.1. Ecuaci3n Diferencial.	519
8.3.2. Restricci3n en la trayectoria.	519
8.4. Variaciones Evolutivas.	520
8.4.1. Evoluci3n de Euler-Lagrange.	521
8.4.2. Evoluci3n de Euler-Ostrogradski.	521
8.4.3. Restricciones Evolutivas.	521
8.4.4. Frontera M3vil.	522
8.4.5. Funciones Conservativas.	524
8.4.6. F3rmulas de Expansi3n de Euler.	524
9. TRANSFORMADA DE LEGENDRE.	525
9.1. Definici3n.	526
9.2. Involutividad.	526
9.3. Corolario de la Envolvente.	527
9.4. Desigualdad de Young.	527
9.5. Funciones de Varias Variables.	527
9.6. Diferencial Exacta.	528
9.7. Transformaciones Parciales.	529
9.8. Aplicaci3n a Funciones Sencillas.	530
BIBLIOGRAFIA.	532

## 1. ESPACIOS METRICOS

En esta parte emplearemos el t3rmino de *espacio* como sin3nimo de conjunto, pero con la particularidad de que adicionalmente se le asignan ciertas propiedades. En este sentido, el t3rmino *espacio* siempre vendr3 acompa1ado de un adjetivo o descripci3n que completa su definici3n.

Aunque en esta parte se definen y describen t3rminos que pareciesen en exceso abstracto, m3s adelante se ver3 su utilidad cuando se presenten conceptos y desarrollos m3s concretos.

### 1.1. DEFINICION

Sea  $\mathbb{E}$  un conjunto cualquiera, no vacío, cuyos elementos se llamarán *puntos*. Una *métrica* en  $\mathbb{E}$  es una función  $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ , que posee las siguientes propiedades para todos los elementos  $x, y$  y  $z$  del conjunto  $\mathbb{E}$ :

- (i)  $d(x, y) \geq 0$ .
- (ii)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Simetría).
- (iv)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$  (Desigualdad Triangular).

La expresión  $d(x, y)$  la leemos como distancia entre los puntos  $x$  y  $y$ . Al par  $(\mathbb{E}, d)$ , constituido por el conjunto  $\mathbb{E}$  y una métrica definida sobre  $\mathbb{E}$ , se denomina *espacio métrico*.

Las cuatro propiedades que posee una métrica constituyen un sistema de axiomas consistentes, aunque éstos no son independientes. Mediante una sencilla verificación se comprueba que (ii) y (iv) implican (i) y (iii) [Iribarren,1973].

Conviene destacar que sobre un mismo conjunto  $\mathbb{E}$  pueden, en general, definirse métricas distintas, las cuales dan origen a espacios métricos diferentes.

Sea  $\mathbb{E}$  un conjunto cualquiera, no vacío. Definamos la función  $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ , tal que para todo  $x$  y  $y$  del conjunto  $\mathbb{E}$  se satisface

$$d(x, y) = 1, \text{ si } x \neq y \quad d(x, y) = 0 \text{ si } x = y \quad (1)$$

Es comprobable que tal función constituye una métrica para  $\mathbb{E}$ . Al espacio métrico resultante  $(\mathbb{E}, d)$  se le denomina *espacio discreto*. Aunque carece de mayor interés, dada su trivialidad, nos indica que todo conjunto no vacío puede proveerse de una métrica.

### 1.2. DISTANCIA ENTRE CONJUNTOS

Sea  $(\mathbb{E}, d)$  un espacio métrico. Fijemos arbitrariamente un punto  $x_o \in \mathbb{E}$  y un conjunto no vacío  $A \subset \mathbb{E}$ . Designemos por  $\{d(x_o, x)\}_{x \in A}$  al conjunto de números reales constituido por las distancias de  $x_o$  a todos los puntos de  $A$ . Este conjunto está acotado inferiormente por 0, lo cual implica que admite extremo inferior no menor que 0.

Adoptemos la notación

$$d(x_o, A) = \inf \{ d(x_o, x) \}_{x \in A} \quad (1)$$

Al número real  $d(x_o, A)$  se le denominará, por definición, distancia entre el punto  $x_o$  y el conjunto  $A$ . Esta distancia es simétrica. Es evidente que si  $x_o \in A$ , entonces  $d(x_o, A) = 0$ . El recíproco de esta aseveración no es cierto en general. Tomemos ahora dos puntos  $x_o, y_o \in \mathbb{E}$  y  $A \subset \mathbb{E}$  no vacío. Tenemos entonces que

$$|d(x_o, A) - d(y_o, A)| \leq d(x_o, y_o) \quad (2)$$

Tomemos ahora dos conjuntos no vacíos  $A, B \subset \mathbb{E}$ . Designemos por  $\{d(x, y)\}_{x \in A, y \in B}$  al conjunto de números reales constituido por todas las distancias entre un punto de  $A$  y un punto de  $B$ . Está claro que tal conjunto está acotado inferiormente por 0, por lo cual debe admitir extremo inferior no menor que 0. Exprésese

$$d(A, B) = \inf \{ d(x, y) \}_{x \in A, y \in B} \quad (3)$$

Al número real  $d(A, B) \geq 0$  se le llamará distancia entre los conjuntos  $A$  y  $B$ . Esta distancia es simétrica. Si  $A \cap B \neq \emptyset$ , es inmediato que  $d(A, B) = 0$ . De nuevo el recíproco de esto no es cierto. Para la distancia entre conjunto se satisface que

$$d(A, B) = \inf \{ d(x, B) \}_{x \in A} = \inf \{ d(y, A) \}_{y \in B} \quad (4)$$

Esta expresión parece trivial pero su demostración no lo es (ver por ejemplo [Iribarren,1973]).

### 1.3. ISOMETRIA

La *isometría* es una propiedad que se establece cuando existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de dos espacios métricos, resultando, además, que la distancia entre cualquier par de puntos de uno de los espacios métricos es igual a la distancia entre sus homólogos en el otro espacio métrico. La naturaleza de los puntos de un espacio y el otro pueden ser muy diferentes, pero sus comportamientos como espacios métricos no pueden mostrar diferencia alguna. En este caso se dice que los espacios son isométricos, es decir, comparten la misma estructura.

La isometría se expresa formalmente mediante la siguiente definición:

Un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  es *isométrico* al espacio métrico  $(\tilde{\mathbb{E}}, \tilde{d})$ , si existe una biyección  $f : \mathbb{E} \longrightarrow \tilde{\mathbb{E}}$ , tal que, para todo  $x, y \in \mathbb{E}$ , se satisface que  $d(x, y) = \tilde{d}[f(x), f(y)]$ .

La isometría es una relación de equivalencia en la clase de los espacios métricos. En efecto cumple con las siguientes propiedades:

- Reflexibilidad: El espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  es isométrico consigo mismo bajo la biyección identidad  $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ .
- Simetría: Supongamos que  $(\mathbb{E}, d)$  es isométrico a  $(\tilde{\mathbb{E}}, \tilde{d})$  bajo la biyección  $f : \mathbb{E} \longrightarrow \tilde{\mathbb{E}}$ . Como  $f$  es biyectiva tiene inversa y  $f^{-1} : \tilde{\mathbb{E}} \longrightarrow \mathbb{E}$  es también una biyección que satisface  $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d[f^{-1}(\tilde{x}), f^{-1}(\tilde{y})]$ , para todo  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathbb{E}}$ . Esto implica que  $(\tilde{\mathbb{E}}, \tilde{d})$  es isométrico a  $(\mathbb{E}, d)$ .
- Transitividad: Sea  $(\mathbb{E}, d)$  isométrico a  $(\mathbb{E}^{\mathbb{N}}, d^{\mathbb{N}})$ , bajo la biyección  $f$ , y, adicionalmente, sea  $(\mathbb{E}^{\mathbb{N}}, d^{\mathbb{N}})$  isométrico a  $(\mathbb{E}^{\sharp}, d^{\sharp})$ , bajo la biyección  $g$ . Entonces  $g \circ f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^{\sharp}$  es una biyección que satisface que  $d(x, y) = d^{\sharp}[g \circ f(x), g \circ f(y)]$ , para todo  $x, y \in \mathbb{E}$ . O sea que  $(\mathbb{E}, d)$  es isométrico a  $(\mathbb{E}^{\sharp}, d^{\sharp})$ .

La isometría entre  $(\mathbb{E}, d)$  y  $(\tilde{\mathbb{E}}, \tilde{d})$  bajo la biyección  $f : \mathbb{E} \longrightarrow \tilde{\mathbb{E}}$  permite establecer que  $f$  es un isomorfismo bajo las operaciones  $x * y = d(x, y)$  y  $\tilde{x} \tilde{*} \tilde{y} = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$ , siendo  $\tilde{x} = f(x)$  y  $\tilde{y} = f(y)$ . La isometría es un caso especial del isomorfismo.

Sean  $\mathbb{E}$  Y  $\tilde{\mathbb{E}}$  dos conjuntos no vacíos. Un *isomorfismo* es toda función biyectiva  $f : \mathbb{E} \longrightarrow \tilde{\mathbb{E}}$  que satisface que  $x * y = f(x) \tilde{*} f(y)$ , bajo las dos operaciones (leyes de composición)  $*$  y  $\tilde{*}$  definidas en  $\mathbb{E}$  y  $\tilde{\mathbb{E}}$ , respectivamente. Se dice que  $\mathbb{E}$  es isomorfo a  $\tilde{\mathbb{E}}$ . El isomorfismo es también una relación de equivalencia en la clase de los conjuntos no vacíos. El conjunto  $\mathbb{I}\mathbb{F}$  de todos los isomorfismos  $f$  forma un grupo  $(\mathbb{I}\mathbb{F}, \circ)$  (no necesariamente abeliano o conmutativo), respecto a la composición de funciones  $\circ$ .

### 1.4. SUBESPACIOS

Sea  $(\mathbb{E}, d)$  un espacio métrico y  $\mathbf{A}$  un subconjunto cualquiera, no vacío de  $\mathbb{E}$ . Definamos la función  $d' : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ , tal que para todo  $x, y \in \mathbf{A}$  se satisface que  $d'(x, y) = d(x, y)$ . De inmediato se comprueba que  $d'$  es una métrica para el conjunto  $\mathbf{A}$ . La métrica  $d'$  suele llamarse métrica inducida en  $\mathbf{A}$  por  $d$  y, por sencillez, se acostumbra designar también por  $d$  sin peligro de confusión. Nótese que  $d'$  no es otra cosa que la restricción de  $d$  a  $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ .

De manera que  $(\mathbf{A}, d)$  es, a su vez, un espacio métrico y se llama subespacio de  $\mathbb{E}$ .

## 2. CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS

### 2.1. BOLAS Y ESFERAS

Sea  $(\mathbb{E}, d)$  un espacio métrico cualquiera. Definiremos ciertos subconjuntos importantes de  $\mathbb{E}$ .

Tomemos un punto  $x_o \in \mathbb{E}$  y un número real  $r > 0$ . Se llama *bola abierta* de centro  $x_o$  y de radio  $r$  al conjunto

$$\mathbb{B}(x_o, r) = \{ x \in \mathbb{E} \mid d(x, x_o) < r \} \quad (1)$$



La esfera abierta reducida de centro  $x_o$  y radio  $r$  se define como

$$\tilde{\mathbb{B}}(x_o, r) = \{x \in \mathbb{E} \mid 0 < d(x, x_o) < r\} = \mathbb{B}(x_o, r) - \{x_o\} \quad (2)$$

La esfera cerrada de centro  $x_o$  y radio  $r$  es el conjunto

$$\bar{\mathbb{B}}(x_o, r) = \{x \in \mathbb{E} \mid d(x, x_o) \leq r\} \quad (3)$$

La superficie esférica de centro  $x_o$  y radio  $r$  es el conjunto

$$\mathbb{S}(x_o, r) = \{x \in \mathbb{E} \mid d(x, x_o) = r\} = \bar{\mathbb{B}}(x_o, r) - \mathbb{B}(x_o, r) \quad (4)$$

Obsérvese que tanto una esfera abierta como cerrada no puede ser un conjunto vacío, ya que al menos el centro pertenece a él. Una esfera abierta reducida o una superficie esférica puede, por otra parte, resultar un conjunto vacío.

## 2.2. CONJUNTOS ABIERTOS

Sea  $(\mathbb{E}, d)$  un espacio métrico cualquiera y  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{E}$ . Se dice que  $x \in A$  es un *punto interior* de  $A$ , si existe un número real  $r > 0$ , tal que  $\mathbb{B}(x, r) \subset A$ . Al conjunto

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A \mid x \text{ es interior de } A\} \quad (1)$$

se le llama *interior del conjunto*  $A$ . En consecuencia de la definición se tiene que  $\overset{\circ}{A} \subset A$ . El conjunto  $\overset{\circ}{A}$  puede muy bien ser vacío sin que lo sea  $A$ .

Se dice que el conjunto  $A$  es un *conjunto abierto* si  $A = \overset{\circ}{A}$ , es decir, si todo punto de  $A$  es interior. El conjunto  $\mathbb{E}$  es abierto trivialmente, lo mismo que el conjunto vacío  $\emptyset$ .

**Teorema 1.** Toda esfera abierta es un conjunto abierto.

Sea  $A \subset B$ . Es inmediato que todo punto interior de  $A$  es interior de  $B$ , es decir,  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ . Esto nos permite tomar interiores a ambos miembros de una inclusión, preservando el sentido de ésta.

**Teorema 2.** Para todo conjunto  $A$  en  $(\mathbb{E}, d)$ ,  $\overset{\circ}{A}$  es un conjunto abierto, es decir,  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ .

**Teorema 3.** La unión en una familia cualquiera de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

**Teorema 4.** La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

**Teorema 5.** Si  $A$  y  $B$  son conjuntos cualesquiera en un espacio métrico, entonces

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B} \quad \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B} \quad (2)$$

## 2.3. PUNTOS DE ACUMULACION

Sea  $(\mathbb{E}, d)$  un espacio métrico cualquiera y sea  $x$  un punto cualquiera de  $\mathbb{E}$ . Se llama *entorno del punto*  $x$  a todo conjunto  $\mathbb{B}_x$  abierto que lo contenga. Un conjunto abierto es un entorno de cualquiera de sus puntos. En particular, una bola abierta  $\mathbb{B}(x, r)$  de centro  $x$  y radio  $r$  cualquiera, es un entorno de  $x$ . Por otro lado, cualquier entorno de  $x$  contiene una bola abierta de centro  $x$ .

El concepto de entorno está motivado por la idea intuitiva de cercanía o proximidad al punto en cuestión. Sin embargo, esto es engañoso, ya que un conjunto abierto cualquiera es un entorno de cualquiera de sus puntos.

Es consecuencia de los teoremas 3 y 4 de la sección 2.2 que la unión en una familia cualquiera de entornos de un mismo punto es un entorno de ese punto; y que la intersección de un número finito de entornos de un mismo punto es también un entorno de éste.

Sea  $A$  un subconjunto del espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  y  $x \in \mathbb{E}$ . Se dice que  $x$  es un *punto de acumulación* del conjunto  $A$ , si todo entorno de  $x$  contiene puntos de  $A$  distintos de  $x$ . Es decir, para todo entorno  $\mathbb{B}_x$  de  $x$  se cumple

$$(\mathbb{B}_x - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \implies x \text{ es un punto de acumulación de } A \quad (1)$$

Al conjunto  $\check{\mathbb{B}}_x = \mathbb{B}_x - \{x\}$ , del entorno  $\mathbb{B}_x$  desprovisto de  $x$ , suele llamarse *entorno reducido*. Sin pérdida de generalidad, se puede establecer la definición de punto de acumulación haciendo  $\mathbb{B}_x = \mathbb{B}(x, r)$  con  $r > 0$ .

Puede muy bien ocurrir que el conjunto  $A$  no admita ningún punto de acumulación, así como admitir muchos. Nótese que no se exige en la definición que  $x \in A$ , pero puede suceder.

Si  $x \in A$ , pero no es punto de acumulación de  $A$ , recibe el nombre de *punto aislado* de  $A$ . Esto quiere decir que existe algún entorno de  $x$  que contiene puntos que no son de  $A$ , aparte de él mismo.

Al conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto  $A$  se llama *conjunto derivado* de  $A$  y se simboliza como  $A'$ . En general,  $A'$  puede contener desde ninguno hasta infinitos puntos y su relación con el conjunto  $A$  puede ser cualquiera: coincidir con él, contenerlo, estar contenido en él, ser disjunto o ninguna de estas relaciones.

**Teorema 1.** Sea  $x$  un punto de acumulación de un conjunto  $A$ . Si  $\mathbb{B}_x$  es un entorno cualquiera de  $x$ , el conjunto  $(\mathbb{B}_x - \{x\}) \cap A$  contiene infinitos puntos.

A partir de este teorema se deduce que para que un conjunto tenga la posibilidad de admitir puntos de acumulación debe ser infinito; en otras palabras, si un conjunto admite algún punto de acumulación, es infinito. Expresado en forma equivalente, un conjunto finito no admite puntos de acumulación. Recíprocamente, si un conjunto es infinito no puede asegurarse que admita puntos de acumulación.

Por último, sea  $(\mathbb{E}, d)$  un espacio métrico general, considérese en él los conjuntos  $A \subset B$ . Es evidente, teniendo en cuenta la definición, que todo punto de acumulación de  $A$  lo es también de  $B$ , es decir,  $A' \subset B'$ . Este sencillo resultado permite tomar derivados a ambos miembros de una inclusión, preservándose el sentido de ésta.

## 2.4. CLAUSURA Y ADHERENCIA

Sea  $(\mathbb{E}, d)$  un espacio métrico cualquiera y  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{E}$ . Si  $A' \subset A$ , es decir si  $A$  contiene todos sus puntos de acumulación, decimos que  $A$  es un *conjunto cerrado*.

Si  $A$  no admite puntos de acumulación, es decir,  $A' = \emptyset$ ,  $A$  es cerrado, ya que siempre  $A' \subset A$ . En particular, el conjunto vacío  $\emptyset$  y cualquier conjunto constituido por un número infinito de puntos son conjuntos cerrados. El conjunto  $\mathbb{E}$  es cerrado trivialmente. Nótese pues que tanto  $\emptyset$  como  $\mathbb{E}$  son conjuntos abiertos y cerrados a la vez. Resulta oportuno aclarar que no se ha definido el conjunto cerrado como aquel que no es abierto.

Puede suceder que  $A' = A$ , es decir, que  $A$  sea cerrado y que todos sus puntos sean de acumulación. Un conjunto con esta propiedad se dice que es *perfecto*.

Dado el conjunto  $A$  en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ , al conjunto  $\bar{A} = A \cup A'$ , o sea la unión de  $A$  con todos sus puntos de acumulación, se le llama *clausura* de  $A$  y sus elementos reciben el nombre de *puntos de adherencia* de  $A$ .

De la definición anterior se observa que  $A' \subset A \iff \bar{A} = A \cup A' = A$ , es decir, un conjunto es cerrado si, y sólo si, coincide con su clausura. En general se tiene que  $A \subset \bar{A}$  y  $A' \subset \bar{A}$ , en virtud de la definición de  $\bar{A}$ .

Supóngase que se tiene que  $A \subset B$ , sabemos que esto implica que  $A' \subset B'$ . De aquí se obtiene que  $\bar{A} \subset \bar{B}$ . Este resultado nos permite clausurar ambos miembros de una inclusión, preservándose su sentido. Sin embargo, puede darse el caso de que al clausurar se obtenga una igualdad.

**Teorema 1.** Para todo conjunto  $A$  en un espacio métrico se verifica que  $(\bar{A})' = A'$ .

**Corolario 1'.** Para todo conjunto  $A$  en un espacio métrico,  $A'$  y  $\bar{A}$  son conjuntos cerrados.

Supóngase que  $A \subset B$  y  $B$  es un conjunto cerrado. Clausurando ambos miembros de esta inclusión y teniendo en cuenta que  $B$  coincide con su clausura, se obtiene que  $\bar{A} \subset B$ . Esto se puede interpretar figurativamente diciendo que “el mínimo conjunto cerrado que contiene a  $A$  es su clausura”.

Se puede tener otro resultado interesante acerca de la clausura observando a la familia de conjuntos  $C = \{ A \subset B \mid B \text{ es cerrado} \}$ . El conjunto  $C$  es no vacío, puesto que al menos  $\mathbb{E} \in C$ . Se puede demostrar que en este caso se satisface que

$$\bar{A} = \bigcap_{B \in C} B \quad \text{donde} \quad C = \{ A \subset B \mid B \text{ es cerrado} \} \quad (1)$$

En resumen,  $\bar{A}$  es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a  $A$ .

**Teorema 2.** Para un conjunto  $A$ , de clausura no vacía, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (i)  $x \in \bar{A}$ .
- (ii)  $d(x, A) = 0$ .
- (iii) Para todo entorno  $\mathbb{B}_x$  de  $x$ ,  $\mathbb{B}_x \cap A \neq \emptyset$ .

No debe confundirse la proposición (iii) del teorema anterior con la definición de punto de acumulación. La diferencia esencial está en que no se toma el entorno reducido para intersectarlo con  $A$ . Nótese que un punto aislado de  $A$  es también un punto de adherencia.

**Teorema 3.** Un conjunto  $A$  en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  es cerrado si, y sólo si,  $\mathbb{E} - A$  es abierto.

**Corolario 3'.** El conjunto  $A$  es abierto si, y sólo si,  $\mathbb{E} - A$  es cerrado.

**Teorema 4.** Se satisfacen las dos siguientes proposiciones:

- (i) La unión de un número finito de conjuntos cerrados es a su vez un conjunto cerrado.
- (ii) La intersección en un familia cualquiera de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

**Corolario 4'.** Sean los conjuntos  $A$  y  $B$  en el espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ . Se verifica que:

- (iii)  $A$  abierto y  $B$  cerrado  $\implies A - B$  abierto
- (iv)  $A$  cerrado y  $B$  abierto  $\implies A - B$  cerrado

**Teorema 5.** Toda bola cerrada, así como toda superficie esférica, es un conjunto cerrado.

En un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  considérese una bola abierta  $\mathbb{B}(x_o, r)$  y una bola cerrada  $\bar{\mathbb{B}}(x_o, r)$  del mismo centro  $x_o$  y con el mismo radio  $r$ . Se sabe que  $\mathbb{B}(x_o, r) \subset \bar{\mathbb{B}}(x_o, r)$ . Clausurando ambos miembros de esta inclusión, y teniendo en cuenta que la clausura de la bola cerrada coincide con ella misma, se obtiene que  $\overline{\mathbb{B}(x_o, r)} \subset \bar{\mathbb{B}}(x_o, r)$ . Conviene destacar que, en general, esa inclusión es propia; es decir, la clausura de la bola abierta no es necesariamente igual a la bola cerrada con el mismo centro y radio, por ejemplo, en un espacio métrico discreto. No obstante, en muchos espacios métricos particulares la clausura de la bola abierta sí coincide con la cerrada, por ejemplo, en  $\mathbb{R}^n$ . **Teorema 6.** Si  $A$  y  $B$  son conjuntos cualesquiera de un espacio métrico, entonces  $\bar{A} \cap B \subset \bar{A} \cap \bar{B}$  y  $\bar{A} \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ . La clausura de la intersección no es igual, en general, a la intersección de las clausuras. Ambas relaciones establecidas en el teorema 6 pueden extenderse, aplicándose el principio de inducción, a cualquier número finito de conjuntos

**Teorema 7.** Para todo conjunto  $A$  de un espacio métrico cualquiera  $(\mathbb{E}, d)$ , se satisface que  $\overline{\mathbb{E} - A} = \mathbb{E} - \overset{\circ}{A}$  y  $\mathbb{E} - \bar{A} = \overset{\circ}{\mathbb{E} - A}$ .

## 2.5. FRONTERA Y BORDE

Sea  $A$  un conjunto cualquiera en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ . Se denominará *frontera* de  $A$  al conjunto

$$\beta(A) = \bar{A} \cap \overline{(\mathbb{E} - A)} \quad (1)$$

Este concepto posee ciertas propiedades que se derivan inmediatamente de su definición y que son convenientes listar aq continuación:

- (i)  $\beta(A)$  es un conjunto cerrado. Esto es consecuencia del corolario 1' y los teoremas 3 y 4 de la sección 2.4.
- (ii)  $\beta(A) = \beta(\mathbb{I}E - A)$ .
- (iii) Si  $\beta(A) \neq \emptyset$ , las tres propiedades siguientes son equivalentes (teorema 2 de la sección 2.4):
  - (a)  $x \in \beta(A)$
  - (b)  $d(x, A) = d(x, \mathbb{I}E - A) = 0$
  - (c)  $\mathbb{B}_x \cap A \neq \emptyset$ ,  $\mathbb{B}_x \cap (\mathbb{I}E - A) \neq \emptyset$ , para todo entorno  $\mathbb{B}_x$  del punto  $x$ .
- (iv)  $\beta(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ , aplicando el teorema 7 de la sección 2.4.
- (v)  $\bar{A} = A \cup \beta(A)$ . En efecto,  $A \subset \bar{A}$  y  $\beta(A) \subset \bar{A}$ , implican que  $A \cup \beta(A) \subset \bar{A}$ . Por otra parte, debido a (iv), se tiene que  $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup (\bar{A} - \overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{A} \cup \beta(A) \subset A \cup \beta(A)$ .
- (vi)  $A$  cerrado  $\iff \beta(A) \subset A$ . También  $\beta(A) \subset \bar{A}$  como consecuencia de la definición de frontera. Luego, si  $A$  es cerrado, entonces  $A = \bar{A}$ . Recíprocamente, si  $\beta(A) \subset A$ , entonces por (v) se tiene que  $\bar{A} = A \cup \beta(A) = A$ .
- (vii)  $A$  abierto  $\iff A \cap \beta(A) = \emptyset$ . Si  $A$  es abierto, entonces  $A = \overset{\circ}{A}$ , lo cual implica por (iv) que  $A \cap \beta(A) = A \cap (\bar{A} - \overset{\circ}{A}) = \emptyset$ . Recíprocamente, si  $A \cap \beta(A) = \emptyset$ , entonces  $A \cap (\bar{A} - \overset{\circ}{A}) = \emptyset$ , lo cual implica que  $A \subset \overset{\circ}{A}$ , es decir  $A = \overset{\circ}{A}$  y  $A$  es abierto.

La frontera de un conjunto no vacío puede resultar vacía, por ejemplo en el caso de un espacio métrico discreto. Nótese que en cualquier espacio métrico  $(\mathbb{I}E, d)$  se tiene que

$$\beta(\emptyset) = \emptyset \qquad \beta(\mathbb{I}E) = \emptyset \tag{2}$$

También puede ocurrir que la frontera de un subconjunto propio del espacio sea todo el espacio. A pesar de estos ejemplos patológicos se pueden hacer algunas interpretaciones intuitivas de las propiedades expresadas arriba. Se puede pensar que cualquier conjunto de un espacio métrico está limitado de su complemento por una concha o cáscara que es su frontera. Lo que se encuentra dentro de la cáscara es el interior del conjunto (iv), y el conjunto con toda la cáscara es la clausura (v). Si el conjunto no incluye nada de la frontera es abierto (vii), y si incluye toda la frontera es cerrado (vi). En caso de incluir sólo una parte de la concha, el conjunto no es abierto ni cerrado.

Se denominará *borde* de un conjunto  $A$  en un espacio métrico  $(\mathbb{I}E, d)$ , a la parte de su frontera que le pertenece, esto es, al conjunto

$$\mathcal{B}(A) = A \cap \beta(A) \tag{3}$$

De inmediato se obtienen de la definición las siguientes propiedades:

- (viii)  $A$  cerrado  $\iff \mathcal{B}(A) = \beta(A)$  (vi).
- (ix)  $A$  abierto  $\iff \mathcal{B}(A) = \emptyset$  (vii).
- (x)  $\mathcal{B}(A) = A - \overset{\circ}{A}$  (iv).
- (xi)  $\mathcal{B}(\mathbb{I}E - A) = \beta(A) - \mathcal{B}(A)$ .

## 2.6. CONJUNTOS DENSOS

Sea  $(\mathbb{I}E, d)$  un espacio métrico y un conjunto  $A \subset \mathbb{I}E$ . El conjunto  $A$  se dice que es *denso* en  $\mathbb{I}E$ , si satisface que  $\bar{A} = \mathbb{I}E$ .

El conjunto  $\mathbb{I}E$  es denso trivialmente, y es el único conjunto denso que también es cerrado, ya que si un subconjunto propio cualquiera  $A$  fuese denso y cerrado, entonces  $A = \bar{A} = \mathbb{I}E$ . Pero existen subconjuntos propios que son densos. El ejemplo clásico de un conjunto denso es el conjunto  $\mathbb{Q}$  de los números racionales en la recta real.

Como aplicación directa del teorema 2 de la sección 2.4, se puede afirmar que las tres proposiciones siguientes son equivalentes:

- (i) A es denso.
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{E} : d(x, A) = 0$ .
- (iii)  $B \cap A \neq \emptyset$ , para todo conjunto abierto y no vacío B. Consecuencia de la simple observación de que todo punto del espacio es de adherencia de A. **Lema 1.** Si A es un conjunto cualquiera en  $(\mathbb{E}, d)$ , entonces  $(\mathbb{E} - \bar{A}) \cup A$  y  $(\mathbb{E} - A) \cup \overset{\circ}{A}$  son densos.

Se dice que el conjunto A del espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  es *fronterizo*, si su complemento  $\mathbb{E} - A$  es denso.

Se dice que A es *nada-denso*, si el complemento de su clausura  $\mathbb{E} - \bar{A}$  es denso.

**Teorema 1.** Si A es un conjunto abierto o cerrado en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ , entonces  $\beta(A)$  es nada-denso.

**Teorema 2.** Para todo conjunto A en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ ,  $\mathcal{B}(A)$  es fronterizo.

**Teorema 3.** Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son conjuntos nada-densos en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  es nada-denso.

**Lema 2.** A y B son conjuntos en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ , tales que B es nada-denso y  $A - B$  es fronterizo, entonces A es fronterizo.

### 3. CONECTIVIDAD Y COMPACIDAD

#### 3.1. CONJUNTOS CONEXOS

Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ . Se dice que los conjuntos  $A_1$  y  $A_2$  son una *disconexión* de A, si son no vacíos, disjuntos, abiertos en el subespacio  $(A, d)$  y  $A = A_1 \cup A_2$ . Si tales conjuntos existen se dice que A admite una desconexión. En general, si A admite una desconexión, ésta puede no ser única.

Se dice que el conjunto A es *disconexo* si admite alguna desconexión. Se dice que el conjunto A es *conexo* si no es disconexo. Es decir, si no admite desconexión.

Se dice que un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  es *localmente conexo*, si para todo punto  $x \in \mathbb{E}$  y todo entorno  $\mathbb{B}_x$  de x, existe un entorno  $\mathbb{B}'_x$  de x, tal que  $\mathbb{B}'_x \subset \mathbb{B}_x$  y  $\mathbb{B}'_x$  es conexo.

#### 3.2. CONJUNTOS ACOTADOS

##### 3.2.1. Definición

Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ . Se dice que A es *acotado* si, y sólo si, existe un número real positivo  $k > 0$ , tal que, para todo  $x, y \in A$ ,  $d(x, y) \leq k$ .

##### 3.2.2. Diámetro del Conjunto

La definición de conjunto acotado es equivalente a decir que el conjunto de números reales  $\{ d(x, y) \mid \forall x, y \in A \}$  está acotado superiormente. Tiene pues sentido considerar su extremo superior, al cual se designará por

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \{ d(x, y) \} \quad (1)$$

y el cual se llamará *diámetro del conjunto* A. Recíprocamente, si existe tal extremo superior, es decir si el conjunto A tiene diámetro, entonces A está acotado. Si el conjunto A no es acotado, se prefiere decir que carece de diámetro.

Como la distancia entre dos puntos es siempre un número real mayor o igual que cero, resulta que  $\delta(A) \geq 0$ . Si el conjunto A contiene sólo un punto, el conjunto  $\{ d(x, y) \}$  está constituido únicamente por 0, de donde  $\delta(A) = 0$ . Recíprocamente, si A no es vacío y  $\delta(A) = 0$ , entonces A está constituido por un solo punto.

Si  $A$  es acotado y  $B$  no es vacío, es consecuencia inmediata de la definición de diámetro del conjunto, que  $B \subset A \implies \delta(B) \leq \delta(A)$ . Salta a la vista que la implicación contraria no es, en general, cierta.

**Teorema 1.** Sea  $A$  un conjunto no vacío en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ . El conjunto  $A$  es acotado, si, y sólo si, está contenido en una esfera abierta cuyo centro puede ser cualquier punto del espacio métrico.

**Lema 1.** Si  $A$  es un conjunto acotado en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ , entonces  $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$ .

**Corolario 1'.** Un conjunto es acotado, si, y sólo si, es acotada su clausura.

### 3.3. CONJUNTOS COMPACTOS

#### 3.3.1. Conjunto Precompacto

Sea  $A$  un conjunto no vacío en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ . Se dice que  $A$  es *precompacto* (o totalmente acotado), si a cualquier número real  $\epsilon > 0$  corresponde un conjunto finito de puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ , tales que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n \mathbb{B}(x_k, \epsilon) \quad (1)$$

Se observa de inmediato que que, si  $A$  es finito, entonces  $A$  es precompacto. Basta con tomar a todos los puntos de  $A$  como centros de la bolas abiertas. El recíproco es también cierto en un espacio métrico discreto, pero no en cualquier espacio.

**Teorema 1.** En un espacio métrico cualquiera, todo conjunto precompacto es acotado.

**Teorema 2.** Si  $A$  es un conjunto precompacto de un espacio métrico, todo subconjunto no vacío de  $A$  es precompacto.

#### 3.3.2. Conjunto Separable

Se dice que un conjunto no vacío  $A$  de un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  es *separable*, si existe un conjunto contable  $B$  con  $B \subset A$ , tal que  $A \subset \bar{B}$ . Se deduce de inmediato que  $\bar{A} = \bar{B}$ . Se dice que el espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  es separable, si el conjunto  $\mathbb{E}$  es separable. En este caso, la definición se reduce a que existe un conjunto denso y contable. Es evidente que todo conjunto contable (lo cual incluye los finitos) es separable.

#### 3.3.3. Cobertura

Sea  $A$  un conjunto del espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ . Una familia  $C$  de conjuntos de  $(\mathbb{E}, d)$ , tal que

$$A \subset \bigcup_{B \in C} B \quad (2)$$

recibe el nombre de *cobertura* de  $A$ . Se dice también que  $C$  “cubre a”  $A$ . Una *subcobertura* de  $C$  es una subfamilia de  $C$  que también cubre a  $A$ . Se dice que  $C$  es una *cobertura abierta* de  $A$ , si  $C$  cubre a  $A$  y, además, todos los conjuntos de  $C$  son abiertos.

**Teorema 3.** Si  $A$  es un conjunto separable del espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ , toda cobertura abierta de  $A$  admite una subcobertura contable.

**Teorema 4.** En un espacio métrico todo conjunto precompacto es separable.

#### 3.3.4. Conjunto Compacto

Sea  $A$  un conjunto no vacío en un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ . Se dice que  $A$  es *compacto* si toda cobertura abierta de  $A$  admite una subcobertura finita.

Se dice que  $A$  posee la *propiedad de Bolzano-Weierstrass*, si todo subconjunto infinito  $B$  de  $A$  admite un punto de acumulación en  $A$ , es decir,  $B' \cap A \neq \emptyset$ . Si  $A$  es un conjunto finito, posee la propiedad Bolzano-Weierstrass. En efecto, todo subconjunto “infinito” (en realidad no puede ser infinito) de un conjunto finito admite puntos de acumulación en él.

**Lema 1.** Si  $x, y$  son puntos de un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ , tales que  $x \neq y$ , existe un entorno  $\mathbb{B}_x$  de  $x$  y un entorno  $\mathbb{B}_y$  de  $y$ , con  $\mathbb{B}_x \cap \mathbb{B}_y = \emptyset$ .

**Teorema 5.** Sea  $A$  un conjunto compacto y  $x$  un punto, ambos pertenecientes a un espacio métrico. Si  $x \notin A$ , existe un entorno  $\mathbb{B}_x$  de  $x$  y un conjunto abierto  $B$  con  $A \subset B$ , tales que  $\mathbb{B}_x \cap B = \emptyset$ .

**Corolario 5'.** Todo conjunto compacto en un espacio métrico es cerrado.

**Teorema 6.** Todo conjunto compacto en un espacio métrico es precompacto.

**Corolario 6'.** Todo conjunto compacto en un espacio métrico es acotado.

**Lema 2.** Todo conjunto que posea la propiedad de Bolzano-Weierstrass en un espacio métrico es precompacto.

**Teorema 7.** Un conjunto es compacto en un espacio métrico, si, y sólo si, posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass

**Teorema 8.** Si  $B$  es un subconjunto no vacío y cerrado de un conjunto compacto  $A$ , entonces  $B$  es compacto.

### 3.3.5. Conjunto Relativamente Compacto

Se dice que un conjunto no vacío en un espacio métrico es *relativamente compacto*, si su clausura es compacta. Se deriva de la definición, que un conjunto compacto es también relativamente compacto. Es trivial que un conjunto relativamente compacto y cerrado es compacto.

**Teorema 9.** Si  $B$  es un subconjunto no vacío de un conjunto relativamente compacto  $A$ , entonces  $B$  es relativamente compacto.

**Teorema 10.** Todo conjunto relativamente compacto en un espacio métrico es precompacto.

## 4. SUCESIONES

### 4.1. DEFINICION

Sea  $A$  un conjunto no vacío de un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  y  $\mathbb{N}$  el conjunto de los números naturales. Una *sucesión* en  $A$  es una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ , denotada como  $x_n = f(n)$ . Los elementos  $x_n$ , llamados *términos* de la sucesión, suelen escribirse en forma de lista ordenada en el sentido creciente del subíndice, o sea,  $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ , expresión que se abrevia como  $\{x_n\}$ .

Usualmente, no se hace referencia explícita a la función  $f$ , sino que, abusando del lenguaje, se habla de la sucesión  $\{x_n\}$ . La función  $f$  puede no ser inyectiva, y, por lo tanto suceder que  $x_n = x_{n'}$ , para  $n \neq n'$ . El caso extremo es cuando  $f$  es constante y entonces todos los términos de la sucesión son iguales, llamándose sucesión constante.

### 4.2. CONVERGENCIA

Sea  $x_0, x_1, x_2, \dots$  una sucesión de puntos del espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$ . Se dice que esta sucesión converge a  $x$ , si todo entorno  $\mathbb{B}_x$  del punto  $x$  contiene todos los puntos  $x_n$  a partir de un cierto valor para  $n$ . Es decir, si para todo número  $\epsilon > 0$  se puede encontrar un número natural  $N_\epsilon$ , tal que  $\mathbb{B}(x, \epsilon)$  contenga todos los puntos  $x_n$  de la sucesión con  $n > N_\epsilon$ . El punto  $x$  es llamado límite de la sucesión  $\{x_n\}$ . Esta definición puede ser formulada como sigue: La sucesión  $\{x_n\}$  converge a  $x$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0 \quad (1)$$

La interpretación intuitiva de entorno tenía la idea de proximidad o cercanía al punto en cuestión. Así que podemos interpretar al límite de una sucesión como un punto alrededor del cual se aglomeran los términos de la sucesión, de tal manera que, a partir de uno de los términos, los restantes se encuentran en un entorno determinado.

### 4.3. SUCESIONES DE CAUCHY

En un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  vamos a distinguir una clase de sucesiones llamadas *sucesiones de Cauchy*, con la propiedad siguiente: Sus términos se van acercando unos a otros tanto como se desee con sólo tomarlos para valores de los índices lo suficientemente grandes. Se dará una definición precisa de este tipo de sucesiones.

**Definición 1.** Una sucesión  $\{x_n\}$  de puntos de un espacio métrico  $(\mathbb{E}, d)$  es llamada sucesión de Cauchy, si verifica la condición de Cauchy, es decir, si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un número natural  $N_\epsilon$  tal que  $d(x_{n'}, x_{n''}) < \epsilon$ , para cualesquiera  $n' > N_\epsilon$  y  $n'' > N_\epsilon$ .

De la desigualdad triangular se deduce inmediatamente que toda sucesión convergente es un sucesión de Cauchy. En efecto, si  $\{x_n\}$  converge a  $x$ , entonces, para todo  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar un número natural  $N_\epsilon$ , tal que  $d(x_n, x) < \epsilon/2$  para todos los  $n > N_\epsilon$ . Entonces  $d(x_{n'}, x_{n''}) \leq d(x_{n'}, x) + d(x_{n''}, x) < \epsilon$ , para cualesquiera  $n' > N_\epsilon$  y  $n'' > N_\epsilon$ .

Es importante preguntarse si el el recíproco es cierto. Es decir, si toda sucesión de Cauchy es convergente. Intuitivamente, si una sucesión es de Cauchy, entonces sus términos se aproximan unos a otros tanto como se desee, por lo tanto, parece razonable sospechar que ello se debe a que se están acercando a algo, osea al límite. No obstante, aquí la intuición falla. El recíproco no es en general cierto. Existen sucesiones de Cauchy no convergentes. En este último caso se puede interpretar que la sucesión se aproxima a un camino por el cual siempre evoluciona. Esta es la razón por la cual se tiene una clasificación de los espacios métricos.

**Definición 2.** Si en un espacio métrico toda sucesión de Cauchy es convergente, se dice que este es un *espacio completo*. En caso contrario, es un *espacio incompleto*.

## 5. ESPACIOS NORMADOS

### 5.1. NORMA

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial definido sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales o sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos. Una norma en  $\mathbb{V}$  es un función de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{R}$ , que posee las propiedades siguientes (se adoptará la notación  $\|\alpha\|$  para indicar la imagen del vector  $\alpha$ , y se llamará “norma de  $\alpha$ ”):

- (i)  $\forall \alpha \in \mathbb{V} : \|\alpha\| \geq 0$ .
- (ii)  $\|\alpha\| = 0 \iff \alpha = \theta$ ; donde  $\theta$  es el vector nulo en  $\mathbb{V}$ .
- (iii)  $\forall \alpha \in \mathbb{V}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} : \|c\alpha\| = |c| \|\alpha\|$ .
- (iv)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{V} : \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$  (Desigualdad Triangular).

En la propiedad (iii), debe interpretarse para el caso complejo que  $|c| = \sqrt{c\bar{c}}$ .

Intuitivamente en el caso real se puede visualizar la norma como la longitud de vectores, particularmente si se piensa en vectores del espacio tridimensional. Sin embargo, en general, como se verá más adelante, la norma debe interpretarse como una cierta medida o métrica del espacio vectorial.

### 5.2. ESPACIOS NORMADOS

Al par  $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ , es decir, a un espacio vectorial provisto de una norma, se le llama *espacio normado*. Como es de suponer, un mismo espacio vectorial  $\mathbb{V}$  sobre  $\mathbb{R}$  puede, en general, proveerse de distintas normas, dando origen a distintos espacios normados.

Todo espacio normado es metrizable, es decir, puede definírsele una métrica inducida por la norma, y así considerársele un espacio métrico. Definamos la función

$$d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

tal que, para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$ ,

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| \quad (2)$$

Es fácilmente demostrable que esta función  $d$  cumple con las propiedades (i-iv) de la sección 1.1, por lo que es una métrica para  $\mathbb{V}$ .



**Definición.** Un conjunto  $A$  de un espacio vectorial normado es acotado si, y sólo si, existe un número real positivo  $k > 0$ , tal que, para todo  $x \in A$ ,  $\|x\| \leq k$ .

### 5.3. ESPACIOS DE BANACH

Todo espacio vectorial normado que sea completo es un *espacio de Banach*.

Sea  $\mathbb{V}^*$  el espacio vectorial de todos los funcionales  $f$  lineales continuos, definidos sobre un espacio normado  $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ . Se define una norma  $\|\cdot\|_{\mathbb{V}^*}$  para el espacio  $\mathbb{V}^*$ , el cual es el espacio dual de  $\mathbb{V}$ , en la forma

$$\|f\|_{\mathbb{V}^*} = \sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{\mathbb{V}}} \quad (1)$$

Esta norma verifica los axiomas (i-iv) de la sección 5.1. De esta forma, el espacio  $\mathbb{V}^*$ , dual del espacio normado  $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ , puede ser provisto de una estructura natural de espacio normado. La topología de  $\mathbb{V}^*$ , correspondiente a la norma introducida, se llama *topología fuerte* en  $\mathbb{V}^*$ . Si es deseable subrayar que  $\mathbb{V}^*$  se considera como un espacio normado se escribiera como  $(\mathbb{V}^*, \|\cdot\|_{\mathbb{V}^*})$ .

**Teorema 1.** El espacio dual  $(\mathbb{V}^*, \|\cdot\|_{\mathbb{V}^*})$  es completo, independientemente de si  $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$  es completo o no. Adicionalmente, los espacios  $\mathbb{V}^*$  y  $(\mathbb{V})^*$  son isomorfos.

## 6. ESPACIOS EUCLIDEOS

### 6.1. PRODUCTO INTERIOR

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial definido sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales o sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos. Un *producto interior* es una función de  $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  con las propiedades siguientes (adoptaremos la notación  $\langle \alpha, \beta \rangle$  para indicar la imagen del par  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ ):

- (i)  $\alpha \in \mathbb{V}, \alpha \neq \theta \iff \langle \alpha, \alpha \rangle > 0$  (Positivo Definido).
- (ii)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{V} : \langle \alpha, \beta \rangle = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle}$  (Simetría).
- (iii)  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{V}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} : \langle c\alpha + \beta, \gamma \rangle = c\langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$  (Linealidad por la Izquierda).

De los tres axiomas definitorios del producto interior se deducen inmediatamente las siguientes propiedades:

- (iv)  $\forall \alpha \in \mathbb{V} : \langle \theta, \alpha \rangle = \langle \theta\theta, \alpha \rangle = 0$ . En particular,  $\langle \theta, \theta \rangle = 0$ .
- (v)  $\forall \alpha \in \mathbb{V} : \langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0 ; \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \iff \alpha = \theta$ .
- (vi)  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{V}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} : \langle \alpha, c\beta + \gamma \rangle = \bar{c}\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$  (Linealidad por la Derecha).
- (vii)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{V} : |\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \sqrt{\langle \beta, \beta \rangle}$  (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

La *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, rara vez llamada “Desigualdad de Cauchy-Buniakovski” [Kolmogoróv & Fomín, 1978], tiene una demostración sencilla como se verá. En efecto, si  $\alpha \neq \theta$ , ambos miembros de la desigualdad son 0 y ésta se cumple trivialmente. Supóngase que  $\alpha \neq \theta$  y hágase

$$\gamma = \beta - \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \quad (1)$$

Entonces, obviamente  $\langle \gamma, \alpha \rangle = 0$ , y se tiene que

$$0 \leq \|\gamma\|^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle = \left\langle \beta - \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha, \beta - \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \right\rangle = \langle \beta, \beta \rangle - \frac{\langle \beta, \alpha \rangle \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \quad (2)$$

Empleando la definición  $c\bar{c} = |c|^2$  en el numerador de la fracción, reorganizando los términos y extrayendo la raíz cuadrada positiva a ambos miembros se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz [Hoffman & Kunze, 1973].

## 6.2. ESPACIOS PRODUCTO INTERIOR

Al par  $(\mathbb{V}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , es decir, a un espacio vectorial  $\mathbb{V}$  sobre  $\mathbb{R}$  (ó  $\mathbb{C}$ ), junto con un producto interior en  $\mathbb{V}$ , se le llama *espacio euclídeo* o *espacio producto interior*. Cuando el espacio vectorial está definido sobre los números complejos  $\mathbb{C}$ , entonces al espacio producto interior se le llama a veces *espacio euclídeo complejo* [Kolmogoróv & Fomín,1978] o *espacio unitario* [Hoffman & Kunze,1973].

Se puede mostrar que todo espacio euclídeo  $(\mathbb{V}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$  puede considerarse normado, definiendo la norma mediante el producto interior. En efecto, para todo  $\alpha \in \mathbb{V}$  defínase la norma

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \quad (1)$$

lo cual tiene sentido sabiendo que se satisface (v) de la sección 5.1. Siempre que se considere un espacio euclídeo como normado, se entenderá que la norma es (1). Con esta norma la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa como

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \|\beta\| \quad (2)$$

cuya demostración es equivalente a 6.1.(1, 2).

Esta norma también satisface la desigualdad triangular (iv) de la sección 5.1, la cual en este caso puede demostrarse haciendo

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|^2 &= \langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle = \|\alpha\|^2 + \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle + \|\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2\Re\langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2 \\ &\leq \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\| \|\beta\| + \|\beta\|^2 = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

donde se ha considerado la relación  $\Re\langle \alpha, \beta \rangle \leq \|\alpha\| \|\beta\|$  derivada de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (2) y de  $\Re c \leq |c| = \sqrt{c\bar{c}}$ . Finalmente, extrayendo la raíz cuadrada positiva, se obtiene la desigualdad triangular [Hoffman & Kunze,1973].

Refiriéndose a los espacios normados, se puede afirmar que todo espacio euclídeo  $(\mathbb{V}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$  puede considerarse como métrico, tomando la métrica inducida por la norma (1), la cual es, a su vez, inducida por el producto interior. En resumen, la métrica natural de un espacio euclídeo es para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\langle \alpha - \beta, \alpha - \beta \rangle} = \|\alpha - \beta\| \quad (4)$$

donde la norma empleada es la norma (1) [Iribarren,1973].

## 6.3. ESPACIOS DE HILBERT

Todo espacio vectorial euclídeo que sea completo es un *espacio de Hilbert*.

# 7. INTEGRALES ACOTADAS

## 7.1. ESPACIOS DE LEBESGUE

Considérese un dominio abierto y acotado en un espacio euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , cuyos puntos son denotados  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Los *espacios de Lebesgue*  $L_p(\Omega)$  consisten en una clase de equivalencia de funciones  $u(\mathbf{x})$  definidas en  $\Omega$ , cuyos valores absolutos tienen potencias a la  $p \geq 1$  integrables sobre  $\Omega$  en el sentido de Lebesgue, es decir,  $u \in L_p(\Omega)$  es medible y su  $L_p(\Omega)$ -norma es finita

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} < \infty \quad (1)$$

Aquí se implica que  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ . Los espacios de Lebesgue son espacios de Banach.

El espacio de Lebesgue particularizado para  $p = 2$  es un espacio de Hilbert junto con el producto interior

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx \quad (2)$$

La norma (1) y el producto interior (2) satisfacen la *desigualdad de Hölder*, la cual establece que

$$| \langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} | \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (3)$$

donde  $u \in L_p(\Omega)$  y  $v \in L_q(\Omega)$ , con  $1 \leq p, q \leq \infty$ . De acuerdo a la definición introducida en la sección 5.3, los espacios de Lebesgue  $L_p(\Omega)$  y  $L_q(\Omega)$  son duales entre si.

La desigualdad de Hölder se demuestra mediante el uso de la siguiente relación entre áreas

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} = \mathcal{A}_{\xi} + \mathcal{A}_{\eta} \quad \mathcal{A}_{\xi} = \int_0^a \xi^{p-1} \, d\xi = \frac{a^p}{p} \quad \mathcal{A}_{\eta} = \int_0^b \eta^{q-1} \, d\eta = \frac{b^q}{q} \quad (4)$$

siendo  $a$  y  $b$  números reales positivos y  $1 \leq p, q \leq \infty$ . La demostración se basa en el hecho de que la desigualdad de Hölder es homogénea, es decir, que si se cumple para las funciones  $u$  y  $v$ , entonces también se cumplirá para  $\mu u$  y  $\nu v$ , siendo  $\mu$  y  $\nu$  dos número reales arbitrarios. Por consiguiente es suficiente demostrar la desigualdad de Hölder para el caso en el que  $\|u\|_{L_p(\Omega)} = \|v\|_{L_q(\Omega)} = 1$ . Luego se muestra que  $| \langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} | \leq 1$ . Esto último se hace calculando las integrales como una sumatoria infinita de Riemann sobre el dominio  $\Omega$  y aplicando la desigualdad (4) a cada uno de sus términos.

Observamos que la desigualdad de Hölder particularizada para  $p = q = 2$  no es más que la desigualdad de Cauchy-Schwarz establecida para un espacio euclídeo en (vii) de la sección 6.1 y con el uso del producto interior (2).

Otra desigualdad de importancia para los espacios de Lebesgue es la desigualdad de Minkowski, la cual establece que

$$\|u + v\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)} \quad (5)$$

Es obvio que la esta desigualdad de Minkowski no es más que la desigualdad triangular ((iv) de la sección 5.1) particularizada para la norma (1). Se puede demostrar que esta norma la satisface mediante el uso de la siguiente identidad

$$( |a| + |b| )^p = ( |a| + |b| )^{p-1} |a| + ( |a| + |b| )^{p-1} |b| \quad (6)$$

Siguiendo un procedimiento sencillo, se puede aplicar a cada uno de los términos de la identidad (6), con  $a = u$  y  $b = v$ , la integración en el dominio  $\Omega$ . Luego se puede aplicar la desigualdad de Hölder a cada uno de los términos del miembro de la derecha. Finalmente, la división de toda la igualdad por un factor adecuado permite obtener (5).

## 7.2. ESPACIOS DE SOBOLEV

Alrededor de 1950 S. L. Sobolev [1963,1964] mostró que la idea del espacio  $L_p(\Omega)$  podía ser extendida de una forma natural considerando funciones  $u(\mathbf{x})$  que están no sólo en  $L_p(\Omega)$ , sino que tienen todas sus derivadas parciales hasta un orden  $m \geq 0$ , las cuales también están en  $L_p(\Omega)$ . Cuando todas las derivadas parciales de  $u(\mathbf{x})$  hasta un orden  $m$  están en  $L_p(\Omega)$ , se dice que  $u(\mathbf{x})$  pertenece al *espacio de Sobolev* de orden  $m, p$ , el cual se denota como

$$W_p^m(\Omega) = \{ u \mid D^{\alpha} u \in L_p(\Omega) ; \forall \alpha \text{ tal que } 0 \leq |\alpha| \leq m \} \quad (1)$$

donde

$$D^{\alpha} u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad |\alpha| \equiv \|\alpha\|_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \quad (2)$$

Una variedad de normas diferentes a la  $L_p(\Omega)$ -norma, pero equivalente, puede ser asociada a  $W_p^m(\Omega)$ . Puesto que, para cada  $\alpha$ , tal que  $0 \leq |\alpha| \leq m$ ,  $D^\alpha u$  está en  $L_p(\Omega)$ , la suma de las  $L_p(\Omega)$ -normas de todas las derivadas de  $u(\mathbf{x})$  de orden  $\leq m$  obviamente satisface los axiomas de las normas y también es sugerida naturalmente por (1). Así que para cada  $u \in W_p^m(\Omega)$  se introduce la norma

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad (3)$$

Es obvio que los espacios de Sobolev (1), dotados de las normas (3), son espacios de Banach. Claramente  $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$ . El caso particular de los espacios de Sobolev con  $p = 2$ , conforman los espacios de Hilbert  $H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega)$ , junto con el producto interior

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L_2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx \quad (4)$$

y la norma asociada

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = [\langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)}]^{1/2} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} < \infty \quad (5)$$

## 8. ANALISIS VARIACIONAL

### 8.1. LEMAS FUNDAMENTALES

El *lema fundamental del cálculo variacional* como su nombre lo indica permite establecer o demostrar los resultados principales de los temas que siguen.

**Lema 0.** Lema fundamental del cálculo variacional.

Si una función  $f(x)$  continua de la clase  $C^0([x_a, x_b])$ , definida en el intervalo  $[x_a, x_b]$ , satisface que

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) \eta(x) dx = 0 \quad (1)$$

para cualquier función continua  $\eta(x)$  de la clase  $C^0([x_a, x_b])$ , con  $\eta(x_a) = \eta(x_b) = 0$ , entonces  $f(x) \equiv 0$  en  $[x_a, x_b]$ .

*Demostración.* Sea  $f(x) \not\equiv 0$ , entonces existe un punto  $x_o \in (x_a, x_b)$  tal que  $f(x_o) \neq 0$ . Para mayor precisión, supondremos que  $f(x_o) > 0$ . Ya que  $f$  es continua, existe un entorno  $(x_o - \Delta x, x_o + \Delta x) \subset [x_a, x_b]$  en el que  $f(x) > c$ . Sea  $\eta(x) \geq 0$  una función continua en  $[x_a, x_b]$ , tal que  $\eta(x) > 0$  dentro del entorno mencionado y  $\eta(x) = 0$  fuera del mismo entorno, entonces

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) \eta(x) dx = \int_{x_o - \Delta x}^{x_o + \Delta x} f(x) \eta(x) dx > c \int_{x_o - \Delta x}^{x_o + \Delta x} \eta(x) dx > 0 \quad (2)$$

lo que contradice la hipótesis del lema. Por consiguiente,  $f(x) \equiv 0$ .  $\triangle$

El lema demostrado sigue siendo válido aunque se restrinja que la función  $\eta(x)$  sea de la clase  $C^k$  (o incluso  $k = \infty$ ) que cumpla con las correspondientes condiciones de frontera. O sea que tiene que verificarse la relación (1), para una clase más reducida de funciones  $\eta(x)$ , que la clase de funciones continuas [Kartashov et al., 1980; Arnold, 1989].

**Lema 1.** Lema fundamental para funciones de varias variables.

Sean  $\mathbf{f}$  y  $\boldsymbol{\eta}$  funciones del espacio producto interior [Iribarren,1973]

$$\mathbb{D}_{m,n}^0(\mathcal{V}; \langle \cdot, \cdot \rangle) = \{ \mathbf{f} \in C^0(\mathcal{V}) \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \} \quad (3)$$

de todas las funciones de varias variables ( $n$ -dimensionales) continuas de la clase  $C^0(\mathcal{V})$ , definidas sobre un dominio  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ . Si se satisface

$$\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \, d\mathcal{V} = 0 \quad (4)$$

para cualquier función  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$ , con  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  para  $\mathbf{x} \in \mathcal{A} = \partial\mathcal{V}$ , entonces  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ .

**Demostración.** Si se cumple que las funciones  $\eta^i$ , componentes de  $\boldsymbol{\eta}(x)$ , son todas independientes entre sí (en lo que respecta a su dirección en el espacio), entonces (4) se puede separar en  $n$  casos del tipo (1).  $\triangle$

Una demostración más completa de este lema se puede encontrar en [Gurtin,1972;Bedford,1985]. Para satisfacer los requerimientos de la función de prueba en la demostración del lema fundamental, se debe escoger la función  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$  con componentes positivas y continuas dentro de  $\mathcal{V}$ , y  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  en su frontera  $\mathcal{A} = \partial\mathcal{V}$ . Obviamente, el caso donde  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$  está definido como un intervalo cerrado del eje real (tal como lo expresa el lema 0), es un caso particular de (4).

**Lema 2.** Lema fundamental para regiones de la frontera.

Sean  $\mathbf{f}$  y  $\boldsymbol{\eta}$  dos funciones del espacio producto interior  $\mathbb{D}_{m,n}^0(\mathcal{V}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , y considérese  $\mathcal{A} = \partial\mathcal{V}$  compuesta de dos partes  $\mathcal{A}^+$  y  $\mathcal{A}^-$ . Si se satisface

$$\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \int_{\mathcal{A}^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \, d\mathcal{A} = 0 \quad (5)$$

para cualquier función  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$ , con  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  para  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^-$ , entonces  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$  en  $\mathcal{A}^+$ .

**Demostración.** Si se aplica el lema 1 al dominio  $\mathcal{A}^+$  y se observa que  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  en  $\partial\mathcal{A}^+$ , queda demostrado este lema [Bedford,1985].  $\triangle$

## 8.2. FORMULACION DE EULER-LAGRANGE

### 8.2.1 Ecuaciones Diferenciales

El problema fundamental del cálculo variacional se generaliza fácilmente para el caso de una función escalar  $f$  dependiente de la variable  $x$ , de varias variables  $y^i = y^i(x)$  y de sus derivadas  $\dot{y}^i = dy^i/dx$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Considérese la siguiente integral

$$I = \int_{x_a}^{x_b} f[x, \mathbf{y}(x), \dot{\mathbf{y}}(x)] \, dx \quad \{\mathbf{y}(x)\} = \{y^1(x), y^2(x), y^3(x), \dots, y^n(x)\}^t \quad (1)$$

El problema fundamental del cálculo variacional consiste en hallar la función  $\mathbf{y}$  que minimiza o maximiza el funcional  $\mathcal{I}(\mathbf{y}) = I$ . La función  $\mathbf{y}(x)$  hallada en este caso se denomina la *trayectoria extremal* del funcional  $\mathcal{I}(\mathbf{y})$ . La técnica para hallar la función extremal consiste en hallar la *variación* de la integral  $I$  e igualarla a cero. Recíprocamente, toda trayectoria extremal  $\mathbf{y}(x)$  anula la variación del funcional  $\delta\mathcal{I}(\mathbf{y}) = 0$  (eventualmente se tolerará el abuso de la notación y se escribirá  $\delta I = 0$ ), por lo que también se dice que es un *punto estacionario* del funcional dentro del espacio de funciones

$$\mathbb{E}_n^2 = \{ \mathbf{y}(x) \in \mathbb{D}_n^2([x_a, x_b], \|\cdot\|_c) \mid \mathbf{y}(x_a) = \mathbf{y}_a, \mathbf{y}(x_b) = \mathbf{y}_b \} \quad (2)$$

siendo  $\mathbb{E}$  una variedad diferencial lineal [Iribarren,1973;Kartashov et al.,1980], definida dentro de  $\mathbb{D}^2([x_a, x_b])$ , el espacio (vectorial) normado de las funciones  $n$ -dimensionales de la clase  $C^2([x_a, x_b])$  (con derivadas continuas de primero y segundo orden), con la norma siguiente

$$\|\mathbf{y}(x)\|_c = \max_{x_a \leq x \leq x_b} \{ \|\mathbf{y}(x)\|_\infty, \|\dot{\mathbf{y}}(x)\|_\infty, \|\ddot{\mathbf{y}}(x)\|_\infty \} \quad \|\mathbf{y}(x)\|_\infty = \max_i |y^i(x)| \quad (3)$$

Fácilmente se comprueba que  $\mathbb{D}^2([x_a, x_b])$  posee todas las propiedades de un espacio lineal normado. La condición de que las funciones  $\mathbf{y}(x)$  sean de la clase  $C^2([x_a, x_b])$  se usará más adelante para poder intercambiar el orden de la derivación en las derivadas de segundo orden. Adicionalmente, la función  $f(x, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$  también debe pertenecer a la clase  $C^2([x_a, x_b])$  para poder aplicar el lema fundamental del cálculo variacional.

La variación del funcional  $\mathcal{I}(\mathbf{y}) = I$  se obtiene considerando la función  $I(\alpha)$  como la evaluación de la integral (1), donde  $\alpha$  es un parámetro que caracteriza las familias de trayectorias

$$\begin{aligned} Y^1(x, \alpha) &= y^1(x) + \alpha \eta^1(x) \\ Y^2(x, \alpha) &= y^2(x) + \alpha \eta^2(x) \\ Y^3(x, \alpha) &= y^3(x) + \alpha \eta^3(x) \\ &\vdots \\ Y^n(x, \alpha) &= y^n(x) + \alpha \eta^n(x) \end{aligned} \quad \mathbf{Y}(x, \alpha) = \mathbf{y}(x) + \alpha \boldsymbol{\eta}(x) \quad (4)$$

donde  $\mathbf{y}(x)$  es la trayectoria de la solución extremal del problema variacional planteado, es decir, para  $\alpha = 0$ . Las componentes de  $\boldsymbol{\eta}(x)$  son funciones completamente arbitrarias de  $\mathbb{E}_n^2$  con la excepción de que deben anularse en los puntos extremos del intervalo  $[x_a, x_b]$  donde está definido el problema variacional. Esta condición se cumple puesto que se trata de una variación con extremos fijos y como  $\mathbf{y}(x)$  y  $\mathbf{Y}(x) = \mathbf{y}(x) + \alpha \boldsymbol{\eta}(x)$  pertenecen a  $\mathbb{E}_n^2$ , entonces  $\boldsymbol{\eta}(x_a) = \boldsymbol{\eta}(x_b) = \mathbf{0}$ . De esta forma la integral  $I(\alpha)$  resulta ser

$$I(\alpha) = \int_{x_a}^{x_b} f[x, \mathbf{Y}(x, \alpha), \dot{\mathbf{Y}}(x, \alpha)] dx \quad \{\mathbf{Y}(x, \alpha)\} = \{Y^1(x, \alpha), Y^2(x, \alpha), Y^3(x, \alpha), \dots, Y^n(x, \alpha)\}^t \quad (5)$$

donde la función  $f$  es ahora dependiente de la variable  $x$ , de las variables  $Y^i = Y^i(x, \alpha)$  y de sus derivadas  $\dot{Y}^i = \partial Y^i / \partial x$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

La variación  $\delta I$  de la integral (1) se define como

$$\frac{dI}{d\alpha} d\alpha = \int_{x_a}^{x_b} \left( \frac{\partial f}{\partial Y^i} \frac{\partial Y^i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{Y}^i} \frac{\partial \dot{Y}^i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx = \int_{x_a}^{x_b} \left( \frac{\partial f}{\partial Y^i} \frac{\partial Y^i}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{Y}^i} \frac{\partial \dot{Y}^i}{\partial \alpha} \right) d\alpha dx \quad (6)$$

calculando luego el límite cuando  $\alpha \rightarrow 0$ . En (6) y en lo que sigue se sobreentenderá que se ha aplicado la notación indicial con la correspondiente convención de suma. El segundo término del integrando de (6) se puede calcular intercambiando el orden de derivación entre  $\alpha$  y  $x$ , puesto que son variables independientes entre sí y la función  $Y^i$  pertenece a la clase  $C^2([x_a, x_b])$ . Luego, aplicando la integración por partes, se obtiene

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial f}{\partial \dot{Y}^i} \frac{\partial \dot{Y}^i}{\partial \alpha} dx = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial f}{\partial \dot{Y}^i} \frac{\partial^2 Y^i}{\partial \alpha \partial x} dx = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial f}{\partial \dot{Y}^i} \frac{\partial^2 Y^i}{\partial \dot{Y}^i \partial x \partial \alpha} dx = \frac{\partial f}{\partial \dot{Y}^i} \frac{\partial Y^i}{\partial \alpha} \Big|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial Y^i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{Y}^i} \right) dx \quad (7)$$

donde el primer término se anula por pasar todas las trayectorias por los extremos dados. Substituyendo este último resultado en (6), esta expresión se transforma en

$$\delta I = \int_{x_a}^{x_b} \left[ \frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}^i} \right) \right] \delta y^i dx = 0 \quad (8)$$

en la cual, por analogía con la definición dada al inicio de (6), se ha substituido de una vez la variación  $\delta y^i$ , siendo

$$\delta I = \left( \frac{dI}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha \quad \delta y^i = \left( \frac{\partial Y^i}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha = \eta^i d\alpha \quad (9)$$

Si las variables  $y^i$  son independientes entre sí, también los serán sus variaciones  $\delta y^i$  (es decir, las funciones  $\eta^i(x)$  serán independientes entre sí). Por lo tanto,  $\delta I$  será nula si, y sólo si, los coeficientes de la  $\delta y^i$  se anulan por separado. Así resulta [Goldstein, 1980]

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}^i} \right) = 0 \quad \nabla_y f - \frac{d}{dx} (\nabla_{\dot{y}} f) = \mathbf{0} \quad (10)$$

o bien desarrollando el segundo término

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{y}^i} + \dot{y}^j \frac{\partial^2 f}{\partial y^j \partial \dot{y}^i} + \ddot{y}^j \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^j \partial \dot{y}^i} \right) = 0 \quad \nabla_y f - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\nabla_{\dot{y}} f) + \dot{\mathbf{y}} \cdot \nabla_y \nabla_{\dot{y}} f + \ddot{\mathbf{y}} \cdot \nabla_{\dot{y}} \nabla_{\dot{y}} f \right] = \mathbf{0} \quad (10')$$

donde la ecuación del lado derecho es la expresión simbólica del lado izquierdo.

Es importante notar que el último procedimiento aplicado para pasar de (8) a (10) es equivalente a aplicar el lema fundamental del cálculo variacional a cada componente por separado por ser independientes entre sí (Lema 1, Lema fundamental para funciones de varias variables).

El conjunto de ecuaciones diferenciales (10) se conoce con el nombre de *ecuaciones de Euler-Lagrange*. Las funciones  $\mathbf{y}(x)$  que la cumplen constituyen el espacio de solución de las funciones extremales o los puntos estacionarios del funcional  $\mathcal{I}(\mathbf{y})$ . Complementariamente, dada una función  $f(x, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$  conocida, entonces su substitución en las ecuaciones de Euler-Lagrange producen ecuaciones diferenciales, cuya solución (si existen) son las trayectorias  $y^i(x)$  que maximizan o minimizan  $I$ .

### 8.2.2. Restricción en las Trayectorias

Las trayectorias descritas en el sección anterior pueden sufrir una restricción del tipo

$$g^j[x, \mathbf{y}(x), \dot{\mathbf{y}}(x)] = \phi^j[x, \mathbf{y}(x)] + \dot{y}^i(x) \varphi_i^j[x, \mathbf{y}(x)] = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \dots, n \\ j = 1, 2, 3, \dots, m \end{array} \quad (11)$$

lo que hace que las trayectorias en (1), originalmente con  $n$  grados de libertad, tenga ahora  $n - m$  grados de libertad. Esto cambia necesariamente el resultado (10), ya que la independencia entre las trayectorias  $y^i$  fué una condición para su derivación.

Una forma de resolver el problema planteado es definiendo una función escalar

$$h[x, \mathbf{y}(x), \dot{\mathbf{y}}(x)] = g^j[x, \mathbf{y}(x), \dot{\mathbf{y}}(x)] \lambda_j(x) = 0 \quad (12)$$

donde los  $m$  coeficientes  $\lambda_j(x)$  se denominan *multiplicadores de Lagrange*. Obviamente se debe cumplir que

$$H = \int_{x_a}^{x_b} h[x, \mathbf{y}(x), \dot{\mathbf{y}}(x)] dx = 0 \quad (13)$$

y, por lo tanto, también se tiene que  $h$  satisface (8)

$$\delta H = \int_{x_a}^{x_b} \delta h dx = \int_{x_a}^{x_b} \left[ \frac{\partial h}{\partial y^i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{y}^i} \right) \right] \delta y^i dx = 0 \quad (14)$$

aunque las trayectorias no sea independientes entre sí. Hasta este punto, la independencia de las trayectorias no es necesaria para que tanto  $f$  como  $h$  satisfagan (8). Substituyendo (12) en (14) resulta

$$\frac{\partial g^j}{\partial y^i} = \frac{\partial \phi^j}{\partial y^i} + \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial y^i} \dot{y}^l \quad \frac{\partial g^j}{\partial \dot{y}^i} = \varphi_i^j \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g^j}{\partial \dot{y}^i} \right) = \frac{d\varphi_i^j}{dx} = \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial y^l} \dot{y}^l \quad (15)$$

$$\frac{\partial g^j}{\partial y^i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g^j}{\partial \dot{y}^i} \right) = \frac{\partial \phi^j}{\partial y^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial x} + \left( \frac{\partial \varphi_l^j}{\partial y^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial y^l} \right) \dot{y}^l \quad (16)$$

y finalmente

$$\delta H = \int_{x_a}^{x_b} \left\{ \left[ \frac{\partial \phi^j}{\partial y^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial x} + \left( \frac{\partial \varphi_l^j}{\partial y^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial y^l} \right) \dot{y}^l \right] \lambda_j + \varphi_i^j \dot{\lambda}_j \right\} \delta y^i dx = 0 \quad (17)$$

Si ahora sumamos esta última expresión a la expresión (8) se obtiene

$$\delta K = \int_{x_a}^{x_b} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}^i} \right) + \left[ \frac{\partial \phi^j}{\partial y^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial x} + \left( \frac{\partial \varphi_l^j}{\partial y^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial y^l} \right) \dot{y}^l \right] \lambda_j + \varphi_i^j \dot{\lambda}_j \right\} \delta y^i dx = 0 \quad (18)$$

donde  $K = I + H$ . Se impondrá ahora que los multiplicadores  $\lambda_j(x)$  sean tales que se cumpla obligatoriamente

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}^i} \right) + \left[ \frac{\partial \phi^j}{\partial y^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial x} + \left( \frac{\partial \varphi_l^j}{\partial y^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial y^l} \right) \dot{y}^l \right] \lambda_j + \varphi_i^j \dot{\lambda}_j = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (19)$$

para la primeras  $m$  variables  $y^i$  dependientes de las restantes. Esta relación permitirá encontrar los multiplicadores  $\lambda_j(x)$  con  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ . Las  $n - m$  variables  $y^i$  restantes, independientes entre sí, hacen que el integrando de (18) se anule para cada una de ellas, obteniéndose que

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}^i} \right) + \left[ \frac{\partial \phi^j}{\partial y^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial x} + \left( \frac{\partial \varphi_l^j}{\partial y^i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial y^l} \right) \dot{y}^l \right] \lambda_j + \varphi_i^j \dot{\lambda}_j = 0 \quad i = n - m + 1, \dots, n \quad (20)$$

Esta relación permitirá encontrar las  $n - m$  variables  $y^i$  independientes ( $i = n - m + 1, \dots, n$ ). Las  $m$  variables  $y^i$ , dependiente entre sí por la relación (11), se pueden obtener de esta misma ya que

$$\phi^j + \dot{y}^i \varphi_i^j = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (21)$$

En definitiva las relaciones (19)-(21), expresadas de forma simbólica como

$$\nabla_y f - \frac{d}{dx} (\nabla_{\dot{y}} f) + \left( \nabla_y \phi - \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nabla_y \varphi^t \cdot \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}} \cdot \nabla_y \varphi \right) \cdot \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varphi} \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \quad \phi + \dot{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (19' - 21')$$

forman un sistema de ecuaciones diferenciales que permiten obtener las  $n + m$  incógnitas que son: las  $n$  trayectorias  $y^i(x)$  (las primeras  $m$  dependientes y las  $n - m$  restantes independientes) y los  $m$  multiplicadores de Lagrange  $\lambda_j(x)$ . Esta forma de resolución se emplea normalmente cuando existe el interés expreso de obtener ecuaciones diferenciales para los multiplicadores de Lagrange. Si este interés no existe, entonces es más conveniente utilizar el siguiente procedimiento mucho más simple y fácil de implementar.

Otra forma más simple de resolver el problema planteado con restricciones en la trayectoria del tipo (11), es redefiniendo  $g^j$  y estableciendo la relación variacional

$$\delta g^j = \varphi_i^j [x, \mathbf{y}(x)] \delta y^i = 0 \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \dots, n \\ j = 1, 2, 3, \dots, m \end{matrix} \quad (22)$$

obtenida de (11) multiplicada por  $dx$ . Nótese que en este caso se han redefinido  $\dot{g}^j = \phi^j + \dot{y}^i \varphi_i^j = 0$  y  $\dot{h} = \dot{g}^j \lambda_j = 0$  (la dependencia funcional de  $\dot{g}^j$  y  $\dot{h}$  es la misma que antes). Luego se establece que los diferenciales  $dy^i$  se relacionan igual que las variaciones  $\delta y^i$ , con la particularidad de que  $\delta x = 0$ , debido a que la variable  $x$  no se varía. Multiplicando la relación (22) por los multiplicadores de Lagrange en la forma

$$\delta h = \lambda_j(x) \varphi_i^j [x, \mathbf{y}(x)] \delta y^i = 0 \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \dots, n \\ j = 1, 2, 3, \dots, m \end{matrix} \quad (23)$$



e introduciendo este resultado en el integrando de (8), sin afectarlo, se obtiene la expresión

$$\delta K = \int_{x_a}^{x_b} \left[ \frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}^i} \right) + \varphi_i^j \lambda_j \right] \delta y^i dx = 0 \quad (24)$$

Se impondrá ahora que los multiplicadores  $\lambda_j(x)$  sean tales que se cumpla obligatoriamente

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}^i} \right) + \varphi_i^j \lambda_j = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (25)$$

para la primeras  $m$  variables  $y^i$  dependientes de las restantes. Esta relación permitirá encontrar los multiplicadores  $\lambda_j(x)$  con  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ . Las  $n - m$  variables  $y^i$  restantes, independientes entre sí, hacen que el integrando de (24) se anule para cada una de ellas, obteniéndose similarmente que

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}^i} \right) + \varphi_i^j \lambda_j = 0 \quad i = n - m + 1, \dots, n \quad (26)$$

Esta relación permitirá encontrar las  $n - m$  variables  $y^i$  independientes ( $i = n - m + 1, \dots, n$ ). Las  $m$  variables  $y^i$ , dependiente entre sí por la relación (11), se pueden obtener de esta misma ya que de nuevo se tiene que

$$\phi^j + \dot{y}^i \varphi_i^j = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (27)$$

En definitiva las relaciones (25)-(27), expresadas de forma simbólica como

$$\nabla_y f - \frac{d}{dx} (\nabla_{\dot{y}} f) + \varphi \cdot \lambda = 0 \quad \phi + \dot{y} \cdot \varphi = 0 \quad (25' - 27')$$

forman un sistema de ecuaciones diferenciales que permiten obtener las  $n + m$  incógnitas que son: las  $n$  trayectorias  $y^i(x)$  (las primeras  $m$  dependientes y las  $n - m$  restantes independientes) y los  $m$  multiplicadores de Lagrange  $\lambda_j(x)$ . En este caso, los multiplicadores de Lagrange son distintos a los obtenidos por el procedimiento anterior más elaborado (en algunos casos aquellos pueden ser las derivadas de estos). Esta forma de resolución se emplea normalmente cuando no existe el interés de obtener ecuaciones diferenciales para los multiplicadores de Lagrange, resultando solamente al final un conjunto de ecuaciones diferenciales donde intervienen ellos de forma puramente algebraica.

En general, cuando se tienen restricciones del tipo

$$\psi^j[x, \mathbf{y}(x)] = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \quad (28)$$

estas pueden llevarse a la forma (11), si se deriva en la forma

$$\frac{d\psi^j}{dx} = \frac{\partial \psi^j}{\partial x} + \frac{\partial \psi^j}{\partial y^i} \dot{y}^i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (29)$$

y se hace la siguiente substitución de funciones [Goldstein, 1980]

$$g^j = \frac{d\psi^j}{dx} \quad \phi^j = \frac{\partial \psi^j}{\partial x} \quad \varphi_i^j = \frac{\partial \psi^j}{\partial y^i} \quad (30)$$

### 8.3. FORMULACION DE EULER-OSTROGRADSKI

#### 8.3.1. Ecuación Diferencial

El problema fundamental del cálculo variacional se puede generalizar todavía más que 8.2.(1) si se considera la siguiente integral

$$I = \int_{\mathcal{V}} f[\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})] d\mathcal{V} \quad (1)$$

donde la función  $\mathbf{y}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  del tipo  $n$ -dimensional pertenece a la variedad lineal

$$\mathbb{E}_{m,n}^2 = \{\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in \mathbb{D}_{m,n}^2(\mathcal{V}, \|\cdot\|_c) \mid \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{A} = \partial\mathcal{V}\} \quad (2)$$

donde  $\mathbb{D}_n^2(\mathcal{V})$  es el espacio de aquellas funciones continuas  $n$ -dimensionales, definidas sobre el dominio  $\mathcal{V}$  de dimensión  $m$ , cuyas derivadas de primer y segundo orden son continuas, y con la norma

$$\|\mathbf{y}(\mathbf{x})\|_c = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} \{\|\mathbf{y}(\mathbf{x})\|_{\infty}, \|\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\|_{\infty}, \|\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\|_{\infty}\} \quad \|\mathbf{y}(\mathbf{x})\|_{\infty} = \max_i |y^i(\mathbf{x})| \quad (3)$$

siendo esta norma es una generalización de la norma 8.2.(3), considerando que la derivación en este caso es con respecto a cualquiera de las variables  $x^i$ . La función  $f$  pertenece a variedad  $\mathbb{E}_{m,1}^2$ . El problema variacional consiste entonces en hallar la función  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  que anula la variación de la integral (1). Es decir, se desea encontrar el punto estacionario del funcional  $\mathcal{I}(\mathbf{y}) = I$ .

La variación del funcional  $\mathcal{I}(\mathbf{y}) = I$  se obtiene, de forma similar que en las ecuaciones de Euler-Lagrange, considerando la función  $I(\alpha)$  como la evaluación de la integral (1), donde  $\alpha$  es un parámetro que caracteriza las familias de trayectorias

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) + \alpha \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \quad \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \alpha) = \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}) + \alpha \nabla \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

donde  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  es la trayectoria de la solución extremal del problema variacional planteado, es decir para  $\alpha = 0$ . Por las razones antes expuestas en el lema fundamental para funciones de varias variables, la función  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$  debe anularse en la frontera  $\mathcal{A}$  del dominio  $\mathcal{V}$ , o sea,  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  para  $\mathbf{x} \in \mathcal{A} = \partial\mathcal{V}$ . Análogamente la integral  $I(\alpha)$  resulta ser

$$I(\alpha) = \int_{\mathcal{V}} f[\mathbf{x}, \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \alpha), \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \alpha)] d\mathcal{V} \quad (5)$$

donde la función  $f$  es ahora dependiente de la variable  $\mathbf{x}$ , de la variables  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \alpha)$  y de su gradiente  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \alpha) = \partial \mathbf{Y} / \partial \mathbf{x}$ . El operador diferencial  $\nabla = d/d\mathbf{x}$  en (1), donde el gradiente se hace derivando totalmente respecto a  $\mathbf{x}$ , es diferente que el operador diferencial  $\nabla_{\mathbf{x}} = \partial / \partial \mathbf{x}$ , en el cual el gradiente se hace parcialmente con respecto a  $\mathbf{x}$ .

La variación  $\delta I$  de la integral (1) se define como

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} d\alpha &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{Y}} : \left( \frac{\partial \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{Y}}{\partial \alpha} \right)^t d\alpha \right] d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{Y}} : \left( \frac{\partial \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{Y}}{\partial \alpha} \right)^t \right] d\alpha d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (6)$$

calculando luego, como se hizo antes, el límite cuando  $\alpha \rightarrow 0$ . Una vez tomado el límite en el integrando de (6), el primer término se puede expresar como

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \nabla_{\mathbf{y}} f \cdot \boldsymbol{\eta} \quad \delta \mathbf{y} = \left( \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \boldsymbol{\eta} d\alpha \quad (7)$$

El segundo término se puede expresar como

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial \nabla_x \mathbf{Y}} : \left( \frac{\partial \nabla_x \mathbf{Y}}{\partial \alpha} \right)^t \right]_{\alpha=0} = \nabla_{\nabla_y} f : (\nabla \boldsymbol{\eta})^t = \nabla \cdot (\nabla_{\nabla_y} f \cdot \boldsymbol{\eta}) - (\nabla \cdot \nabla_{\nabla_y} f) \cdot \boldsymbol{\eta} \quad (8)$$

Nótese que en el desarrollo del segundo término se han intercambiado los órdenes de derivación entre  $\alpha$  y  $\mathbf{x}$ . Adicionalmente, en la parte final de (8), se ha aplicado la identidad  $\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{T} : (\nabla \mathbf{a})^t$  satisfecha por cualquier tensor  $\mathbf{T}$  de segundo orden y cualquier vector  $\mathbf{a}$ .

Luego de substituir (7) y (8) en la variación (6) y aplicar el teorema de la divergencia al primer término de (8), se obtiene el siguiente resultado

$$\delta I = \frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} d\alpha = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \cdot (\nabla_{\nabla_y} f \cdot \boldsymbol{\eta}) d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}} [\nabla_y f - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla_y} f)] \cdot \boldsymbol{\eta} d\alpha d\mathcal{V} = 0 \quad (9)$$

donde, al eliminar el primer término por ser  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  en  $\mathcal{A}$  ( $\mathbf{n}$  es la normal unitaria exterior sobre  $\mathcal{A}$ ), queda finalmente

$$\delta I = \int_{\mathcal{V}} [\nabla_y f - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla_y} f)] \cdot \boldsymbol{\eta} d\alpha d\mathcal{V} = 0 \quad (10)$$

Si aplicamos a este resultado el lema fundamental del cálculo variacional para funciones de varia variables, entonces podemos decir que el integrando de (10) se debe anular en todo el dominio  $\mathcal{V}$ . Esto es

$$\nabla_y f - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla_y} f) = \mathbf{0} \quad (11)$$

para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ , o expandiendo el segundo término

$$\nabla_y f - [\nabla_x \cdot (\nabla_{\nabla_y} f) + \nabla \mathbf{y} : (\nabla_y \nabla_{\nabla_y} f) + \nabla(\nabla \mathbf{y})^t : (\nabla_{\nabla_y} \nabla_{\nabla_y} f)] = \mathbf{0} \quad (11')$$

Para que el problema variacional resultante en (11) quede bien definido, debe imponerse que las condiciones de frontera para  $\mathbf{y}(x)$  sean conocidas completamente en  $\mathcal{A} = \partial\mathcal{V}$ . En el caso de que no se pueda imponen las condiciones de frontera en la forma establecida, se considerará que existe una restricción en la trayectoria, tal como se explica en la próxima sección.

El resultado (11), denominado ecuación de *Euler-Ostrogradski* [Kartashov et al.,1980], es sumamente general, puesto que las ecuaciones de Euler-Lagrange 8.2.(10) son un caso de particular ( $m = 1$ ) de ella. El parecido es evidente, bien sea sin expandir el segundo término o expandiéndolo a plenitud (expresiones 8.2.(10') y (11')). El caso particular con variables independientes del tipo  $(t, \mathbf{x})$ , en lugar de  $\mathbf{x}$ , se obtiene también de (11) haciendo  $t = x^1$  y  $x^1 = x^2, x^2 = x^3, \dots, x^{m-1} = x^m$ .

### 8.3.2. Restricción en la Trayectoria

Las trayectorias extremales descritas para la ecuación de Euler-Ostrogradski pueden sufrir una restricción del tipo

$$\mathbf{g}[\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})] = \boldsymbol{\phi}[\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})] + \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \quad (12)$$

dentro de una porción  $\mathcal{V}^*$  del dominio  $\mathcal{V}$ . Aquí  $\boldsymbol{\phi}$  es una función vectorial y  $\boldsymbol{\varphi}$  es una función tensorial de tercer orden.

Una forma de resolver el problema planteado, es definiendo una función escalar

$$h[\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})] = \mathbf{g}[\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = 0 \quad (13)$$

donde la función  $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})$  es un multiplicador de Lagrange vectorial. Obviamente, para esta función escalar se debe cumplir

$$H = \int_{\mathcal{V}^*} h[\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})] d\mathcal{V} = 0 \quad (14)$$

y, por lo tanto, también se tiene que satisfacer

$$\delta H = \int_{\mathcal{V}^*} [\nabla_y h - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla_y} h)] \cdot \boldsymbol{\eta} \delta \alpha \, d\mathcal{V} = 0 \quad (15)$$

Incorporando esta integral a la porción de (10) que corresponde se obtiene que

$$\delta K = \int_{\mathcal{V}^*} [\nabla_y k - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla_y} k)] \cdot \boldsymbol{\eta} \delta \alpha \, d\mathcal{V} = 0 \quad (16)$$

donde  $k = f + h$  y  $K = I + H$ . Aplicando el lema fundamental para funciones de varias variables (lema 1 o lema 2), finalmente resulta que

$$\nabla_y k - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla_y} k) = \nabla_y f - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla_y} f) + \{ \nabla_y \phi - \nabla_x \varphi + [\nabla \mathbf{y} : (\nabla_y \varphi)^t] - \nabla \mathbf{y} : \nabla_y \varphi \} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \varphi : (\nabla \boldsymbol{\lambda})^t = \mathbf{0} \quad (17)$$

donde se han empleado las siguientes relaciones

$$\nabla_y h = \{ \nabla_y \phi + [\nabla \mathbf{y} : (\nabla_y \varphi)^t] \} \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad \nabla_{\nabla_y} h = \varphi \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad \nabla \cdot \nabla_{\nabla_y} h = (\nabla_x \cdot \varphi + \nabla \mathbf{y} : \nabla_y \varphi) \cdot \boldsymbol{\lambda} + \varphi : (\nabla \boldsymbol{\lambda})^t \quad (18)$$

cuyo desarrollo ha sido muy parecido al empleado en 8.2.(15) y 8.2.(19')-8.2.(21'). La expresión (17) se satisface en  $\mathcal{V}^*$ , mientras que (11) se satisface en el resto del dominio  $\mathcal{V}^o = \mathcal{V} - \mathcal{V}^*$ . De esta forma (17) permite obtener el multiplicador de Lagrange vectorial  $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})$  y (11) permite obtener la función  $\mathbf{y}(x)$ , ambas en la porción  $\mathcal{V}^*$  del dominio. En el resto del dominio  $\mathcal{V}^o$ , la expresión (11) permite obtener la función  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ . Obligatoriamente, debe cumplirse cualquiera de las tres siguientes condiciones en la frontera:  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  en  $\mathcal{A}^* = \partial \mathcal{V}^*$ ,  $\nabla_{\nabla_y} h = \varphi \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$  en  $\mathcal{A}^*$ , o  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  en  $\mathcal{A} - \mathcal{A}^*$ .

Las condiciones de frontera para el multiplicador en la porción  $\mathcal{V}^*$  se establecen para que se satisfagan simultáneamente, (13) y las condiciones de frontera para  $\mathbf{y}(x)$ . En las fronteras colindantes entre  $\mathcal{V}^*$  y  $\mathcal{V}^o$  se impone que las condiciones de frontera sean continuas, es decir, iguales de un lado y del otro. Esto completa el problema en el resto del dominio  $\mathcal{V}^o$ , puesto que las condiciones de frontera estaban ya definidas para el dominio completo  $\mathcal{V}$ .

Otra forma de resolver el problema con restricción es introduciendo la restricción (13) (con (12) substituida) en la expresión (11'). Esto es,

$$\nabla_y f - [ \phi \cdot \boldsymbol{\lambda} + \nabla_x \cdot (\nabla_{\nabla_y} f) + \nabla \mathbf{y} : (\nabla_y \nabla_{\nabla_y} f + \varphi \cdot \boldsymbol{\lambda}) + \nabla (\nabla \mathbf{y})^t : (\nabla_{\nabla_y} \nabla_{\nabla_y} f) ] = \mathbf{0} \quad (19)$$

Esta expresión sería válida para la porción  $\mathcal{V}^*$  del dominio. El resto de las condiciones serían iguales que la otra forma de resolución. Al igual que para las restricciones en las ecuaciones de Euler-Lagrange, esta segunda forma de resolución produce una ecuación algebraica en el multiplicador de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$ , mientras que la primera forma de resolución ofrece una ecuación diferencial en derivadas parciales para el mismo multiplicador.

#### 8.4. VARIACIONES EVOLUTIVAS

Los casos particulares de variaciones, donde las variables independientes  $(\mathbf{x}) = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^m)$  son del tipo  $(t, \mathbf{x}) = (t, x^1, x^2, x^3, \dots, x^{m-1})$ , se denominarán *variaciones evolutivas*, ya que la variable  $t = x^0$  se puede identificar con el tiempo en los sistemas dinámicos. De esta forma las ecuaciones obtenidas anteriormente se pueden expresar incluyendo  $t$  como variable, haciendo el siguiente cambio de variables  $(\mathbf{x}) \rightarrow (t, \mathbf{x})$ , explícitamente expresado como:  $t = x^0 = x^1$  y  $x^1 = x^2$ ,  $x^2 = x^3$ ,  $\dots$ ,  $x^{m-1} = x^m$ .

### 8.4.1. Evolución de Euler-Lagrange

Si siguiendo el procedimiento indicado, se puede expresar fácilmente las ecuaciones de Euler-Lagrange 8.2.(10), simplemente intercambiando  $x$  por  $t$ , resultando así

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}^i} \right) = 0 \quad \nabla_y f - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{y}} f) = \mathbf{0} \quad (1)$$

o expandiendo el segundo término

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \dot{y}^i} + \dot{y}^j \frac{\partial^2 f}{\partial y^j \partial \dot{y}^i} + \ddot{y}^j \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^j \partial \dot{y}^i} \right) = 0 \quad \nabla_y f - \left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\dot{y}} f + \dot{\mathbf{y}} \cdot \nabla_y \nabla_{\dot{y}} f + \ddot{\mathbf{y}} \cdot \nabla_{\dot{y}} \nabla_{\dot{y}} f \right) = \mathbf{0} \quad (1')$$

donde la ecuación del lado derecho es la expresión simbólica del lado izquierdo.

### 8.4.2. Evolución de Euler-Ostrogradski

De manera similar, pero más elaborada, se puede expresar la ecuación de Euler-Ostrogradski con fronteras fijas 8.3.(11) como

$$\nabla_y f - \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{y}} f) - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla_y} f) = \mathbf{0} \quad (2)$$

o expandiendo los dos últimos términos

$$\begin{aligned} \nabla_y f - \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\dot{y}} f) + \dot{\mathbf{y}} \cdot \nabla_y \nabla_{\dot{y}} f + \ddot{\mathbf{y}} \cdot \nabla_{\dot{y}} \nabla_{\dot{y}} f \right] \\ - [ \nabla_x \cdot (\nabla_{\nabla_y} f) + \nabla \mathbf{y} : (\nabla_y \nabla_{\nabla_y} f) + \nabla (\nabla \mathbf{y})^t : (\nabla_{\nabla_y} \nabla_{\nabla_y} f) ] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2')$$

Como podrá observarse los dos últimos términos en (2'), corresponden a los últimos términos de 8.2.(10') y 8.3.(11'). Estos resultados pueden igualmente ser obtenidos, realizando la variación del funcional  $\mathcal{I}(\mathbf{y}) = I$  definido por la integral

$$I = \int_{t_a}^{t_b} \int_{\mathcal{V}} f[t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}), \dot{\mathbf{y}}(t, \mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(t, \mathbf{x})] d\mathcal{V} dt \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \alpha) &= \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) + \alpha \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{x}) \\ \nabla_x \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \alpha) &= \nabla \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) + \alpha \nabla \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\mathcal{V}$  es un volumen fijo,  $\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \alpha)$  representa la familia de trayectorias admisibles y  $\mathbf{y}(t, \mathbf{x})$  es la trayectoria de la solución extremal ( $\alpha = 0$ ) del problema variacional planteado.

### 8.4.3. Restricciones Evolutivas (Euler-Ostrogradski)

Para las restricciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange y la ecuación de Euler-Ostrogradski, se puede seguir un procedimiento similar al descrito en la sección anterior. En estos casos se habla de *restricciones evolutivas*. Estos resultados no se expresan aquí, pero son de fácil consecución, haciendo el cambio de variables arriba mencionado. Sin embargo, para la ecuación de Euler-Ostrogradski se puede tener un caso especial de restricciones evolutivas, el cual se explica a continuación.

Haciendo el cambio de variables explicado en la sección anterior, la restricción 8.3.(12) se puede expresar como

$$\dot{\mathbf{g}}[t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(t, \mathbf{x})] = \phi[t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x})] + \dot{\mathbf{y}}(t, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\xi}[t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x})] + \nabla \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varphi}[t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x})] = \mathbf{0} \quad (4)$$

Esta restricción actúa dentro de una porción  $\mathcal{V}^*$  del dominio  $\mathcal{V}$ . Aquí  $\boldsymbol{\xi}$  es una función tensorial de segundo orden.

Una forma de resolver el problema planteado consiste en substituir  $\nabla \mathbf{y}$  de la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt} (\nabla \mathbf{y}) = \nabla \dot{\mathbf{y}} = \nabla \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla_y \dot{\mathbf{y}}[t, \mathbf{y}^{-1}(t, \mathbf{y})] = \nabla \mathbf{y} \cdot \nabla_y \dot{\mathbf{y}} \quad \nabla \mathbf{y} = \frac{d}{dt} (\nabla \mathbf{y}) \cdot (\nabla_y \dot{\mathbf{y}})^{-1} \quad (5)$$

en la restricción (4). De esta operación resulta una nueva forma de expresar la restricción (4)

$$\dot{\mathbf{g}} = \phi + \dot{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{y}) : \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad \psi_i^{jk} = [(\nabla_y \dot{\mathbf{y}})^{-1}]_i^l \varphi_l^{jk} \quad (6)$$

Esta nueva forma de la restricción permite expresar una función  $\dot{h}$  como

$$\dot{h}[t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(t, \mathbf{x})] = \dot{\mathbf{g}}[t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(t, \mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (7)$$

o más explícitamente como

$$\dot{h} = \dot{\mathbf{g}} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \phi \cdot \boldsymbol{\lambda} + \dot{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{y}) : \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (8)$$

De aquí que la variación de  $H$

$$H = \int_{t_a}^{t_b} \int_{\mathcal{V}^*} h[t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}), \dot{\mathbf{y}}(t, \mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(t, \mathbf{x})] d\mathcal{V} dt = 0 \quad (9)$$

se pueda calcular como

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_{t_a}^{t_b} \int_{\mathcal{V}^*} \delta h d\mathcal{V} dt = \int_{t_a}^{t_b} \int_{\mathcal{V}^*} (\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \nabla \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda}) d\alpha d\mathcal{V} dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \int_{\mathcal{A}^*} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda})^t \cdot \boldsymbol{\eta} d\alpha d\mathcal{A} dt + \int_{t_a}^{t_b} \int_{\mathcal{V}^*} [\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\lambda} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda})^t] \cdot \boldsymbol{\eta} d\alpha d\mathcal{V} dt = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

donde

$$\delta h = (\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \nabla \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda}) d\alpha = 0 \quad \delta \mathbf{y} = \boldsymbol{\eta} d\alpha \quad \delta(\nabla \mathbf{y}) = \nabla \boldsymbol{\eta} d\alpha \quad (11)$$

y donde también se ha aplicado la identidad  $\nabla \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - [\nabla \cdot (\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda})^t] \cdot \boldsymbol{\eta}$  (equivalente a la identidad  $\nabla \mathbf{a} : \mathbf{T} = \nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T})$  válida para un vector  $\mathbf{a}$  y un tensor de segundo orden  $\mathbf{T}$ ).

Adicionalmente, sabemos de (3) que la variación de  $I$  es

$$\delta I = \int_{t_a}^{t_b} \int_{\mathcal{V}} [\nabla_y f - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{y}}} f) - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla \mathbf{y}} f)] \cdot \boldsymbol{\eta} d\alpha d\mathcal{V} dt = 0 \quad (12)$$

con lo que concluimos que dentro de la porción  $\mathcal{V}^*$  se debe satisfacer

$$\nabla_y f - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{y}}} f) - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla \mathbf{y}} f) + \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\lambda} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda})^t = \mathbf{0} \quad (13)$$

Esta expresión junto con la restricción (6) permite encontrar el multiplicador de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  y la trayectoria extremal  $\mathbf{y}(t, \mathbf{x})$  dentro de  $\mathcal{V}^*$ . La expresión (2) permite encontrar la trayectoria extremal para el resto del dominio  $\mathcal{V}^o = \mathcal{V} - \mathcal{V}^*$ . Lógicamente, se debe cumplir que, para que se anule la integral sobre  $\mathcal{A}^* = \partial \mathcal{V}^*$  en (10), algunas de estas tres condiciones en la frontera se satisfaga:  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  en  $\mathcal{A}^* = \partial \mathcal{V}^*$ ,  $\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$  en  $\mathcal{A}^*$ , o  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  en  $\mathcal{A} - \mathcal{A}^*$ .

#### 8.4.4. Frontera Móvil

En los problemas variacionales evolutivos se pueden tener casos con una frontera móvil  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$ , de manera que el funcional se define como la integral

$$I = \int_{t_a}^{t_b} \int_{\mathcal{V}(t)} f[t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}), \dot{\mathbf{y}}(t, \mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(t, \mathbf{x})] d\mathcal{V} dt \quad (14)$$

donde debe entenderse que la derivación  $\dot{\mathbf{y}}(t, \mathbf{x})$  es una derivación total con respecto a  $t$  y la función  $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$  es la posición de un punto  $\mathbf{X}$  en el espacio. Sin pérdida de generalidad, la designación  $\mathbf{X}$  de cada punto se hace corresponder a su posición en una configuración de referencia inicial  $\mathcal{V}_o = \mathcal{V}(0)$  para  $t = 0$ . Es decir, se debe satisfacer que  $\mathbf{X} = \mathbf{x}(0, \mathbf{X})$ . Esta configuración de referencia no tiene que ser necesariamente real, sin embargo, tiene que ser factible.

Definamos que la función  $\mathbf{x}(t, \mathbf{X}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un difeomorfismo, y, por lo tanto, es invertible. Adicionalmente, se puede calcular el *tensor gradiente de deformación*

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{x}(t, \mathbf{X})]^t \quad J = J(t, \mathbf{X}) = |\mathbf{F}(t, \mathbf{X})| > 0 \quad (15)$$

donde  $J$ , que es el determinante de  $\mathbf{F}$ , es el jacobiano de la transformación entre la posición en la configuración de referencia  $\mathbf{X}$  y la posición en la configuración actual  $\mathbf{x}$ . Este jacobiano debe ser siempre positivo, ya que el volumen  $\mathcal{V} = V(t)$ , a lo largo de su evolución desde la configuración de referencia  $\mathcal{V}_o$ , no debe cambiar de signo. Particularmente,  $J$  nunca puede ser nulo, puesto que esto significa que el volumen  $\mathcal{V}$  desaparece. Esto se justifica con las siguientes relaciones

$$d\mathcal{V} = J d\mathcal{V}_o \quad \mathbf{n} d\mathcal{A} = J \mathbf{F}^{-t} \cdot \mathbf{N} d\mathcal{A}_o \quad (16)$$

satisfecha por ser el cambio de posición prácticamente una transformación de coordenadas. En (16)  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{N}$  son los vectores normales unitarios exteriores sobre  $\mathcal{A} = \partial\mathcal{V}$  y  $\mathcal{A}_o = \partial\mathcal{V}_o$ , respectivamente.

Introduciendo la relación (16) y la función  $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$  en la integral (14), resulta

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_a}^{t_b} \int_{\mathcal{V}(t)} f\{t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}), \mathbf{y}[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})], \dot{\mathbf{y}}[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})], \nabla \mathbf{y}[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})]\} d\mathcal{V} dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \int_{\mathcal{V}_o} F[t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{Y}}(t, \mathbf{X}), \nabla \mathbf{Y}(t, \mathbf{X})] J(t, \mathbf{X}) d\mathcal{V}_o dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \int_{\mathcal{V}_o} F_o[t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{Y}}(t, \mathbf{X}), \nabla \mathbf{Y}(t, \mathbf{X})] d\mathcal{V}_o dt \end{aligned} \quad (17)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t, \mathbf{X}) &= \mathbf{y}[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})] = \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) \\ F_o[t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{Y}}(t, \mathbf{X}), \nabla \mathbf{Y}(t, \mathbf{X})] &= F[t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{Y}}(t, \mathbf{X}), \nabla \mathbf{Y}(t, \mathbf{X})] J(t, \mathbf{X}) \\ F[t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{Y}}(t, \mathbf{X}), \nabla \mathbf{Y}(t, \mathbf{X})] &= f\{t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}), \mathbf{y}[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})], \dot{\mathbf{y}}[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})], \nabla \mathbf{y}[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})]\} \\ &= f[t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}), \dot{\mathbf{y}}(t, \mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(t, \mathbf{x})] \end{aligned} \quad (18)$$

De esta forma la última integral de (17) permite aplicar la ecuación de Euler-Ostrogradski 8.3.(18) substituyendo  $f$  por  $F_o = J F$ , y  $\mathbf{y}$  por  $\mathbf{Y}$ . Es decir,

$$\nabla_{\mathbf{Y}} F_o - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{Y}}} F_o) - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla \mathbf{Y}} F_o) = 0 \quad (19)$$

Pero, como  $J(t, \mathbf{X})$  no depende de  $\mathbf{Y}$ , ni de  $\dot{\mathbf{Y}}$ , entonces

$$\nabla_{\mathbf{Y}} F - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{Y}}} F) - \nabla \cdot (\nabla_{\nabla \mathbf{Y}} F) = 0 \quad (20)$$

En estas expresiones se debe tener en cuenta que, para la función  $\mathbf{Y}$ , la derivación con punto,  $\dot{\mathbf{Y}}$ , significa derivación parcial con respecto a  $t$ , manteniendo  $\mathbf{X}$  constante. La ecuación (20) permite obtener la trayectoria extremal  $\mathbf{Y}(t, \mathbf{X})$  para el volumen fijo  $\mathcal{V}_o$ , pero la función extremal  $\mathbf{y}(t, \mathbf{x})$  para el volumen móvil  $\mathcal{V} = V(t)$  se puede obtener mediante un simple cambio de variable del tipo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ .

### 8.4.5. Funciones Conservativas

Las *funciones conservativas* son aquellas funciones  $f$  que satisfacen la condición

$$L(t) = \int_{V(t)} f[t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}), \dot{\mathbf{y}}(t, \mathbf{x}), \nabla \mathbf{y}(t, \mathbf{x})] dV = \int_{V_o} F_o[t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{Y}}(t, \mathbf{X}), \nabla \mathbf{Y}(t, \mathbf{X})] dV_o = L_o \quad (21)$$

Es decir, la integral  $L(t) = L_o$  es constante en la variable  $t$ , por lo que

$$I = \int_{x_a}^{t_b} L(t) dt = L_o (t_b - t_a) \quad \delta I = \delta L = 0 \quad F_o = J F = J f \quad (22)$$

Recíprocamente, si la variación  $\delta I$  es nula, entonces la función  $f$  es conservativa sobre una trayectoria extremal  $\mathbf{y}(t, \mathbf{x})$ . Nótese que, para una función conservativa, la función  $F_o$  no necesariamente es independiente de  $t$ . Cuando  $F_o$  es independiente de  $t$ , se dice que la función  $f$  es *conservativa localmente*. Cuando depende de  $t$  como en (21), se dice que es *conservativa integralmente* o simplemente conservativa. Por supuesto que, una función localmente conservativa, también lo es integralmente.

Especial atención tiene aquellos casos en los que  $\mathbf{Y} = \mathbf{x}$ , y, por consiguiente,  $\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{x}}$  y  $\nabla \mathbf{Y} = \mathbf{F}^t$ . Si, adicionalmente, la dependencia con respecto a  $\nabla \mathbf{Y} = \mathbf{F}^t$  es a través del jacobiano  $J = |\mathbf{F}|$  como factor, entonces

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_a}^{t_b} \int_{V_o} F_o[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X})] dV_o dt = \int_{t_a}^{t_b} \int_{V_o} F[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X})] J(t, \mathbf{X}) dV_o dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \int_{V(t)} f[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}), \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X})] dV dt = \int_{t_a}^{t_b} \int_{V(t)} f(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dV dt \end{aligned} \quad (23)$$

Algunos argumentos de las funciones se han eliminado por ser redundantes. Para este sistema la condicional variacional para la trayectoria extremal es

$$\nabla_x f - \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{x}} f) = \nabla_x f - \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\dot{x}} f) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_x \nabla_{\dot{x}} f + \ddot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\dot{x}} \nabla_{\dot{x}} f \right] = 0 \quad (24)$$

Si agregamos la condición de que la función  $f$  no dependa de  $\dot{\mathbf{x}}$ , entonces (24) predice que  $f(t, \mathbf{x}) = f_o$  es uniforme, y, como la función es conservativa, es constante en  $t$  e igual a  $F_o$ . En otras palabras, cuando no existe dependencia respecto a  $\dot{\mathbf{x}}$ , la trayectoria extremal de (10) es aquella que garantiza una distribución uniforme y constante de la función. Este resultado se puede resumir mediante la siguiente expresión

$$I = \int_{x_a}^{t_b} L(t) dt = L_o (t_b - t_a) \quad L(t) = \int_{V(t)} f(t, \mathbf{x}) dV = L_o \quad \delta I = \delta L = \delta f = 0 \implies \nabla_x f = 0 \quad (25)$$

Igualmente,  $f(t, \mathbf{x}) = f_o = F_o$  es una constante en la evolución. Se podría decir que no existe evolución. Sin embargo, al  $t$  avanzar existe evolución, aunque nada cambie.

### 8.4.6. Fórmulas de Expansión de Euler

Dada una trayectoria admisible  $\chi(t, \mathbf{X}, \alpha)$ , debido a (15), ella define un único gradiente de deformación admisible

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{X}, \alpha) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) + \alpha [\nabla_x \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{X})]^t \quad \chi(t, \mathbf{X}, \alpha) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) + \alpha \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{X}) \quad (26)$$

Se puede mostrar que, si  $\mathcal{J} = |\mathcal{F}|$ , entonces

$$\left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{F}} : \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}^t = |\mathbf{F}| \mathbf{F}^{-t} : \nabla_x \boldsymbol{\eta} = J \nabla_x \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} \quad (27)$$



donde se ha aplicado la regla  $\partial|\mathbf{F}|/\partial\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{F}}|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}|\mathbf{F}^{-t} = \text{cof}(\mathbf{F})$  y se ha considerado la propiedad  $\mathbf{F}^{-t} : \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\eta} = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{X} : \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\eta} = \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ , con  $\boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{X}) = \tilde{\boldsymbol{\eta}}(t, \mathbf{x})$ . Esto permite encontrar la variación del gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  y del jacobiano  $J$  como

$$\delta\mathbf{F} = [\nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{X})]^t d\alpha \quad \delta J = J \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\eta}} d\alpha \quad (28)$$

De acuerdo a esto, entonces el jacobiano admisible, correspondiente a la trayectoria admisible y al gradiente de deformación admisible, es

$$\mathcal{J} = J(1 + \alpha \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \quad (29)$$

Estos resultados parciales servirán más adelante para facilitar el trabajo de cálculo de problemas variacionales relacionados.

Relaciones importantes se pueden obtener también derivando  $J$  y  $\mathbf{F}$  con respecto a  $t$ . Así tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \frac{d}{dt}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x})^t = (\nabla_{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}})^t & \dot{J} &= \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}}^t = |\mathbf{F}|\mathbf{F}^{-t} : (\mathbf{G}\cdot\mathbf{F})^t = |\mathbf{F}|\mathbf{F}^{-t} : (\mathbf{F}^t\cdot\mathbf{G}^t) \\ &= (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^t \cdot (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x})^t = \mathbf{G}\cdot\mathbf{F} & &= |\mathbf{F}|(\mathbf{F}^{-t}\cdot\mathbf{F}^t) : \mathbf{G}^t = |\mathbf{F}|\text{tr}(\mathbf{G}^t) = J \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} \end{aligned} \quad (30)$$

donde  $\mathbf{G} = (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^t$  es el gradiente de la velocidad  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X})$ , con la que se mueve el volumen  $\mathcal{V} = V(t)$ . Estas expresiones reciben el nombre de *fórmulas de expansión de Euler*, y permiten afirmar junto con (16) que, si el campo de velocidades es solenoidal ( $\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} = 0$ ), entonces el diferencial de volumen  $d\mathcal{V}$  no varía en  $t$  y es igual a  $d\mathcal{V}_0$ .

Para finalizar, se tiene que la derivación de la expresión (18.b), respecto a  $t$ , da los siguientes resultados equivalentes

$$J\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}_0 - F_0 \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} \quad J^{-1}\dot{\mathbf{F}}_0 = \dot{\mathbf{F}} + F \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} = \dot{f} + f \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} \quad (31)$$

donde se ha empleado la fórmula de expansión (30.b) y se debe interpretar que la derivada  $\dot{f}$  es una derivación total de  $f$  respecto a  $t$  manteniendo  $\mathbf{X}$  constante. Es decir,  $\dot{f}$  se obtiene aplicando la regla de la cadena

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}f + \dot{\mathbf{y}}\cdot\nabla_{\mathbf{y}}f + \ddot{\mathbf{y}}\cdot\nabla_{\dot{\mathbf{y}}}f + (\nabla\dot{\mathbf{y}})^t : \nabla_{\nabla\mathbf{y}}f \quad (32)$$

donde el último término se ha substituido por la primera parte de la expresión (5.a).

Obviamente, si la función  $f$  es conservativa localmente, entonces  $\dot{\mathbf{F}}_0 = 0$  y  $\dot{\mathbf{F}}$  varía de acuerdo al movimiento del volumen  $\mathcal{V} = V(t)$ . Si adicionalmente, el campo de velocidades  $\mathbf{v}$  es solenoidal y  $F_0$  es uniforme, se obtiene el caso extremal (25). Esta factibilidad del movimiento, permite definir el caso extremal (25), como la configuración de referencia canónica para funciones conservativas localmente.

## 9. TRANSFORMADA DE LEGENDRE

Las transformaciones de Legendre (1789), las cuales son un caso particular de las transformaciones de contacto [Sychev,1983], son muy útiles como herramienta matemática, puesto que transforma funciones definidas sobre un espacio vectorial en funciones definidas sobre el espacio dual. La transformada de Legendre está relacionada a la dualidad proyectiva y a las coordenadas tangenciales en la geometría algebraica y la construcción de los espacios de Banach duales en análisis. Estas transformaciones se encuentran frecuentemente en física, por ejemplo, en la física hamiltoniana para encontrar las variables canónicas de un sistema dinámico [Arnold,1989] y en la termodinámica para definir nuevas cantidades termodinámicas y las funciones características (funciones sobre el espacio dual) [Sychev,1983]. F. Massieu fue el primero en usar las transformaciones de Legendre para las funciones termodinámicas en 1869 [Sychev,1983].

Como una observación general, hay que considerar la convención de suma (descrita en la Sección A.1.1.2.) para toda esta sección.

### 9.1. DEFINICION

Sea  $y = f(x)$  una función convexa, es decir,

$$f''(x) > 0 \quad (1)$$

La transformada de Legendre de la función  $f$  es una nueva función  $g$  de una nueva variable  $p$ , la cual se construye de la siguiente manera. Dibujese un gráfico de la función  $f$  en el plano  $xy$ . Escójase un valor  $p$ . Considérese la línea recta  $y = px$ . Tómese el punto  $x = x(p)$ , para el cual la curva está lo más alejada posible de la línea recta en dirección vertical. Para cada valor de  $p$  la función

$$F(p, x(p)) = px - f(x) \quad (2)$$

que es la distancia entre la curva y la línea recta, tiene un máximo con respecto a  $x$  en el punto  $x(p)$ . Ahora se puede definir la función  $g$  como

$$g(p) = F(p, x(p)) \quad (3)$$

El punto  $x(p)$  se define mediante la condición extremal

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p - f'(x) = 0 \quad (4)$$

lo que implica que

$$p = f'(x) \quad (5)$$

Adicionalmente, puesto que la función  $f$  es convexa, el punto  $x(p)$  es único, si existe [Arnold,1989].

Se puede demostrar que el dominio de la función  $g$  puede ser un punto, un intervalo cerrado, o un semieje, si la función  $f$  está definida en todo el eje  $x$ . De manera recíproca, si la función  $f$  está definida en un intervalo cerrado, entonces la función  $g$  está definida en todo el eje  $p$ .

Daremos a continuación varios ejemplos de la transformación de Legendre:

- Ejemplo 1. Sea  $f(x) = x^2$ , entonces  $F(p, x) = px - x^2$ ,  $x(p) = \frac{1}{2}p$ ,  $g(p) = \frac{1}{4}p^2$ .
- Ejemplo 2. Sea  $f(x) = mx^2/2$ , entonces  $g(p) = p^2/2m$ .
- Ejemplo 3. Sea  $f(x) = x^\alpha/\alpha$ , entonces  $g(p) = p^\beta/\beta$ , donde  $(1/\alpha) + (1/\beta) = 1$ , con  $\alpha, \beta > 1$ .
- Ejemplo 4. Sea  $f(x)$  un polígono convexo, entonces  $g(p)$  es también un polígono convexo, en el cual los vértices de  $f(x)$  corresponden a las aristas de  $g(p)$ , y las arista de  $f(x)$  a los vértices de  $g(p)$ .

### 9.2. INVOLUTIVIDAD

Considérese una función  $f$  que sea diferenciable tantas veces como sea necesario, con  $f''(x) > 0$ . Es fácil verificar que una transformación de Legendre lleva una función convexa a otra función convexa. Por consiguiente, se aplicará la transformación de Legendre dos veces [Arnold,1989].

**Teorema.** La transformación de Legendre es involutiva, es decir, que su cuadrado (cuando se aplica dos veces) es la transformación identidad: si bajo la transformación de Legendre de  $f$  se obtiene  $g$ , entonces la transformación de Legendre de  $g$  será de nuevo  $f$ .

**Demostración.** Con la finalidad de aplicar la transformación de Legendre a  $g$ , con variable  $p$ , se debe construir una nueva función  $G$ , por definición dependiente de una nueva variable (la cual se llamará  $x$ ), de la forma

$$G(x, p) = xp - g(p) \quad (1)$$

y encontrar el punto  $p(x)$  en el cual dicha función  $G$  posee un máximo, es decir, que se cumple la condición maximal  $\partial G/\partial p = 0$ , con lo cual se obtiene que  $x = g'(p)$ . Luego la transformada de Legendre de  $g(p)$  será la función  $G(x, p(x))$  dependiente de  $x$ .

Se demostrará que  $G(x, p(x)) = f(x)$ . Para lograr esto se debe notar que  $G(x, p) = xp - g(p)$  tiene una simple interpretación geométrica: es la ordenada de un punto con abscisa  $x$  en la línea tangente al gráfico de  $f(x)$  con pendiente de recta  $p$ . Para un  $p$  fijo la función  $G(x, p)$  es una función lineal de  $x$ , con  $\partial G/\partial x = p$ , y para  $x = x(p)$  se tiene que  $G(x, p) = xp - g(p) = f(x)$  por la definición de  $g(p)$ .

Fíjese ahora el valor de  $x = x_o$  y varíase el valor de  $p$ . Entonces los valores de  $G(x, p)$  serán las ordenadas de los puntos de intersección de la línea  $x = x_o$  con la línea tangente al gráfico de  $f(x)$  con varias pendientes  $p$ . Por la convexidad del gráfico se sigue que todas estas tangentes caen por debajo de la curva, y por lo tanto el máximo valor de  $G(x, p)$  para un valor fijo de  $x(p_o)$  es igual a  $f(x)$  (y es alcanzado para  $p = p(x_o) = f'(x_o)$ ).  $\triangle$

### 9.3. COROLARIO DE LA ENVOLVENTE

Del teorema probado en la sección anterior se deriva el siguiente corolario. par **Corolario.** Considérese dada una familia de líneas recta  $y = px - g(p)$ . Entonces su envolvente tiene la ecuación  $y = f(x)$ , donde  $f$  es la transformada de Legendre de  $g$ .

Se ve claramente que este corolario no es más que la teoría de la ecuación de Clairaut [Arnold, 1989; Kantorovich, 1964].

### 9.4. DESIGUALDAD DE YOUNG

**Definición.** Dos funciones  $f$  y  $g$ , las cuales son las transformaciones una de la otra y viceversa, son llamadas duales en el sentido de Young.

Por definición de la transformación de Legendre,  $F(x, p) = px - f(x)$  es menor o igual que  $g(p)$  para cualesquiera  $x$  y  $p$ . De esto se tiene la desigualdad de Young

$$px \leq f(x) + g(p) \quad (1)$$

Se verá ahora como para los ejemplos 2 (con  $m = 1$ ) y 3 de la Sección 9.1. se deriva la desigualdad de Young:

- Si  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ , entonces  $g(p) = \frac{1}{2}p^2$  y se obtiene la bien conocida desigualdad  $px \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p^2$  para todo  $x$  y  $p$ .
- Si  $f(x) = x^\alpha/\alpha$ , entonces  $g(p) = p^\beta/\beta$  y se obtiene la bien conocida desigualdad de Young  $px \leq x^\alpha/\alpha + g(p) = p^\beta/\beta$  para todo  $x > 0$ ,  $p > 0$ ,  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 1$ , y  $(1/\alpha) + (1/\beta) = 1$ .

### 9.5. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Sea  $f(\mathbf{x})$  una función convexa de la variable vectorial  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . Es decir, la forma cuadrática

$$[\nabla(\nabla f) \cdot d\mathbf{x}] \cdot d\mathbf{x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j > 0 \quad (1)$$

es definida positiva. Entonces, la transformada de Legendre de la función  $f$  es la función  $g(\mathbf{p})$  dependiente de la variable vectorial  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ , definida de una forma similar a como se hizo antes mediante

$$g(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p})) = \max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \quad (2)$$

donde

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{p} = \nabla f \quad (3)$$

Todos los argumentos hechos en las secciones anteriores, incluyendo la desigualdad de Young, pueden hacerse sin ningún cambio apreciable para el caso funciones de varias variables. En este sentido, la desigualdad de Young quedaría como

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{p}) \quad (4)$$

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa en el sentido antes expuesto. Sea  $\mathbb{R}^{n*}$  denotado como el espacio vectorial dual. Se puede demostrar que las fórmulas de arriba completamente definen el mapa  $g : \mathbb{R}^{n*} \rightarrow \mathbb{R}$ , bajo la condición de que la forma lineal  $df|_{\mathbf{x}}$  cubra todo el conjunto  $\mathbb{R}^{n*}$  cuando  $\mathbf{x}$  cubra todo el conjunto  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $f$  una forma cuadrática

$$f(\mathbf{x}) = f_{ij}x_i x_j \quad (5)$$

Se puede demostrar que su transformada de Legendre es también una forma cuadrática

$$g(\mathbf{x}) = g_{ij}x_i x_j \quad (6)$$

y que los valores de ambas formas en los puntos correspondientes coinciden entre sí. Esto es,

$$f(\mathbf{x}(\mathbf{p})) = g(\mathbf{p}) \quad g(\mathbf{p}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) \quad (7)$$

## 9.6. DIFERENCIAL EXACTA

Descripciones matemáticas de los cambios que ocurren en la física de un sistema frecuentemente conlleva a expresiones diferenciales (también denominadas pfafian) de la forma

$$\mathbf{p}.d\mathbf{x} = p_i dx_i \quad (1)$$

donde las  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) son variables independientes, y las  $p_i$  son funciones de  $\mathbf{x}$ . Cuando es posible colocar la expresión (1) igual a  $df$ , la diferencial de una función  $f$ , donde

$$f = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (2)$$

entonces la expresión diferencial (1) se dice que es exacta, y se puede escribir como

$$df = \mathbf{p}.d\mathbf{x} = p_i dx_i \quad (3)$$

La matemática provee una definición para la diferencial de tal función de la forma

$$df = \nabla f.d\mathbf{x} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_j} dx_i \quad (4)$$

donde el subíndice  $x_j$  en la derivada parcial indica que todas las  $x_i$  son mantenidas constantes, excepto la que está en la derivada considerada. Ya que las  $x_i$  son independientes, esta última ecuación y (3) pueden ser comparadas término a término para obtenerse que

$$\mathbf{p} = \nabla f \quad p_i = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_j} \quad (5)$$

De esta comparación se puede observar que cuando la expresión diferencial (1) es exacta, las  $p_i$  son interpretadas como los coeficientes diferenciales parciales en la ecuación para la definición de  $df$ , y cada  $p_i$  y su correspondiente  $x_i$  se dicen que son conjugados o duales entre sí.

Si  $f$  y sus derivadas parciales son continuas, entonces, para cada par de variables independientes  $x_k$  y  $x_l$ , se tiene el requerimiento matemático de que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \quad (6)$$

De (5) se tiene que

$$p_k = \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_{x_j} \quad y \quad p_l = \left( \frac{\partial f}{\partial x_l} \right)_{x_j} \quad (7)$$

por consiguiente,

$$\left( \frac{\partial p_k}{\partial x_l} \right)_{x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \quad y \quad \left( \frac{\partial p_l}{\partial x_k} \right)_{x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \quad (8)$$

y finalmente se obtiene como resultado la ecuación

$$\left( \frac{\partial p_k}{\partial x_l} \right)_{x_j} = \left( \frac{\partial p_l}{\partial x_k} \right)_{x_j} \quad (9)$$

Esta ecuación es válida para cualquier par de variables conjugadas  $(p_l, x_l)$  y  $(p_k, x_k)$  en una expresión diferencial exacta, y representa una condición que es necesaria y suficiente para la exactitud de (1).

### 9.7. TRANSFORMACIONES PARCIALES

Recuérdese la expresión de la diferencial exacta 9.6.(3) presentada en la sección anterior. La transformación de Legendre, tal como se definió en la Sección 9.5, permite encontrar una función  $g(\mathbf{p})$  dependiente de todas las variables  $p_i$ . Sin embargo, la transformación de Legendre puede realizarse sobre una parte de las variables  $x_i$ , obteniéndose una función transformada  $g$ , dependiente de las correspondientes conjugadas  $p_i$ , y dependiente también del resto de las variables  $x_j$  ( $j \neq i$ ), las cuales no han intervenido en el proceso de transformación. De esta forma, para una expresión diferencial total dependiente de  $n$  variables, puede en realidad obtenerse  $2^n - 1$  posibles transformada de Legendre. Es decir,

$$\begin{aligned} g_1(p_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= p_1 x_1 - f(\mathbf{x}) \\ g_2(x_1, p_2, x_3, \dots, x_n) &= p_2 x_2 - f(\mathbf{x}) \\ &\dots \dots \\ g_n(x_1, x_2, x_3, \dots, p_n) &= p_n x_n - f(\mathbf{x}) \\ g_{1,2}(p_1, p_2, x_3, \dots, x_n) &= p_1 x_1 + p_2 x_2 - f(\mathbf{x}) \\ g_{1,3}(p_1, x_2, p_3, \dots, x_n) &= p_1 x_1 + p_3 x_3 - f(\mathbf{x}) \\ &\dots \dots \\ g_{1,\dots,n}(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) &= p_i x_i - f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

donde las  $p_i$  vienen definidas por 9.6.(5).

Cada transformada  $g$  en (1) representa una nueva función, y en cada caso las variables independientes, encerradas entre paréntesis, son llamadas las variables canónicas de dicha función. El adjetivo canónico se emplea aquí para significar que las variables conforman un esquema que es tanto simple como claro. De esta forma entonces (1) se puede ver como un procedimiento para la definición de un conjunto de nuevas funciones consistentes con una expresión diferencial exacta, y también identifica las variables, las cuales son únicas para cada función. Estas variables tienen la siguiente propiedad especial: Cuando una función transformada  $g$  es conocida como una función de sus  $n$  variables canónicas, entonces las  $n$  variables restantes dentro de todas las  $x_i$  y sus conjugadas  $p_i$ , pueden ser recuperadas mediante la diferenciación de  $g$ . Este es otro aspecto de la involutividad de la transformación de Legendre. Adicionalmente, fíjese que la última ecuación de (1) es realmente la transformada de Legendre tal como se definió en la Sección 9.5.

### 9.8. APLICACIONES A FUNCIONES SENCILLAS

En esta sección se desarrollarán varias relaciones útiles entre las derivadas parciales para el caso sencillo pero ampliamente empleado de un sistema el cual puede ser completamente especificado escogiendo dos variables independientes (llamadas a veces variables de estado). Si estas variables son designadas  $y$  y  $z$ , entonces cualquier otra variable  $x$  está relacionada con  $y$  y con  $z$  mediante una ecuación que tiene la siguiente forma funcional

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

Ya que cada una de estas tres variables pueden ser seleccionadas como variables independientes, esta relación funcional puede ser expresada en tres formas alternativas adicionales

$$x = x(y, z) \quad y = y(x, z) \quad z = z(x, y) \quad (2)$$

Arbitrariamente seleccionando las primeras dos de estas formas, se pueden escribir expresiones para la diferencial exacta de  $dx$  y  $dy$

$$dx = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z dy + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y dz \quad (3)$$

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z dx + \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x dz \quad (4)$$

Eliminando la diferencial  $dy$  entre las expresiones (3) y (4) se obtiene que

$$\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z - 1 \right] dx + \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \right] dz = 0 \quad (5)$$

Ya que  $x$  y  $z$  son variables independientes, los coeficientes de  $dx$  y  $dz$  deben ser idénticamente cero si (5) debe ser generalmente válida. De aquí que

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z^{-1} \quad (6)$$

y

$$\left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y = - \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \quad (7)$$

la cual, en vista de (6) puede ser escrita como

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = - \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_x \quad (8)$$

Si (3) es dividida entre la diferencial de una cuarta variable,  $dw$ , entonces

$$\frac{dx}{dw} = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \frac{dy}{dw} + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y \frac{dz}{dw} \quad (9)$$

Restringiendo esta ecuación para  $z$  constante se reduce a

$$\left( \frac{\partial x}{\partial w} \right)_z = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial w} \right)_z \quad (10)$$

de la cual se obtiene

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right)_z \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_z \quad (11)$$

Si  $x$  se toma ahora como una función de  $y$  y  $w$ , entonces

$$dx = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_w dy + \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right)_y dw \quad (12)$$

Dividiendo esta ecuación por  $dy$ , con la restricción de  $z$  constante, se obtiene que

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_w + \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right)_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_z \quad (13)$$

Las ecuaciones desarrolladas en esta sección, o variaciones de ellas, proveen las bases para muchas de las transformaciones empleadas en la termodinámica de sistemas descritos con dos variables independientes.

Veremos ahora un ejemplo de una función de tres variables independientes

$$f = f(x_1, x_2, x_3) \quad (14)$$

entonces

$$df = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 \quad (15)$$

de 9.7.(1) se obtiene que

$$g(p_1, x_2, x_3) = p_1 x_1 - f \quad (16)$$

Diferenciando  $g$  se tiene que

$$dg = \left( \frac{\partial f}{\partial p_1} \right)_{x_2 x_3} dp_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{p_1 x_3} dx_2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_{p_1 x_2} dx_3 \quad (17)$$

El diferencial de  $g$  también puede ser encontrado de (16) como

$$dg = p_1 dx_1 + x_1 dp_1 - df \quad (18)$$

y substituyendo para  $df$  en (15) da que

$$dg = x_1 dp_1 - p_2 dx_2 - p_3 dx_3 \quad (19)$$

Una comparación entre (17) y (19) finalmente nos muestra que

$$x_1 = \left( \frac{\partial f}{\partial p_1} \right)_{x_2 x_3} \quad p_2 = - \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{p_1 x_3} \quad p_3 = - \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_{p_1 x_2} \quad (20)$$

Así de las variables originales  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , y sus conjugadas  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  en la expresión diferencial (15), se obtiene una función transformada  $g$  dependiente de  $p_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , y las variables restantes  $x_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  vienen dadas por las derivadas parciales de  $g$ . En termodinámica, mediante este procedimiento son obtenidas las funciones de Gibbs y Helmholtz y alguna relaciones termodinámicas [Abbot & Van Ness, 1972].

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Abbot, M. M.; Van Ness, H. C. **Theory and Problems of Thermodynamics**. McGraw-Hill (Schaum's Outline Series), 1972.
- [2] Abraham, R.; Marsden, J. E.; Ratiu, T. **Manifolds, Tensor Analysis, and Applications**, Second Edition. Springer-Verlag (New York), 1988.
- [3] Adams, R. A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, 1975.
- [4] Arnold, V. I. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**, Second Edition. Springer-Verlag, 1989.
- [5] Aubin, J. P. **Applied Functional Analysis**. John Wiley & Sons, 1979.
- [6] Elsgoltz, L. **Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional**. Editorial MIR-Moscú, 1977.
- [7] Fox, Ch. **An Introduction to the Calculus of Variations**. Dover Publications, 1987.
- [8] Granados M., A. L. *Principios Variacionales en la Mecánica del Continuo*. **Boletín Técnico IMME** (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales - Universidad Central de Venezuela), Vol.36, No.1, Marzo de 1998, pp.19-42.
- [9] Gelfand, I. M.; Fomin, S. V. **Calculus of Variations**. Prentice-Hall, 1963.
- [10] Hale, J. K.; Lunel, S. M. V. **Introduction to Functional Differential Equations**. Springer-Verlag (New York), 1993.
- [11] Hinrichsen, D.; Fernández, J. L. **Topología General**. Editorial Pueblo y Educación, 1977.
- [12] Hoffman, K. **Banach Spaces of Analytic Functions**. Prentice-Hall, 1962.
- [13] Hoffman, K.; Kunze, R. **Algebra Lineal**. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1973.
- [14] Iribarren, I. L. **Topología de Espacios Métricos**. Editorial Limusa-Wiley, 1973.
- [15] Iribarren, I. L. **Cálculo Diferencial en Espacios Normados**. Editorial Equinoccio, Universidad Simón Bolívar, 1980.
- [16] Kantorovich, L. V.; Akilov, G. P. **Functional Analysis in Normed Spaces**. The Macmillan - Pergamon Press, 1964.
- [17] Kartashov, A. P.; Rozhdenstvenski, B. L. **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Fundamento del Cálculo Variacional**. Editorial Reverté, 1980.
- [18] Kolmogórov, A. N.; Fomín, S. V. **Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional**, Tercera Edición. Editorial Mir-Moscú, 1978.
- [19] Kreyszig, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. John Wiley & Sons, 1978.
- [20] Lovelock, D.; Rund, H. **Tensors, Differential Forms, and Variational Principles**. John Wiley & Sons, 1975.
- [21] Marti, J. T. **Introduction to Sobolev Spaces and Finite Elements Solution of Elliptic Boundary Value Problems**. Academic Press, 1986.
- [22] Mishchenko, A.; Fomenko, A. **A Course of Differential Geometry and Topology**. Mir Publishers Moscow, 1988.
- [23] Moore, R. E. **Computational Functional Analysis**. Ellis Horwood - John Wiley & Sons, 1985.
- [24] Munroe, M. E. **Measure and Integration**, Second Edition. Addison-Wesley, 1971.
- [25] Naylor, A. W.; Sell, G. R. **Linear Operator Theory in Engineering and Science**. Springer-Verlag, 1982.
- [26] Oden, J. T.; Carey, G. F. **Finite Elements, Vol.IV: Mathematical Aspects**. Prentice-Hall, 1983.
- [27] Rudin, W. **Functional Analysis**. Tata - McGraw-Hill, 1973. 3<sup>rd</sup> Printing, 1977.
- [28] Sattinger, D. H.; Weaver, O. L. **Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics**. Springer-Verlag (New York), 1986.



- [29] Schutz, B. F. **Geometrical Methods of Mathematical Physics**. Cambridge University Press, 1980. Reprinted, 1999.
- [30] Sneddon, I. N. "Functional Analysis". **Encyclopedia of physics**. Ed. S. Flügge. Vol.I: "Mathematical Methods II", pp.198-348. Springer-Verlag, 1955.
- [31] Sobolev, S. L. **Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics**, Translated from the 1950 Russian Edition by F. Browder, Translations of Mathematical Monographs, Vol.7, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1963.
- [32] Sobolev, S. L. **Partial Differential Equations of Mathematical Physics**. Pergamon Press, 1964. Dover Publications, 1989.
- [33] Sychev, V. V. **The Differential Equations of Thermodynamics**. MIR Publisher-Moscow, 1983.
- [34] Trenoguín, V. A.; Pisarievski, B. M.; Sóboleva, T. S. **Problemas y Ejercicios de Análisis Funcional**. Editorial MIR-Moscú, 1987.
- [35] Wu, J. **Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations**. Springer-Verlag (New York), 1996.



# APENDICE E

## METODOS MATEMATICOS

### CONTENIDO

1. METODOS ANALITICOS DIRECTOS.	536
1.1. Solución de ecuaciones polinómicas.	536
1.1.1. Ecuación de Segundo Grado.	537
1.1.2. Ecuación de Tercer Grado.	538
1.1.3. Ecuación de Cuarto Grado.	539
1.2. Análisis Dimensional.	539
1.2.1. Teorema II.	539
1.2.2. Corolario.	540
1.3. Transformaciones Jacobianas.	541
1.3.1. Ecuación Diferencial.	541
1.3.2. Corchetes de Poisson.	541
2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.	542
2.1. Espacios Escalares.	542
2.1.1. Primer Orden.	542
2.1.2. Segundo Orden.	543
• Ecuación de Legendre.	543
• Ecuación de Bessel.	543
2.2. Espacios Vectoriales.	544
2.2.1. Primer Orden.	545
3. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.	545
3.1. Clasificación.	545
3.1.1. General.	545
3.1.2. Segundo Orden.	547
3.2. Ecuaciones Elípticas.	548
3.2.1. Principio del Máximo.	548
3.3. Ecuaciones Parabólicas.	550
3.4. Ecuaciones Hiperbólicas.	550
3.4.1. Ecuación de Onda.	550
• Caso Uni-Dimensional.	551
• Caso Bi-Dimensional.	551
• Caso Tri-Dimensional.	552

4. TRANSFORMADAS INTEGRALES.	552
4.1. Series de Fourier.	552
4.1.1. Funciones Ortogonales.	552
4.1.2. Series en Cosenos y Senos.	553
4.1.3. Series en Cosenos o Senos.	553
4.1.4. Series en Exponenciales.	554
4.2. Transformada de Fourier.	554
4.2.1. Fundamentos.	554
4.2.2. Ecuación de Parseval y Espectro.	557
4.2.3. Producto de Convolución.	559
4.2.4. Correlación.	559
4.2.5. Escalas.	561
4.2.6. Transformada del Coseno.	561
4.2.7. Transformada del Seno.	561
4.2.8. Filtros.	562
4.3. Transformada Rápida de Fourier.	563
4.4. Transformada de Laplace.	566
5. PROBABILIDAD Y ESTADISTICA.	567
5.1. Sistemas Continuos.	567
5.1.1. Variable Aleatoria.	567
5.1.2. Distribución y Densidad.	567
5.1.3. Esperanza y Momentos.	569
5.1.4. Función Característica.	570
5.1.5. Densidad Gaussiana.	570
5.1.6. Probabilidad Condicionada.	571
5.2. Sistemas Discretos.	572
5.2.1. Variable Aleatoria.	572
5.2.2. Distribución de Probabilidad.	572
5.2.3. Esperanza y Momentos.	572
6. PERTURBACIONES.	573
6.1. Introducción.	573
6.1.1. Funciones de Calibre.	573
6.1.2. Símbolos de Landau.	573
• Absoluto.	573
• Relativo.	574
BIBLIOGRAFIA.	574

## 1. METODOS ANALITICOS DIRECTOS

### 1.1. SOLUCION DE ECUACIONES POLINOMICAS

La ecuaciones polinómica son aquellas que tiene la forma

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k = 0 \quad (1)$$

donde  $N$  es el grado del polinomio y  $a_k$  son los coeficientes constantes de dicho polinomio. Es este caso la función polinómica  $P_N(x)$  está definida en la variable independiente  $x$  perteneciente a los reales  $\mathbb{R}$ .

Cuando se desea extender la definición anterior a funciones polinómica definidas en el espacio  $\mathbb{R}^n$ , entonces se debe expresar de la siguiente manera

$$P_N(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^N \mathbf{A}_k^{(k)} \odot^k \mathbf{x}^k = 0 \quad (2)$$

donde  $\mathbf{A}_k^{(k)}$  es un tensor de orden  $k$ , cuyos componentes son los diferentes coeficientes constantes del polinomio y la variable independiente  $\mathbf{x}$  pertenece a  $\mathbb{R}^n$ . En la operación de elevar esta variable a un exponente (potenciación) debe interpretarse el producto como producto tensorial, esto es,  $\mathbf{x}^k = \otimes^k \mathbf{x}$ . La operación  $\odot$ , entre el tensor  $\mathbf{A}_k^{(k)}$  y las potencias  $\mathbf{x}^k$ , en un producto de  $k$  contracciones consecutivas, dando como resultado siempre un escalar (la función polinómica es escalar en cualquier caso).

Las ecuaciones polinómicas definidas en el espacio  $\mathbb{C}^n$  sobre el plano complejo reciben el nombre particular de *lemniscatas*.

### 1.1.1. Ecuación de Segundo Grado

La ecuación polinómica de segundo grado ( $N = 2$ ) en  $\mathbb{R}$  es

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (3)$$

Llámesse la *resolvente* al algoritmo directo (no iterativo) que permite obtener la solución de la ecuación (1). En este caso con  $N = 2$  la resolvente es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Delta = b^2 - 4ac \quad (4)$$

donde  $\Delta$  se denomina el *discriminante*, porque permite distinguir los diferentes tipos de solución:

- Si  $\Delta < 0$ , las soluciones son dos números complejos conjugados.
- Si  $\Delta = 0$ , las soluciones son dos números reales que coinciden.
- Si  $\Delta > 0$ , las soluciones son dos números reales distintos, ubicados simétricamente a uno y otro lado del vértice de la parábola en  $x_v = -b/(2a)$ . En el vértice la función polinómica adquiere un valor mínimo o máximo si  $a > 0$  ó  $a < 0$ , respectivamente. Este valor es  $P_2(x_v) = c - b^2/(4a)$ .

No obstante la resolvente (4) permite obtener la solución de (3) sin problemas, existe un algoritmo alternativo para reducir los errores en los cálculos cuando  $a$  y/o  $c$  son pequeños. Este algoritmo es

$$q = -\frac{1}{2} [b + \text{sign}(b) \sqrt{\Delta}] \quad x_1 = \frac{q}{a} \quad x_2 = \frac{c}{q} \quad (5)$$

Sin embargo, cuando los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  son complejos, entonces el signo de  $\text{sign}(b)$  se escoge de manera  $\Re(\bar{b} \sqrt{\Delta}) \geq 0$  ( $\bar{b}$  es el complejo conjugado de  $b$ ). En cualquier caso, siempre debe satisfacerse que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (6)$$

La ecuación polinómica de grado  $N = 2$  en  $\mathbb{R}^n$  es

$$P_N(\mathbf{x}) = \mathbf{A} : \mathbf{x}\mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + c = 0 \quad (7)$$

Esta ecuación puede tener solución, pero generalmente no es única (un punto en  $\mathbb{R}^n$ ) y no tiene resolvente. Normalmente la solución es una curva  $\mathbf{x} = \mathbf{r}(s)$ , dependiente del parámetro  $s$ , e inmersa en el espacio  $\mathbb{R}^n$ . Esta curva puede ser cerrada cuando  $\mathbf{A}$  es definida positiva ó abierta y no necesariamente una, pueden ser dos o más.

### 1.1.2. Ecuación de Tercer Grado

La ecuación polinómica de tercer grado ( $N = 3$ ) en  $\mathbb{R}$  es

$$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (8)$$

Dividiendo toda la ecuación entre  $a_3$  se normaliza la expresión en el coeficiente de  $x^3$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (9)$$

La resolvente de esta ecuación fué propuesta por el matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) en su libro “Ars magna” [1545], también por Niccolò Fontana (1500-1557) apodado “Tartaglia” (=tartamudo), en la siguiente forma: Se resuelve la ecuación polinómica de segundo grado

$$z^2 + 2Rz + Q^3 = 0 \quad R = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54} \quad Q = \frac{a^2 - 3b}{9} \quad (10)$$

con su resolvente y su discriminante, tal que

$$z = w^3 = -R \pm \sqrt{\Delta} \quad \Delta = R^2 - Q^3 \quad (11)$$

Entonces las soluciones de (9) vienen dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1 + w_2 - a/3 \\ x_2 &= \beta w_1 + \bar{\beta} w_2 - a/3 \\ x_3 &= \bar{\beta} w_1 + \beta w_2 - a/3 \end{aligned} \quad (12)$$

con

$$w_1 = \sqrt[3]{z_1} \quad w_2 = \sqrt[3]{z_2} \quad \beta = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad (13)$$

El valor  $\beta$  puede ser cualquiera de las dos raíces cúbicas complejas conjugadas de la unidad ( $\beta^3 = \bar{\beta}^3 = 1$ ).

La resolvente anterior se deduce fácilmente si se supone que  $\tilde{x} = x + a/3 = w_1 + w_2$ , lo que comparando resulta en dos ecuaciones  $w_1^3 + w_2^3 = -2R$  y  $w_1^3 w_2^3 = Q^3$ . Estas ecuaciones significan que  $w_1^3$  y  $w_2^3$  son las raíces de la ecuación parabólica (10.a). La traslación en  $a/3$  elimina el término de segundo grado en el polinomio expresado en función de  $\tilde{x}$ , paso previo en la deducción anterior.

El discriminante  $\Delta$  permite distinguir los diferentes tipos de solución:

- Si  $\Delta < 0$ , las soluciones son tres raíces reales (caso irreducible).
- Si  $\Delta = 0$ , las soluciones son tres raíces reales y al menos dos de ellas son iguales.
- Si  $\Delta > 0$ , las soluciones son una raíz real y dos complejas conjugadas.

El caso con  $\Delta < 0$  también se puede resolver de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_1 &= -2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - a/3 \\ x_2 &= -2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) - a/3 \\ x_3 &= -2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta - 2\pi}{3}\right) - a/3 \end{aligned} \quad (14)$$

donde

$$\theta = \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right) \quad (15)$$

Esta expresión alternativa, para el caso de raíces puramente reales, primeramente apareció en el capítulo VI de un tratado de François Viète [Viète,1615], el mismo que descubrió la resolvente de la ecuación polinómica de cuarto grado. Las expresiones (12) y (15) tienen una interpretación geométrica sencilla: salvo el cambio en las abscisas en un valor de  $-a/3$ , todas las raíces distan del origen en un mismo valor  $|2\sqrt{Q}|$ , dentro del plano complejo, y están separadas entre sí por ángulos iguales (este ángulo es de  $2\pi/3$  en el caso  $\Delta > 0$ ).

En cualquier caso, las soluciones de una ecuación polinómica cúbica deben satisfacer

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \quad x_1x_2x_3 = -c \quad (16)$$

La ecuación polinómica de tercer y mayor grado en  $\mathbb{R}^n$  no tienen un interés especial.

### 1.1.3. Ecuación de Cuarto Grado

La ecuación polinómica de cuarto grado ( $N = 3$ ) en  $\mathbb{R}$  es

$$P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (17)$$

Dividiendo toda la ecuación entre  $a_4$  se normaliza la expresión en el coeficiente de  $x^4$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (18)$$

La resolvente de esta ecuación fué propuesta [Viète,1615] por el matemático francés François Viète (1540-1603). Esta resolvente consiste en encontrar la raíz real de la ecuación polinómica cúbica

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0 \quad A = -b \quad B = ac - 4d \quad C = d(4b - a^2) - c^2 \quad (19)$$

y determinar las cuatro raíces de la ecuación de cuarto grado con las raíces de las dos ecuaciones cuadráticas

$$w^2 + R w + Q = 0 \quad R = \frac{1}{2} [a \pm \sqrt{a^2 - 4(b - z)}] \quad Q = \frac{1}{2} (z \pm \sqrt{z^2 - 4d}) \quad (20)$$

Si todas las raíces de la ecuación cúbica (19) son reales, use el valor de  $z$  que dé pares de coeficientes reales en la ecuación cuadrática (20). Luego las raíces de (18) son:  $x_1 = w_1^+$ ,  $x_2 = w_2^+$ ,  $x_3 = w_1^-$  y  $x_4 = w_2^-$ .

En cualquier caso, las soluciones de una ecuación polinómica de cuarto grado deben satisfacer

$$\sum x_i = -a \quad \sum x_i x_j = b \quad \sum x_i x_j x_k = -c \quad x_1 x_2 x_3 x_4 = d \quad (21)$$

Ludovico Ferrari (1522-1565), un alumno de Cardano, dió soluciones similares a (12) y (20). El matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) demostró que era imposible tener una resolvente para ecuaciones polinómicas de grado mayor que cuatro.

## 1.2. ANALISIS DIMENSIONAL

### 1.2.1. Teorema II

**Teorema 1.** Teorema II o Teorema de Buckingham [Buckingham,(1914-15)].

Dado un fenómeno medible, donde intervienen  $n$  variables físicas o *factores*  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ , en la forma

$$f(V_1, V_2, V_3, \dots, V_n) = 0 \quad (1)$$

y donde existen  $m$  unidades fundamentales o *dimensiones*  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_m$ , con  $m < n$ , tales que la dimensiones  $[V_j]$  de la variables  $V_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ) son

$$\begin{aligned} [V_1] &= U_1^{\alpha_{11}} U_2^{\alpha_{21}} U_3^{\alpha_{31}} \dots U_m^{\alpha_{m1}} \\ [V_2] &= U_1^{\alpha_{12}} U_2^{\alpha_{22}} U_3^{\alpha_{32}} \dots U_m^{\alpha_{m2}} \\ [V_3] &= U_1^{\alpha_{13}} U_2^{\alpha_{23}} U_3^{\alpha_{33}} \dots U_m^{\alpha_{m3}} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ [V_n] &= U_1^{\alpha_{1n}} U_2^{\alpha_{2n}} U_3^{\alpha_{3n}} \dots U_m^{\alpha_{mn}} \end{aligned} \quad (2)$$

con rango de la matriz  $[\alpha_{ij}]$  igual a  $m$ . Es decir, el determinante de la mayor matriz cuadrada  $[\mathbf{A}]$ , con  $m$  filas/columnas, que se puede construir a partir de las columnas de la matriz no cuadrada horizontal  $[\alpha_{ij}]$  con  $m$  filas y  $n$  columnas, es no nulo ( $|\mathbf{A}| \neq 0$ ). La matriz  $[\mathbf{A}]$  no singular recibe el nombre de *matriz base*, la cual se procura colocar en el extremo izquierdo intercambiando el orden de las variables  $V_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Entonces existen  $(n - m)$  parámetros adimensionales  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}$ , no necesariamente independientes entre sí, obtenidos con el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} \Pi_k &= V_1^{x_1} V_2^{x_2} V_3^{x_3} \dots V_m^{x_m} V_{m+k} \\ k &= 1, 2, 3, \dots, n - m \end{aligned} \quad \left[ \begin{array}{ccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2m} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mm} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{array} \right\}_k = - \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{1,m+k} \\ \alpha_{2,m+k} \\ \alpha_{3,m+k} \\ \vdots \\ \alpha_{m,m+k} \end{array} \right\} \quad (3)$$

donde el sistema de ecuaciones lineales  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$  permite obtener los exponentes de las variables  $V_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, m$ ) en los parámetros adimensionales  $\Pi_k$ , siendo las componentes del vector  $\mathbf{b}_k$  los elementos opuesto de la columna  $(m + k)$  en la matriz  $[\alpha_{ij}]$  ampliada.

Los parámetros adimensionales  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}$  se relacionan en la forma

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}) = 0 \quad (4)$$

donde el número de variables independientes que definen el fenómeno se ha reducido en  $m$  respecto a la función  $f$  en (1). Las primeras variables  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_m$  deben relacionarse, de forma que la matriz  $[\mathbf{A}]$  tenga rango  $m$ , y, por lo tanto, tenga inversa, y los sistemas de ecuaciones lineales  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$  tengan solución.

### 1.2.2. Corolario

Se dicen que los parámetros adimensionales son independientes entre sí, en el sentido de que cada uno de ellos no puede ser obtenido mediante el producto de potencias de los restantes, o sea

$$\Pi_1^{\beta_1} \Pi_2^{\beta_2} \Pi_3^{\beta_3} \dots \Pi_{n-m}^{\beta_{n-m}} = 1 \quad (5)$$

Definamos las matrices

$$[\mathbf{X}] = \left[ \begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1,n-m} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2,n-m} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3,n-m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{m,n-m} \end{array} \right] \quad [\mathbf{B}] = \left[ \begin{array}{ccccc} \alpha_{1,m+1} & \alpha_{1,m+2} & \alpha_{1,m+3} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{2,m+1} & \alpha_{2,m+2} & \alpha_{2,m+3} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{3,m+1} & \alpha_{3,m+2} & \alpha_{3,m+3} & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,m+1} & \alpha_{m,m+2} & \alpha_{m,m+3} & \dots & \alpha_{mn} \end{array} \right] \quad (6)$$



Entonces, se tiene que el sistema (3) se puede escribir como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k - \mathbf{b}_k = \mathbf{0} \quad (7)$$

La combinación lineal de cada uno de estos vectores nulos para  $k = 1, 2, 3, \dots, n - m$  es también nulo

$$\sum_{k=1}^{n-m} \beta_k (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k - \mathbf{b}_k) = \mathbf{0} \quad \mathbf{A} \cdot \sum_{k=1}^{n-m} \beta_k \mathbf{x}_k - \sum_{k=1}^{n-m} \beta_k \mathbf{b}_k = \mathbf{0} \quad (8)$$

Combinando esta expresión para todos los  $\mathbf{x}_k$  y los  $\mathbf{b}_k$  se obtiene

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\beta} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \quad (9)$$

donde las componentes de  $\boldsymbol{\beta}$  son los valores  $\beta_k$ , con  $k = 1, 2, 3, \dots, n - m$ .

**Corolario.** Dependencia de los Parámetros [Brand,(1957)].

Sea  $[\mathbf{A}]$  una matriz base de rango  $m$ , por lo tanto tiene inversa  $[\mathbf{A}]^{-1}$ . Bajo las condiciones del Teorema II se cumplen cualquiera de las siguientes afirmaciones:

- Si los vectores  $\mathbf{b}_k$  son linealmente dependientes, entonces los vectores  $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}_k$  también lo son, y viceversa.
- Si los vectores  $\mathbf{x}_k$  y  $\mathbf{b}_k$  son en cada uno de sus conjuntos correspondientes linealmente independientes, entonces  $\beta_k = 0$  para  $k = 1, 2, 3, \dots, n - m$ .
- Si  $\mathbf{b}_l$  es linealmente dependiente de los restantes  $\mathbf{b}_k$ , los cuales son linealmente independientes entre sí, entonces, asumiendo  $\beta_l = 0$ , se tiene que  $\beta_k = 0$  para  $k \neq l$ . El parámetro adimensional  $\Pi_l$  se obtiene entonces como el producto de potencias de los  $\Pi_k$  restantes.
- Si la matriz  $[\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}]$  tiene rango  $r$ , entonces existen al menos  $r$  parámetros adimensionales  $\Pi_k$  independientes entre sí.

### 1.3. TRANSFORMACIONES JACOBIANAS

#### 1.3.1. Ecuación Diferencial

Sea  $dZ$  una diferencial exacta dependiente de las variables  $x$  e  $y$  en la forma

$$dZ = M dx + N dy \quad (1)$$

Entonces las funciones  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$ , si son continuas en el dominio de validez, deben satisfacer las siguientes relaciones

$$M = \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y \quad N = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x \quad \left( \frac{\partial M}{\partial y} \right)_x = \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)_y \quad (2)$$

donde la última expresión se debe a la transposición de las derivadas mixtas de segundo orden, válida para funciones analíticas.

#### 1.3.2. Corchetes de Poisson

Sean el siguiente par de funciones dependiente de  $x$  e  $y$  en su dominio

$$A = A(x, y) \quad B = B(x, y) \quad (3)$$

entonces el jacobiano de dicha aplicación se calcula como

$$\left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} A(x, y) \\ B(x, y) \end{matrix} \right\} \quad J = \frac{\partial A, B}{\partial x, y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{[A, B]}{[x, y]} \quad (4)$$

donde la última simbología  $[\cdot, \cdot]$ , son los que denominan los *corchetes de Poisson*.

Bajo el siguiente cambio de variables

$$x = x(v, w) \quad y = y(v, w) \quad (5)$$

se satisface la siguiente correspondencia de los jacobianos

$$\frac{[A, B]}{[x, y]} \frac{[x, y]}{[v, w]} = \frac{[A, B]}{[v, w]} \quad (6)$$

Los corchetes de Poisson satisfacen las siguientes propiedades

$$[A, A] = 0 \quad (7)$$

$$[A, B] = -[B, A] \quad (8)$$

De manera que una derivación parcial, por ejemplo, particularmente (2) se puede expresar como

$$M = \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y = \frac{[Z, y]}{[x, y]} \quad \left( \frac{\partial M}{\partial y} \right)_x = \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)_y \quad \longrightarrow \quad \frac{[M, x]}{[y, x]} = \frac{[N, y]}{[x, y]} \quad (9)$$

De forma generalizada, los corchetes de Poisson se pueden aplicar de forma abierta. Así, un diferencial exacto se expresa como

$$dZ = [Z, *] \quad * = \text{Arbitrario} \quad (10)$$

En el caso de la expresión (1), ésta se puede re-escribir de la siguiente manera

$$dZ = M dx + N dy \quad \longrightarrow \quad [Z, *] = M[x, *] + N[y, *] \quad (11)$$

Como aplicación de los corchetes de Poisson se da el siguiente ejemplo de combinación de variables y composición de funciones

$$\begin{aligned} x = x(w, y) = [w, y(w, z)] &\longrightarrow \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right)_z = \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right)_y + \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_w \left( \frac{\partial y}{\partial w} \right)_z \\ &\longrightarrow \frac{[x, z]}{[w, z]} = \frac{[x, y]}{[w, y]} + \frac{[x, w]}{[y, w]} \frac{[y, z]}{[w, z]} \end{aligned} \quad (12)$$

Del lado derecho se ha colocado paralelamente el resultado en la notación tradicional y mediante el uso de corchetes.

## 2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

### 2.1. ESPACIOS ESCALARES

Las ecuaciones diferenciales como las definidas en la sección anterior se pueden particularizar para  $n = 1$ , en cuyo caso son escalares todas las funciones, y siempre se habla de problemas de valor inicial. Adicionalmente, la ecuación diferencial puede ser o no autónoma.

#### 2.1.1 Primer Orden

Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden con su respectiva condición de borde

$$y' + P(x) y = Q(x) \quad x = a \quad y = y_a \quad (1)$$

Esta ecuación posee un factor integrante  $\exp R(x)$  con  $R'(x) = P(x)$ , tal que

$$e^R y' + e^R P y = e^R Q \quad R(x) = \int_a^x P(\xi) d\xi \quad (2)$$

De forma que

$$\frac{d}{dx}(e^R y) = e^R Q \quad \implies \quad d(e^R y) = e^R Q dx \quad \implies \quad [e^R y]_a^x = \int_a^x e^{R(\xi)} Q(\xi) d\xi \quad (3)$$

de donde integrando se obtiene finalmente

$$y = e^{-R(x)} \left[ y_a + \int_a^x e^{R(\xi)} Q(\xi) d\xi \right] \quad (4)$$

que es la resolvente general de la ecuación diferencial (1).

### 2.1.2 Segundo Orden

Existen algunas ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas características particulares las hacen importantes para aplicaciones en la mecánica. A continuación describiremos brevemente algunas de ellas.

**Ecuación de Legendre.** La ecuación difrenencial ordinaria de legendre de orden  $\alpha \in \mathbb{R}$  es

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \alpha(\alpha + 1) y = 0 \quad (5)$$

También puede escribirse

$$[(x^2 - 1) y']' = \alpha(\alpha + 1) y \quad (6)$$

que tiene la forma

$$T(y) = \lambda y \quad (7)$$

en donde  $T$  es un operador de Sturm-Liouville  $T(f) = (pf')'$  con  $p(x) = x^2 - 1$  y  $\lambda = \alpha(\alpha + 1)$ . Por consiguiente, las soluciones no nulas de la ecuación de Legendre son autofunciones de  $T$  correspondientes al autovalor  $\alpha(\alpha + 1)$ .

Puesto que  $p(x)$  satisface las condiciones de contorno

$$p(1) = p(-1) = 0 \quad (8)$$

el operador  $T$  es simétrico con respecto al producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx \quad (9)$$

Las soluciones de (5) ó (6) cuando  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  son los polinomios de Legendre de grado  $n$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r (2n - 2r)!}{r! (n - r)! (n - 2r)!} x^{n-2r} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} x^{2(n-r)} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (10)$$

donde  $[n/2]$  representa el mayor entero  $\leq n/2$ . La última expresión se denomina la *fórmula de Rodrigues* [Olinde Rodrigues (1794-1851)]. Cuando sus grados son distintos, son ortogonales entre sí de acuerdo a (9).

**Ecuación de Bessel.** La ecuación diferencial ordinaria de Bessel [F. W. Bessel (1784-1846)] de orden  $\alpha$  es

$$x^2 y'' + x y' + (m^2 x^2 - \alpha^2) y = x \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + (m^2 x^2 - \alpha^2) y = 0 \quad (11)$$

donde  $m$  es un parámetro cualquiera y  $\alpha \in \mathbb{Q}$  puede ser cero, una fracción o un entero. La solución general de esta ecuación para  $x > 0$  es

$$y(x) = C_1 J_\alpha(mx) + C_2 Y_\alpha(mx) \quad (12)$$

donde

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad Y_\alpha(x) = \frac{1}{\sin \alpha\pi} [\cos \alpha\pi J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)] \quad (13)$$

son la funciones de Bessel de primera y segunda especie o clase, respectivamente.

En (13) la función gamma  $\Gamma$  se define como

$$\Gamma(s) = \int_{0+}^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad \Gamma(s+1) = s \Gamma(s) \quad (14)$$

Cuando  $\alpha$  no es entero,  $J_\alpha(x)$  y  $J_{-\alpha}(x)$  son soluciones independientes y la solución general de (11) es

$$y(x) = C_1 J_\alpha(mx) + C_2 J_{-\alpha}(mx) \quad (15)$$

en lugar de (12). Para un entero  $n$  cualquiera se satisface que  $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$ .

Una ecuación similar a (1) es la ecuación de *Bessel modificada*

$$x^2 y'' + x y' - (m^2 x^2 + \alpha^2) y = x \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) - (m^2 x^2 + \alpha^2) y = 0 \quad (16)$$

donde  $m$  es un parámetro cualquiera y  $\alpha \in \mathbb{Q}$  puede ser cero, una fracción o un entero. La solución general de esta ecuación para  $x > 0$  es

$$y(x) = C_1 J_\alpha(imx) + C_2 Y_\alpha(imx) = C_1' I_\alpha(mx) + C_2' K_\alpha(mx) \quad (17)$$

donde  $J_\alpha(ix) = i^\alpha I_\alpha(x)$  y

$$I_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n+1+\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2 \sin \alpha\pi} [I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)] \quad (18)$$

son la funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie o clase, respectivamente.

Cuando  $\alpha$  no es entero,  $I_\alpha(x)$  y  $I_{-\alpha}(x)$  son soluciones independientes y la solución general de (19) es

$$y(x) = C_1 I_\alpha(mx) + C_2 I_{-\alpha}(mx) \quad (20)$$

de manera similar a como se hizo con (15).

## 2.2. ESPACIOS VECTORIALES

Las *ecuaciones diferenciales ordinarias* son todas aquellas ecuaciones diferenciales cuyas derivadas son totales u ordinarias y todas las funciones dependen de una sola variable, por ejemplo  $x$  ó  $t$ . Toda ecuación diferencial ordinaria, definida en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ , y de orden  $N$ , siempre se puede llevar a la forma

$$\sum_{k=0}^N \mathbf{A}_k[x, \mathbf{y}(x)] \cdot \frac{d^k \mathbf{y}(x)}{dx^k} = \mathbf{0} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{y}(x)$  es una función vectorial  $\mathbf{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , y  $\mathbf{A}_k(x, \mathbf{y})$  es una función tensorial  $\mathbf{A}_k : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$  (debe diferenciarse entre el producto cartesiano ‘ $\times$ ’ y el producto tensorial ‘ $\otimes$ ’). Cuando las funciones tensoriales no dependen explícitamente de  $x$ , el primer argumento, sino que depende exclusivamente del segundo argumento  $\mathbf{y}(x)$ , se dice que la ecuación diferencial es *autónoma*. Cuando las funciones tensoriales son todas constantes, se habla de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes.

Cuando las condiciones de la ecuación diferencial se dan en un solo punto  $X_o$ , se habla de un problema de valor inicial, y cuando las condiciones se dan para cada componente en dos puntos diferentes  $x_1$  y  $x_2$  se habla de un problema con valor en la frontera (en otros casos no se designa de ninguna manera). Cuando las componentes de las funciones tensoriales  $\mathbf{A}_k$  son todas isótropas (ver definición en la sección A.1.7.7), se dice que el problema está *desacoplado* totalmente (aunque podría estarlo parcialmente por grupo de componentes), y siempre es un problema de valor inicial para cada componente  $y_i(x)$  por separado. Estas componentes se establecen una vez definido el sistema de coordenadas, ya que una ecuación diferencial ordinaria como (1) puede estar desacoplada en un sistema de coordenadas y estar acoplada (no desacoplada) en otro distinto.

### 2.2.1. Primer Orden

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con coeficientes dependiente de una única variable  $x$  se plantea de forma general como

$$\mathbf{y}' + [\mathbf{P}(x)] \cdot \mathbf{y} = \mathbf{q}(x) \quad x = a \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_a \quad (2)$$

Esta ecuación posee un factor integrante  $\exp[\mathbf{R}(x)]$  con  $[\mathbf{R}'(x)] = [\mathbf{P}(x)]$ , tal que

$$e^{[\mathbf{R}(x)]} \cdot \mathbf{y}' + e^{[\mathbf{R}(x)]} \cdot [\mathbf{P}(x)] \cdot \mathbf{y} = e^{[\mathbf{R}(x)]} \cdot \mathbf{q} \quad [\mathbf{R}(x)] = \int_a^x [\mathbf{P}(\xi)] d\xi \quad (3)$$

De forma que

$$\frac{d}{dx}(e^{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{y}) = e^{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{q} \quad \implies \quad d(e^{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{y}) = e^{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{q} dx \quad \implies \quad [e^{[\mathbf{R}(x)]} \cdot \mathbf{y}]_a^x = \int_a^x e^{[\mathbf{R}(\xi)]} \cdot \mathbf{q}(\xi) d\xi \quad (4)$$

de donde integrando se obtiene finalmente

$$\mathbf{y} = e^{-\mathbf{R}(x)} \left[ \mathbf{y}_a + \int_a^x e^{[\mathbf{R}(\xi)]} \cdot \mathbf{q}(\xi) d\xi \right] \quad (5)$$

que es la resolvente general de la ecuación diferencial (2). La exponenciación de de una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  de coeficientes debe interpretarse como la serie

$$e^{[\mathbf{A}]} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{A}]^k}{k!} \quad (6)$$

donde la potenciación se interpreta como la multiplicación de la matriz por si misma las veces que indica el exponente. La inversa se interpreta como  $e^{-[\mathbf{A}]} = [e^{\mathbf{A}}]^{-1}$ .

## 3. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

### 3.1. CLASIFICACION

#### 3.1.1 General

Lo que se desarrollará aquí se hará para una dimensión espacial y la dimensión temporal, no obstante, es fácilmente extensible a cualquier número de dimensiones espaciales.

Sea el operador derivada parcial general aplicado sobre la función  $u(t, x)$  obteniéndose la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\sum_{pq} A_{pq} \frac{\partial^{p+q} u}{\partial t^p \partial x^q} = 0 \quad \text{con} \quad A_{pq} = A_{pq}(t, x, u) \quad (1)$$

con condiciones iniciales en  $t$  y de frontera en  $x$  adecuadas para que sea un problema de valor inicial.

Considérese a la solución de  $u$  como la combinación lineal de una infinidad de ondas viajeras de la forma

$$u_j = c_j \exp^{\alpha_j t + i\kappa_j x} \quad (2)$$

Haciendo el desarrollo para una sola de estas ondas, introduciendo (2) en (1), resulta en

$$u_j \sum A_{pq} \alpha_j^p (i\kappa_j)^q = 0 \quad (3)$$

Como suponemos que la solución a la ecuación diferencial (1) existe y las funciones base (2) es completa, entonces los coeficientes  $c_j$  no son necesariamente todos nulos, por lo que la sumatoria en (3) debe de anularse en cualquier caso

$$\sum A_{pq} \alpha_j^p (i\kappa_j)^q = 0 \quad (4)$$

Esta expresión es lo que se conoce como la *relación de dispersión* y contiene información del tipo de ecuación diferencial. Esta expresión es una ecuación polinómica con coeficientes complejos, si el espacio de soluciones es de dimensión finita y  $A_{pq}$  son constantes.

Sea  $\alpha_j(\kappa)$  las diferentes soluciones de (4), con

$$\alpha_j(\kappa) = \lambda_j(\kappa) + i\omega_j(\kappa) \quad (5)$$

y siendo  $\lambda_j(\kappa)$  y  $\omega_j(\kappa)$  funciones reales. A partir de la función  $\omega_j(\kappa)$ , normalmente cuando  $\lambda_j(\kappa) = 0$ , se pueden definir las funciones de velocidad de fase y de grupo como

$$v_j(\kappa) = \frac{\omega_j(\kappa)}{\kappa} \quad V_j(\kappa) = \frac{d\omega_j(\kappa)}{d\kappa} \quad (6)$$

que representan las velocidades de una onda viajera con número de onda  $\kappa$  o de un paquete de ondas cuyos números de onda son parecidos y se dispersan entre sí a medida que pasa el tiempo, respectivamente.

Basados en las definiciones y condiciones previas se pueden presentar alguna de las siguientes situaciones:

- Si  $\lambda_j = 0 \forall \kappa_j$ , la solución no depende del tiempo, y el problema (1) está mal planteado.
- Si  $\lambda_j > 0$  para  $\kappa \rightarrow \pm\infty$ , el problema (1) puede estar mal planteado, pero puede tener lógica (sin clasificación), aunque muy probablemente no describa ningún fenómeno de la naturaleza.
- Si  $\lambda_j \rightarrow \infty$  para  $\kappa \rightarrow \infty$ , el problema (1) está mal planteado de forma segura.
- Si  $\lambda_j < 0 \forall \kappa_j$ , la rama temporal  $j$  de la solución se desprecia en el infinito  $t \rightarrow \infty$ , y el problema se convierte paulatinamente en estacionario (Si tiene la forma de (7) abajo, se convierte paulatinamente en elíptico).
- Cuando  $\lambda_j \rightarrow -\infty$  para  $\kappa \rightarrow \infty$ , satisfaciéndose que  $|\lambda_j| \sim |\kappa_j|^\beta$ , con  $\beta > 0$ , entonces la ecuación diferencia (1), junto con sus condiciones iniciales y de frontera, se denomina *problema parabólico*. Un ejemplo típico, pero no el único, de este tipo de problema es la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}(u) \quad (7)$$

donde  $\mathcal{L}$  es un operador diferencial elíptico como se definirá en la próxima sección. La ecuación de Burger viscosa  $\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \mathbf{u}$ , la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de Navier-Cauchy son otros ejemplo más complejos.

- Cuando un problema del tipo (7) no evoluciona en el tiempo, o sea que  $\mathcal{L}(u) = 0$  y se convierte en estacionario con las condiciones exclusivamente en la frontera, entonces se denomina *problema elíptico*. Los ejemplos típicos de este tipo de problema son los de Laplace  $\nabla^2 u = 0$  y los de Poisson  $\nabla^2 u = f(u)$ .
- Cuando  $\alpha_j$  es imaginario, o sea  $\alpha_j = i\omega_j$ , y la velocidad de fase  $v_j(\kappa)$  es constante, o sea que no depende de  $\kappa$ , entonces la ecuación diferencial (1), junto con sus condiciones iniciales y de frontera, se denomina *problema hiperbólico*. Los ejemplo típico de este tipo de problema es el de la ecuación de onda  $u_{tt} = \nabla^2 u$  y la ecuación de Burger no viscosa  $\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- Cuando  $\alpha_j$  es imaginario, o sea  $\alpha_j = i\omega_j$ , y la velocidad de fase  $v_j(\kappa)$  depende explícitamente de  $\kappa$ , entonces la ecuación diferencial (1), junto con sus condiciones iniciales y de frontera, se denomina *problema dispersivo*. En estos problemas paquetes de ondas, que inicialmente estaban juntas, se desempaquetan a medida que evoluciona el tiempo. Ejemplos de este tipo de problema son: la ecuación hiperbólica dispersiva  $u_{tt} = u_{xx} - u$ , de Korteweg-de Vries  $u_t \pm u u_x + U_{xxx} = 0$  de las ondas solitarias ó Solitones, de Schrödinger Cúbica compleja  $i u_t + u_{xx} \pm u |u|^2 = 0$ , de Kline-Gordon  $u_{tt} = u_{xx} - u + u^3/3$ , de Sine-Gordon  $u_{tt} = u_{xx} - \sin u$ , etc.

Aunque en todo lo planteado siempre asumimos la variable  $t$  como el tiempo, no necesariamente tiene que ser siempre así. La  $t$  puede también representar una dirección espacial preferencial o particular. A veces, para ser más preciso se habla de problemas que tienen una cierta característica en direcciones preferenciales y otras en las restantes. Por ejemplo, la expresión (7) representa un problema con características elípticas en la direcciones espaciales y características parabólicas en la dirección temporal.

### 3.1.2 Segundo orden

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden, son aquellas que tiene la forma

$$\mathbf{A} : \nabla \nabla u + \mathbf{b} \cdot \nabla u + c u = f \quad (8)$$

donde  $u(\mathbf{x})$  es una función definida sobre el espacio de las  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , y  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  y  $c(\mathbf{x})$  son funciones tensoriales, vectoriales y escalares, respectivamente, definidas también sobre dicho espacio.

Se dice que la ecuación diferencial (1) es *elíptica*, *parabólica* ó *hiperbólica*, si la ecuación polinómica de segundo grado siguiente

$$\mathbf{A} : \mathbf{z} \mathbf{z} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{z} + c = f \quad (9)$$

representa, respectivamente, un elipsoide (elipse), un paraboloide (parábola) o un hiperboloide (hipérbola). Estas superficies (curvas) generadas de las cónicas son fáciles de visualizar cuando se imaginan en  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathbb{R}^2$ ), pero en  $\mathbb{R}^n$  deben interpretarse como hipersuperficies de dimensión  $n$ , sumergidas en un espacio de dimensión  $(n+1)$ . Estas hipersuperficies se dirán que son elípticas si no tienen ningún ramal en el infinito, que son parabólicas si tiene un sólo ramal en el infinito y que son hipérbólicas si tienen varios ramales en el infinito. Entiéndase aquí *ramal* como un sector conexo de la superficie que puede extenderse hacia el infinito.

La ecuación diferencial (9) en  $\mathbb{R}^2$  tiene una expresión sencilla a saber

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u + G = 0 \quad (10)$$

donde

$$A = A_{11} \quad B/2 = A_{12} = A_{21} \quad C = A_{22} \quad (11)$$

relacionando con las componentes  $A_{ij}$  del tensor  $\mathbf{A}$  simétrico en (9) (como se verá en la sección 3.2.1, la simetría de  $\mathbf{A}$  no tiene pérdida de generalidad).

Ahora definamos a

$$\Delta = 4 |\mathbf{A}| = B^2 - 4 A C \quad (12)$$

como el *discriminante*. Entonces dependiendo de su valor se tendrán las siguiente posibilidades para la ecuación diferencial (10):

- Elíptica, si  $\Delta < 0$
- Parabólica, si  $\Delta = 0$
- Hiperbólica, si  $\Delta > 0$

### 3.2. ECUACIONES ELIPTICAS

#### 3.2.1 Principio del Máximo

Sea el operador diferencial de segundo orden definido sobre el espacio  $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1)$$

donde la función  $\alpha_{ij}(\mathbf{x})$  no necesariamente es simétrica. Puesto que  $\partial^2 / \partial x_i \partial x_j = \partial^2 / \partial x_j \partial x_i$ , se puede definir la parte simétrica de la función  $\alpha_{ij}(\mathbf{x})$  de la forma

$$a^{ij} = \frac{1}{2} (\alpha^{ij} + \alpha^{ji}) \quad (2)$$

y escribir la expresión diferencial (1) como

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \mathbf{A} : \nabla \nabla \quad (3)$$

En otras palabras, no hay pérdida de generalidad en suponer que los coeficientes del operador diferencial de segundo orden  $\mathcal{L}$  sean simétricos (o equivalentemente que el tensor  $\mathbf{A}$  sea simétrico). Esta es una suposición que siempre se sobreentenderá.

**Definición 1.** El operador  $\mathcal{L}$  se llama elíptico en un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , si y sólo si, existe una cantidad positiva  $\mu(\mathbf{x})$ , tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}) v_i v_j \geq \mu(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^n (v_i)^2 \quad \mathbf{A} : \mathbf{v} \mathbf{v} \geq \mu(\mathbf{x}) \|\mathbf{v}\|^2 \quad (4)$$

para cualquier  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . El operador  $\mathcal{L}$  se dice que es elíptico en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , si es elíptico en cada  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Se dice que el operador  $\mathcal{L}$  es uniformemente elíptico en  $\Omega$ , si adicionalmente existe una cantidad positiva constante  $\mu_o$ , tal que  $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu_o$  para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Bajo la transformación ortogonal del tensor  $\mathbf{A}$  la elipticidad del operador  $\mathcal{L}$  se conserva.

Sean los siguientes operadores diferenciales de segundo orden

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} = (\mathbf{A} : \nabla \nabla + \mathbf{b} \cdot \nabla) \quad (5)$$

$$(L + h) \equiv \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + h(\mathbf{x}) = (\mathbf{A} : \nabla \nabla + \mathbf{b} \cdot \nabla + h) \quad (6)$$

**Definición 2.** El operador diferencial  $\mathcal{L}$  se llama la parte principal del operador diferencial  $L$  y  $L + h$ . Los operadores  $L$  y  $L + h$  son (uniformemente) elípticos si el operador  $\mathcal{L}$  también lo es.



**Teorema 1. (Principio del Máximo)** Sea el operador diferencial elíptico  $L + h$  en un dominio  $\Omega$  con coeficientes tales que las cantidades

$$\operatorname{tr}[\mathbf{A}(\mathbf{x})] / \mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a^{ii}(\mathbf{x}) / \mu(\mathbf{x}) \quad \|\mathbf{b}\|_{\infty} / \mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n |b^i(\mathbf{x})| / \mu(\mathbf{x}) \quad |h(\mathbf{x})| / \mu(\mathbf{x}) \quad (7)$$

están acotadas en cualquier bola cerrada contenida en el interior de  $\bar{\Omega}$  y con la función  $h(\mathbf{x}) \leq 0$  en  $\bar{\Omega}$ . Considérese que  $u(\mathbf{x})$  satisface la ecuación diferencial de segundo orden

$$(L + h)[u] = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^i} + h(\mathbf{x}) u = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{A} : \nabla \nabla u + \mathbf{b} \cdot \nabla u + h u = f \quad (8)$$

en el dominio  $\Omega$  no necesariamente acotado, pero con fronteras lo suficientemente regulares. Si  $f(\mathbf{x}) \leq 0$  ( $f(\mathbf{x}) \geq 0$ ) en  $\bar{\Omega}$ , entonces cualquier solución  $u$  de (8) no constante alcanza su mínimo negativo (máximo positivo) en la frontera  $\partial\Omega$ . Equivalentemente, si la solución  $u$  alcanza un mínimo negativo (máximo positivo) en un punto interior de  $\Omega$ , entonces dicha solución es constante. Adicionalmente, en el punto de la frontera donde se alcanza el mínimo (máximo) la derivada de  $u$  direccional exterior a  $\bar{\Omega}$  es negativa (positiva).

Sea la función  $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})/w(\mathbf{x})$  definida convenientemente con  $w(\mathbf{x}) > 0$ . Una manipulación adecuada de la ecuación (8) muestra que

$$\frac{1}{w} (L + h)[u] = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x^i} + \tilde{h}(\mathbf{x}) v = \frac{f(\mathbf{x})}{w(\mathbf{x})} \quad (9.a)$$

con

$$\tilde{b}^i = b^i + \frac{2}{w} \sum_{j=1}^n a^{ij} \frac{\partial w}{\partial x^j} \quad \tilde{h} = \frac{1}{w} (L + h)[w] \quad (9.b)$$

donde la analogía entre (8) para  $u$  y (9.a) para  $v$  es evidente.

**Teorema 2. (Principio del Máximo Generalizado)** Sean las condiciones del Teorema 1 con la excepción del signo de  $h(\mathbf{x})$ , que ahora no tiene importancia. Si existe una función  $w(\mathbf{x})$  tal que

$$w(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{en } \bar{\Omega} \quad \tilde{h} w = (L + h)[w] \leq 0 \quad \text{en } \Omega \quad (10)$$

entonces, observando (9), se tiene que la función  $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})/w(\mathbf{x})$  satisface el Teorema 1 del Principio del máximo, no importa si la función  $h(\mathbf{x})$  es negativa o no. Esta última restricción se traslada ahora a la función  $\tilde{h}(\mathbf{x})$  como se observa en (10.b).

**Definición 3.** Sea la siguiente ecuación diferencial de segundo orden con condiciones de contorno homogéneas

$$L[u] + F(x, u) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (11)$$

La función  $u^s \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  es una super-solución del problema (11) si

$$L[u^s] + F(x, u^s) \leq 0 \quad \text{en } \Omega, \quad u^s \geq 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (12.a)$$

La función  $u_s \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  es una sub-solución del problema (11) si

$$L[u_s] + F(x, u_s) \geq 0 \quad \text{en } \Omega, \quad u_s \leq 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (12.b)$$

**Teorema 3. (Existencia)** Sea  $u^s$  una super-solución y  $u_s$  una sub-solución del problema (11), tal que  $u^s > u_s$  en  $\Omega$ . Entonces existe al menos una solución  $u$  de (11), tal que  $u_s \leq u \leq u^s$ .

### 3.3. ECUACIONES PARABOLICAS

Sean los siguientes operadores diferenciales de segundo orden definidos con extensión en la sección 3.2.1

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} = (\mathbf{A} : \nabla \nabla + \mathbf{b} \cdot \nabla) \quad (1)$$

$$(L + h) \equiv \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} + h(\mathbf{x}) = (\mathbf{A} : \nabla \nabla + \mathbf{b} \cdot \nabla + h) \quad (2)$$

Se dice que una ecuación diferencial de segundo orden en un espacio de dimensión  $n$  es *parabólica* respecto a la variable  $t$ , ortogonal a dicho espacio, cuando se expresa de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (L + h)[u] \quad (3)$$

donde  $u(t, \mathbf{x})$  es una función escalar definida por  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ . El principio del máximo generalizado (teorema 2 de la sección 3.2.1) se satisface localmente para (3), si la derivada con respecto a  $t$  se influye dentro de la función  $f(\mathbf{x})$  en la ecuación 3.2.(8).

### 3.4. ECUACIONES HIPERBOLICAS

#### 3.4.1 Ecuación de Onda

Sea el problema de valor inicial en  $\mathbb{R}^n$

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad u = \varphi(\mathbf{x}) \quad u_t = \phi(\mathbf{x}) \quad t = 0 \quad (1)$$

La solución completa a este problema es

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \{ t \mathcal{M}[\varphi] \} + t \mathcal{M}[\phi] \quad (2)$$

donde el funcional  $\mathcal{M}$  es el valor medio en el dominio  $\mathcal{S}(t)$

$$\mathcal{M}[f] = \frac{1}{\mathcal{S}(t)} \int_{\mathcal{S}(t)} f(\mathbf{x}) d\mathcal{S} \quad (3)$$

- Para el caso uni-dimensional  $\mathbb{R}$  el dominio  $\mathcal{S}(t)$  es el intervalo con centro en  $x$  y semilongitud  $ct$ , o sea el intervalo  $[x - ct, x + ct]$  de longitud  $\mathcal{S}(t) = 2ct$ .
- Para el caso bi-dimensional  $\mathbb{R}^2$  el dominio  $\mathcal{S}(t)$  es el círculo con centro en  $\mathbf{x}$  y radio  $ct$ , cuya área es  $\mathcal{S}(t) = \pi(ct)^2$ .
- Para el caso tri-dimensional  $\mathbb{R}^3$  el dominio  $\mathcal{S}(t)$  es el casquete esférico con centro en  $\mathbf{x}$  y radio  $ct$ , cuya superficie es  $\mathcal{S}(t) = 4\pi(ct)^2$ .

Considérese la ecuación de las ondas (1) en  $\mathbb{R}^n$  con la condición inicial  $u = 1$  en la hipersfera de radio unidad y centro en el origen,  $u = 0$  fuera de esta hipersfera,  $u_t = 0$  en todo el espacio. Para  $n = 2$  y  $3$ , se calculará la función  $u(x_o, t)$ , siendo  $x_o$ : (i) el origen, y (ii) un punto que está a una distancia  $1/\varepsilon \gg 1$  del origen (en este caso bastará calcular una primera aproximación de la función).

Para las condiciones iniciales de arriba en (1), se tiene que  $\varphi = 1$  en la hipersfera de radio unidad y centro el origen y  $\phi = 0$  para todo el espacio. La integral presenta en la definición (3) para este problema se lleva a cabo sobre regiones donde las funciones son constantes a trozos. Por la particularidad del caso, en esta oportunidad vamos a hacer un abuso de la notación y finalmente llamaremos a  $\mathcal{S}(t)$  a la región completa

donde se realiza la integración, pero llamaremos simplemente  $\mathcal{S}$  al valor de la integral en aquella región donde  $\varphi = 1$ .

### Caso Uni-Dimensional

Considérese el caso particular  $\phi(x) = 0$ . La aplicación de la regla de Leibniz permite encontrar que

$$u(t, x) = \varphi(x - ct) + \varphi(x + ct) \quad (4)$$

Que es la superposición de dos ondas viajeras con un perfil igual al inicial  $\varphi(x)$  y con velocidades iguales en magnitud y en sentido opuesto. Por la simplicidad de este caso no se analiza en detalle la solución al problema arriba planteado.

### Caso Bi-Dimensional

#### (i) El Origen.

En este caso se van a distinguir dos intervalos de tiempo: Antes de que la señal circular del punto del origen llegue a  $r = 1$  con  $t \leq 1/c$  y luego que la señal haya pasado dicho límite con  $t > 1/c$ . En el primer intervalo

$$\mathcal{S} = \pi(ct)^2 \quad \frac{\mathcal{S}}{\pi c^2 t} = t \quad (5)$$

entonces

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{S}}{\pi c^2 t} \right) = 1 \quad t \leq 1/c \quad (6)$$

En el segundo intervalo el valor de  $\mathcal{S}$  es constante,  $\mathcal{S} = \pi$ , entonces

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{S}}{\pi c^2 t} \right) = -\frac{1}{(ct)^2} \quad t > 1/c \quad (7)$$

Justo entre los dos intervalos de tiempo existe un salto de  $u$  desde 1 hasta  $-1$ , luego decae (en valor absoluto) lentamente con el tiempo con valores negativos.

#### (ii) Punto Alejado.

Para este caso se va hacer la aproximación de que el círculo  $\mathcal{S}(t)$  tiene un radio tan grande del orden de  $1/\varepsilon \gg 1$  que se comporta como un plano semi-infinito con un borde recto que se superpone en la región circular de radio unitario donde está definida la función  $\varphi$ , dando como resultado una intersección que es un sector del círculo. Este sector del círculo crece en tamaño con el tiempo hasta que el círculo es cubierto todo por el plano semi-infinito. Luego del plano cubrir todo el círculo la integración da un valor que siempre es constante. El plano semi-infinito cubre hasta la mitad del círculo cuando el tiempo es  $t = t_o = 1/(\varepsilon c)$ . Antes de tocar el plano semi-infinito al círculo la integración es nula. De acuerdo a esto y haciendo el siguiente cambio variables  $\Delta t = t - t_o$ , entonces se tiene que durante el tiempo que el plano semi-infinito  $\mathcal{S}(t)$  está cubriendo al círculo de radio unidad centrado en el origen, los tiempo satisfacen  $|\Delta t| \leq 1/c$  y el área cubierta del círculo se calcula como

$$\mathcal{S} = \pi - \arccos(c\Delta t) + c\Delta t \sqrt{1 - (c\Delta t)^2} \quad (8)$$

por lo tanto

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{S}}{\pi c^2 t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\pi - \arccos(c\Delta t) + c\Delta t \sqrt{1 - (c\Delta t)^2}}{\pi c^2 (t_o + \Delta t)} \right] \quad -t_o - 1/c \leq t \leq t_o + 1/c \quad (9)$$

Para tiempos inferiores  $u = 0$ . Para tiempos superiores  $\mathcal{S} = \pi$  y

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{S}}{\pi c^2 t} \right) = -\frac{1}{(ct)^2} = -\frac{1}{(1/\varepsilon + c\Delta t)^2} \quad t > t_o + 1/c \quad (10)$$

### Caso Tri-Dimensional

#### (i) El Origen.

En este caso se van a distinguir dos intervalos de tiempo: Antes de que la señal esférica del punto del origen llegue a  $r = 1$  con  $t \leq 1/c$  y luego que la señal haya pasado dicho límite con  $t > 1/c$ . En el primer intervalo  $\mathcal{S} = 4\pi(ct)^2$ , entonces

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{S}}{4\pi c^2 t} \right) = 1 \quad t \leq 1/c \quad (11)$$

En el segundo intervalo  $\mathcal{S} = 0$ , entonces

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{S}}{4\pi c^2 t} \right) = 0 \quad t > 1/c \quad (12)$$

#### (ii) Punto Alejado.

Para este caso se va hacer la aproximación de que el casquete esférico  $\mathcal{S}(t)$  tiene un radio tan grande del orden de  $1/\varepsilon \gg 1$  que se comporta como un plano recto que corta la región esférica donde está definida la función  $\varphi$ , dando como resultado una intersección que es un círculo. Este círculo crece en tamaño con el tiempo antes del plano alcanzar el origen con  $t < t_o = 1/(\varepsilon c)$ . Luego del plano pasar el origen la intersección decrece con el tiempo para  $t > t_o$ . Cuando el plano no toca a la hipersfera la intersección de desvanece. De acuerdo a esto y haciendo el siguiente cambio variables  $\Delta t = t - t_o$ , entonces se tiene que durante el tiempo que la gran esfera  $\mathcal{S}(t)$  pasa por la esfera de radio unidad centrada en el origen con tiempos  $|\Delta t| \leq 1/c$

$$\mathcal{S} = \pi [1 - (c\Delta t)^2] \quad \frac{\mathcal{S}}{4\pi c^2 t} = \frac{1}{4c^2 t} [1 - c^2(t - t_o)^2] \quad (13)$$

Por lo tanto

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{S}}{4\pi c^2 t} \right) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(ct)^2} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right) - 1 \right] \quad -t_o - 1/c \leq t \leq t_o + 1/c \quad (14)$$

El resto del tiempo  $u = 0$ , porque  $\mathcal{S} = 0$ .

## 4. TRANSFORMADAS INTEGRALES

### 4.1. SERIES DE FOURIER

#### 4.1.1 Funciones Ortogonales

La ortogonalidad de las funciones trigonométricas se plantea con las siguientes igualdades

$$\int_{x_a}^{x_b} \cos \frac{j\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \begin{cases} \delta_{jk}(x_b - x_a)/2 & j, k \neq 0 \\ (x_b - x_a) & j = k = 0 \end{cases} \quad (1.a)$$

$$\int_{x_a}^{x_b} \sin \frac{j\pi x}{L} \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \begin{cases} \delta_{jk}(x_b - x_a)/2 & j, k \neq 0 \\ 0 & j = k = 0 \end{cases} \quad (1.b)$$

$$\int_{x_a}^{x_b} \sin \frac{j\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0 \quad \forall j, k \quad (1.c)$$

donde  $[x_a, x_b] = [0, L]$ ,  $[0, 2L]$  ó  $[-L, L]$ , y  $\delta_{jk}$  es la delta de Kronecker (aplicable también para los índices negativos si se observa que, particularmente cuando los índices son iguales en valor absoluto y de signos opuestos, la delta de Kronecker es igual a 1 en la expresión (1.a) e igual a -1 en la expresión (1.b)). Casos

especiales para (1) se encuentran cuando  $L = \pi$  y  $L = L'/2$ . En resumen, las funciones trigonométricas (sen y cos) de números reales son ortogonales entre sí, al menos que sean del mismo tipo y con el mismo argumento (en valor absoluto cuando se toleran índices negativos).

La ortogonalidad expresada en (1) permite encontrar expresiones similares para las funciones exponenciales de los mismos argumentos anteriores pero imaginarios

$$\int_{x_a}^{x_b} \exp\left(i \frac{j\pi x}{L}\right) \exp\left(i \frac{k\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & j, k \neq 0 \\ (x_b - x_a) & j = k = 0 \end{cases} \quad (2.a)$$

$$\int_{x_a}^{x_b} \exp\left(i \frac{j\pi x}{L}\right) \exp\left(-i \frac{k\pi x}{L}\right) dx = \delta_{jk}(x_b - x_a) \quad \forall j, k \quad (2.b)$$

donde la delta de Kronecker aplica también para los índices nulos o negativos en el sentido estricto (i.e. sin las observaciones antes hechas). Con “estricto se quiere decir que la delta de Kronecker es nula, salvo cuando los índices son iguales, incluyendo su signo. Con esta última observación, la expresión (2.a) es un caso particular de (2.b). La expresión (2.b) nos recuerda que, en el producto interior de dos funciones compleja, el integrando contiene en el segundo factor el conjugado de la segunda función. En resumen, las funciones exponenciales de números imaginarios son ortogonales entre sí (en el sentido del producto interior antes descrito), al menos que sus argumentos sean iguales (es decir, opuestos dentro de la integral).

#### 4.1.2 Series en Cosenos y Senos

Se utilizan cuando la función  $f(x)$  es real. Estas series se escriben de la siguiente manera

$$f_{cs}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (3.a)$$

$$a_k = \frac{2}{(x_b - x_a) d_k} \int_{x_a}^{x_b} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \quad b_k = \frac{2}{(x_b - x_a) d_k} \int_{x_a}^{x_b} f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx \quad (3.b, c)$$

donde  $d_0 = 2$ , y  $d_k = 1$  para  $k \geq 1$ . Obviamente de (3.c) se tiene que  $b_0 = 0$ . Para esta serie se satisface que

$$f_{cs}(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] \quad x \in (x_a, x_b) \quad f_{cs}(x_a) = f_{cs}(x_b) = \frac{1}{2} [f(x_a^+) + f(x_b^-)] \quad (4.a)$$

y la identidad de Parseval

$$\frac{2}{(x_b - x_a)} \int_{x_a}^{x_b} |f_{cs}(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (a_k^2 + b_k^2) \quad (4.b)$$

Fuera del intervalo  $(x_a, x_b]$  la función  $f_{cs}(x)$  se repite periódicamente con período  $(x_b - x_a)$ .

#### 4.1.3 Series en Cosenos o Senos

Se utilizan las series en puramente cosenos o puramente senos, cuando la función  $f(x)$  es real y además es par o impar, respectivamente. Para estos dos casos  $x_a = 0$ , de manera que el origen de la variable  $x$  marca cuál es el eje de simetría (par) o antisimetría (impar), y solamente se calcula con un lado de la función con  $L = x_b$ . Estas series se escriben como

$$f_c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{L} \quad f_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \quad (5.a, b)$$

Los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  vienen dados otra vez por (3.b, c). Para esta serie se satisface que

$$f_c(x) \text{ ó } f_s(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] \quad f_s(-x) = -f_s(x) \quad f_c(-x) = f_c(x) \quad x \in (0, x_b) \quad (6.a)$$

$$f_s(0) = f_s(x_b) = 0 \quad f_c(0) = f(0^+) \quad f_c(x_b) = f(x_b^-) \quad (6.b)$$

y la identidades de Parseval

$$\frac{2}{x_b} \int_0^{x_b} |f_c(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(a_k^2) \quad \frac{2}{x_b} \int_0^{x_b} |f_s(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(b_k^2) \quad (6.c)$$

Fuera del intervalo  $(-x_b, x_b]$  las funciones  $f_c(x)$  y  $f_s(x)$  se repiten periódicamente con período  $2x_b$ .

#### 4.1.4 Series en Exponenciales

Se utilizan cuando la función  $f(x)$  es real o compleja

$$f_e(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(i \frac{k\pi x}{L}\right) \quad (7.a)$$

$$c_k = \frac{1}{(x_b - x_a)} \int_{x_a}^{x_b} f(x) \exp\left(-i \frac{k\pi x}{L}\right) dx \quad (7.b)$$

Los coeficientes satisfacen  $2c_k = a_k - i b_k$  cuando  $k \geq 0$  y  $2c_k = a_k + i b_k$ , cuando  $k \leq 0$ , con  $a_k$  y  $b_k$  definidos en (3.b, c). Cuando la función  $f(x)$  es puramente real se tiene que  $c_{-k} = \bar{c}_k$ . Las series en exponenciales tienen las mismas características de periodicidad que las series en cosenos y senos.

Si en lugar de  $k$  hubiésemos tomado  $-k$  para el desarrollo de la serie, las expresiones (7) se convertirían en las siguientes

$$f_e(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-i \frac{k\pi x}{L}\right) \quad (8.a)$$

$$c_k = \frac{1}{(x_b - x_a)} \int_{x_a}^{x_b} f(x) \exp\left(i \frac{k\pi x}{L}\right) dx \quad (8.b)$$

Estos coeficientes satisfacen  $2c_k = a_k + i b_k$  cuando  $k \geq 0$  y  $2c_k = a_k - i b_k$ , cuando  $k \leq 0$ , con  $a_k$  y  $b_k$  definidos en (3.b). Cuando la función  $f(x)$  es puramente real se tiene que  $c_{-k} = \bar{c}_k$ . También se satisface la identidad de Parseval

$$\frac{1}{(x_b - x_a)} \int_{x_a}^{x_b} f_e(x) \overline{f_e(x)} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c}_k \quad (9)$$

En las expresiones (7) y (8), el factor delante de las integrales se puede transferir delante de las sumatorias, si se definen los coeficientes de Fourier como  $\hat{c}_k = c_k (x_b - x_a)$ . Estas mismas expresiones con las variantes mencionadas (distintos valores de  $L$  y la transferencia del factor delante de las integrales/sumatorias), más la periodicidad de las funciones, permiten definir de manera continua los coeficientes de Fourier en función de  $k$ . Estas funciones continuas de  $k$  es lo que en la próxima sección se ha denominado transformadas de Fourier.

## 4.2. TRANSFORMADA DE FOURIER

### 4.2.1. Fundamentos

La transformada de Fourier se define como la integral

$$\mathfrak{F}[f](\kappa) \equiv \sqrt{2\pi} \hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\kappa x} dx \quad (1)$$

Si la función  $f(x)$  es real, particularmente se tiene que  $\hat{f}(-\kappa) = \overline{\hat{f}(\kappa)}$ , y si la función es imaginaria entonces particularmente se tiene que  $\hat{f}(-\kappa) = -\overline{\hat{f}(\kappa)}$ . Aún más, si la función  $f(x)$  es par o impar, entonces la

transformada de Fourier  $\hat{f}(\kappa)$  también lo es, respectivamente. Combinando estas condiciones se puede decir que la transformada de Fourier  $\hat{f}(x)$  no cambia la naturaleza real o imaginaria de la función  $f(x)$  si ambas son pares, pero si la cambia de real a imaginaria o de imaginaria a real si las funciones mencionadas son impares. Finalmente, todos estos resultados particulares permiten concluir de forma general que

$$\mathfrak{F}[\bar{f}(-x)](\kappa) = \mathfrak{F}[\bar{f}(x)](-\kappa) = \overline{\mathfrak{F}[f]}(\kappa) \quad \widehat{\bar{f}(-x)}(\kappa) = \hat{\bar{f}}(-\kappa) = \overline{\hat{f}(\kappa)} \quad (2)$$

lo que en palabras quiere decir, que la transformada de Fourier y la conjugación compleja son dos operadores permutables, si se invierte el sentido en el dominio (dos últimos miembros). Este dominio puede ser en la variable  $x$  o la variable  $\kappa$ , ya que es indistinto si se invierte en una de ellas o en la otra (primeros dos miembros). La siguiente tabla representa las diferentes correspondencias entre distintas simetrías de la función  $f(x)$  y su transformada de Fourier  $\hat{f}(\kappa)$  en los dos dominios de la variable  $x$  y de la variable  $\kappa$ :

Tabla 1. Correspondencias entre distintas simetrías para la transformada de Fourier

Si se tiene...		Entonces...	
Función	Tipo	Función	Tipo
$f_{\Re}(x)$	Real	$\hat{f}(-\kappa) = \overline{\hat{f}(\kappa)}$	Simétrico / Conjugado
$f_{\Im}(x)$	Imaginaria	$\hat{f}(-\kappa) = -\overline{\hat{f}(\kappa)}$	Antisimétrico / Conjugado
$f(x) = f(-x)$	Par	$\hat{f}(-\kappa) = \hat{f}(\kappa)$	Par
$f(x) = -f(-x)$	Impar	$\hat{f}(-\kappa) = -\hat{f}(\kappa)$	Impar
$f_{\Re}(x) = f_{\Re}(-x)$	Real / Par	$\hat{f}_{\Re}(-\kappa) = \hat{f}_{\Re}(\kappa)$	Real / Par
$f_{\Re}(x) = -f_{\Re}(-x)$	Real / Impar	$\hat{f}_{\Im}(-\kappa) = -\hat{f}_{\Im}(\kappa)$	Imaginaria / Impar
$f_{\Im}(x) = f_{\Im}(-x)$	Imaginaria / Par	$\hat{f}_{\Im}(-\kappa) = \hat{f}_{\Im}(x)(\kappa)$	Imaginaria / Par
$f_{\Im}(x) = -f_{\Im}(-x)$	Imaginaria / Impar	$\hat{f}_{\Re}(-\kappa) = -\hat{f}_{\Re}(\kappa)$	Real / Impar

La versión multidimensional de la expresión (2) es

$$\bar{\mathbf{f}}(-\mathbf{x})(\boldsymbol{\kappa}) = \hat{\bar{\mathbf{f}}}(-\boldsymbol{\kappa}) = \overline{\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa})} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa})$  son funciones vectoriales del tipo  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  ( $\mathbf{f}$  y  $\hat{\mathbf{f}}$  también pueden ser funciones tensoriales, ya que la conjugación compleja es distributiva respecto al producto tensorial  $\otimes$  y otros productos:  $\cdot$ ,  $\times$ , etc. entre vectores).

Otros autores [Ablowitz & Fokas, 1997] denotan la transformada de Fourier en la forma  $\hat{F}$  y la definen como  $\hat{F}(\kappa) \equiv \mathfrak{F}[f(-x)](\kappa) = \mathfrak{F}[f](-\kappa) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(-\kappa)$ , que no es más que un cambio de signo en el exponencial de la expresión (1) (y de la expresión (4) como se verá más adelante). Esto es equivalente al cambio o inversión del sentido en el dominio de alguna de las dos variables  $x$  ó  $\kappa$ , tal como se mencionó en el párrafo anterior. Algunos autores cambian los papeles de  $f$  y  $\mathfrak{F}[f]$  en la expresión (1) (y la expresión (4) adelante), lo cual es equivalente a cambiar el signo en el exponencial, como se mencionó antes, y transferir el factor  $(2\pi)^{-1}$  de

una expresión a la otra. Todas estas variantes nos llevan a percatarnos que, antes de analizar los resultados con la transformada de Fourier, se debe entender primero cómo ha sido ésta definida.

No obstante se utilice  $\mathfrak{F}[f](\kappa)$ ,  $\hat{f}(\kappa)$  ó  $\hat{F}(\kappa)$ , los resultados son equivalentes (conjugados) o iguales salvo por un factor de  $2\pi$  ó  $\sqrt{2\pi}$ . Sin embargo, la transformada  $\hat{f}$  permite una forma simétrica de definir el funcional lineal  $\hat{\cdot}$  que calcula la transformada de Fourier, puesto que tiene la misma forma salvo el signo del exponencial, el cual es positivo en el funcional original y negativo en su inverso (por ello es que se utilizará únicamente esta forma de la transformada para los casos multidimensionales).

Si todas las funciones  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  pertenecen al espacio vectorial  $\mathbf{V}$  definido sobre el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ , entonces el conjunto  $\mathcal{L}$  de todos estos funcionales  $\hat{\cdot}$ ,  $\mathfrak{F}[\cdot]$ , etc., que también son lineales, forman un espacio vectorial  $\mathbf{V}^* = \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbb{C})$ , que es el dual del primero definido sobre el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ . El conjunto de todas las funciones  $\hat{f}(\kappa) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  también es un espacio vectorial, a veces erróneamente referido como el espacio dual de  $\mathbf{V}$  (ver la Sección 4.2.2 del Apéndice C). Todas estas implicaciones son fácilmente extensibles a funciones multidimensionales del tipo  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  pertenecientes al espacio vectorial  $\mathbf{V}^m$  definido sobre el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ .

La transformada inversa de Fourier es muy sismilar a (1) y se expresa como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}[f](\kappa) e^{-ix\kappa} d\kappa = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa) e^{-ix\kappa} d\kappa \quad (4)$$

En el caso de la transformada inversa para  $\hat{F}$ , la expresión es la misma que para  $\mathfrak{F}$ , salvo el signo del exponencial. La existencia de la inversa de la transformada de Fourier de manera biyectiva nos lleva a concluir que esta transformada es un isomorfismo endomórfico del tipo  $\mathfrak{F} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  ó  $\hat{\cdot} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ .

Dentro de la física, si  $x$  mide el tiempo en segundo, entonces  $\kappa$  es la frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$  medida en radianes/segundo, siendo  $f$  la frecuencia medida en ciclos/segundo o Hertz. Por otro lado, si  $x$  mide distancias o posiciones en metro, entonces  $\kappa$  es el número de onda  $n_\lambda = 2\pi/\lambda$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda medida en metros.

Además de las propiedades antes mencionadas, las transformadas de Fourier  $\mathfrak{F}[f]$  y  $\hat{f}$  también cumplen con las siguientes propiedades

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{F}[f]](x) = 2\pi f(-x) \quad \lim_{\kappa \rightarrow \pm\infty} \mathfrak{F}[f](\kappa) = 0 \quad (5.a)$$

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) \quad \lim_{\kappa \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\kappa) = 0 \quad (5.b)$$

donde los límites se satisface si la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  converge (Lema de Riemann-Lebesgue). Esta última condición nunca se cumple si la función  $f(x)$  es periódica, en cuyo caso los límites son infinitos. En la práctica lo que se hace es que se redefine la función para que sea la misma en un período y fuera de éste sea nula el resto del dominio.

Cuando se realizan los cálculos para funciones complejas definidas sobre un espacios  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , entonces la transformada de Fourier se expresa como

$$\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathcal{V}_\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} d\mathcal{V}_x \quad (6)$$

y la transformada inversa como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathcal{V}_\infty} \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\kappa}} d\mathcal{V}_\kappa \quad (7)$$

donde el volumen  $\mathcal{V}_\infty = \{\mathbf{x} \mid -\infty < x^j < \infty \quad \forall j \leq n\} \equiv \mathbb{R}^n$  es el espacio infinito  $n$ -dimensional. Las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\hat{\mathbf{f}}$  pueden ser funciones escalares, vectoriales, o tensoriales, reales o complejas, no necesariamente de una



base  $n$ -dimensional. En todo caso  $\mathbf{x}$  y  $\kappa$  deben ambas estar definidas en  $\mathbb{R}^n$ . Los espacios a los que pertenecen  $\mathbf{f}$  y  $\hat{\mathbf{f}}$  deben ser de igual dimension ambos y deben estar definidos sobre el cuerpo de los números complejos, por ejemplo, el espacio  $\mathbb{C}^m$ .

#### 4.2.2. Ecuación de Parseval y Espectro

Las funciones que poseen transformada de Fourier son funciones integrables, por lo que forman un espacio de Lebesgue  $L_p(\mathbb{R})$ , en este caso definido por la existencia de la integral

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \quad (8)$$

En realidad, como se verá durante esta sección, las funciones cuyas transformadas de Fourier existen pertenecen a  $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$  (o sea, las funciones son *absolutamente integrables*  $p = 1$  y *cuadráticamente integrables*  $p = 2$ ), por lo que se satisface las expresiones

$$|\mathfrak{F}[f](\kappa)| \leq \|f\|_{L_1} \quad \|\mathfrak{F}[f]\|_{L_2} = \|f\|_{L_2} \quad (9)$$

La transformada de Fourier satisface la *ecuación de Parseval*

$$\langle f | \bar{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}[f](\kappa) \overline{\mathfrak{F}[g](\kappa)} d\kappa = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa) \overline{\hat{g}(\kappa)} d\kappa \quad (10)$$

que a continuación se ha particularizado para el caso  $f = g$

$$\langle |f|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}[f](\kappa)|^2 d\kappa = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\kappa)|^2 d\kappa \quad (11)$$

Obsérvese que con la definición de las transformadas  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$ , la ecuación de Parseval (10) queda sin ser multiplicada por un coeficiente en el miembro de la derecha, lo que ha ocurrido cuando se expresa con  $\mathfrak{F}$ . En este último caso, cuando se utiliza  $\mathfrak{F}$ , a veces se acostumbra a expresar la integral del miembro central en función de la frecuencia  $f$  para evitar el mencionado coeficiente. El operador puede interpretarse como un promedio en todo el dominio o como la esperanza de una variable aleatoria centrada, como está definida en la sección 5.1.3.

Cuando  $f$  es una señal, a las integrales en (11) se le denominan *potencia total* de dicha señal y al integrando en el dominio de  $\kappa$  (ó en el dominio de frecuencias  $f = \kappa/(2\pi)$ , si se trabaja con  $\mathfrak{F}$ ) se le denomina *densidad del espectro de potencia*, la cual representa la cantidad de potencia contenida en el intervalo  $\kappa$  y  $\kappa + d\kappa$  (ó en el intervalo  $f$  y  $f + df$ , si se trabaja con  $\mathfrak{F}$ ). Usualmente, no se acostumbra distinguir entre valores positivos y negativos para  $\kappa$  (ó para  $f$ ), por lo que se redefine la densidad espectral de potencia como  $\mathcal{E}(\kappa) = |\hat{f}(\kappa)|^2 + |\hat{f}(-\kappa)|^2$ , en cuyo caso la potencia total se calcula como  $\langle |f|^2 \rangle = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\kappa) d\kappa = 2\pi \int_0^{\infty} \mathcal{E}(f) df$ . (Cuando se trabaja con  $\mathfrak{F}$  en el dominio de frecuencia  $f$ , la densidad del espectro de potencia se puede definir como  $2\pi \mathcal{E}(\kappa) = \mathfrak{E}(\kappa) + \mathfrak{E}(-\kappa)$ , donde  $\mathfrak{E}(\kappa) = |\mathfrak{F}[f](\kappa)|^2$ , a veces también es llamado densidad del espectro de potencia o simplemente *espectro*).

En el caso que la señal  $f$  sea puramente real, la densidad de potencia espectral se calcula como  $\mathcal{E}(\kappa) = 2|\hat{f}(\kappa)|^2$  (ó como  $2\pi \mathcal{E}(\kappa) = 2\mathfrak{E}(\kappa)$  en el dominio de frecuencias). Al gráfico de  $\mathcal{E}(\kappa)$  vs.  $\kappa$ , usualmente se le denomina *espectro de potencia*, y el área bajo la curva representa la potencia total. Este gráfico, cuando se representa en escala semilogarítmica, ocasionalmente se pre-multiplica por  $\kappa$ . En otras palabras, se representa  $\kappa \mathcal{E}(\kappa)$  vs.  $\ln \kappa$ , de manera que el área bajo la curva  $\int_0^{\infty} \kappa \mathcal{E}(\kappa) d(\ln \kappa)$  siga representando a la potencia total. Lo mismo ocurre cuando se representa  $2\pi \mathcal{E}(f)$  vs.  $f$ , siendo el área bajo la curva igual de nuevo a la misma potencia total. A veces se suele normalizar la densidad del espectro de la forma  $\mathcal{E}(\kappa)/\langle |f|^2 \rangle$ , de manera que el área bajo la curva de este espectro normalizado ahora es unitaria.

Es importante mencionar que no existe uniformidad de como los autores representan las gráficas de los espectros, ya que a veces utilizan la transformada  $\mathfrak{F}$  en lugar de la transformada  $\hat{f}$ , o utilizan el dominio de frecuencia  $f$  en lugar del dominio en  $\kappa$ , o la normalización no es la del área unitaria, o a veces olvidan incluir la parte correspondiente a los valores negativos de  $\kappa$  ( ó de  $f$  ), de manera que en el caso real no aparece el factor de 2 y las área son la mitad de lo que debería ser. Es frecuente ver espectros de potencia donde se ha graficado  $\mathfrak{E}(\kappa)$  en lugar de  $\mathcal{E}(\kappa)$  y el área resulta multiplicada por un factor de  $\pi$ . Algo similar ocurre cuando se trabaja con  $\mathfrak{F}$  y el eje de las abscisas se escoge en el dominio de  $\kappa$  y no de  $f$  como debería ser, quedando las área multiplicadas por un factor de  $2\pi$ . Así, que hay que tener cuidado cuando se lean los valores de las gráficas de espectros, o cuando se comparen espectros reportados por autores diferentes.

Cuando se tienen dos señales  $f$  y  $g$  (complejas o reales) se puede definir una pseudo-potencia total mixta de dichas señales como

$$\langle f g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}[f](\kappa) \overline{\mathfrak{F}[g](\kappa)} d\kappa = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa) \overline{\hat{g}(\kappa)} d\kappa \quad (12)$$

lo que es equivalente a haber substituido  $\bar{g}$  por  $g$  en toda la expresión (10). La aplicación de la regla (2) y si, como antes, nos limitamos a analizar los valores de  $\kappa$  positivos, la pseudo-potencial total mixta (12) se puede re-calcular también como

$$\langle f g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2 \mathfrak{E}_{fg}^s(\kappa) d\kappa = \int_0^{\infty} \mathcal{E}_{fg}(\kappa) d\kappa \quad (13.a)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{fg}^s(\kappa) &= \frac{1}{2} [\mathfrak{E}_{fg}(\kappa) + \mathfrak{E}_{gf}(\kappa)] \\ \mathfrak{E}_{fg}(\kappa) &= \mathfrak{F}[f](\kappa) \overline{\mathfrak{F}[g](\kappa)} \quad \mathfrak{E}_{gf}(\kappa) = \mathfrak{E}_{fg}(-\kappa) \\ \mathcal{E}_{fg}(\kappa) &= \hat{f}(\kappa) \overline{\hat{g}(\kappa)} + \overline{\hat{f}(\kappa)} \hat{g}(\kappa) \end{aligned} \quad (13.b)$$

En las expresiones (13.b), las substituciones  $\overline{\mathfrak{F}[g](\kappa)} = \mathfrak{F}[g](-\kappa)$  y  $\overline{\hat{g}(\kappa)} = \hat{g}(-\kappa)$  son igualmente válidas (lo mismo para  $f$ ), si se observa la regla (2), aunque se han colocado de la forma mostrada para evaluarlas siempre en valores de  $\kappa$  positivos. Las densidades  $2 \mathfrak{E}_{fg}^s(\kappa) = 2\pi \mathcal{E}_{fg}(\kappa)$  del espectro de la pseudo-potencia mixta son simétricas con respecto a los índices  $f$  y  $g$ . Sin embargo, la densidad espectral  $\mathfrak{E}_{fg}(\kappa)$  no es simétrica respecto a los mencionados índices. Estos resultados se reducen a los obtenidos antes con el espectro de potencia si se escoge  $g = \bar{f}$ , siendo  $\mathfrak{E}_{f\bar{f}} = \mathfrak{E}(\kappa)$ ,  $\mathfrak{E}_{\bar{f}f} = \mathfrak{E}(-\kappa)$  y  $\mathcal{E}_{fg}(\kappa) = \mathcal{E}(\kappa)$ .

La ecuación de Parseval para el caso multidimensional se puede expresar como

$$\langle \mathbf{f} \otimes \bar{\mathbf{g}} \rangle = \int_{\mathcal{V}_{\infty}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \otimes \overline{\mathbf{g}(\mathbf{x})} d\mathcal{V}_x = \int_{\mathcal{V}_{\infty}} \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) \otimes \overline{\hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\kappa})} d\mathcal{V}_{\kappa} \quad (14)$$

donde la operación entre las funciones es un producto tensorial, que puede luego tener una o varias contracciones, si los espacios involucrados son de vectores o tensores. Las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  pueden ser funciones con valores en  $\mathbb{C}^m$  y  $\mathbb{C}^{m'}$ , respectivamente, pero en todo caso  $\mathbf{x}$  y  $\boldsymbol{\kappa}$  deben ambas estar definidas en  $\mathbb{R}^n$ .

Un equivalente de las expresiones (13) para el caso multidimensional es

$$\langle \mathbf{f} \otimes \mathbf{g} \rangle = \int_{\mathcal{V}_{\infty}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}(\mathbf{x}) d\mathcal{V}_x = \int_{\mathcal{V}_{\infty}} \mathcal{E}_{fg}(\boldsymbol{\kappa}) d\mathcal{V}_{\kappa} \quad \mathcal{E}_{fg}(\boldsymbol{\kappa}) = \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) \otimes \hat{\mathbf{g}}(-\boldsymbol{\kappa}) \quad (15)$$

donde  $\mathcal{E}_{fg}(\boldsymbol{\kappa})$  es un tensor de segundo orden que representa la densidad espectral por unidad de volumen en el espacio de  $\boldsymbol{\kappa}$ . Cuando en (15)  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{m'}$ , entonces se puede hacer la siguiente substitución  $\hat{\mathbf{g}}(-\boldsymbol{\kappa}) = \overline{\hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\kappa})}$ .

### 4.2.3. Producto de Convolución

El producto de convolución  $f * g(x)$  de dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  se define como

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \quad (16)$$

Este producto tiene muchas de las propiedades del producto ordinario:

- Es bilinear con respecto a  $f$  y  $g$

$$(a f_1 + b f_2) * g = a f_1 * g + b f_2 * g \quad f * (a g_1 + b g_2) = a f * g_1 + b f * g_2 \quad (17.a)$$

- Es conmutativo

$$f * g = g * f \quad (17.b)$$

- Es asociativo

$$f * (g * h) = (f * g) * h \quad (17.c)$$

La transformada de Fourier  $\mathfrak{F}$  también satisface que es un isomorfismo con respecto al producto de convolución

$$\mathfrak{F}[f * g](\kappa) = \mathfrak{F}[f](\kappa) \mathfrak{F}[g](\kappa) \quad \widehat{f * g}(\kappa) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\kappa) \hat{g}(\kappa) \quad (18)$$

cuando las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones absolutamente integrables y cuadrado integrables (en el sentido de (8) con  $p = 1$  y  $p = 2$ , respectivamente).

La definición y propiedades del producto de convolución se pueden extrapolar para espacios euclídeos  $\mathbb{R}^n$  en donde estén definidas funciones inmersas en  $\mathbb{C}^m$  (con dimensiones iguales o menores a  $m$ ) en la forma

$$\mathbf{f} * \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}_\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \otimes \mathbf{g}(\mathbf{y}) d\mathcal{V}_y \quad \widehat{\mathbf{f} * \mathbf{g}}(\boldsymbol{\kappa}) = (\sqrt{2\pi})^n \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) \otimes \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (19)$$

donde el producto dentro de la integral de convolución entre las funciones y afuera entre las transformadas son productos tensoriales los cuales se pueden contraer de cualquier forma.

### 4.2.4. Correlación

La correlación  $\Gamma[f, g](x)$  de dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  se define como un funcional de la forma

$$\Gamma[f, g](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y-x) f(y) dy = \Gamma[g, f](-x) \quad (20)$$

y se tiene que la transformada de Fourier de la correlación satisface que

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[\Gamma[f, g]](\kappa) &= \mathfrak{F}[f](\kappa) \mathfrak{F}[g](-\kappa) = \mathfrak{E}_{fg}(\kappa) & \widehat{\Gamma[f, g]}(\kappa) &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\kappa) \hat{g}(-\kappa) \\ \mathfrak{F}[\Gamma[f, g]](\kappa) + \mathfrak{F}[\Gamma[g, f]](\kappa) &= 2 \mathfrak{E}_{fg}^s = 2\pi \mathcal{E}_{fg} & \widehat{\Gamma[f, g]}(\kappa) + \widehat{\Gamma[g, f]}(\kappa) &= \sqrt{2\pi} \mathcal{E}_{fg} \end{aligned} \quad (21)$$

donde, por la propiedad (2), se tiene que  $\mathfrak{F}[\Gamma[f, g]](\kappa) = \mathfrak{F}[\Gamma[g, f]](-\kappa)$  y  $\widehat{\Gamma[f, g]}(\kappa) = \widehat{\Gamma[g, f]}(-\kappa)$ . La expresión (21) puede interpretarse como la composición de dos funcionales  $\mathfrak{F} \circ \Gamma[f, g]$ . Dicha composición evidentemente no es conmutativa, ni distributiva a las funciones. En el caso particular de que la función  $g(x)$  sea simétrica, la correlación y el producto de convolución coinciden.

Cuando (21) se particulariza para el caso de funciones reales, se obtiene la *fórmula de Wiener-Khinchin*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[\Gamma[f, g]](\kappa) &= \mathfrak{F}[f](\kappa) \overline{\mathfrak{F}[g](\kappa)} = \mathfrak{E}_{fg}(\kappa) & \widehat{\Gamma[f, g]}(\kappa) &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\kappa) \overline{\hat{g}(\kappa)} \\ \mathfrak{F}[\Gamma[f, g]](\kappa) + \mathfrak{F}[\Gamma[g, f]](\kappa) &= 2 \mathfrak{E}_{fg}^s = 2\pi \mathcal{E}_{fg} & \widehat{\Gamma[f, g]}(\kappa) + \widehat{\Gamma[g, f]}(\kappa) &= \sqrt{2\pi} \mathcal{E}_{fg} \end{aligned} \quad (22)$$

Cuando la autocorrelación se normaliza dividiéndola por  $\Gamma[f, g](0) = \langle fg \rangle$ , siendo su valor máximo la unidad, entonces el área obtenida con la integral del espectro normalizado  $\mathcal{E}_{fg}(\kappa)/\langle fg \rangle$  vs.  $\kappa$  también queda normalizada a la unidad como lo sugiere la expresión de la pseudo-potencia mixta total (13.a). Hacer satisfacer esta igualdad, multiplicando por un factor la integral de la densidad del espectro de la pseudo-potencia, es también una forma de normalizar la densidad del espectro, cuando se trabaja con otras transformaciones de Fourier de distintos factores y dominios o cuando se trabaja en espacios multidimensionales y se hace dificultoso elegir una normalización en particular. En este último caso, la igualdad (13.a) se hace satisfacer para cada uno de los elementos del tensor correspondiente, el cual está compuesto del producto de dos funciones no necesariamente iguales. Obviamente, esto no normalizará todo el tensor de manera uniforme a la unidad como la normalización sugerida al principio de este párrafo, pero es la práctica corriente.

Para el caso especial  $f = g$  (funciones reales) la fórmula de Wien-Khinchin se reduce a

$$\mathfrak{F}[\Gamma[f, f]](\kappa) = |\mathfrak{F}[f](\kappa)|^2 = \mathfrak{E}(\kappa) = \pi \mathcal{E}(\kappa) \quad \Gamma[\widehat{f}, \widehat{f}](\kappa) = \sqrt{2\pi} |\hat{f}(\kappa)|^2 = \sqrt{2\pi} \mathcal{E}(\kappa)/2 \quad (23)$$

en donde  $\Gamma[f, f](x) = \Gamma[f, f](-x)$  (simétrica) se acostumbra a denominar la *autocorrelación*, por ser las dos funciones involucradas iguales. Cuando la autocorrelación se normaliza dividiéndola entre  $\Gamma[f, f](0) = \langle f^2 \rangle$ , siendo su valor máximo la unidad, entonces el área obtenida con la integral del espectro normalizado  $\mathcal{E}(\kappa)/\langle f^2 \rangle$  vs.  $\kappa$  también queda normalizada a la unidad (esto es cierto sólo para el caso  $f$  real donde se satisface  $\langle |f|^2 \rangle = \langle f^2 \rangle$  y la normalización usada para la correlación es equivalente a la normalización sugerida por la expresión (11)).

La definición de la correlación y su transformada de Fourier se pueden extender para funciones complejas inmersas en  $\mathbb{C}^m$  definidas sobre espacios euclídeos  $\mathbb{R}^n$  en la forma

$$\Gamma[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}_\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \otimes \mathbf{g}(\mathbf{y}) d\mathcal{V}_y = \int_{\mathcal{V}_\infty} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{g}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathcal{V}_y = \Gamma[\mathbf{g}, \mathbf{f}]^t(-\mathbf{x}) \quad (24.a)$$

$$\Gamma[\widehat{\mathbf{f}}, \widehat{\mathbf{g}}](\boldsymbol{\kappa}) = \Gamma[\widehat{\mathbf{g}}, \widehat{\mathbf{f}}]^t(-\boldsymbol{\kappa}) = (\sqrt{2\pi})^n \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) \otimes \hat{\mathbf{g}}(-\boldsymbol{\kappa}) = (\sqrt{2\pi})^n \mathcal{E}_{fg}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (24.b)$$

donde el producto dentro de las integrales de correlación, entre las funciones y abajo entre las transformadas, de nuevo son productos tensoriales que se pueden contraer de cualquier manera. La transposición al final de (24.a) es necesaria, puesto que el producto tensorial no es conmutativo.

La forma general de la fórmula de Wiener-Khinchin para funciones  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{G}$  reales es

$$\Gamma[\widehat{\mathbf{f}}, \widehat{\mathbf{g}}](\boldsymbol{\kappa}) = (\sqrt{2\pi})^n \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) \otimes \overline{\hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\kappa})} = (\sqrt{2\pi})^n \mathcal{E}_{fg}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (25)$$

Queda entendido siempre que  $\mathbf{x}$  y  $\boldsymbol{\kappa}$  son vectores en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{G}$  son funciones inmersas en  $\mathbb{C}^m$ . Cuando se está evaluando la integral de la pseudo-potencia mixta en este caso, se observa que  $\mathcal{E}_{fg}(\boldsymbol{\kappa}) = \overline{\mathcal{E}_{fg}(-\boldsymbol{\kappa})}$ , por consiguiente, lo que en un semi-espacio se le suma en la parte imaginaria, en el otro semi-espacio se le resta, cancelando por completo lo que se refiere a la parte imaginaria de la pseudo-potencia total mixta. Por ello es costumbre realizar los cálculos en un sólo semi-espacio y trabajar sólo con la parte real de la densidad espectral  $\mathcal{E}_{fg}(\boldsymbol{\kappa})$ . La expresión (25) multidimensional para la autocorrelación (o sea con  $\mathbf{G} = \mathbf{f}$ ) resulta en

$$\Gamma[\widehat{\mathbf{f}}, \widehat{\mathbf{f}}](\boldsymbol{\kappa}) = (\sqrt{2\pi})^n \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) \otimes \overline{\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa})} = (\sqrt{2\pi})^n \mathcal{E} \quad (26)$$

donde  $\mathcal{E}$  es un tensor de segundo orden con componentes reales en la diagonal principal denominados *espectros principales* y componentes mixtos complejos cuyas partes reales (en valor absoluto) son denominadas *co-espectros* (los componentes mixtos son simétricos en el sentido de los dos primeros miembros de (24.b), de forma que para  $\mathbf{G} = \mathbf{f}$  se tenga en componentes que  $\mathcal{E}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = \mathcal{E}_{ji}(-\boldsymbol{\kappa})$ , o sea, simetría respecto al origen de componentes transpuestos. Precaución: esto último no ocurre cuando  $\mathbf{G} \neq \mathbf{f}$ ).

#### 4.2.5. Escalas

La normalización sugerida para la autocorrelación también permite encontrar una *escala integral*  $\mathcal{L}$  definida como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\langle f^2 \rangle} \int_0^\infty \Gamma[f, f](x) dx \quad \langle f^2 \rangle = \Gamma[f, f](0) \quad (27)$$

la cual puede asumirse finita cuando  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma[f, f](x) = 0$ . Esta escala se interpreta como el área de la autocorrelación normalizada en el dominio semi-infinito (equivalente al área de un rectángulo de lados  $1 \times \mathcal{L}$ ).

Cuando la autocorrelación decrece monótonamente cerca del origen, también se puede encontrar una *micro-escala*  $\lambda$  definida mediante la curvatura de la autocorrelación normalizada en el origen en la forma

$$-2 \langle f^2 \rangle / \lambda^2 = [ (d^2/dx^2) \Gamma[f, f](x) ]_{x=0} \quad (28)$$

donde el valor de  $\lambda$  puede interpretarse como la intersección con el eje de las abscisas de la parábola tangente y con igual curvatura a la autocorrelación normalizada en el origen. Esto es equivalente a decir que  $\lambda^2/2$  es el valor absoluto del radio de curvatura, tanto de la mencionada parábola como de la autocorrelación, en el origen.

#### 4.2.6. Transformada del Coseno

Cuando la función a transformar es par se acostumbra a expresar su transformada de Fourier, la cual es también par, de la siguiente manera denominada *transformada del coseno*

$$\mathfrak{F}_c[f](\kappa) = \frac{1}{2} \mathfrak{F}[f](\kappa) = \sqrt{\pi/2} \hat{f}_c(\kappa) = \int_0^\infty f(x) \cos \kappa x dx \quad (29)$$

y su inversa como

$$f(x) = \frac{1}{\pi/2} \int_0^\infty \mathfrak{F}_c[f](\kappa) \cos x\kappa d\kappa = \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\kappa) \cos x\kappa d\kappa \quad (30)$$

Esta transformación satisface que  $\mathfrak{F}_c[\mathfrak{F}_c[f]](x) = (\pi/2) f(x)$  y que  $\hat{\hat{f}}_c(x) = f(x)$ . La transformada del coseno de funciones pares transforman funciones reales en funciones reales y funciones imaginarias en funciones imaginarias, de manera que  $\hat{f}(\kappa) = \hat{f}_c(\kappa)$ .

Para funciones definidas en un espacio  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , la transformada del coseno y su inversa se calculan como

$$\hat{\mathbf{f}}_c(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(\sqrt{\pi/2})^n} \int_{\mathcal{V}_+^n} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cos \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} d\mathcal{V}_x \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{\pi/2})^n} \int_{\mathcal{V}_+^n} \hat{\mathbf{f}}_c(\boldsymbol{\kappa}) \cos \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\kappa} d\mathcal{V}_\kappa \quad (31)$$

donde el volumen  $\mathcal{V}_+^n = \{\mathbf{x} \mid 0 \leq x^j < \infty \quad \forall j \leq n\}$  es el *espacio semi-infinito*  $n$ -dimensional.

#### 4.2.7. Transformada del Seno

Cuando la función a transformar es impar se acostumbra a expresar su transformada de Fourier, la cual es también impar, de la siguiente manera denominada *transformada del seno*

$$\mathfrak{F}_s[f](\kappa) = \frac{1}{2i} \mathfrak{F}[f](\kappa) = \sqrt{\pi/2} \hat{f}_s(\kappa) = \int_0^\infty f(x) \sen \kappa x dx \quad (32)$$

y su inversa como

$$f(x) = \frac{1}{\pi/2} \int_0^\infty \mathfrak{F}_s[f](\kappa) \sen x\kappa d\kappa = \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\kappa) \sen x\kappa d\kappa \quad (33)$$

Esta transformación satisface que  $\mathfrak{F}_s[\mathfrak{F}_s[f]](x) = (\pi/2) f(x)$  y que  $\hat{\hat{f}}_s(x) = f(x)$ . La transformada del seno de funciones impares transforman funciones reales en funciones imaginarias y funciones imaginarias en funciones reales, de manera que  $\hat{f}(\kappa) = i \hat{f}_s(\kappa)$ .

Para funciones definidas en un espacio  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , la transformada del seno y su inversa se calculan como

$$\hat{\mathbf{f}}_s(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(\sqrt{\pi/2})^n} \int_{\mathcal{V}_\infty^+} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \sin \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} d\mathcal{V}_x \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{\pi/2})^n} \int_{\mathcal{V}_\infty^+} \hat{\mathbf{f}}_s(\boldsymbol{\kappa}) \sin \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\kappa} d\mathcal{V}_\kappa \quad (34)$$

Las transformadas del coseno y del seno de funciones pares e impares, respectivamente, también satisfacen la ecuación de parseval y las propiedades de los productos de convolución y de correlación, salvo por la constante  $\sqrt{2\pi}$  que debe cambiarse a  $\sqrt{\pi/2}$  (lo mismo aplica para los cuadrados de dichas constantes).

#### 4.2.8. Filtros

El proceso de *filtrado* de una función  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se realiza a través de la convolución (19) de dicha función con una función escalar denominada *filtro* y denotada  $\mathcal{G}'_\Delta(\mathbf{x})$  con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\Delta$  es el ancho del filtro. Un ejemplo de un filtro puede ser la función de densidad gaussiana  $\wp_\sigma(\mathbf{x})$  definida por 5.1.(19), donde el vector ancho del filtro  $\Delta$  se relaciona con el vector de la desviación típica  $\sigma$ . La siguiente tabla muestra otros ejemplos de filtros, pero unidimensionales:

**Tabla 2.** Funciones de filtros y de transferencia.

NOMBRE	FUNCIONES	
	FILTRO	TRANSFERENCIA
General	$\mathcal{G}'_\Delta(\mathbf{x})$	$\hat{\mathcal{G}}'_\Delta(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathcal{V}_\infty} \mathcal{G}'_\Delta(\mathbf{x}) e^{i \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} d\mathcal{V}_x$
Unidimensional	$\mathcal{G}'_\Delta(x)$	$\mathfrak{F}[\mathcal{G}'_\Delta](\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}'_\Delta(x) e^{i \kappa x} dx$
Caja	$\mathcal{G}'_\Delta(x) = \frac{1}{\Delta} \mathcal{H}(\Delta/2 -  x )$	$\mathfrak{F}[\mathcal{G}'_\Delta](\kappa) = \frac{\sin(\kappa \Delta/2)}{\kappa \Delta/2}$
Gaussiano	$\mathcal{G}'_\Delta(x) = \left(\frac{6}{\pi \Delta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{6x^2}{\Delta^2}\right)$	$\mathfrak{F}[\mathcal{G}'_\Delta](\kappa) = \exp\left(-\frac{\kappa^2 \Delta^2}{24}\right)$
Espectral	$\mathcal{G}'_\Delta(x) = \frac{\sin(\pi x/\Delta)}{\pi x}$	$\mathfrak{F}[\mathcal{G}'_\Delta](\kappa) = \mathcal{H}(\kappa_c -  \kappa ) \quad \kappa_c = \pi/\Delta$
Cauchy	$\mathcal{G}'_\Delta(x) = \frac{a}{\pi \Delta [(x/\Delta)^2 + a^2]} \quad a = \frac{\pi}{24}$	$\mathfrak{F}[\mathcal{G}'_\Delta](\kappa) = \exp(-a \Delta  \kappa )$

Un valor sugerido para el filtro gaussiano es tomar el ancho total efectivo  $\Delta^j$  del filtro como  $6\sigma^j$  en cada dirección  $j$ . Este valor se justifica si observamos que en el caso unidimensional  $\wp(\pm 3\sigma) = 0.004432$  y  $\mathcal{P}(3\sigma) - \mathcal{P}(-3\sigma) = 0.9973002$ , con  $\mathcal{P} = \int \wp(x) dx$ . Otros prefieren trabajar con un 1% de error y utilizan un ancho total efectivo del filtro de aproximadamente  $5.4\sigma$ , para el cual  $\wp(\pm 2.7\sigma) = 0.01042$  y  $\mathcal{P}(2.7\sigma) - \mathcal{P}(-2.7\sigma) = 0.993066$ .

Otro criterio para escoger el ancho  $\Delta$  del filtro gaussiano en función del parámetro  $\sigma$  (caso unidimensional o en cada dirección multidimensional), consiste en hacer coincidir algunos de los momentos  $\int_{-\infty}^{\infty} x^m \mathcal{G}_{\Delta}(x) dx$ , de orden  $m$  par (los momentos impares siempre son nulos), del filtro gaussiano de parámetro  $\sigma$ , con el mismo momento del filtro de caja de ancho  $\Delta$ , ambos centrados en el origen. El filtrado de caja (centrado en el origen) de ancho total efectivo  $\Delta$  de una función es simplemente el promedio de dicha función en el intervalo  $-\Delta/2 \leq x \leq \Delta/2$ . En el caso  $m = 2$  entonces  $\Delta = 2\sqrt{3}\sigma$ , o equivalentemente,  $\sigma^2 = \Delta^2/12$  (se puede observar que el miembro de izquierda de esta expresión es la varianza para una densidad de probabilidades gaussiana y el miembro de la derecha es el momento de inercia de área del rectángulo de base  $\Delta$  y altura 1, con respecto al eje  $y-y$  en el origen, dividido luego entre  $\Delta$ ). En todo caso,  $\sigma$  siempre es la distancia desde el origen hasta el punto de inflexión de la curva  $y = \wp_{\sigma}(x)$  de la campana de Gauss en el plano cartesiano, donde

$$\wp_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (35)$$

Una función  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  tiene su valor filtrado  $\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  dado por

$$\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f} * \mathcal{G}_{\Delta}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}_{\infty}(\mathbf{x})} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \mathcal{G}_{\Delta}(\mathbf{x} - \mathbf{r}) d\mathcal{V}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}_{\infty}(\mathbf{x})} \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \mathcal{G}_{\Delta}(\mathbf{r}) d\mathcal{V}(\mathbf{r}) \quad (36)$$

donde  $\mathcal{V}_{\infty}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}(\mathbf{x}, \infty)$ , o sea, la bola abierta con centro en  $\mathbf{x}$  y radio infinito, y fuera de sus dominios las funciones  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\mathcal{G}_{\Delta}(\mathbf{x})$  se suponen nulas. En efecto, se tiene que  $\mathbb{B}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \infty) = \mathbb{B}(\mathbf{x}, \infty)$ ,  $\forall \mathbf{y}$ .

Ahora se puede aplicar la propiedad (19.b) de la convolución para obtener la siguiente identidad

$$\widehat{\widetilde{\mathbf{f}}}(\boldsymbol{\kappa}) = \widehat{\mathbf{f} * \mathcal{G}_{\Delta}}(\boldsymbol{\kappa}) = (\sqrt{2\pi})^n \widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) \widehat{\mathcal{G}_{\Delta}}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (37)$$

Como las funciones son todas reales, es costumbre observar solamente los valores positivos de las componentes de  $\boldsymbol{\kappa}$ . El rango de valores de  $\boldsymbol{\kappa}$  donde la transformada de Fourier del filtro,  $\widehat{\mathcal{G}_{\Delta}}(\boldsymbol{\kappa})$ , denominada *función de transferencia*, obtiene valores significativos, se denomina *ancho de banda* del filtro. La tabla anterior también muestra las funciones de transferencias de los diferentes filtros (caso unidimensional), pero usando la transformada de Fourier  $\mathfrak{F}[\mathcal{G}_{\Delta}](\kappa)$ , como tradicionalmente se hace para no arrastrar el factor  $\sqrt{2\pi}$ .

El equivalente de (37) para el caso unidimensional se obtiene a partir de la propiedad del producto de convolución (18.a), resultando

$$\mathfrak{F}[\mathbf{f} * \mathcal{G}_{\Delta}](\kappa) = \mathfrak{F}[\mathbf{f}](\kappa) \mathfrak{F}[\mathcal{G}_{\Delta}](\kappa) \quad (38)$$

donde  $\mathbf{f}(x)$  puede ser una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^m$ .

Se habla de un filtro *pasa-bajo* cuando el ancho de banda está ubicado en los valores bajos de  $\boldsymbol{\kappa}$ . Por el contrario, se habla de un filtro *pasa-alto* cuando el ancho de banda está ubicado en los valores altos de  $\boldsymbol{\kappa}$ . En varias dimensiones se pueden tener combinaciones pasa-bajo / pasa-altos en un mismo filtro para las distintas componentes de  $\boldsymbol{\kappa}$ . El ancho de banda de un filtro pasa-bajo es aproximadamente el inverso del ancho del filtro (En el caso especial del filtro gaussiano Ancho de Banda  $\times$  Ancho del Filtro = 18).

### 4.3. TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER

La *transformada rápida de Fourier* es la forma numérica de calcular la transformada de Fourier de funciones dadas de forma discreta. Supóngase que se tiene un número finito  $N$  de muestras consecutivas de una función discreta ordenados de tal forma que

$$x_j = j \Delta x \quad \Delta x = L/N \quad f_j = f(x_j) \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

donde  $L$  es el tamaño del dominio y  $\Delta x$  es el intervalo uniforme que separa una muestra de la siguiente. Supongamos por conveniencia que  $N$  es siempre un número par. Cuando  $x$  representa el tiempo, entonces el inverso de  $\Delta x$  se denomina *tasa de muestreo*. Con estas muestras de la función  $f$  se puede obtener la transformada de Fourier de forma numérica haciendo

$$\mathfrak{F}[f](\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\kappa x} dx \approx \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{i\kappa x_j} \Delta x = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{i\kappa x_j} \quad (2)$$

Como se parte de  $N$  muestras, es lógico pensar que esta transformada de Fourier se puede evaluar en  $N$  valores consecutivos de  $\kappa$ , distribuidos de manera también uniforme como

$$\kappa_n = n \Delta \kappa = \frac{2\pi n}{N \Delta x} = \frac{2\pi n}{L} = \Delta \kappa = \frac{2\pi}{N \Delta x} = \frac{2\pi}{L} \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} \quad (3)$$

donde  $\Delta \kappa$  es el tamaño del intervalo en el dominio de  $\kappa$ . Dentro de la física, si  $x_j$  mide instantes de tiempo, entonces  $f_n = n/L$  mide diferentes frecuencias. Por otro lado, si  $x_j$  mide posiciones en el espacio, entonces  $\lambda_n = L/n$  mide diferentes longitudes de onda.

Los valores extremos de  $\kappa$  son

$$\pm \kappa_c = \pm \frac{\pi}{\Delta x} \quad n = \pm \frac{N}{2} \quad (4)$$

y su valor absoluto  $\kappa_c$  se denomina *número de onda crítico de Nyquist*, ya que coincide también con el valor obtenido en el caso extremo de tener solamente dos muestras ( $N = 2$ ,  $n = \pm 1$ ). Estas serían, por ejemplo, las muestras de la cresta y el valle en una señal sinusoidal. La forma como se han distribuido los valores de  $\kappa_n$  en (3) es el apropiado, ya que ocurre que una mayor cantidad de información fuera del rango  $-\kappa_c \leq \kappa \leq \kappa_c$  produce que la densidad espectral de potencia que cae afuera del mencionado rango introduzca de forma espúrea (falsa) información dentro de dicho rango. Este fenómeno es lo que se denomina en inglés *aliasing*. Cualquier componente fuera del rango establecido en  $\kappa$  es falsamente trasladado (*aliased*) dentro de él. Este efecto puede ser eliminado solamente filtrando la función previamente con un filtro pasa-bajo, cuyo ancho de banda coincida con  $\pi/\Delta x$  en el dominio de  $\kappa$  ó con  $(2\Delta x)^{-1}$  en el dominio de frecuencias  $f$ , resultando una función más suavizada. El ancho del filtro sería aproximadamente el inverso del ancho de banda, dependiendo del filtro utilizado (Para el caso especial de un filtro gaussiano Ancho de Banda  $\times$  Ancho de Filtro = 18).

Las transformadas de Fourier evaluadas en los puntos mencionados de acuerdo con (2) son

$$\mathfrak{F}[f](\kappa_n) \approx \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{i\kappa_n x_j} = \Delta x F_n = \mathfrak{F}_n \equiv \sqrt{2\pi} \hat{f}_n \quad (5)$$

donde cada uno de los valores

$$F_n = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{i\kappa_n x_j} \quad (6)$$

es lo que se denomina la *transformada rápida de Fourier* en los puntos  $\kappa_n$ . La fórmula de la transformada inversa para los datos discretos que exactamente recupera los valores de  $f_j$  a partir de los valores de  $F_n$  es

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} F_n e^{-i x_j \kappa_n} \quad (7)$$

Esta expresión se verifica rápidamente si se introduce (6) en (7) (ó en (7')) como se verá más adelante).



Hasta ahora se ha tomado que el índice  $n$  varía desde  $-N/2$  hasta  $N/2$ . Sin embargo, se puede ver fácilmente que (5) es periódico en  $n$ , con período  $N$ . Por lo tanto,  $F_{-n} = F_{N-n}$  con  $n = 1, 2, \dots, N/2, \dots$ . Con esta conversión en mente se puede dejar que  $n$  en  $F_n$  varíe de 0 hasta  $N-1$  (un período completo). Entonces, se hace que tanto  $j$  como  $n$  varíen exactamente sobre el mismo rango. Cuando esta convención se sigue, entonces se tiene que los valores positivos de  $\kappa$  en el rango  $0 \leq \kappa < \kappa_c$  corresponden con los valores de  $n$  en el rango  $n = 0, \dots, N/2-1$ , mientras que los valores negativos de  $\kappa$  en el rango  $-\kappa_c < \kappa < 0$  corresponden con los valores de  $n$  en el rango  $n = N/2+1, \dots, N-1$ . Particularmente, el valor de  $n = N/2$  corresponde a una combinación lineal (no un promedio) de las transformadas en los valores para  $\kappa = \pm\kappa_c$ , debido al aliasing ocurrido en el valor crítico de Nyquist. En la tabla de abajo se puede observar la correspondencia antes mencionada. Desde el índice  $n = N$  (que corresponde de nuevo a  $\kappa_N = 0$ , es decir a  $n = 0$ ), los valores de los números de onda y los valores de las transformadas discretas se vuelven a repetir de manera periódica. La periodicidad también se existe hacia abajo con los índices negativos ( $n < 0$ ) desde  $n = -1$ , que corresponde al primer valor negativo de  $\kappa_n$  ( $n = N-1$ ) con menor valor absoluto.

De acuerdo a la convención antes explicada la expresión (7) se puede cambiar a

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{-i x_j \kappa_n} \quad (7')$$

Teniendo en cuenta (3) y (5), la expresión anterior se puede colocar como

$$f_j = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{N-1} \mathfrak{F}_n e^{-i x_j \kappa_n} = \frac{\Delta \kappa}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \mathfrak{F}_n e^{-i x_j \kappa_n} \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}[f](\kappa) e^{-i x_j \kappa} d\kappa \quad (8)$$

lo cual comprueba que  $\mathfrak{F}_n = \Delta x F_n$  es una transformada de Fourier evaluada discretamente, como se sugirió en (5).

Tabla. Correspondencia entre el número de onda  $\kappa_n$  y el índice  $n$ .

$n$	0	1 $\dots$ $N/2-1$	$N/2$	$N/2+1 \dots N-1$
$\kappa_n$	0	+	$\pm\kappa_c$	-

Es importante hacer notar que (6) y (7') se diferencian solamente en: (i) el cambio de signo en el exponencial y (ii) la división del resultado por  $N$ . Esto significa que las rutinas para el cálculo de estas transformadas y su inversa pueden ser, salvo pequeñas modificaciones, la misma.

La forma discreta de la ecuación de Parseval es

$$\sum_{j=0}^{N-1} |f_j|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |F_n|^2 \quad (9)$$

lo que nos da que la expresión discreta para la potencia espectral total es

$$\Delta x \sum_{j=0}^{N-1} |f_j|^2 = \frac{\Delta x}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |F_n|^2 = \frac{\Delta \kappa}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} |\mathfrak{F}_n|^2 = \Delta \kappa \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{f}_n|^2 \quad (10)$$

expresada en el último miembro en función de la transformada discreta de Fourier  $\hat{f}_n = \mathfrak{F}_n/\sqrt{2\pi} = \Delta x F_n/\sqrt{2\pi}$ , siendo la densidad espectral de potencia para el caso discreto expresada como  $\mathcal{E}_n = |\hat{f}_n|^2$ . El espectro en este caso es la gráfica discreta de puntos  $\mathcal{E}_n$  vs.  $\kappa_n$  (transponiendo los puntos para  $n > N/2$

como indica la tabla). Si no se desea distinguir la densidad espectral para valores positivos y negativos de  $\kappa$ , como es de costumbre, hay que redefinirla como  $\mathcal{E}_n = |\hat{f}_n|^2 + |\hat{f}_{N-n}|^2$  (teniendo en cuenta la periodicidad de la función discreta  $\hat{f}_n$  a partir de  $n = N$  y el alising para  $\pm\kappa_c$  en  $n = \pm N/2$ ) y la potencia total sería entonces calculada como  $2\mathcal{E}_0 + \sum_{n=1}^{N/2-1} \mathcal{E}_n + \mathcal{E}_{N/2}$ . Dicha densidad espectral de potencia para el caso discreto se expresa, en función de las varias transformadas de Fourier definidas, como

$$\mathcal{E}_n = |\hat{f}_n|^2 + |\hat{f}_{N-n}|^2 = \frac{1}{2\pi} (|\mathfrak{F}_n|^2 + |\mathfrak{F}_{N-n}|^2) = \frac{\Delta x^2}{2\pi} (|F_n|^2 + |F_{N-n}|^2) \quad (11)$$

En la expresión de la potencia total, el primer término aparece aparte, para evitar el uso de  $\hat{f}_N$ , ya que el índice sale del rango inicialmente considerado (ver tabla). El último término no se ha sumado dos veces porque ya contiene en sí la combinación lineal de los valores para  $\kappa = \pm\kappa_c$ , como se explicó antes. Todas las observaciones hechas anteriormente para el caso continuo, en lo que se refiere a la gráfica del espectro, siguen siendo válidamente adaptables también para el caso discreto.

#### 4.4. TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace se define en función de la transformada de Fourier en la forma

$$\mathfrak{L}[f](s) \equiv \mathfrak{F}[f](is) = \int_0^\infty f(t) e^{-sx} dt \quad (1)$$

siendo la función  $f(t)$  nula para valores de  $t$  negativos.

El producto de convolución  $f * g(x)$  se puede definir como

$$f * g(x) = \int_0^\infty f(x-y) g(y) dy \quad (2)$$

Este producto tiene muchas de las propiedades del producto ordinario:

- Es bilinear con respecto a  $f$  y  $g$

$$(a f_1 + b f_2) * g = a f_1 * g + b f_2 * g \quad f * (a g_1 + b g_2) = a f * g_1 + b f * g_2 \quad (3.a)$$

- Es conmutativo

$$f * g = g * f \quad (3.b)$$

- Es asociativo

$$f * (g * h) = (f * g) * h \quad (3.c)$$

La transformada de Laplace también satisface que es un isomorfismo con respecto al producto de convolución

$$\mathfrak{L}[f * g] = \mathfrak{L}[f] * \mathfrak{L}[g] \quad (4)$$

La transformada de Laplace posee las mismas propiedades que la transformada de Fourier si las funciones involucradas poseen valor nulo para  $t$  negativos y se escoge  $\kappa = is$ .

La transformada de Fourier es más apropiada para usarla en funciones espaciales en espacios infinitos o semi-infinitos. En cambio, la transformada de Laplace es más apropiada para usarla en funciones temporales definidas a partir de un valor inicial.

## 5. PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

### 5.1. SISTEMAS CONTINUOS

#### 5.1.1. Variable Aleatoria

Una *variable aleatoria continua*  $\mathbf{X}$  se define como la imagen mediante un mapa  $\mathbf{X}$  continuo y no necesariamente invertible

$$\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

donde  $\Omega$  es una variedad diferenciable que se denomina *espacio de eventos*. Si la variedad  $\Omega$  es particularmente idéntica a  $\mathbb{R}^m$  entonces al mapa  $\mathbf{X}$  se le denomina *función aleatoria continua*. Al espacio  $\mathbb{R}^n$  en (1) se le denomina *espacio de muestras*. Los desplazamientos  $\mathbf{X}' = \mathbf{X}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ , la suma  $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$  de dos variables aleatorias compatibles y la multiplicación  $\mathbf{X}' = c\mathbf{X}$  por un escalar  $c$ , son también variables aleatorias continuas.

Un ejemplo de una variable aleatoria continua puede ser el vector velocidad  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  ( $n = 3$ ) con  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x})$  de un flujo turbulento en un determinado intervalo de tiempo  $[t_a, t_b] \ni t$  y en una región del espacio tridimensional  $\mathcal{V} \ni \mathbf{x}$  (o volumen espacial), obtenido de la ecuación de Navier-Stokes a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}$ . En conjunto, para este ejemplo,  $\Omega = [t_a, t_b] \times \mathcal{V}$  es la región del espacio-tiempo (espacio tetradimensional con  $m = 4$ ) donde ocurren todos los eventos  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  (descripción euleriana). EL conjunto de todos los valores que puede tomar  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  sería el espacio de muestras para este ejemplo y para los que siguen. En este ejemplo, alternativamente también se puede representar  $\Omega = [t_a, t_b] \times \mathcal{V}_a$  como la región del espacio-tiempo donde ocurren todos los eventos  $\mathbf{v}[t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x})]$  (descripción lagrangeana) con  $\mathcal{V}_a$  como la región del espacio tridimensional (o volumen material) donde están ubicados los puntos materiales  $\mathbf{x}$  en el instante inicial  $t_a$ . Otro ejemplo, para el mismo flujo turbulento, puede ser  $\Omega = [t_a, t_b]$  (espacio unidimensional con  $m = 1$ ), como el intervalo de tiempo donde ocurren todos los eventos  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}_o)$  de velocidades en un punto  $\mathbf{x}_o$  de la región del espacio  $\mathcal{V}$ . Otro ejemplo, obtenido del mismo flujo, puede ser  $\Omega = \mathcal{V}$  (espacio tridimensional con  $m = 3$ ), como la región del espacio donde ocurren todos los eventos  $\mathbf{v}(t_b, \mathbf{x})$  de las velocidades en la región del espacio  $\mathcal{V}$  para el instante particular  $t = t_b$ . Otros ejemplos particulares pueden obtenerse si subdividimos el espacio  $\mathcal{V}$  (o  $\mathcal{V}_a$ ) en subregiones como superficies ( $m = 2$ ) o líneas ( $m = 1$ ). El ejemplo más complejo  $\Omega = [t_a, t_b] \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}_a$  ( $m = 7$ ) se obtiene si consideramos el flujo turbulento anterior como un sistema dinámico  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x})$  con  $\mathbf{x} = \mathbf{x}$  para el instante inicial  $t = t_a$ . Desplazamientos en el tiempo o en el espacio de este sistema dinámico (o subregiones del mismo), son igualmente ejemplos de variables aleatorias.

#### 5.1.2. Distribución y Densidad

La *función de distribución de probabilidades*  $\mathcal{P}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  se puede definir con base a la probabilidad que una variable aleatoria  $\mathbf{X}$  tiene de estar dentro de un cierto volumen  $\mathcal{V}_o \in \mathbb{R}^n$ . Dicha probabilidad se calcula como

$$\text{prob}(\mathbf{X} \in \mathcal{V}_o) = \int_{\mathcal{V}_o} \wp(\mathbf{x}) d\mathcal{V} = \int_{\Omega_o} d\Omega \quad \mathcal{V}_o = \mathbf{X}(\Omega_o) \quad \Omega_o \subset \Omega \quad (2)$$

donde  $\wp(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  es la *función de densidad de probabilidades* y  $d\Omega$  es una medida diferencial de la variedad  $\Omega$ . Esta función de densidad, definida como una función en el espacio, se construye dentro de un espacio euclídeo como

$$\wp_j(\mathbf{x}) = \wp_j(x^j) \quad \wp(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n \wp_j(\mathbf{x}) \quad \wp(\mathbf{x}) = \{\wp_1(\mathbf{x}), \wp_2(\mathbf{x}), \dots, \wp_n(\mathbf{x})\} \quad (3)$$

donde  $\wp(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es el *vector de densidad de probabilidades asociado*, cuyas componentes son todas a su vez funciones de densidad unidimensionales, y no necesariamente iguales entre sí. Estas funciones de densidad de probabilidades deben satisfacer siempre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \wp_j(x^j) dx^j = 1 \quad \int_{\mathcal{V}_\infty} \wp(\mathbf{x}) d\mathcal{V} = \int_{\Omega} d\Omega = 1 \quad \mathcal{V}_\infty = \mathbf{X}(\Omega) \quad (4)$$

La expresión del lado derecho es consecuencia de las del lado izquierdo. Adicionalmente, debe escogerse una *medida*  $d\Omega$  que garantice dicha igualdad. En otras palabras, si  $\Omega$  es particularmente un subconjunto abierto de un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , la medida apropiada sería  $d\Omega = d\mathcal{V}_\Omega/\mathcal{V}_\Omega$ , siendo  $\mathcal{V}_\Omega = \int_\Omega d\mathcal{V}_\Omega$  el volumen total que ocupa todo el dominio  $\Omega$  inmerso en dicho espacio. En estos términos, la relación (4.b) puede interpretarse como un cambio en la métrica entre los espacios  $\mathcal{V}_\infty$  y  $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{V}_\Omega$ , con la función de densidad de probabilidades siendo proporcional a la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico del primero con respecto al segundo. Las expresiones (4) lo que en definitiva quieren significar es que las funciones de densidad deben estar *normalizadas* por definición. El volumen  $\mathcal{V}_\infty \equiv \mathbb{R}^n$  debe interpretarse como todo el espacio, o sea, como el espacio infinito definido antes, y, formalmente hablando, es diferente al espacio  $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{V}_\Omega$ , donde puede estar inmerso  $\Omega$ , aunque topológicamente sean iguales.

Basados en estas definiciones previas, entonces la función de distribución de probabilidades se define como

$$\mathcal{P}_j(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x^j} \wp_j(x^j) dx^j \quad \mathcal{P}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x^1} \int_{-\infty}^{x^2} \cdots \int_{-\infty}^{x^n} \wp(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^1 dx^2 \dots dx^n = \prod_{j=1}^n \mathcal{P}_j(\mathbf{x}) \quad (5)$$

Esta definición queda bien justificada, sobre todo en la última igualdad, si observamos que las componentes del vector de densidad asociado están desacopladas. En este caso, la medida apropiada para el diferencial de  $\Omega$  es  $d\Omega(\mathcal{X}) = d\mathcal{P}_1 d\mathcal{P}_2 \dots d\mathcal{P}_n[\mathcal{X}(\mathcal{X})]$ , ya que es obvio que la integral sobre  $\Omega$  queda normalizada con dicha medida.

No obstante a lo definido anteriormente, bajo un cambio de la métrica en la forma  $\wp_j(\mathbf{x}) dx^j = \sqrt{\wp(\tilde{\mathbf{x}})} d\tilde{x}^j$ , el eventual desacoplamiento antes mencionado puede desaparecer y la función densidad de probabilidades  $\wp(\tilde{\mathbf{x}})$  puede tener un contexto más general. El proceso inverso, de encontrar una métrica donde las funciones de densidad estén desacopladas, partiendo de una que no lo está, es siempre factible, ya que todas las funciones de densidad en cualquier métrica son definidas positivamente de forma estricta.

Otra forma de ver la anterior definición, es que se puede decir que la función de densidad es el gradiente de la función de distribución. Esto es,

$$\wp(\mathbf{x}) = \nabla \mathcal{P}(\mathbf{x}) \quad \wp_j(x^j) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x^j} = \frac{d\mathcal{P}_j}{dx^j} \quad (6)$$

La expresión (5) también debe interpretarse como una distribución acumulativa de las probabilidades, o sea,

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathcal{P}(x^1, x^2, \dots, x^n) = \text{prob}(X^j < x^j, \quad 1 \leq j \leq n) \quad (7)$$

Sea el siguiente caso especial

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}_b) - \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i + \sum_{i < j=1}^n \mathcal{P}_{ij} - \sum_{i < j < k=1}^n \mathcal{P}_{ijk} + \cdots + (-1)^n \mathcal{P}(\mathbf{x}_a) = \int_{\mathcal{V}_{ab}} \wp(\mathbf{x}) d\mathcal{V} = \text{prob}(\mathbf{X} \in \mathcal{V}_{ab}) \quad (8)$$

con  $\mathcal{P}_{ijk\dots l} = \mathcal{P}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , donde  $x^i = x_a^i$ ,  $x^j = x_a^j$ ,  $x^k = x_a^k$ ,  $\dots$ ,  $x^l = x_a^l$ , mientras todos los otros  $x^r = x_b^r$ . La suma en el miembro de la izquierda de (8) se interpreta como la probabilidad de que la variable aleatoria  $\mathbf{X}$  se encuentre en el volumen

$$\mathcal{V}_{ab} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_a^j \leq x^j < x_b^j, \quad 1 \leq j \leq n\} \quad (9)$$

inmerso en  $\mathbb{R}^n$ . Este volumen es el cubo ó paralelepípedo  $n$ -dimensional cuyos vértices opuestos son los puntos  $\mathbf{x}_a$  y  $\mathbf{x}_b$  unidos por un vector diagonal  $\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a$ , y los lados son paralelos a los ejes de coordenadas correspondientes. La dirección de este vector es importante porque determina el sentido en que se va a realizar la integración (8) en las diferentes coordenadas. El valor de (8) puede dar negativo si las componentes del vector se opone con frecuencia impar a los sentidos positivos de las coordenadas.

### 5.1.3. Esperanza y Momentos

La *esperanza*  $\langle \mathbf{F} \rangle$  de la variable aleatoria  $\mathbf{F}$ , definida por un función  $\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{X})$  de la variable  $\mathbf{X}$  aleatoria original, se calcula como

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \int_{\mathcal{V}_\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \wp(\mathbf{x}) d\mathcal{V} = \int_{\Omega} \mathcal{F}[\mathcal{X}(\mathcal{X})] d\Omega \quad \mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

donde las funciones  $\mathbf{F}$  y  $\mathcal{F}$  tiene la misma estructura algebraica, sólo que se denotan de forma diferente para hacer énfasis de que se aplican sobre variables distintas. Particularmente, el momento de orden  $m$  de una variable aleatoria  $\mathbf{X}$  se define como

$$\langle \mathbf{X}^m \rangle = \int_{\mathcal{V}_\infty} \mathbf{x}^m \wp(\mathbf{x}) d\mathcal{V} = \int_{\Omega} [\mathcal{X}(\mathcal{X})]^m d\Omega \quad m \in \mathbb{N} \quad (11)$$

Cuando  $m = 1$  la expresión anterior se denomina la *media* o el *promedio*.

Una variable aleatoria  $\mathbf{X}$  se dice que está centrada si su media es nula, esto es  $\langle \mathbf{X} \rangle = \mathbf{0}$ . Cuando la variable aleatoria  $\mathcal{X}$  no está centrada se puede expresar la *variable aleatoria centrada* como  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \langle \mathbf{X} \rangle$ . Si una variable aleatoria  $\tilde{\mathbf{X}}$  está centrada, entonces el momento de segundo orden  $\mathbf{\Gamma} = \langle \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}} \rangle$  es el *tensor de covarianza* de segundo orden, que en el caso isótropo es  $\mathbf{\Gamma} = \sigma^2 \mathbf{I}$ , siendo  $\sigma^2$  la *varianza* y  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$  la *desviación típica* o *estándar*.

El momento de tercer orden  $\mathbf{S} = \langle \tilde{\mathbf{X}}^3 \rangle$  es un tensor de tercer orden y en el caso isótropo se expresa de forma normalizada como  $\mathcal{S} \mathbf{I} = \mathbf{S}/\sigma^3$ , donde  $\mathcal{S}$  es la *asimetría*. Similarmente, el momento de cuarto orden  $\mathbf{F} = \langle \tilde{\mathbf{X}}^4 \rangle$  es un tensor de cuarto orden y en el caso isótropo se expresa de forma normalizada como  $\mathcal{F} \mathbf{III} = \mathbf{F}/\sigma^4$ , donde  $\mathcal{F}$  es el *aplastamiento* ó *curtosis*. Es costumbre también usar los nombres de asimetría y aplastamiento en los casos no isótropos para las distintas componentes, especificando cuales son, pero las normalizaciones utilizadas suelen variar de autor en autor. Los tensores  $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i$ ,  $\mathbf{II} = \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i$ , y  $\mathbf{III} = \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i$  son los tensores diagonales de segundo, tercero y cuarto órdenes respectivamente, es decir, que sus componentes sólo tienen valor de 1 en la correspondiente diagonal principal.

En los casos no isótropos la cantidad  $\sigma = \sqrt{\|\mathbf{\Gamma}\|}$  se utiliza sólo para normalizar las definiciones de asimetría y aplastamiento de alguna manera uniforme en sus componentes. Sin embargo, es práctica frecuente utilizar las componentes  $(\sigma^j)^2$  del tensor  $\mathbf{\Gamma}$  en un sistema de coordenadas principales, siendo  $(\sigma^j)^2$  los autovalores de dicho tensor en el sistema mencionado. La potenciación en (11) siempre debe interpretarse como productos tensoriales de vectores, es decir,  $\mathbf{X}^m = \overset{m}{\otimes} \mathbf{X}$  ( $\otimes$  no debe confundirse con un producto escalar o de otro tipo, no obstante, cuando  $\mathbf{X}$  es un escalar, entonces  $\otimes$  es el producto entre escalares). En los casos no isótropos también es frecuente el uso de los momentos direccionales tales como

$$\langle \tilde{X}^j \tilde{X}^k \rangle = \sigma^j \sigma^k \quad \langle (\tilde{X}^j)^2 \rangle = (\sigma^j)^2 \quad \langle (\tilde{X}^j)^3 \rangle / (\sigma^j)^3 = \mathcal{S}^j \quad \langle (\tilde{X}^j)^4 \rangle / (\sigma^j)^4 = \mathcal{F}^j \quad (12)$$

En esta oportunidad las potencias si son algebraicas.

Cuando se tienen variables aleatorias no centradas y se desea encontrar el tensor de covarianza, se debe aplicar la linealidad del operador de la esperanza  $\langle c\mathbf{X} + \mathbf{Y} \rangle = c\langle \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{Y} \rangle$ . De acuerdo a esto, entonces

$$\mathbf{\Gamma} = \langle \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}} \rangle = \langle (\mathbf{X} - \langle \mathbf{X} \rangle) (\mathbf{X} - \langle \mathbf{X} \rangle) \rangle = \langle \mathbf{X}\mathbf{X} \rangle - \langle \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{X} \rangle \quad (13)$$

donde, para los efectos de la linealidad,  $\langle \mathbf{X} \rangle$  se ha considerado un constante. De manera similar se puede definir el tensor de covarianza de dos variables aleatorias diferentes

$$\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{XY}} = \langle \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{Y}} \rangle = \langle (\mathbf{X} - \langle \mathbf{X} \rangle) (\mathbf{Y} - \langle \mathbf{Y} \rangle) \rangle = \langle \mathbf{X}\mathbf{Y} \rangle - \langle \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y} \rangle \quad (14)$$

muchas veces denominado también *tensor de correlación* (no normalizado) y cuando  $\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{X}}' = \tilde{\mathbf{X}}(\mathcal{X} - \Delta\mathcal{X})$  *tensor de autocorrelación* (no normalizado) (En este último caso es evidente que el tensor de autocorrelación

queda en función del desplazamiento  $\Delta\mathcal{X}$  impuesto a través del mapa  $\check{\mathcal{X}}$  que describe la variable aleatoria centrada  $\check{\mathbf{X}}$  inicialmente no desplazada). El tensor de covarianza  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_{xx}$  es el tensor de autocorrelación con un desplazamiento nulo.

El tensor de correlación normalizado de dos variables aleatoria centradas  $\check{\mathbf{X}}$  y  $\check{\mathbf{Y}}$  es

$$\mathcal{R}_{xy} = \frac{\langle \check{\mathbf{X}} \check{\mathbf{Y}} \rangle}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mathbf{\Gamma}_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad \mathcal{R}_{xy}^{jk} = \frac{\langle \check{X}^j \check{Y}^k \rangle}{\sigma_x^j \sigma_y^k} = \frac{\mathbf{\Gamma}_{xy}^{jk}}{\sigma_x^j \sigma_y^k} \quad (14')$$

Estas dos expresiones no son equivalentes, ya que las normalizaciones utilizadas no son las mismas. En la segunda expresión se han utilizado para la normalización las desviaciones típicas de cada una de las componentes de la variable aleatoria por separado. Sin embargo, el numerador de la segunda expresión contiene las componentes del tensor en el numerador de la primera. Para la autocorrelación de una variables aleatorias homogéneas (es decir con sus momentos todos iguales  $\langle \mathbf{X}^m \rangle = \langle \mathbf{X}'^m \rangle$ , los de la variable aleatoria original y los de la variable aleatoria desplazada), la expresión (15.a) es equivalente a  $\mathcal{R} = \mathbf{\Gamma}_{xx'} / \|\mathbf{\Gamma}_{xx}\|$ , puesto que  $\sigma_x = \sigma_{x'}$ .

La función de estructura  $\mathbf{S}_m$  de orden  $m$  se define como el momento del mismo orden de la variable aleatoria  $\mathbf{Y} = \mathcal{X}(\mathcal{X} + \Delta\mathcal{X}) - \mathcal{X}(\mathcal{X})$ , obtenida como un diferencial del mapa  $\mathcal{X}$  en la dirección  $\Delta\mathcal{X}$ . Esto es

$$\mathbf{S}_m(\mathcal{X}, \Delta\mathcal{X}) = \langle [\mathcal{X}(\mathcal{X} + \Delta\mathcal{X}) - \mathcal{X}(\mathcal{X})]^m \rangle = \langle \mathbf{Y}^m \rangle \quad (15)$$

#### 5.1.4. Función Característica

La función característica  $\hat{\vartheta}(\boldsymbol{\kappa})$  de las probabilidades se define, salvo un factor, como la transformada de Fourier de la función de densidad de las probabilidades

$$\hat{\vartheta}^j(\kappa_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \wp_j(x^j) e^{i\kappa_j x^j} dx^j = \sqrt{2\pi} \hat{\wp}^j(\kappa_j) \quad \hat{\vartheta}(\boldsymbol{\kappa}) = \int_{\mathcal{V}_{\infty}} \wp(\mathbf{x}) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} d\mathcal{V}_x = (\sqrt{2\pi})^n \hat{\wp}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (16)$$

Obviamente, si se satisface que  $\hat{\vartheta}(\boldsymbol{\kappa}) = (\sqrt{2\pi})^n \hat{\wp}(\boldsymbol{\kappa})$  ( ó en sus componentes  $\hat{\vartheta}^j(\kappa_j) = \sqrt{2\pi} \hat{\wp}^j(\kappa_j)$  ), entonces esta expresión también se satisface para las anti-transformadas  $\vartheta(\mathbf{x}) = (\sqrt{2\pi})^n \wp(\mathbf{x})$  ( ó en sus componentes  $\vartheta_j(x^j) = \sqrt{2\pi} \wp_j(x^j)$  ). En (16.a) no se debe realizar la suma sobre el índice  $j$ . En (16.b) la función característica se puede interpretar como  $\langle \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}) \rangle$ , es decir, la esperanza de la función armónica  $\exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x})$ .

De manera similar a como se hizo con la función densidad de probabilidades, la función característica se puede construir de la siguiente forma

$$\hat{\vartheta}^j(\boldsymbol{\kappa}) = \hat{\vartheta}^j(\kappa_j) \quad \hat{\vartheta}(\boldsymbol{\kappa}) = \prod_{j=1}^n \hat{\vartheta}^j(\boldsymbol{\kappa}) \quad \hat{\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\kappa}) = \{\hat{\vartheta}^1(\boldsymbol{\kappa}), \hat{\vartheta}^2(\boldsymbol{\kappa}), \dots, \hat{\vartheta}^n(\boldsymbol{\kappa})\} \quad (17)$$

Esto mismo también es válido para las anti-transformadas  $\vartheta_j(\mathbf{x})$ .

Los momentos se relacionan con la función característica mediante la expresión

$$\langle \mathbf{X}^m \rangle = i^{-m} \nabla^m \hat{\vartheta}(\boldsymbol{\kappa})|_{\boldsymbol{\kappa}=0} \quad (18)$$

donde, al igual que en los momentos se debe interpretar  $\nabla^m = \otimes^m \nabla$ .

#### 5.1.5. Densidad Gaussiana

La función de densidad gaussiana centrada se expresa como

$$\wp_j(x^j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma^j} \exp\left(-\frac{x^{j^2}}{2\sigma^{j^2}}\right) \quad \wp(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{\Gamma}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{\Gamma}^{-1} \cdot \mathbf{x}\right) \quad \mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma} \quad \mathbf{\Gamma} = |\mathbf{\Gamma}| \quad (19)$$

donde  $\mathbf{\Gamma}$  es el tensor de covarianza, formado por la diádica del *vector de desviaciones típicas*  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^n\}$  (en este caso expresado en un sistema de coordenadas principales),  $\mathbf{\Gamma}^{-1}$  es su inverso y  $\Gamma$  es su determinante. El escalar  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \text{tr}(\mathbf{\Gamma})$  es la suma de todas las varianzas  $\sum_{j=1}^n (\sigma^j)^2$ . En un sistema de coordenadas principales el valor  $\sigma^j$  es la distancia, a lo largo de cada eje  $j$ , desde el origen hasta el punto de ensilladura (puntos de inflexión de las campanas de Gauss en las secciones de los planos coordenados).

La función característica gaussiana es

$$\hat{\vartheta}^j(\kappa_j) = \exp(-\frac{1}{2} \sigma^j{}^2 \kappa_j{}^2) \quad \hat{\vartheta}(\boldsymbol{\kappa}) = \exp(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\kappa}) \quad (20)$$

Cuando la variable aleatoria no está centrada, la función de densidad gaussiana se expresa como

$$\wp(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \exp[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \langle \mathbf{X} \rangle) \cdot \mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{x} - \langle \mathbf{X} \rangle)] \quad (21)$$

donde el tensor de covarianza  $\mathbf{\Gamma}$  se calcula como en (13) y, como el sistema de coordenadas no es necesariamente principal, las componentes principales del vector de desviaciones típicas se obtienen con las raíces cuadradas de los autovalores del tensor de covarianza.

**Teorema (Integración Por Parte Gaussiana).** Sea  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  una variable aleatoria centrada y con una función característica gaussiana, y sea  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable, entonces, asumiendo que las siguientes esperanzas existen,

$$\langle \mathbf{X} \mathbf{f}(\mathbf{X}) \rangle = \mathbf{\Gamma} \cdot \langle \nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}) \rangle \quad (22)$$

donde  $\mathbf{\Gamma} = \langle \mathbf{X} \mathbf{X} \rangle$  es el tensor de covarianza.

### 5.1.6. Probabilidad Condicionada

La *función de densidad de probabilidades condicionada* se define fraccionando el dominio  $\mathbb{R}^n$  de la función densidad de probabilidades en varios subconjuntos. Sin pérdida de generalidad se va a fraccionar el dominio en dos subconjuntos de hiperplanos del primero mediante el producto cartesiano en la forma  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$ , con  $n' + n'' = n$ . Sea  $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n'}$  y  $\mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^{n''}$ , tal que el par ordenado  $(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$  es el mismo punto  $\mathbf{x}$ . La función de densidad de probabilidades condicionada  $\wp(\mathbf{x}|\mathbf{x}'')$  se define como

$$\wp(\mathbf{x}|\mathbf{x}'') = \frac{\wp(\mathbf{x})}{\wp''(\mathbf{x}'')} = \frac{\wp(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\wp''(\mathbf{x}'')} \quad (23)$$

donde la función densidad de probabilidades en el denominador se define como  $\wp''(\mathbf{x}'') : \mathbb{R}^{n''} \longrightarrow \mathbb{R}$ . La interpretación de (23) se hace a través de la siguiente expresión

$$\text{prob}[\mathbf{X} = (\mathbf{X}', \mathbf{X}'') \in \mathcal{V}_o, \text{ con } \mathbf{X}'' \text{ fijo}] = \int_{\mathcal{V}'_o} \wp(\mathbf{x}|\mathbf{x}'') d\mathcal{V}' = \int_{\Omega'_o} d\Omega' \quad (24.a)$$

$$\mathcal{V}'_o = \mathcal{V}'_\infty \cap \mathcal{V}_o = \mathcal{X}(\Omega'_o) \quad \mathcal{V}'_\infty = \{ \mathbf{x} = (\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}'' \text{ fijo} \} \quad \Omega'_o \subset \Omega_o \subset \Omega \quad (24.b)$$

La función de densidad (23) también está normalizada, ya que se satisface que

$$\wp''(\mathbf{x}'') = \int_{\mathcal{V}'_\infty} \wp(\mathbf{x}) d\mathcal{V}' = \int_{\mathcal{V}'_\infty} \wp(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') d\mathcal{V}' \quad (25)$$

y, por consiguiente,

$$\int_{\mathcal{V}'_\infty} \wp(\mathbf{x}|\mathbf{x}'') d\mathcal{V}' = \int_{\mathcal{V}'_\infty} \frac{\wp(\mathbf{x})}{\wp''(\mathbf{x}'')} d\mathcal{V}' = \int_{\mathcal{V}'_\infty} \frac{\wp(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\wp''(\mathbf{x}'')} d\mathcal{V}' = \frac{\wp''(\mathbf{x}'')}{\wp''(\mathbf{x}'')} = 1 \quad (26)$$

La *esperanza condicionada* se define de forma similar a (10), pero con la densidad de probabilidades condicionada

$$\langle \mathbf{F} | \mathbf{X}'' \rangle = \int_{\mathcal{V}'_\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \wp(\mathbf{x} | \mathbf{x}'') d\mathcal{V}' = \int_{\Omega'} \mathcal{F}[\mathcal{X}(\mathcal{X})] d\Omega' \quad \mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (27)$$

De igual manera se definen los *momentos condicionados*.

Dos variables aleatorias  $\mathbf{X}'$  y  $\mathbf{X}''$  son *estadísticamente independientes*, si la función de densidad de probabilidades condicionada  $\wp(\mathbf{x} | \mathbf{x}'')$  depende exclusivamente de  $\mathbf{x}'$ , o sea, que existe una función de densidad de probabilidades definida como  $\wp'(\mathbf{x}') = \wp(\mathbf{x} | \mathbf{x}'')$  que satisface la siguiente igualdad

$$\wp(\mathbf{x}) = \wp(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \wp'(\mathbf{x}') \wp''(\mathbf{x}'') \quad (28)$$

En otras palabras, la función de densidad de una de las variables aleatorias no se ve afectada por la otra variable aleatoria, y viceversa.

## 5.2. SISTEMAS DISCRETOS

### 5.2.1. Variable Aleatoria

Una *variable aleatoria discreta*  $\mathbf{X}_I$  se define como una muestra de  $N$  valores  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N$  tomados del universo de eventos de un proceso aleatorio

### 5.2.2. Distribución de Probabilidad

La distribución de probabilidades se hace de manera discreta a través de la probabilidad  $\wp_i$  de que ocurra un evento  $i$  dentro del universo de eventos, definida de la siguiente forma

$$\text{prob}(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i) = \wp_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)/N \quad i \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$  es la frecuencia con que la muestra de  $N$  valores aleatorios  $\mathbf{X}_I$  toman el valor  $\mathbf{x}_i$ . La expresión (1) es la versión discreta de la expresión 5.1.(2).

Para que la probabilidad  $\wp_i$  esté normalizada se debe satisfacer que

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \wp_i = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N 1 = 1 \quad (2)$$

Esta expresión es el equivalente discreto de la expresión 5.1.(4).

### 5.2.3. Esperanza y Momentos

La esperanza  $\langle \mathbf{F} \rangle$  de la variable aleatoria  $\mathbf{F}_I$ , definida por una función  $\mathbf{F}_I = \mathcal{F}(\mathbf{X}_I)$  de la variable  $\mathbf{X}_I$  aleatoria original, se calcula como

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \wp_i = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N \mathcal{F}(\mathbf{X}_I) \quad (3)$$

donde la funciones  $\mathbf{F}$  y  $\mathcal{F}$  tiene el mismo significado que para variables aleatorias continuas. Particularmente, el momento de orden  $m$  de una variable aleatoria  $\mathbf{X}_I$  se define como

$$\langle \mathbf{X}^m \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_i^m \wp_i = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N \mathbf{X}_I^m \quad m \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Las expresiones (3) y (4) son las equivalentes discretas de las expresiones 5.1.(10) y 5.1.(11).



Las definiciones que siguen a las variables aleatorias continuas son extensivas de manera equivalente de aquí en adelante. Todo el desarrollo de los conceptos definidos anteriormente para variables aleatorias continuas se pueden obtener de manera indirecta si se consideran a las funciones de integrales de la sección 5.1 como distribuciones discontinuas y constantes a trozos regulares.

## 6. PERTURBACIONES

### 6.1. INTRODUCCION

#### 6.1.1. Funciones de Calibre

Dada una función cualquiera  $f(x)$ , las *funciones de calibre* son aquellas funciones de comparación  $g(x)$ , que sirven para estudiar la tendencia de  $f(\epsilon)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . No obstante, los límites  $\epsilon \rightarrow 0^+$  y  $\epsilon \rightarrow 0^-$  puedan ser diferentes, el análisis se normaliza para  $\epsilon \geq 0$ . El límite negativo se estudia para la función opuesta  $f^-(x) = f(-x)$ .

Cuando se desea estudiar la tendencia de  $f(\eta)$  cuando  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , se procede igual que antes, pero sobre la función  $F(x) = f(1/x)$  (cuyo dominio es el inverso del original), y el análisis de nuevo se normaliza para  $F(\epsilon)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Si el límite de  $f(x)$  existe cuando  $x \rightarrow 0$  (i.e. la función no tiene una singularidad esencial en  $x = 0$ ), entonces hay tres posibilidades

$$\left. \begin{array}{l} |f(\epsilon)| \rightarrow 0 \\ |f(\epsilon)| \rightarrow C \\ |f(\epsilon)| \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0, \quad \text{con } 0 < C < \infty \quad (1)$$

Sobre todo en el primer y último casos, la tasa a la cual ocurren las tendencias se expresa comparando la función  $f(\epsilon)$  con funciones conocidas llamadas *funciones de calibre*. Los ejemplos más sencillos y útiles son las potencias  $g(\epsilon) = \epsilon^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{Q}$  (El caso central, como se verá, corresponde a la función trivial  $g(\epsilon) = 1$  con  $\alpha = 0$ ). El primer y último casos corresponden a exponentes positivos y negativos, respectivamente). Estas potencias satisfacen para  $\epsilon$  pequeño ( $\epsilon \ll 1$ ) que

$$\dots > \epsilon^{-4} > \epsilon^{-3} > \epsilon^{-2} > \epsilon^{-1} > 1 > \epsilon > \epsilon^2 > \epsilon^3 > \epsilon^4 > \dots \quad (2)$$

donde los exponentes fraccionales se pueden intercalar en las desigualdades sin problemas.

Existen otras funciones de calibre más elaboradas como  $\sin \epsilon$ ,  $\ln \epsilon$ , etc., pero son de poca o restringida utilidad, y, en algunos casos no hacen falta, puesto que se puede llevar el problema a expresarse en potencias de  $\epsilon$  mediante un cambio adecuado de variables.

#### 6.1.2. Símbolos de Landau

El comportamiento de una función  $f(\epsilon)$  se compara con una función de calibre  $g(\epsilon)$ , cuando  $\epsilon \rightarrow$ , utilizando alguno de los símbolos de Landau, como se explica a continuación.

**Absoluto.** Se escribe

$$f(\epsilon) = O[g(\epsilon)] \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 \quad (3)$$

si existe un número positivo independiente de  $\epsilon$ , y un valor  $\epsilon_o > 0$ , tal que

$$|f(\epsilon)| \leq C |g(\epsilon)| \quad \text{para todo } |\epsilon| < \epsilon_o \quad (4)$$

Esta condición se puede reemplazar por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right| = C \quad \text{con } 0 < C < \infty \quad (5)$$

Un par de ejemplos sencillos pueden ser  $\cos \epsilon = O(1)$  y  $\sin \epsilon = O(\epsilon)$ .

Si  $f(x, \epsilon)$  es también una función de otra variables  $x$ , adicional a  $\epsilon$ , y  $g(x, \epsilon)$  es una función de calibre, se puede escribir

$$f(x, \epsilon) = O[g(x, \epsilon)] \quad \text{cuando} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (6)$$

en lugar de (3). Si además  $C$  y  $\epsilon_o$  son independientes de  $x$ , se dice que la expresión (6) se satisface uniformemente.

**Relativo.** Se escribe

$$f(\epsilon) = o[g(\epsilon)] \quad \text{cuando} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (7)$$

si, para cada valor positivo  $\delta$  independiente de  $\epsilon$ , existe un valor  $\epsilon_o > 0$ , tal que

$$|f(\epsilon)| \leq \delta |g(\epsilon)| \quad \text{para} \quad |\epsilon| < \epsilon_o \quad (8)$$

Esta condición se puede reemplazar por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right| = 0 \quad (9)$$

Dos pares de ejemplos sencillos pueden ser  $\cos \epsilon = o(\epsilon^{-1/3})$ ,  $\cos \epsilon = o(\epsilon^{-1})$  y  $\sin \epsilon = o(\epsilon^{1/2})$ ,  $\sin \epsilon = o(1)$  (ordenados del más convergente al menos convergente). Como se puede observar en estos ejemplos la relación con el orden de magnitud relativo no es unívoca. Varias funciones de calibre pueden ser del mismo orden relativo. En este caso lo que determina el orden de magnitud es cuan rápido o lento la función tiende a su límite comparado con una o varias funciones de calibre (dependiendo de su exponente). Este símbolo es muy útil cuando la información que se tiene de la función es incompleta o imprecisa.

Si  $f(x, \epsilon)$  es también una función de otra variables  $x$ , adicional a  $\epsilon$ , y  $g(x, \epsilon)$  es una función de calibre, se puede escribir

$$f(x, \epsilon) = o[g(x, \epsilon)] \quad \text{cuando} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (10)$$

en lugar de (7). Si además  $\delta$  y  $\epsilon_o$  son independientes de  $x$ , se dice que la expresión (10) se satisface uniformemente.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Ablowitz, M. J.; Fokas, A. S. **Complex Variables: Introduction and Applications**. Cambridge University Press, 1997. Reprint, 1999.
- [2] Abramowitz, M.; Stegun, I. A. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. Dover Publications, 1965. Ninth Printing, 1970.
- [3] Anosov, D. V.; Arnold, V. I.; (Eds.). **Dynamical Systems I**, Ordinary Differential Equations and Smooth Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1988.
- [4] Antosik, P.; Mikusiński, J.; Sikorski, R. **Theory of Distributions**, The Sequential Approach. Elsevier Scientific - PWN-Polish Scientific, 1973.
- [5] Apostol, T. M. **Calculus: Cálculo con Funciones de Varias Variables y Algebra Lineal, con Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales y a las Probabilidades**, Vol.1 y Vol.2, 2<sup>da</sup> Edición. Editorial Reverté. España, Barcelona, 1972.
- [6] Arnold, V. I.; Avez, A. **Ergodic Problems of Classical Mechanics**. W. A. Benjamin, 1968.
- [7] Arnold, V. I. **Singularity Theory**, Selected Papers. Cambridge University Press, 1981.
- [8] Arnold, V. I. **Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations**. Springer-Verlag, 1983.
- [9] Arnold, V. I. **Catastrophe Theory**, Second Edition. Springer-Verlag, 1986.
- [10] Arnold, V. I.; (Ed.). **Dynamical Systems III**. Springer-Verlag, 1988.

- [11] Arnold, V. I.; Novikov, S. P.; (Eds.). **Dynamical Systems IV**, Symplectic Geometry and its Applications. Springer-Verlag, 1990.
- [12] Arnold, V. I. **Ordinary Differential Equations**. MIT Press, 1973. 7<sup>th</sup> Printing, 1990.
- [13] Arrowsmith, D. K.; Place, C. M. **An Introduction to Dynamical Systems**. Cambridge University Press, 1990. Reprint, 1991.
- [14] Ayres, F., Jr. **Ecuaciones Diferenciales**. McGraw-Hill (Serie Schaum), 1969.
- [15] Baker, G. A.; Graves-Morris, P. **Padé Approximals**, 2<sup>nd</sup> Edition. Cambridge University Press, 1996.
- [16] Bender, C. M.; Orszag, S. A. **Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory**. Mc-Graw Hill, 1978. Springer-Verlag (New York), 1999.
- [17] Birkhoff, G.; Rota, G.-C. **Ordinary Differential Equations**, Fourth Edition. John Wiley & Sons (New York), 1989.
- [18] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. **Introducción a las Ecuaciones Diferenciales**. Editorial Limusa, 1972. 5<sup>ta</sup> Reimpresión, 1984.
- [19] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. **Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera**, Cuarta Edición. Editorial Limusa, 1998.
- [20] Brand, L. "The Pi Theorem of Dimensional Analysis". **Arch. Rational Mech. Anal.**, Vol.1, pp.35-45, (1957).
- [21] Bronshtein, I. N.; Semendyayev, K. A. **Handbook of Mathematics**, 3<sup>rd</sup> Edition. Van Nostrand Reinhold Company (New York), 1979.
- [22] Brunk, H. D. **Introducción a la Estadística Matemática**. Editorial Trillas, 1979.
- [23] Buckingham, E. "On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Equations". **Phys. Rev.**, Vol.4, No.4, pp.345-, (1914).
- [24] Buckingham, E. "Model Experiments and the Form of Empirical Equations". **Trans. ASME**, Vol.37, pp.263-296, (1915).
- [25] Churchill, R. V. **Series de Fourier y Problemas de Contorno**. McGraw-Hill, 1977.
- [26] Churchill, R. V.; Brown, J. W. **Variable Compleja y Aplicaciones**, 5<sup>ta</sup> Edición. McGraw-Hill/Interamericana de España, 1992.
- [27] Coddington, E. A.; Levinson, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**. Robert E. Krieger, 1955. Reprint, 1984.
- [28] Cornfeld, I. P.; Fomin, S. V.; Sinai, Ya. G. **Ergodic Theory**. Springer-Verlag, 1982.
- [29] Courant, R.; Hilbert, D. **Methods of Mathematical Physics**, Vols.I/II/III. Interscience Publishers, 1953.
- [30] Davenport, W. B. **Probability and Random Processes**, An Introduction for Applied Scientists and Engineers. McGraw-Hill, 1970. Reprint, 1975.
- [31] Dwight, H. B. **Tables of Integrals and Other Mathematical Data**, Fourth Edition. The Macmillan Company, 1961.
- [32] Elsgoltz, L. **Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional**. Editorial MIR-Moscú, 1977.
- [33] Feder, J. **Fractals**. Plenum Press (New York), 1988. Third Printing, 1989.
- [34] Feller, W. **An Introduction to Probability Theory and its Applications**, 3<sup>rd</sup> Edition, Vol.1-2. John Wiley & Sons (New York), 1968.
- [35] Friedman, B. **Principles and Techniques of Applied Mathematics**. John Wiley & Sons (New York), 1956. Fifth Printing, 1962.
- [36] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. **Tables of Integrals, Series, and Products**, 4<sup>th</sup> Edition. Academic Press (New York), 1965.
- [37] Hale, J. K.; Koçak, H. **Dynamics and Bifurcations**. Springer-Verlag (New York), 1991.

- [38] Halmos, P. R.. **Lectures on Ergodic Theory**. Chelsea Publishing Company, 1956.
- [39] Hirsch, M. W.; Smale, S. **Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra**. Academic Press, 1974.
- [40] Hurewicz, W. **Sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**. Ediciones RIALP, 1966.
- [41] Iooss, G. **Bifurcation of Maps and Applications**. North-Holland, 1979.
- [42] Iooss, G.; Joseph, D. D. **Elementary Stability and Bifurcation Theory**, 2<sup>nd</sup> Edition. Springer-Verlag, 1990.
- [43] Jeffreys, H.; Jeffreys, B. S. **Methods of Mathematical Physics**. Cambridge University Press, 1966.
- [44] Kall, P. **Stochastic Linear Programming**. Springer-Verlag, 1976.
- [45] Kaplan, W. **Elements of Ordinary Differential Equations**. Addison Wesley, 1964.
- [46] Kartashov, A. P.; Rozhdenstvenski, B. L. **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Fundamento del Cálculo Variacional**. Editorial Reverté, 1980.
- [47] Kec, W.; Teodorescu, P. P. **Applications of the Theory of Distributions in Mechanics**. Editura Academiei Române - Abacus Press, 1974.
- [48] Kolmogorov, A. N. **Foundations of the Theory of Probability**, Second Edition. Chelsea Publishing Company, 1956.
- [49] Koroliuk, V. S. **Manual de la Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática**. Editorial MIR-Moscú, 1981.
- [50] Krasnov, M. L.; Kiseliy, A. I.; Makarenko, G. I. **Funciones de Variable Compleja, Cálculo Operacional y Teoría de la Estabilidad**. Editorial Reverté, 1976.
- [51] Kreider, D. L.; Kuller, R. G.; Ostberg, D. R. **Ecuaciones Diferenciales**. Fondo Educativo Interamericano, 1973.
- [52] Kreider, D. L.; Kuller, R. G.; Ostberg, D. R.; Perkins, F. W. **An Introduction to Linear Analysis**. Addison-Wesley, 1966.
- [53] Kuipers, L.; Timman, R.; (Eds.). **Handbook of Mathematics**. Pergamon Press, 1969.
- [54] Ladyzhenskaya, O. A. **The Boundary Value Problem of Mathematical Physics**. Springer-Verlag (New York), 1985.
- [55] Lakshmikantham, V.; Leela, S. **Differential and Integral Inequalities**, Theory and Applications. Vol.I: Ordinary Differential Equations. Vol.II: Functional, Partial, Abstract, and Complex Differential Equations. Academic Press, 1969.
- [56] La Salle, J.; Lefschetz, S. **Stability by Liapunov's Direct Method**, with Applications. Academic Press, 1961. Fourth Printing, 1967.
- [57] Lighthill, M. J. **Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions**. Cambridge University Press, 1958. 5<sup>th</sup> Reprint, 1970.
- [58] Mandelbrot, B. B. **Les Objets Fractals**. Forme, Hasard et Dimesion. Flammarion Editeur, 1975.
- [59] Mandelbrot, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**, Updated and Augmented Edition. W. H. Freeman and Company: New York, 1983.
- [60] Marsden, J. E. **Applications of Global Analysis in Mathematical Physics**. Publish or Perish, 1974.
- [61] Marsden, J. E.; McCracken, M. **The Hopf Bifurcation and its Applications**. Springer-Verlag, 1976.
- [62] Marsden, J. E.; Ratiu, T. S. **Introduction to Mechanics and Symetry**. Springer-Verlag (New York), 1994.
- [63] Morse, P. M.; Feshbach, H. **Methods of Theoretical Physics**, Parts I/II. McGraw-Hill, 1953.
- [64] Martín Pliego, F. J.; Ruíz-Maya, L. **Estadística, Vol I: Probabilidad**, 1<sup>ra</sup> Reimpresión Revisada. Editorial AC (Madrid), 1997.

- [65] Nayfeh, A. H. **Perturbation Methods**. John Wiley & Sons (New York), 1973.
- [66] Nayfeh, A. H. **Introduction to Perturbation Techniques**. John Wiley & Sons (New York), 1981.
- [67] Nayfeh, A. H.; Balachandran, B. **Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods**. John Wiley & Sons (New York), 1995.
- [68] Novo, S.; Obaya, R.; Rojo, J. **Ecuaciones y Sistemas Diferenciales**. McGraw-Hill, 1995.
- [69] Peitgen, H.-O.; Jürgens, H.; Saupe, D. **Chaos and Fractals**, New Frontiers of Science. Springer-Verlag, 1992.
- [70] Peitgen, H.-O.; Richter, P. H. **The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems**. Springer-Verlag, 1986.
- [71] Peña, D. **Estadística, Modelos y Métodos**, 2ª Edición Revisada. Vol.1: "Fundamentos". Vol.2: "Modelos Lineales y Series Temporales". Alianza Editorial, 1989. Octava Reimpresión, 2000.
- [72] Peña, D. **Regresión y Diseño de Experimentos**. Alianza Editorial, 2002.
- [73] Poston, T.; Stewart, I. N. **Catastrophe Theory and its Applications**. Pitman Publishing, 1978.
- [74] Protter, M. H.; Weinberger, H. F. **Maximum Principles in Differential Equations**. Springer-Verlag (New York), 1984.
- [75] Reed, M.; Simon, B. **Methods of Modern Mathematical Physics**. Academic Press, 1972.
- [76] Roberts, Ch. E., Jr. **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**. Editorial Prentice-Hall Internacional - Editorial Dossat, 1980.
- [77] Robinson, C. **Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos**. CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [78] Ruelle, D. **Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory**. Academic Press, 1989.
- [79] Samoilenko, A. M.; Ronto, N. I. **Numerical-Analytic Methods of Investigating Periodic Solutions**. Mir Publisher - Moscow, 1979.
- [80] Showalter, R. E. **Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations**. Pitman Publishing, 1977.
- [81] Shub, M. **Global Stability of Dynamical Systems**. Springer-Verlag, 1987.
- [82] Sinai, Ya. G.; (Ed.). **Dynamical Systems II**, Ergodic Theory with Applications to Dynamical Systems and Statistical Mechanics. Springer-Verlag, 1989.
- [83] Smoller, J. **Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations**. Springer-Verlag (New York), 1983.
- [84] Sparrow, C. **The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors** Springer-Verlag, New York, 1982.
- [85] Sobolev, S. L. **Partial Differential Equations of Mathematical Physics**. Pergamon Press, 1964.
- [86] Sokolnikoff, I. S.; Redheffer, R. M. **Mathematics of Physics and Modern Engineering**, Second Edition. McGraw-Hill, 1966.
- [87] Spanier, J.; Oldham, K. B. **An Atlas of Functions**. Hemisphere Publishing Corporation, 1987.
- [88] Spiegel, M. R. **Teoría y Problemas de Análisis de Fourier**. McGraw-Hill (Serie Schaum), 1976.
- [89] Tranter, C. J. **Transformadas Integrales en la Física Matemática**, Segunda Edición. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, 1964.
- [90] Van Dyke, M. **Perturbation Methods in Fluid Mechanics**. Academic Press, 1964. The Parabolic Press (Stanford), 1975. Second Printing, 1978.
- [91] Vidyasagar, M. **Nonlinear Systems Analysis**, Second Edition. Prentice-Hall International, 1993.
- [92] Viète, François. **Tratado De Emendatione**, 1615.
- [93] Vladimirov, V. S. **Generalized Functions in Mathematical Physics**. MIR Publishers-Moscow, 1979.
- [94] Volkovyski, L. I.; Lunts, G. L.; Aramanovich, I. G. **Problemas sobre la Teoría de Funciones de Variable Compleja**, Segunda Edición. Editorial MIR-Moscú, 1977.

- [95] Wadsworth, G. P.; Bryan, J. G. **Aplicaciones de la Teoría de Probabilidades y Variables Aleatorias**, Segunda Edición. Editorial Alhambra, 1979.
- [96] Walker, J. A. **Dynamical Systems and Evolution Equations**, Theory and Applications. Plenum Press, 1980.
- [97] Weinberger, H. F. **Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales**. Editorial Reverté, 1970. Segunda Reimpresión, 1979.
- [98] Weinberger, H. F. **A First Course in Partial Differential Equations**, With Complex Variables and Transform Methods. Dover Publications, 1995.
- [99] Wiggings, S. **Global Bifurcations and Chaos**, Analytical Methods. Springer-Verlag (New York), 1988.
- [100] Wiggings, S. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. Springer-Verlag (New York), 1990.
- [101] Wilf, H. S. **Mathematics for the Physics Sciences**. Dover Publications, 1978.
- [102] Yoshizawa, T. **Stability Theory by Liapunov's Second Method**. Mathematical Society of Japan, 1966.
- [103] Zajárov, V. K.; Sevastiánov, B. A.; Chistiakov, V. P. **Teoría de Las Probabilidades**. Editorial MIR-Mocú, 1985.

MECANICA Y TERMODINAMICA DE  
SISTEMAS MATERIALES CONTINUOS

# **NOTACION Y BIBLIOGRAFIA**

## **(GENERAL)**





# NOTACION

Función. Coeficiente de arrastre, sustentación, fricción, etc. Conjunto. Coeficiente de Chézy.

## 1. LISTA DE SIMBOLOS PRINCIPALES.

- a...z* Escalares en general. Escalares de un cuerpo o campo.
- a* Energía libre de Helmholtz específica. Semieje mayor de una elipse.
- a...z** Vectores en general.
- a** Aceleración absoluta. Vectores bases en un sistema de coordenadas curvilíneas  $ox^1x^2x^3 \dots x^n$ .
- A* Energía libre de Helmholtz total. Atlas de un espacio. Area transversal de flujo. Area de la sección de un viga. Conjunto. Operador lineal.
- A* Función de Evolución de la superficie  $\mathcal{A}$ . Subconjunto de un espacio métrico.
- A** Algebra. Subespacio métrico.
- A** Aceleración relativa a un sistema de coordenadas no inercial. Vectores bases en un sistema de coordenadas curvilíneas  $OX^1X^2X^3 \dots X^n$ . Operador lineal. Aceleración de una partícula de fluido. Aceleración bidimensional.
- $\mathcal{A}$  Area o superficie.
- A* Area o superficie de una partícula o unidad menor.
- A** Tensores de orden superior.
- A...Z** Tensores en general.
- b* Componentes del tensor de la segunda forma cuadrática fundamental. Determinante del tensor **b**. Semieje menor de una elipse.
- b** Vector de par-esfuerzo para el caso de un material polar.
- B* Atlas de un espacio. Conjunto. Operador lineal. Ordenada en el origen del perfil logarítmico de velocidad.
- B* Base cartesiana tridimensional  $B = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ . Subconjunto de un espacio métrico.
- B** Base ordenada de un espacio vectorial.
- $\mathbb{B}$  Bola abierta ó entorno en un espacio métrico.
- B** Tensor de Green.
- IB** Tensor de par-esfuerzo para el caso de un material polar.
- B** Tensor de cuarto orden de propiedades viscoelásticas.
- $\mathcal{B}$  Cuerpo material. Borde de un conjunto en un espacio métrico.
- c* Velocidad del sonido en un medio. Módulo de la velocidad de propagación. Coeficientes en una ecuación. Velocidad de la luz en el vacío. Velocidad de propagación de una onda.
- c** Velocidad de propagación local.
- C* Calor específico. Clase de equivalencia que define la continuidad de las funciones y sus derivadas. Coeficiente de Corrección. Coeficientes en una ecuación. Constante universal en turbulencia isotropa. Factor de
- C* Subconjunto de un espacio métrico.
- C** Tensor de Cauchy.
- C** Tensor de cuarto orden de propiedades elásticas o viscoelásticas.
- C* Línea Curva en el plano. Línea curva cerrada sobre una superficie en el espacio. Clase de equivalencia de estados elásticos.
- $\mathbb{C}$  Conjunto de los números complejos.
- d* Desviación global. Métrica o distancia.
- d** Desviación global vectorial.
- D* Diámetro de un tubí a o conducto. Diámetro de un cilindro.
- ID** Espacio vectorial normado o producto interior con derivadas continuas.
- $\mathcal{D}$  Subregión elemental de la región  $\mathcal{V}$ . Difusión molecular.
- D** Tensor velocidad de deformación. Tensor de covarianza de los desplazamientos de dos partículas ó tensor de dispersión.
- e* Energía interna específica. Componentes del tensor de la tercera forma cuadrática fundamental. Determinante del tensor **e**. Error global. Elemento neutro de un grupo. Excentricidad de una elipse.
- e** Vectores (versores) bases ortonormales en un sistema de coordenadas cartesiano  $oy_1y_2y_3 \dots y_n$ . Vector de deformación  $\mathbf{e} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$  sobre un plano cuya normal es **n**. Error global vectorial.
- E* Error en la cuadratura. Energía interna total (Energía térmica). Energía específica en un canal. Función de espectro de energía. Energía en relatividad.
- E** Módulo de elasticidad de Young.
- $\mathbb{E}$  Variedad (diferencial) lineal.
- $\mathbb{E}$  Espacio métrico. Espacio vectorial normado o producto interior con derivadas continuas.
- E** Tensor de deformación infinitesimal.
- $\mathbb{E}$  Tensor de deformación finita.
- $\mathcal{E}$  Energía total. Densidad del espectro de potencia. Clase de equivalencia.
- $\mathfrak{E}$  Densidad del espectro de potencia  $\mathfrak{E}(k) = |\mathfrak{F}[f](k)|^2$
- f* Factor de fricción de Darcy-Weisbach. Función escalar. Magnitud o componente de una fuerza específica por unidad de volumen (ó masa).
- f** Funcional lineal o forma bilineal.

- $f$  Función que define una superficie.
- $\mathbf{f}$  Fuerza específica por unidad de volumen (ó masa). Función vectorial. Difeomorfismo definido sobre el flujo de una región del espacio.
- $F$  Función. Transformada de Fourier de la función  $f$ . Magnitud o componente de una fuerza.
- $\mathcal{F}$  Función que define a una superficie dual.
- $\mathcal{F}$  Conjunto de todos los difeomorfismos definidos sobre el flujo de una región del espacio. Un Funcional cualquiera. Aplastamiento probabilística isótropo y normalizado. Aplastamiento probabilístico direccional.
- $f$  Frecuencia de incidencia de la distribución de una variable aleatoria en un valor dado. Frecuencia de oscilación.
- $\mathfrak{F}$  Transformada de Fourier.
- $\mathcal{F}r$  Número de Froude  $\mathcal{F}r = U/\sqrt{gL}$
- $\mathbb{F}$  Cuerpo o Campo escalar  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ .
- $\mathbf{F}$  Fuerza. Tensor Gradiente de deformación.
- $\mathbf{IF}$  Tensor de cambio del vector de área infinitesimal  $= |\mathbf{F}| \mathbf{F}^{-t}$ . Fuerza global interna en una sección de una viga.
- $\mathcal{F}$  Impulso de las fuerzas. Tensor gradiente de deformación admisible. Fuerza de Minkowski.
- $\mathbf{F}$  Tensor de cuarto orden del aplastamiento probabilístico.
- $g$  Aceleración de la gravedad. Energía libre de Gibbs específica. Métrica del espacio. Componentes del tensor métrico correspondiente al sistema de coordenadas  $ox^1x^2x^3 \dots x^n$ . Función escalar.
- $g$  Funcional lineal o forma bilineal.
- $g$  Fuerza de cuerpo o a distancia, específica por unidad de masa. Función vectorial. Difeomorfismo uniparmétrico que define el flujo de una región del espacio. Fuerza distribuida sobre una viga.
- $G$  Función. Transformada de Fourier de la función  $g$ .
- $\mathcal{G}$  Conjunto de todos los difeomorfismos uniparmétricos que definen el flujo de una región del espacio.
- $G$  Energía libre de Gibbs total. Métrica del espacio. Componentes del tensor métrico correspondiente al sistema de coordenadas  $OX^1X^2X^3 \dots X^n$ . Campo escalar.
- $G$  Módulo de corte.
- $G$  Componentes del tensor de Einstein. Curvatura de Einstein.
- $\mathcal{G}$  Filtro de una función.
- $\mathcal{G}e$  Número de convección natural  $\mathcal{G}e = g \beta \Delta T L / U^2$ .
- $\mathcal{G}r$  Número de Grashof  $\mathcal{G}r = \mathcal{G}e \mathcal{R}e^2 = g \beta \Delta T L^3 / \nu^2$ .
- $\mathcal{G}$  Grupo.
- $\mathbf{G}$  Tensor gradiente de velocidad. Tensor de cambio del vector de área infinitesimal  $= |\mathbf{J}| \mathbf{J}^{-t}$ . Fuerza localizada sobre una viga.
- $\mathcal{G}$  Vector de torque específico por unidad de masa para el caso de un material polar.
- $h$  Entalpía específica. Función que define una superficie. Paso de integración. Tama no de los intervalos regulares. Coeficiente de convección de calor. Pérdida de altura global por efectos viscosos. Altura de un montículo. Profundidad de un canal. Velocidad areolar o el doble de ella.
- $\mathbf{h}$  Cantidad de movimiento angular relativa al sistema de coordenadas inercial (absoluta).
- $H$  Entalpía total. Coeficiente global de transferencia de calor. Campo escalar. Componentes del tensor hessiano. Integral.
- $H$  Curvatura Media.
- $\mathbf{IH}$  Grupo o subgrupo. Función escalón de Heaviside.
- $\mathbf{H}$  Cantidad de movimiento angular relativa al sistema de coordenadas no inercial (relativa). Tensor hessiano.
- $\mathcal{H}$  Helicidad  $= \overline{\mathbf{v}'} \cdot \overline{\mathbf{w}'} / 2$ . Hamiltoniano.
- $\mathbf{IH}$  Cantidad de movimiento angular relativa al sistema de coordenadas no inercial, debida a la rotación (relativa).
- $i$  Base de los número imaginarios  $i = \sqrt{-1}$ .
- $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}$  Versor en el eje  $x$  en un sistema cartesiano tridimensional.
- $I$  Intervalo en  $\mathbb{R}$ . Momento de inercia de área respecto a un eje (ó ejes). Integral. Operador identidad.
- $\mathcal{I}$  Integral. Integral funcional.
- $\mathbf{I}$  Tensor de momentos y productos de inercia. Tensor unitario.
- $\mathbf{I}$  Primer invariante de un tensor de segundo orden.
- $\mathbf{II}$  Segundo invariante de un tensor de segundo orden. Ideal algebraico.
- $\mathbf{III}$  Tercer invariante de un tensor de segundo orden.
- $\mathbf{II}$  Tensor de inercia.
- $\mathfrak{S}$  Parte imaginaria de un número complejo.
- $j$  Jacobiano de una transformación. Componentes del tensor jacobiano de la transformación de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{X}$ .
- $\mathbf{j}$  Vector flujo de masa por difusión. Flujo por difusión en la ecuación general de transporte.
- $\hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{j}}$  Versor en el eje  $y$  en un sistema cartesiano tridimensional.
- $J$  Función jacobiano de una transformación. Flujo total (convección-difusión) en la ecuación general de transporte.
- $J$  Jacobiano de una transformación. Componentes del tensor jacobiano de la transformación de  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{x}$  o del tensor jacobiano de una función vectorial. Momento inercial polar de área.
- $\mathcal{J}$  Jacobiano admisible.

- J** Tensor jacobiano de una transformación (mixto). Tensor jacobiano de una deformación o de una función vectorial. Vector flujo total (convección + difusión) en la ecuación general de transporte.
- k** Conductividad térmica. Componentes de las variables auxiliares en el método Runge-Kutta. Energía cinética turbulenta. Gradiente viscométrico de la velocidad. Exponente isoentrópico que es la relación entre los calores específicos a presión y volumen constante. Rugosidad aparente de Nikuradse basado en el tamaño de grano de arena. Constante en relatividad.
- k** Rotacional del vector desplazamiento **u**. Variables auxiliares en el método Runge-Kutta.
- $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{K}}$**  Versor en el eje  $z$  en un sistema cartesiano tridimensional.
- k** Rugosidad superficial de un conducto o una pared.  $\mathbf{k}_s$  = Rugosidad equivalente de Nikuradse, basada en el tamaño del grano de arena usado.
- K** Módulo de elasticidad volumétrica o isotrópica.
- K** Pérdida local. Coeficiente.
- K** Curvatura de Gauss.
- $\mathbb{K}$**  Anillo.
- K**** Tensor de desplazamiento rígido infinitesimal.
- IK**** Tensor de desplazamiento rígido finito.
- $\mathcal{K}$**  Energía cinética.
- l** Medida de la longitud de una curva. Escala de longitud en el rango inercial de la turbulencia. Longitud de mezcla. Longitud característica.
- l** Forma multilineal.
- $\ell$**  Alargamiento unitario. Lagrangeano específico. Escala de longitud. Escala de longitud en el rango disipativo de la turbulencia. Distancia longitudinal. Longitud de Mezcla.
- l** Momento lineal relativo al sistema de coordenadas inercial (absoluto). Longitud de escala ó longitud característica vectorial.
- $\ell$**  Vector longitudinal.
- L** Longitud. Longitud Característica. Integral de volumen. Integral de Lebesgue. Operador lineal de tipo diferencial. Espacio de Lebesgue.
- $\mathbb{L}$**  Conjunto de todas las transformaciones lineales o multilineales.
- $\mathbb{L}w$**  Número de Lewis,  $\mathbb{L}w = \mathcal{D}/\alpha$
- L** Momento lineal relativo al sistema de coordenadas no inercial (relativo). Tensor gradiente de desplazamiento.
- $\mathcal{L}$**  Línea Curva en el espacio cerrada o abierta. lagrangeano. Escala integral.
- $\mathcal{L}$**  Tensor de esfuerzos de Leonard.
- $\mathcal{L}$**  Transformada de Laplace.
- m** Masa. Masa total de un componente o de una fase. Masa por unidad de longitud. Dimensión de un espacio vectorial. Masa concentrada en un punto.
- $\dot{m}$**  Caudal másico relativo.
- m** Flujo por convección en la ecuación general de transporte.
- M** Cota superior de alguna función, su módulo o su norma. Variedad diferenciable. Número de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Peso molecular. Peso molecular de un componente químico para sistemas multicomponentes. Masa de un cuerpo celeste.
- $Ma$**  Número de Mach,  $Ma = U/c$ .
- $\mathbb{M}$**  Conjunto de todas las formas multilineales.
- M** Momento de fuerza. Momento de flexión interno en una sección de una viga.
- IM**** Momento global interno en una sección de una viga.
- $\mathcal{M}$**  Impulso de los momentos de fuerzas.
- n** Número total de moles dentro de un sistema multicomponente. Grado del polinomio. Ultimo término de una serie. Rugosidad de Manning. Orden del método. Inverso del exponente de la Ley de Potencia. Dimensión de un espacio vectorial. Concentración molar por unidad de volumen = densidad molar aparente (por unidad de volumen total).
- n** Normal a una superficie. Torque distribuido sobre una viga.
- N** Variedad diferenciable. Número de etapas del método Runge-Kutta. Número total de especies químicas dentro de un sistema multicomponente. Número total de elementos dentro de una serie. Grado del polinomio cuando  $n$  se usa como dimensión del dominio.
- N** Componente normal del vector tracción **t**.
- $\mathbb{N}$**  Espacio nulo o núcleo de una transformación lineal.
- $Nu$**  Número de Nusselt  $Nu = hL/k = qL/(k\Delta T)$ .
- N** Vector normal unitario a la superficie dual. Torque localizado sobre una viga.
- $\mathcal{N}$**  Vecindad de un punto.
- $\mathbb{N}$**  Conjunto de los números naturales.
- o** Origen del sistema de coordenadas  $xyz$ .
- O** Origen del sistema de coordenadas  $XYZ$ .
- $\emptyset$**  Grupo de tensores de segundo orden ortogonales.
- p** Presión modificada. Orden del método Runge-Kutta.
- p** Cantidad de movimiento lineal relativa al sistema de coordenadas inercial (absoluta). Fuerza distribuida longitudinal a una viga.
- P** Presión. Campo escalar.
- $\mathbb{P}$**  Espacio de los polinomios sobre un álgebra lineal.
- P** Punto central del espacio. Punto cualquiera del espacio.
- $\mathcal{P}$**  Parte de un cuerpo material. Función de distribución de las probabilidades. Producción de energía cinética turbulenta.
- $\mathcal{P}$**  Función vectorial de distribución de las probabilidades.

- P** Cantidad de movimiento lineal relativa al sistema de coordenadas no inercial (relativa). Campo escalar, vectorial o tensorial. Fuerza normal interna en una sección de una viga.
- Pe** Número de Peclet,  $Pe = Re Pr$ .
- Pr** Número de Prandtl,  $Pr = \nu/\alpha$ .
- IP** Cantidad de movimiento lineal relativa al sistema de coordenadas no inercial, debida a la rotación (relativa).
- prob Probabilidad de una variable aleatoria.
- $\wp$  Función de presión de exclusiva dependencia con respecto a la densidad  $P = \wp(\rho)$  (Por ejemplo, en los casos isotérmicos o isoentrópicos). Función de densidad de las probabilidades.
- $\wp$  Vector de las densidades de las probabilidades en el espacio. Vector cantidad de movimiento de Minkowski.
- $q$  Magnitud o componente del flujo de calor.
- q** Vector flujo de calor por conducción. Fuerza distribuida transversal a una viga.
- Q** Campo escalar. Componentes de **Q**. Caudal volumétrico absoluto o relativo.
- Q** Tensor ortogonal o tensor de los cosenos directores. Campo escalar, vectorial o tensorial. Fuerza de corte interna en una sección de una viga.
- Q** Tensor de velocidad de giro del marco de referencia  $\sharp$  con respecto al marco de referencia  $\sharp^*$ ,  $\dot{Q} = \dot{Q} \cdot Q^t$ .
- Q** Calor transferido.
- Q** Conjunto de los números racionales.
- $r$  Distancia radial al origen del sistema de coordenadas ó hasta algún punto **P** central. Módulo del vector de posición. Distancia radial a un eje. Coordenada radial. Posición radial. Distancia entre dos puntos. Distancia transversal.
- r** Vector de posición respecto al sistema de coordenadas inercial. Vector de posición. Vector entre dos puntos. Vector transversal.
- R** Radio de un cilindro o tubería. Componentes de los tensores de Riemann-Christoffel. Cota inferior de una función, su módulo o su norma. Campo escalar. Residuo en la interpolación polinómica. Relación hidráulica. Componentes del tensor de Ricci. Curvatura escalar o total de Ricci.
- R** Constante universal de los gases ideales.
- R** Vector de posición respecto al sistema de coordenadas no inercial. Tensor de rotación. Función de estructura de una variable aleatoria. Tensor de covarianza de las aceleraciones de dos partículas.
- R** Región del plano. Restricción o vínculo. Componentes del tensor de correlación de dos puntos. Componentes del tensor de correlación probabilística.
- R** Imagen o rango de una transformación lineal.
- Re** Número de Reynolds,  $Re = \rho U L/\mu$ .
- Ro** Número de Rossby,  $Ro = U/(\Omega L)$ .
- R** Vector de posición respecto al centro de masa en el sistema de coordenadas no inercial.
- R** Tensor de correlación de dos puntos. Tensor de segundo orden de correlación probabilística.
- R** Conjunto de los números reales.
- R** Parte real de un número complejo.
- $s$  Entropía específica. Parámetro diferente a  $t$ . Parámetro en la transformada de Laplace.
- s** Vector tracción originado por el tensor de esfuerzo de esfuerzo de Piola-Kirchhoff **S**.
- S** Entropía total. Función de estructura. Pérdida específica por unidad de longitud. Pendiente de un canal.
- Sc** Número de Schmidt  $Sc = \nu/\mathcal{D}$ .
- Sk** Número de Stokes relación entre los tiempos característicos de la partícula y el fluido,  $Sk = \tau_p/\tau_f$  con  $\tau_p = m_p U_p/F_p$  (la velocidad característica de la partícula es  $U_p = \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p\|$  y la fuerza característica de la partícula es la fuerza de arrastre  $F_p = \|\mathbf{F}_D\|$ ) y  $\tau_f = L_f/U_f$  (para el flujo turbulento  $\tau_f = l_\epsilon/v'_{rms}$  ó también  $\tau_f = k/\epsilon$ ).
- Str** Número de Strouhal,  $Str = L/(U \tau)$ .
- St** Número de Stanton,  $St = Nu/Pe$ .
- S** Esfera en un espacio métrico.
- S** Area superficial de la frontera de un sólido, un cuerpo o una región del espacio. Perímetro mojado en un conducto. Asimetría probabilística isotropa y normalizada. Asimetría probabilística direccional.
- S** Perímetro mojado.
- $s$  Estado elástico.
- S** Tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff. Término de fuente en la ecuación general de transporte. Función tensorial de estructura. Tensor de covarianza de las velocidades de dos partículas. Pendiente bidimensional de un canal. Pérdida específica bidimensional de un canal.
- S** Tensor de correlación de dos puntos promediado.
- S** Tensor de tercer orden de la asimetría probabilística.
- $t$  Tiempo. Tiempo característico. Parámetro para definir una curva en el espacio.
- t** Fuerza de superficie o de contacto específica por unidad de área. Vector Tracción originado por el Tensor de esfuerzo total **T**.
- T** Valor absoluto de la componente tangencial del vector tracción **t**.
- T** Temperatura. Transformación lineal. Espacio tangente de una variedad diferenciable.
- T** Tensor de esfuerzo total. Transformación lineal. Torque interno en una sección de una viga.

- $\mathcal{T}$**  Tensor de esfuerzo viscoso o viscoelástico.
- $u$  Parámetro para definir una región del espacio. Función.
- $\mathbf{u}$**  Vector desplazamiento. Vector velocidad.
- $U$**  Carta de un espacio. Velocidad promedio en un área de flujo. Velocidad Característica. Transformación lineal. Función potencial.
- $\mathcal{U}$**  Componentes de  $\mathbf{U}$ .
- $\mathbf{U}$**  Grupo de tensores unimodulares.
- $\mathbb{U}$**  Espacio vectorial.
- $\mathbf{U}$**  Tensor de extensión derecho o positivo. Velocidad bidimensional.
- $\mathbf{U}$**  Tensor cuya integral de línea permite obtener el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$ .
- $\mathcal{U}$**  Energía potencial.
- $v$  Componentes de la velocidad  $\mathbf{v}$ . Volumen específico. Velocidad de un sistema inercial. Parámetro para definir una región del espacio.
- $v$  Rapidez o módulo de la velocidad  $\mathbf{v}$ . Componentes de la función velocidad del flujo  $\mathbf{v}$ .
- $\mathbf{v}$  Velocidad relativa al sistema de coordenadas inercial. Velocidad de flujo. Velocidad de un sistema inercial.
- $\mathbf{v}$  Función velocidad de los puntos materiales, con descripción espacial  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ . Función de velocidad de flujo.
- $V$**  Carta de un espacio. Módulo de la velocidad.
- $V$**  Función de Evolución del volumen  $\mathcal{V}$ . Rapidez o módulo de la velocidad de propagación  $\mathbf{V}$  de la superficie dual.
- $\mathbb{V}$**  Espacio vectorial.
- $\mathcal{V}$**  Volumen medido en un sistema de coordenadas cartesianas.
- $\mathbf{V}$**  Módulo.
- $\mathbf{V}$**  Velocidad relativa al sistema de coordenadas no inercial. Tensor de extensión izquierdo o negativo. Velocidad de propagación de la superficie dual. Velocidad de una partícula de fluido.
- $\mathbf{W}$**  Velocidad relativa al sistema de coordenadas no inercial colocado en el centro de masa. Tensor de deformación o de extensión izquierdo o negativo.
- $\mathcal{V}$**  Volumen material. Volumen arbitrario. Región (o dominio) del espacio que evoluciona con el tiempo. Región del espacio.
- $v$  Volumen de una partícula o unidad menor.
- $w$  Parámetro para definir una región del espacio. Término de fuente en la ecuación de transporte por difusión. Velocidad compleja.
- $\mathbf{w}$**  Vorticidad.
- $W$**  Espacio de Sobolev.
- $We$**  Número de Weber.
- $\mathbb{W}$**  Espacio Vectorial.
- $\mathbf{W}$**  Módulo.
- $\mathbf{W}$**  Tensor velocidad de giro.
- $\mathcal{W}$**  Trabajo de las fuerzas.
- $x$  Coordenadas correspondiente al sistema de coordenadas  $ox_1x_2x_3 \dots x_n$ . Coordenadas espaciales.
- $\mathbf{x}$  Componentes del difeomorfismo  $\chi$ .
- $\mathbf{x}$  Vector de posición espacial.
- $X$**  Coordenadas correspondiente al sistema de coordenadas  $OX_1X_2X_3 \dots X_n$ . Coordenadas materiales. Coordenadas sobre superficies o espacios inmersos. Fracción molar de un componente químico para sistemas multicomponentes.
- $X$**  Punto de un cuerpo material. Componentes del difeomorfismo  $\chi$ .
- $\mathbf{X}$**  Vector de posición material. Vector de posición en la configuración de referencia. Vector de posición de una partícula de fluido.
- $y$  Coordenadas cartesianas en un sistema de coordenadas cartesiano  $oy_1y_2y_3 \dots y_n$ . Profundidad en un canal.
- $\mathbf{y}$**  Vector de posición espacial.
- $Y$**  Fracción másica de un componente químico para sistemas multicomponentes. Profundidad en un canal.
- $z$  Cota de nivel.
- $\mathbf{Z}$**  Tensor que define las ecuaciones de compatibilidad.
- $\mathbb{Z}$**  Conjunto de los números enteros.
- $\mathbf{0}$**  Vector o tensor nulo.
- $0$  Transformación u operador nulo.

## 2. LISTA DE SIMBOLOS GRIEGOS.

- $\alpha.. \omega$  Elementos de un espacio vectorial.
- $\alpha$  Coeficiente de expansión térmica. Difusividad térmica  $\alpha = k/(\rho C_p)$ . Coeficiente de corrección. Fracción volumétrica de partículas en un fluido. Angulo de ataque de un perfil aerodinámico.
- $\alpha$**  Aceleración angular del sistema de coordenadas no inercial.
- $\beta$  Coeficiente de expansión volumétrica. Frontera de un conjunto en un espacio métrico. Gradiente de presión. Fuerza motriz en un conducto. Componente de la velocidad o rapidez relativa a la velocidad de la luz.
- $\beta$**  Vector velocidad relativa a la velocidad de la luz.
- $\gamma$  Corte sobre un plano cuya normal es  $\mathbf{n}$ . Radio relativo al espesor  $\delta$  de capa límite. Deformación tangencial para las condición de deformación cortante máxima. Factor  $[1 - (v/c)^2]^{-1/2} > 1$  en relatividad especial.
- $\dot{\gamma}$  Tasa de deformación al corte puro. Parámetro de deformación para el modelo no newtoniano generalizado.
- $\Gamma$**  Símbolos de Christoffel. Circulación de un campo vectorial. Difusividad general en la ecuación general de

- transporte. Correlación de dos funciones. Componentes del tensor de covarianza estadística. Intensidad de un vórtice simple.
- $\Gamma$  Tensor de covarianza probabilística. Tensor de correlación de dos funciones vectoriales o tensoriales.
- $\delta$  Deltas de Kronecker. Autovalores del tensor velocidad de deformación  $\mathbf{D}$ . Desviación local. Diámetro de un conjunto en un espacio métrico. Espesor de la capa límite.
- $\Delta$  Desviación local vectorial. Ancho efectivo de un filtro unidimensional. Discriminante de una ecuación polinómica de segundo grado. Gradiente de presión en la capa límite. Desplazamiento.
- $\Delta$  Vector de anchos efectivos de un filtro multidimensional.
- $\epsilon$  Símbolos de Levi-Civita relativos o componentes de los tensores de permutación alternante relativos. Radio de la esfera  $\sigma$ . Autovalores del tensor de deformación infinitesimal  $\mathbf{E}$ . Deformación infinitesimal. Error local. Perturbación. Angulo de precesión para una revolución orbital.
- $\epsilon$  Error local vectorial.
- $\varepsilon$  Símbolos de Levi-Civita absolutos o componentes de los tensores de permutación alternante absolutos. Extensión normal a un plano cuya normal es  $\mathbf{n}$ . Disipación turbulenta viscosa. Deformación axial para las condiciones de deformación cortante máxima. Deformación unitaria. Rugosidad de la tubería.
- $\varepsilon$  Tensor de permutación alternante absoluto.
- $\zeta$  Traza del tensor de esfuerzo  $\mathbf{S}$ . Constante de integración.
- $\eta$  Forma diferencial. Escala de Kolmogorov. Viscosidad equivalente. Viscosidad en el modelo no newtoniano generalizado. Coordenada relativa  $y/\delta$ . Viscosidad de un material viscoelástico o viscosidad elástica. Relación de profundidades. Variable de similaridad.
- $\eta$  Vector normal a una curva y tangente a la superficie que la contiene.
- $\theta$  Fracción volumétrica de una fase para sistemas multifásicos. Angulo de contacto. Angulo acimutal (Coordenadas Cilíndricas). Angulo cenital (Coordenadas Esféricas). Elemento nulo de un espacio vectorial. Traza del tensor de correlación de dos puntos de la velocidad.
- $\vartheta$  Traza del tensor velocidad de deformación  $\mathbf{D}$ ,  $\vartheta = \text{tr}\mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ . Función característica de las probabilidades.
- $\mathfrak{L}$  Lagrangeano expandido, incluyendo el trabajo de las fuerzas de restricciones o de vínculos.
- $\kappa$  Coeficiente de compresibilidad isotérmica. Curvatura de una curva. Curvaturas de Frenet. Energía cinética específica. Número de onda ó frecuencia angular. Parámetro en la transformada de Fourier. Constante de von Kármán.
- $\kappa$  Mapa de la configuración de referencia de los puntos materiales. Vector de los números de onda espaciales. Vector de parámetros en la transformada de Fourier espacial.
- $\lambda$  Segunda viscosidad o viscosidad volumétrica. Primer coeficiente de Lamé. Autovalor o valor propio. Longitud de onda. Micro-escala. Micro-escala de Taylor. Conductividad térmica cuando el símbolo  $k$  se use en otra variable. Tiempo de relajación de un material viscoelástico. Función exponente en relatividad.
- $\Lambda$  Vector tangente a una curva o a una superficie. Base ortonormal de Frenet.
- $\Lambda$  Variable cuya variación en deformación plástica es el factor de proporcionalidad entre las deformaciones plásticas  $\mathbf{E}^p$  y la parte desviatoria del tensor de esfuerzo  $\mathbf{S}$ . Intensidad de un fuente simple.
- $\Lambda$  Tensor simétrico =  $\mathbf{rr}$ .
- $\mu$  Viscosidad dinámica. Segundo coeficiente de Lamé. Potencial químico. Función exponente en relatividad. Constante másica de un agujero negro.
- $\mu$  Vector normal principal a una curva.
- $\nu$  Módulo de Poisson. Viscosidad cinemática. Forma diferencial.
- $\nu$  Vector binormal a una curva.
- $\pi$  Número 3.1415 92653 58979 32384 62643 .... Plano o superficie que corta un cuerpo.
- $\Pi$  Término de Producción turbulenta. Sección perpendicular de un dominio cilíndrico.
- $\varpi$  Mitad del rotacional del vector desplazamiento  $\mathbf{u}$ .
- $\rho$  Densidad. Radio de curvatura de una curva.
- $\varrho$  Traza del tensor de deformación infinitesimal  $\mathbf{E}$ . Densidad aparente (por unidad de volumen total) de un componente químico para sistemas multicomponentes.
- $\sigma$  Tensión superficial. Radio de torsión de una curva. Círculo o Esfera de radio infinitesimal  $\epsilon$ . Autovalores del tensor esfuerzo  $\mathbf{T}$  o  $\mathbf{S}$ . Número de Prandtl para las ecuaciones de  $k$  y  $\varepsilon$ . Componentes del tensor de esfuerzos elásticos con descripción material. Esfuerzo principal o axial.
- $\sigma$  Tensor de tensión superficial.
- $\tau$  Tiempo con respecto al cual se define una configuración material. Torsión de una curva. Esfuerzo cortante o de fricción. Escala de tiempo. Tiempo característico. Tiempo propio en relatividad ó particular. Cambio de coordenada tiempo. Variable tiempo cuando el símbolo  $t$  está siendo usado. Componentes del tensor de esfuerzos viscosos con descripción espacial.
- $v$  Componentes de la velocidad de Minkowski.
- $\Upsilon$  Traza del tensor de esfuerzo  $\mathbf{T}$ . Cambio de coordenada radial.
- $\mathbf{v}$  Vector Velocidad de Minkowski.
- $\phi$  Función Potencial de Velocidad. Función de corte de Prandtl. Fracción másica de una fase en sistemas

- multifásicos. Carga másica de partículas (masa de partículas/masa de fluido). Mapas sobre espacios (abstractos, topológicos, funcionales, etc.). Angulo acimutal (Coordenadas Esféricas).
- $\phi$  Campo escalar o vectorial. Transformada de Fourier del tensor de correlación de dos puntos.
- $\Phi$  Término de fuente o de generación de energía. Función de disipación o de generación. Término de disipación viscosa. Potencial complejo.
- $\Phi$  Primera forma cuadrática fundamental.
- $\varphi$  Función potencial de una fuerza conservativa. Función polar. Función de corte para secciones no circulares. Componentes del tensor gravitacional. Funciones universales de la turbulencia isótropa. Mapas sobre espacios (abstractos, topológicos, funcionales, etc.).
- $\varphi$  Campo escalar, vectorial o tensorial. Propiedad (escalar, vectorial o tensorial) transportada. Difeomorfismo uniparamétrico que define un flujo de una porción del espacio  $\mathcal{V}_0$  en otra porción  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$ .
- $\chi$  Coordenada deformada sobre una curva deformable.
- $\chi$  Coordenada de referencia sobre una curva deformable.
- $\mathfrak{X}$  Mapa de la posición actual de los puntos materiales.
- $\mathcal{X}$  Función de historia del paso de la partícula. Punto del espacio de eventos de una variable aleatoria.
- $\chi$  Mapa invertible de la posición actual de una cierta posición de referencia de los puntos materiales. Difeomorfismo definido por el flujo  $\varphi_t$ .
- $\mathcal{X}$  Inverso del mapa  $\chi$  de la posición actual. Difeomorfismo definido por el inverso del flujo  $\varphi_t$ . Mapa aleatorio continuo.
- $\psi$  Función de corriente de velocidad. Función universal de la aceleración de dos partículas. Función conjugada de corte.
- $\psi$  Campo escalar o vectorial. Divergencia del tensor de deformación infinitesimal. Densidad en el dominio del número de onda del tensor de energía  $\langle \mathbf{v}' \mathbf{v}' \rangle$ .
- $\Psi$  Término de fuente o de generación de entropía.
- $\Psi$  Segunda forma cuadrática fundamental.
- $\omega$  Angulo sólido. Forma diferencial. Módulo del vector velocidad angular. Frecuencia angular.
- $\Omega$  Término de fuente o de generación de masa. Función de anormalidad de un campo vectorial o tensorial Beltrami. Dominio del espacio. Velocidad angular característica. Enstrofia  $= \overline{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}'}/2$ .
- $\Omega$  Tercera forma cuadrática fundamental.
- $\omega$  Velocidad angular del sistema de coordenadas no inercial. Velocidad angular local = mitad de la vorticidad  $\mathbf{w}$ .
- $\mathfrak{N}$  Funcional de la historia del movimiento de un cuerpo o funcional de memoria.
- $a, b, c, \dots$  Índices relativos al sistema de coordenadas  $OX_1X_2X_3 \dots X_n$  o  $\tilde{o}\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \dots \tilde{x}_n$ .
- $i, j, k, \dots$  Índices relativos al sistema de coordenadas  $ox_1x_2x_3 \dots x_n$ .
- $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  Índices relativos al sistema de coordenadas  $OX_1X_2X_3 \dots X_n$  o  $\tilde{o}\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \dots \tilde{x}_n$ . Especies en un sistema multicomponente.
- 0 Relativo al esfuerzo de fluencia. Límite del comportamiento elástico de un sólido.
- 1 Relativo a una posición, estado, etc. inicial. Perteneciente a un volumen etiquetado 1. Acompañando al término 1.
- 2 Relativo a una posición, estado, etc. final. Perteneciente a un volumen etiquetado 2. Acompañando al término 2.
- $\triangleright$  Relativo al plano octaedral.
- $a$  Relativo al volumen arbitrario. Relativo a la partícula  $a$ .
- A** Relativo al tensor **A**.
- $b$  Relativo a la partícula  $b$ .
- $\mathbf{B}$  Relativo a las fuerzas de Basset. Relativo a la fuerza de flotación o boyantez.
- IB** Relativo a una cierta base ordenada en un espacio vectorial.
- $c$  Relativo al centro de masa. Relativo a la compresión. Relativo a la energía cinética. Relativo al eje de un cilindro. Relativo a crítico.
- $d$  Relativo al arrastre.
- $\mathbf{D}$  Relativo al diámetro. Relativo a la fuerza de arrastre.
- D** Relativo al tensor velocidad de deformación.
- $e$  Relativo a los coeficientes de Lamé o la elasticidad. Relativo a la entrada.
- E** Relativo al tensor de deformación infinitesimal.
- $f$  Relativo a la fricción. Relativo al factor de fricción (factor de fricción de Fanning= $C_f$ ). Relativo al fluido.
- $\mathbf{G}$  Relativo a la fuerza de gravedad.
- $i$  Relativo a la interfaz, interfase o a la superficie singular. Especie química dentro de un sistema multicomponente.
- $\Im$  Indica que la función o variable es imaginaria.
- $j$  Especie química dentro de un sistema multicomponente.
- $k$  Relativo a la energía cinética turbulenta.
- $\kappa$  Relativo al número de onda (ó frecuencia angular)  $\kappa$ .
- K** Relativo a la escala de Kolmogorov.
- $l$  Relativo a la fase líquida. Relativo a la sustentación, relativo a la escala  $l$ . Relativo a laminar.
- $L$  Relativo a la longitud  $L$ . Relativo a la fuerza de sustentación.

### 3. LISTA DE SUBINDICES.

- $\ell$  Relativo a la escala  $\ell$ . Relativo a la dirección longitudinal.
- $m$  Relativo al volumen material. Valor medio o promedio. Número total de especies químicas dentro de un sistema multicomponente.
- $max$  Valor máximo.
- $M$  Relativo a las fuerzas de masa virtual.
- $n$  Dirección normal o perpendicular. Elemento genérico de una serie. De orden  $n$ . Relativo a la dirección transversal. Relativo a normal.
- $o$  Relativo al origen del sistema de coordenadas no inercial. Relativo a una configuración de referencia inicial. Relativo al reposo.
- $p$  A presión constante. Relativo al comportamiento de un sólido plástico. Relativo a la partícula.
- $P$  A presión constante.
- $r$  Relativo a la radiación o a las reacciones químicas. Cantidad relativa.
- $\Re$  Indica que la función o variable es real.
- $rms$  Raíz cuadrada de la media del cuadrado (Root of the Mean Square).
- $s$  Sobre una superficie sólida. Parámetro de un difeomorfismo uniparamétrico. Relativo a la salida. Relativo a la rugosidad de Nikuradse basada en el tamaño del grano de arena.
- $t$  Relativo al tiempo  $t$ . Parámetro de un difeomorfismo uniparamétrico. Relativo a la tracción. Relativo a la turbulencia. Dirección transversal.
- $t$  Tangencial.
- $T$  A temperatura constante. Relativo a la transformación lineal  $T$ .
- $\tau$  Relativo a las fuerzas de superficie.
- $\mathbf{T}$  Relativo al tensor de esfuerzo.
- $v$  A volumen específico constante. Relativo a la fase de vapor. Relativo a la velocidad.
- $V$  A volumen constante.
- $w$  Relativo a la pared de una superficie sólida (placa plana, tubería, etc.).
- $x$  Relativo al sistema de coordenada  $ox_1x_2x_3 \dots x_n$ .
- $x$  Vector axial de un tensor.
- $X$  Relativo al sistema de coordenada  $OX_1X_2X_3 \dots X_n$ .
- $\varepsilon$  Relativo a la disipación turbulenta viscosa. Relativo a la escala o rango integral en turbulencia.
- $\varphi$  Relativo a la propiedad transportada  $\varphi$ .
- $\sigma$  Relativo a una función de densidad de probabilidades de tipo gaussiana.
- $\tau$  Relativo al tiempo  $\tau$ . Relativo al esfuerzo cortante.
- $\mu$  Relativo a los esfuerzos viscosos o turbulentos.
- $\nu$  Relativo a la viscosidad.
- $\kappa$  Relativo al Mapa de la configuración de referencia de los puntos materiales.
- $\circ$  Referente a la superficie material de un sistema con superficie interfaz, sin incluir la curva interfaz  $C_i$ .
- $*$  Referente al volumen material sin incluir la superficie interfaz.
- $\infty$  Valor de la variable en el infinito.
- $\parallel$  Componente paralela de un vector.
- $\perp$  Componente perpendicular de un vector.

#### 4. LISTA DE SUPERINDICES.

- $a, b, c, \dots$  Indices relativos al sistema de coordenadas  $OX_1X_2X_3 \dots X_n$  o  $\tilde{o}\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3 \dots \tilde{x}_n$ .
- $i, j, k, \dots$  Indices relativos al sistema de coordenadas  $ox^1x^2x^3 \dots x^n$ .
- $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  Indices relativos al sistema de coordenadas  $OX^1X^2X^3 \dots X^n$  o  $\tilde{o}\tilde{x}^1\tilde{x}^2\tilde{x}^3 \dots \tilde{x}^n$ .
- $e$  Relativo a la parte elástica del comportamiento de un sólido plástico.
- $h$  Transpuesto conjugado.
- $M$  Energía mecánica.
- $n$  Grado  $n$ . Dimensión de espacio euclidiano. Grado de la continuidad.
- $p$  Relativo a la parte plástica del comportamiento de un sólido plástico.
- $s$  Parte simétrica.
- $t$  Transpuesto. Cantidad de referencia.
- $T$  Energía térmica.
- $w$  Parte anti-simétrica.
- $\dot{O}$  Tasa de variación de la cantidad. Obtenido de la derivada con respecto al parámetro  $s$ ,  $t$  o el tiempo.
- $O'$  Derivada respecto a la única variable de dependencia.
- $\hat{O}$  Propiedad específica molar. Derivada convectiva alta. Vector versor. Transformada de Fourier de una función. Variable modificada. A condiciones estándares.
- $\hat{o}$  Versor en un sistema de coordenadas.
- $\ddot{O}$  Derivada convectiva corrotacional.
- $\tilde{O}$  Relativo al sistema de coordenadas no inercial. Derivada convectiva baja. Bola o entorno reducido. Variable aleatoria centrada. Variable bajo un cambio de métrica.
- $\breve{O}$  Propiedad específica por unidad de volumen total. Componentes del tensor adjunto.
- $\tilde{O}$  Complejo conjugado. Clausura de un subconjunto de un espacio métrico. Nuevas coordenadas o cantidades producidas por una transformación del sistema de coordenadas (se emplea normalmente cuando  $\tilde{O}$  se ha usado ya para definir las variables en el sistema de coordenadas material  $OX_1X_2X_3$ ). Derivada convectiva



de las componentes, la cual se adapta de acuerdo a los índices, si son covariantes o contravariantes. Derivada material media. Promedio temporal o variable filtrada (se usa cuando la “barra ancha” interfiere).

- $\overline{\phantom{x}}$  Promedio temporal. Variable filtrada con un filtro temporal o espacial.
- $\tilde{\phantom{x}}$  Componentes de un vector o un tensor en el nuevo sistema de coordenadas  $o\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\ldots\tilde{x}_n$  o nuevas coordenadas producidas por una transformación. Cambio de descripción de una función escalar, vectorial o tensorial con descripción espacial a la función con descripción material, ó viceversa. Variables originadas de este cambio de descripción espacial-material. Variables relativas al sistema de coordenadas materiales. Derivada convectiva de deformación. Variable diferente o modificada. Variable filtrada (se usa cuando la “tilde ancha” interfiere). Presión o altura piezométrica o reducida. Variable en el sistema de unidades original.
- $\widetilde{\phantom{x}}$  Variable filtrada con un filtro secundario, temporal o espacial.
- $\overset{\circ}{\phantom{x}}$  Interior de un subconjunto de un espacio métrico.
- Interno. Perteneciente al volumen 1. Relativo a menos la disipación del trabajo del tensor de esfuerzo global. Relativo al límite por el lado izquierdo.
- Por el lado opuesto o negativo.
- + Externo. Perteneciente al volumen 2. Relativo al trabajo del vector tracción. Relativo a la subregión de la frontera donde se conoce el vector tracción. Variables de pared en turbulencia. Relativo al límite por el lado derecho.
- + Por el lado positivo.
- \* Relativo a las fuerzas no conservativas. Cantidades observadas desde otro marco de referencia. Subregión del volumen. Espacio Dual. Variable modificada.
- $\circ$  Relativo a las fuerzas conservativas. Relativo a una configuración de referencia inicial. Conjunto anulador.
- $\diamond$  Relativo a las fuerzas de restricciones o vínculos internos al sistema.
- ★ Relativo a las fuerzas no conservativas externas más las fuerzas de restricciones o vínculos internos al sistema.
- Relativo a la fuerza global igual a las fuerzas externas conservativas y no conservativas más las fuerzas de restricciones o vínculos internos al sistema.
- $\circ$  Tensor de segundo orden Isótropo. Relativo al cambio de volumen. Grado de temperatura o de otra cosa.
- / Tensor de segundo orden desviatorio. Relativo al cambio por distorsión. Variable diferente o modificada. Fluctuación con respecto al promedio en el tiempo o a la variable filtrada.
- $\wr$  Fluctuación con respecto a la esperanza estadística, que es una variable o función aleatoria centrada.
- $\perp$  Complemento ortogonal de un subespacio.

## 5. LISTA DE SIMBOLOS ESPECIALES.

- $\vec{d}$  Diferencial inexacta o dependiente del recorrido.
- $\Delta$  Diferencia inexacta o dependiente del recorrido.
- $d/dt$  Operador derivada total con respecto a  $t$ . Derivada material.
- $\delta$  Variación de un funcional.
- $\delta/\delta t$  Operador derivada total con respecto a  $t$ , relativo al sistema de coordenadas no inercial. Derivada convectiva. Derivada intrínseca.
- $\partial/\partial t$  Operador derivada parcial con respecto a  $t$ .
- $D/Dt$  Operador derivada material.
- $\nabla$  Operador diferencial nabla  $\nabla = \mathbf{e}_i \partial/\partial x_i$ .
- $\partial$  Frontera de un dominio.
- $\int$  Integral de línea.
- $\oint$  Integral de línea sobre una curva cerrada.
- tr Traza de un tensor de segundo orden o de una matriz.
- $\sum$  Sumatoria de varios términos.
- $\prod$  Productoria de varios factores.
- , Derivación parcial (o covariante) con respecto a una coordenadas.
- . Producto interior entre vectores y/o tensores. Producto con contracción.
- : Doble producto interior o escalar entre diádicas o tensores. Producto con doble contracción.
- $\times$  Producto vectorial. Producto cartesiano de conjuntos.
- $\wedge$  Producto exterior o de Gibbs.
- $\oplus$  Suma directa de conjuntos. Unión de conjuntos disjuntos.
- $\otimes$  Producto tensorial.
- $\circ$  Composición de funciones.
- + Suma.
- + Operación algebraica denominada “adición”.
- Resta. Signo negativo.
- $\times$  multiplicación. Multiplicación vectorial.
- $\times$  Operación algebraica denominada “multiplicación”.
- / División.
- $\setminus$  Exclusión.
- \* Operación algebraica de tipo binaria. Producto de Convolución.
- # Operación binaria.
- $\sim$  Relación de equivalencia. Igualdad en el orden de magnitud.
- $\gg$  “Mucho mayor que”.
- = Igualdad.
- $\neq$  No igualdad.
- $\equiv$  Definición. Exactitud máxima.

- $\approx$  Aproximación.  
 $\propto$  Proporcionalidad.  
 $\geq$  “Mayor e igual que”.  
 $\gg$  “Mucho mayor que”.  
 $<$  “Menor que” de forma estricta.  
 $\leq$  “Menor e igual que”.  
 $\ll$  “Mucho menor que”.  
 $\cup$  Unión de conjuntos.  
 $\cap$  Intersección de conjuntos.  
 $\subset$  Inclusion (Subconjunto).  
 $\subseteq$  Inclusión e igualdad.  
 $\supset$  Contención (Superconjunto).  
 $\supseteq$  Contención e igualdad.  
 $\parallel$  Paralelismo.  
 $\perp$  Perpendicularidad.  
 $|$  “Tal que”.  
 $\rightarrow$  Función o aplicación entre conjuntos.  
 $\mapsto$  Mapa entre variedades.  
 $\overbrace{\text{OOO}}^{\text{opr.}}$  Agrupación de elementos de una expresión algebraica o lógica bajo una misma operación.  
 $\overline{(\cdot)}$  Obtener el complejo conjugado. Realizar la clausura de un subconjunto de un espacio métrico. Promedio respecto al tiempo. Promedio respecto al espacio cuando las funciones no dependen del tiempo. Filtrado temporal o espacial de un campo.  
 $\widetilde{(\cdot)}$  Filtrado secundario (temporal o espacial) de un campo.  
 $\dot{(\cdot)}$  Derivación respecto al parámetro  $t$  o el tiempo. Derivación material.  
 $\{[(\cdot)]\}$  Símbolos de agrupación en el orden adoptado.  
 $\langle \cdot \rangle$  Promedio respecto al espacio uni, bi o tridimensional, de acuerdo si el subíndice es 1,2 o 3. Promedio estadístico o esperanza de una variable aleatoria.  
 $[\cdot, \cdot]$  Corchete de Poisson.  
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  Producto interior o escalar.  
 $(\cdot, \cdot)$  Par ordenado. Estructura algebraica.  
 $|\cdot|$  Valor Absoluto. Determinante de una Matriz o de un tensor de segundo orden. Módulo de un complejo  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\bar{z}z}$ .  
 $\{\cdot\}$  Matriz columna. Matriz columna de componentes de un vector en una base particular.  
 $[\cdot]$  Matriz. Matriz de componentes de un tensor en una base particular. Unidades fundamentales o dimensiones de un variable  
 $[\cdot]^t$  Matriz transpuesta.  
 $[\cdot]^h$  Matriz hermítica  $= \overline{[\cdot]}^t$ .
- $\|\cdot\|$  Norma.  
 $\llbracket \cdot \rrbracket$  Diferencia de una función en una discontinuidad  
 $(\llbracket f \rrbracket = f_1 - f_2)$ .  
 $\text{cof}(\cdot)$  Tensor o matriz cofactor  $\text{cof}(\cdot) = |\cdot|(\cdot)^{-t}$ .  
 $\dim(\cdot)$  Dimensión finita de un espacio vectorial.  
 $o(\cdot)$  Símbolo de Landau o de orden de magnitud (relativo).  
 $\mathbf{o}(\cdot)$  Símbolo de Landau o de orden de magnitud (relativo) para funciones vectoriales.  
 $O(\cdot)$  Símbolo de Landau o de orden de magnitud (absoluto).  
 $\mathbf{O}(\cdot)$  Símbolo de Landau o de orden de magnitud (absoluto) para funciones vectoriales.  
 $\sharp$  Marco de referencia.  
 $\triangle$  Final de una demostración.

# BIBLIOGRAFIA

## BIBLIOGRAFIA GENERAL

En esta Bibliografía General se ha ordenado de forma alfabética, por el apellido del primer autor, la totalidad de las diferentes publicaciones reportadas en los distintos capítulos y apéndices que conforman esta monografía. Se ha seguido adicionalmente un ordenamiento cronológico cuando el autor principal aparece más de una vez. Las publicaciones periódicas aparecen con el año entre paréntesis, mientras que las monografías no poseen estos.

- Ablowitz, M. J.; Fokas, A. S. **Complex Variables: Introduction and Applications**. Cambridge University Press, 1997. Reprint, 1999.
- Abbot, M. M.; Van Ness, H. C. **Theory and Problems of Thermodynamics**. McGraw-Hill (Schaum's Outline Series), 1972.
- Abraham, R.; Marsden, J. E. **Foundation of Mechanics**, Second Edition. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978. Third Printing, 1981.
- Abraham, R.; Marsden, J. E.; Ratiu, T. **Manifolds, Tensor Analysis, and Applications**, Second Edition. Springer-Verlag (New York), 1988.
- Abramowitz, M.; Stegun, I. A. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. Dover Publications, 1965. Ninth Printing, 1970.
- Achenbach, J. D. **Wave Propagation in Elastic Solids**. North-Holland, 1973. Third Printing, 1980.
- Adams, R. A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, 1975.
- Afgan, N. H.; (Ed.). **Transient Phenomena in Multiphase Flow**. Hemisphere Publishing Corp., 1988.
- Anderson, D. A.; Tannehill, J. C.; Pletcher, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**. Hemisphere Publishing Corporation, 1984.
- Andreussi, P.; Bendiksen K., "An Investigation of Void Fraction in Liquid Slugs for Horizontal and Inclined Gas-Liquid Pipe Flow". **Int. J. Multiphase Flow**, Vol.15, No.6, pp.937-946. (1989).
- Andritsos, N.; Hanratty, T.J., "Interfacial Instabilities for Horizontal Gas-Liquid Gas-Liquid Flows in Pipelines". **Int. J. Multiphase Flow**. Vol.13, No.5, pp.583-603. (1987).
- Anosov, D. V.; Arnold, V. I.; (Eds.). **Dynamical Systems I**, Ordinary Differential Equations and Smooth Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1988.
- Ansari, A. M., **A Comprehensive Mechanistic Model for Upward Two-Phase Flow**. MSc. Thesis, Tulsa University, 1988.
- Antosik, P.; Mikusiński, J.; Sikorski, R. **Theory of Distributions**, The Sequential Approach. Elsevier Scientific - PWN-Polish Scientific, 1973.
- Apostol, T. M. **Calculus: Cálculo con Funciones de Varias Variables y Algebra Lineal, con Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales y a las Probabilidades**, Vol.1 y Vol.2, 2<sup>da</sup> Edición. Editorial Reverté. España, Barcelona, 1972.
- Aris, R. **Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics**. Prentice-Hall, 1962. Dover Publications (New York), 1989.
- Arnold, V. I.; Avez, A. **Ergodic Problems of Classical Mechanics**. W. A. Benjamin, 1968.
- Arnold, V. I. **Ordinary Differential Equations**. MIT Press, 1973. 7<sup>th</sup> Printing, 1990.
- Arnold, V. I. **Singularity Theory**, Selected Papers. Cambridge University Press, 1981.
- Arnold, V. I. **Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations**. Springer-Verlag, 1983.

- Arnold, V. I. **Catastrophe Theory**, Second Edition. Springer-Verlag, 1986.
- Arnold, V. I. **Geometrical Methods of Theory of Ordinary Differential Equations**. Springer-Verlag, 1988.
- Arnold, V. I.; (Ed.). **Dynamical Systems III**. Springer-Verlag, 1988.
- Arnold, V. I. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**, Second Edition. Springer-Verlag, 1989.
- Arnold, V. I.; Novikov, S. P.; (Eds.). **Dynamical Systems IV**, Symplectic Geometry and its Applications. Springer-Verlag, 1990.
- Arpaci, V. S. **Conduction Heat Transfer**. Addison-Wesley, 1966.
- Arpaci, V. S. **Convection Heat Transfer**. Prentice-Hall, 1984.
- Arrowsmith, D. K.; Place, C. M. **An Introduction to Dynamical Systems**. Cambridge University Press, 1990. Reprint, 1991.
- Artin, E. **Algebra Geométrica**. Editorial Limusa - Grupo Noriega Editores, 1992.
- Astarita, G.; Marrucci, G. **Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics**. McGraw-Hill, 1974.
- Astarita, G. **An Introduction to Non-Linear Continuum Thermodynamics**. Società Editrice di Chimica, Milano, 1975.
- Aubin, J. P. **Applied Functional Analysis**. John Wiley & Sons (New York), 1979.
- Aubin, T. **Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations**. Springer-Verlag, 1982.
- Auslander, L.; Mackenzie, R. E. **Introduction to Differentiable Manifolds**. Dover Publications, 1977.
- Austin, J. E.; Palfrey, J. R. "Mixing of Miscible but Dissimilar Liquids in Serial Flow in a Pipeline". **Proc. Instn. Mech. Engrs.**, Vol.178, Pt.1, No.15, pp.377-389, (1963/64).
- Ayres, F., Jr. **Ecuaciones Diferenciales**. McGraw-Hill (Serie Schaum), 1969.
- Baldock, G. R.; Bridgeman, T. **The Mathematical Theory of Wave Motion**. Ellis Horwood - John Wiley & Sons, 1981.
- Baker, G. A.; Graves-Morris, P. **Padé Approximants**, 2<sup>nd</sup> Edition. Cambridge University Press, 1996.
- Barenblatt, G. I.; Iooss, G.; Joseph, D. D.; (Eds.). **Non Linear Dynamics and Turbulence**. Pitman Publishing, 1983.
- Barnes, H. A.; Hutton, J. F.; Walters, K. **An Introduction to Rheology**. Elsevier Science Publisher Company, 1989. Second Printing, 1991.
- Batchelor, G. K. "Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence: I. Eulerian Analysis", **Aust. J. Sci. Res.**, Vol.2, pp.437-450, (1949).
- Batchelor, G. K. "The Application of The Similarity Theory of Turbulence to Atmospheric Diffusion", **Q. J. R. Meteorol. Soc.**, Vol.76, pp.133-146, (1950).
- Batchelor, G. K. "Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence: II. The Relative Motion of Particles", **Proc. Cambridge Philos. Soc.**, Vol.48, pp.345-362, (1952).
- Batchelor, G. K. "The Effect of Homogeneous Turbulence on Material Lines and Surfaces", **Proc. R. Soc. London, Serie A**, Vol.213, pp.349-366, (1952).
- Batchelor, G. K. **An Introduction to Fluid Dynamics**. Cambridge University Press, 1967. 13<sup>th</sup> Printing, 1990.
- Batchelor, G. K. **The Theory of Homogeneous Turbulence**. Cambridge University Press, 1982. 3<sup>rd</sup> Printing, 1990.
- Bathe, K.-J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. Prentice-Hall, 1982.
- Bathe, K.-J. **Finite Element Procedures**. Prentice-Hall - Simon & Schuster (New Jersey), 1996.

- Bauman, R. P. **Modern Thermodynamics with Statistical Mechanics**. Macmillan Publishing Company, 1992.
- Beck, Ch.; Schlögl, F. **Thermodynamics of Chaotic Systems**. Cambridge University Press, 1993.
- Becker, E. B.; Carey, G. F.; Oden, J. T. **Finite Elements, Vol.I: An Introduction**. Prentice-Hall, 1981.
- Bedford, A. **Hamilton's Principle in Continuum Mechanics**. Pitman Publishing, 1985.
- Bedford, A.; Drumheller, D. S. **Introduction to Elastic Wave Propagation**. John Wiley & Sons (New York), 1993.
- Beggs, H. D.; Brill J. P., "A Study of Two-Phase Flow in Inclined Pipes". Journal of Petroleum Technology. **SPE-4007**. (1973).
- Bejan, A. **Advanced Engineering Thermodynamics**. John Wiley & Sons (New York), 1988.
- Bejan, A. **Heat Transfer**. John Wiley & Sons (New York), 1993.
- Bender, C. M.; Orszag, S. A. **Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory**. Mc-Graw Hill, 1978. Springer-Verlag (New York), 1999.
- Bendiksen, K. H., Malnes, D., Moe, R., Nuland, S., "The Dynamic Two-Fluid Model OLGA: Theory and Application". **SPE-19451**, (1988).
- Beran, M. J. **Statistical Continuum Theories**. Interscience Publishers, 1968.
- Bergles, A. E.; Collier, J. G.; Delhaye, J. M.; Hewitt, G. F.; Mayinger, F.; (Eds.). **Two Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries**. Hemisphere Publishing Corp. - McGraw-Hill Book comp., 1981.
- Bhatnagar, P. L. **Nonlinear Waves in One-Dimensional Dispersive Systems**. Oxford University Press, 1979.
- Bird, R. B.; Stewart, W. E.; Lightfoot, E. N. **Fenómenos de Transporte**. Editorial Reverté, 1982.
- Bird, R. B.; Stewart, W. E.; Lightfoot, E. N. **Transport Fenomena**, Second Edition. John Wiley & Sons, 2001.
- Bird, R. B.; Curtiss, Ch. F.; Armstrong, R. C.; Hassager, O. **Dynamics of Polymeric Liquids**. Vol.1: "Fluid Mechanics". Vol.2: "Kinetic Theory". John Wiley & Sons (New York), 1987.
- Birge, E. A. "Contamination Control in Products Pipe Lines". **The Oil & Gas Journal**, pp.176-179/274-291, Sep. 20, (1947).
- Birkhoff, G. D. **Relativity and Modern Physics**. Harvard University Press, 1923.
- Birkhoff, G. D. "Averaged Conservation Law in Pipes". **J. of Math. Anal. and Applic.**, Vol.8, pp.66-77, (1964).
- Birkhoff, G.; Rota, G.-C. **Ordinary Differential Equations**, Fourth Edition. John Wiley & Sons (New York), 1989.
- Bishop, R. L.; Goldberg, S. I. **Tensor Analysis on Manifolds**. Dover Publications, 1980.
- Blanchard, Ph.; Brüning, E. **Variational Methods in Mathematical Physics**, A Unified Approach. Springer-Verlag (Berlín), 1992.
- Blankfield, J.; McVittie, G. C. "Einstein's Equations and Classical Hydrodynamics". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.2, pp.337-354, (1958/59).
- Bleistein, N. **Mathematical Methods for Wave Phenomena**. Academic Press, 1984.
- Boltzmann, L. "Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung Sitzungber", **Kaiserl-Akad. Wiss. (Wien), Math. Naturwiss Classe**, Vol.70(II), pp.275-306, (1874).
- Boltzmann, L. **Lectures on Gas Theory**. University of California Press, 1964. Dover Publications, 1995.
- Born, M. **Einstein's Theory of Relativity**. Dover Publications (New York), 1965.

- Bottema, O.; Roth, B. **Theoretical Kinematics**. Dover Publications, 1990.
- Bowen, R. M.; Wang, C.-C. **Introduction to Vectors and Tensors**. Part **A**: “Linear and Multilinear Algebra”. Part **B**: “Vector and Tensor Analysis”. Plenum Press (New York), 1976, Second Printing, 1980.
- Bowen, R. M. **Introduction to Continuum Mechanics for Engineers** Plenum Press (New York), 1989. Revised Edition, 2007.
- Bowen, R. M.; Wang, C.-C. **Introduction to Vectors and Tensors**, Second Edition - Two Volumes Bound as One. Dover Publications, 2009.
- Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. **Introducción a las Ecuaciones Diferenciales**. Editorial Limusa, 1972. 5<sup>ta</sup> Reimpresión, 1984.
- Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. **Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera**, Cuarta Edición. Editorial Limusa, 1998.
- Bradshaw, P.; Cebeci, T.; Whitelaw, J. H. **Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow**. Academic Press, 1981.
- Brand, L. **Mecánica Vectorial**. Compañía Editorial Continental S.A. (CECSA), 1959. 9<sup>na</sup> Impresión, 1969.
- Brand, L. “The Pi Theorem of Dimensional Analysis”. **Arch. Rational Mech. Anal.**, Vol.1, pp.35-45, (1957).
- Brand, L. **Análisis Vectorial**. Compañía Editorial Continental S.A. (CECSA), 1959. 9<sup>na</sup> Impresión.
- Brent, R. P. **Algorithms for Minimization without Derivatives**. Prentice-Hall, 1973.
- Brand, L. **Análisis Vectorial**. Compañía Editorial Continental S.A. (CECSA), 1959.
- Bronshtein, I. N.; Semendyayev, K. A. **Handbook of Mathematics**, 3<sup>rd</sup> Edition. Van Nostrand Reinhold Company (New York), 1979.
- Broyden, C. G. “A Class of Methods for Solving Non-Linear Simultaneous Equations”. **Mathematics of Computation**, Vol.19, pp.577-593, (1965).
- Brunk, H. D. **Introducción a la Estadística Matemática**. Editorial Trillas, 1979.
- Buckingham, E. “On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Equations”. **Phys. Rev.**, Vol.4, No.4, pp.345-, (1914).
- Buckingham, E. “Model Experiments and the Form of Empirical Equations”. **Trans. ASME**, Vol.37, pp.263-296, (1915).
- Burgos. A. **Iniciación a la Matemática Moderna**, 4<sup>ta</sup> Edición. Selecciones Científicas, 1972.
- Burke, W. L. **Applied Differential Geometry**. Cambridge University Press, 1985. Reprinted, 1987.
- Butcher, J. C. “On the Runge-Kutta Processes of High Order”. **J. Austral. Math. Soc.**, Vol.IV, Part 2, pp.179-194, (1964).
- Carroll, S. M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. Addison Wesley, 2003.
- Carslaw, H. S.; Jaeger, J. C. **Conduction of Heat in Solids**, Second Edition. Oxford University Press, 1959.
- Chandrasekhar, S. **Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability**. Clarendon Press, 1961 (Third Printing, 1970). Dover Publications (New York), 1981.
- Chandrasekhar, S. **Classical General Relativity**. Oxford University Press, 1993.
- Chapman, A. J. **Transmisión de Calor**, 3<sup>ra</sup> Edición. Librería Editorial Bellisco, 1984.
- Chapman, A. J. **Heat Transfer**, 4<sup>th</sup> Edition. McMillan Publishing Company, 1984.
- Chapman, S.; Cowling, T. G. **The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases**, An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases, Third Edition. Cambridge University Press, 1970.

- Chorin, A. J. **Lectures on Turbulence Theory**. Publish or Perish, Inc., 1975.
- Chorin, A. J. **Vorticity and Turbulence**. Springer-Verlag (New York), 1994.
- Chorin, A. J.; Marsden, J. E. **A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics**, Third Edition. Springer-Verlag (New York), 1993.
- Chorlton, F. **Vector and Tensor Methods**. Ellis Horwood Limited - John Wiley & Sons, 1976.
- Chow, Ch.-Y. **An Introduction to Computational Fluid Mechanics**. John Wiley & Sons (New York), 1979.
- Chow, V. T. **Open Channel Hydraulics**. McGraw-Hill (New York), 1959.
- Christensen, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. Krieger Publishing Company, 1979. Reprint, 1991.
- Chung, T. J. **Continuum Mechanics**. Prentice-Hall International, 1988. Cambridge University Press, 1996.
- Churchill, R. V. **Series de Fourier y Problemas de Contorno**. McGraw-Hill, 1977.
- Churchill, S. W. **Viscous Flows: The Practical Use of Theory**. Butterworths Publishers (Boston), 1988.
- Churchill, R. V.; Brown, J. W. **Variable Compleja y Aplicaciones**, 5<sup>ta</sup> Edición. McGraw-Hill/Interamericana de España, 1992.
- Clark, S. K. **Dinámica de Elementos Continuos**. Editorial Reverté, 1975.
- Clift, R.; Gauvin, W. H. "The Motion of Particles in Turbulent Gas Streams". **Proc. Chemeca '70**, Vol.1, pp.14-, 1970.
- Coddington, E. A.; Levinson, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**. Robert E. Krieger, 1955. Reprint, 1984
- Coleman, B. D.; Markovitz, H.; Noll, W. **Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids, Theory and Experiment**. Springer-Verlag, 1966.
- Cornfeld, I. P.; Fomin, S. V.; Sinai, Ya. G. **Ergodic Theory**. Springer-Verlag, 1982.
- Courant, R.; Friedrichs, K. O. **Supersonic Flow and Shock Waves**. Interscience Publishers, 1948. Fifth Printing, 1967.
- Courant, R.; Hilbert, D. **Methods of Mathematical Physics**, Vols.I/II/III. Interscience Publishers, 1953.
- Crank, J. **The Mathematics of Diffusion**. Oxford University Press, 1956.
- Currie, I. G. **Fundamental Mechanics of Fluids**, Second Edition. McGraw-Hill, 1993.
- Darby, R. **Viscoelastic Fluids: An Introduction to their Properties and Behavior** (Chemical Processing and Engineering, Vol.9, Editors: Lyle F. Albright, R. N. Maddox, John J. McKetta). Marcel Dekker, 1976.
- Darling, R. W. R. **Differential Forms and Connections**. Cambridge University Press, 1994.
- Davenport, W. B. **Probability and Random Processes**, An Introduction for Applied Scientists and Engineers. McGraw-Hill, 1970. Reprint, 1975.
- Davis, M. E. **Numerical Methods and Modeling for Chemical Engineers**. John Wiley & Sons (New York), 1984.
- Day, W. A. **The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory**. Springer-Verlag, 1972.
- De Groot, S. R. **Thermodynamics of Irreversible Processes**. Interscience (New York), 1951.
- Delhay, J. M. **Equations Fondamentales des Écoulements Diphasiques**. Commissariat à l'Energie Atomique, Reporte No.CEA-R 3429, 1968.
- Delhay, J. M. "Jump Conditions and Entropy Sources in Two Phase Systems. Local Instant Formulation". **Int. J. Multiphase Flow**, Vol.1, pp.395-409. Pergamon Press, (1974).

- Delhay, J. M.; Giot, M.; Riethmuller, M. L.; (Eds.). **Thermohydraulics of Two Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering**. Hemisphere Publishing Corp. - McGraw-Hill Book comp., 1981.
- Denn, M. M. **Stability of Reaction and Transport Processes**. Prentice-Hall, 1975.
- Devaney, R. L. **Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. Addison-Wesley, 1987.
- Dickey, R. W. **Bifurcation Problems in Nonlinear Elasticity**. Pitman Publishing, 1976.
- Di Felice, R. "The Voidage Function for Fluid-Particle Interaction Systems". **Intl. J. Multiphase Flow**, Vol.20, pp.153-, (1994).
- Dirac, P. A. M. **General Theory of Relativity**. Princeton University Press (Princeton, New Jersey), 1996.
- Do Carmo, M. P. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Prentice-Hall, 1976.
- Dodson, C. T. J.; Poston, T. **Tensor Geometry**, The Geometric Viewpoint and its Uses, Second Edition. Springer-Verlag, 1991.
- Doering, Ch. R.; Gibbon, J. D. **Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations**. Cambridge University Press, 1995.
- Dowling, N. E. **Mechanical Behavior of Materials**, Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue. Prentice-Hall International, 1993.
- Draper, N. R.; Smith, H. **Applied Regression Analysis**, 3<sup>rd</sup> Edition. John Wiley & Sons, 1998.
- Drazin, P.G.; Reid, W.H. **Hydrodynamics Stability**. Cambridge University Press, 1981.
- Drew, D. A.; Wood, R. T. "Overview and Taxonomy of Models and Methods". **Workshop on Two-Phase Flow Fundamentals**. National Bureau of Standards, Gaithersburg, Maryland, U.S.A., Sept.22-27, 1985.
- Dryden, H. L.; Murnaghan, F. D.; Bateman, H. **Hydrodynamics**. Dover Publications, 1956.
- Dubrovin, B. A.; Fomenko, A. T.; Novikov, S. P. **Modern Geometry**. Methods and Applications. Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields, Second Edition. Part II: The Geometry and Topology of Manifolds. Part III: Introduction to Homology Theory. Springer-Verlag (New York), 1992/1985/1990.
- Duhem, P. **Traité d'Energétique**. Gauthier-Villars, Paris, 1911.
- Durbin, P. A.; Pettersson Reif, B. A. **Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows**. John Wiley & Sons, 2001.
- Dwight, H. B. **Tables of Integrals and Other Mathematical Data**, Fourth Edition. The Macmillan Company, 1961.
- Eckert, E. R. G.; Drake, R. M. Jr. **Heat and Mass Transfer**, Second Edition. McGraw-Hill, 1959.
- Eddington, A. S. **The Mathematical Theory of Relativity**, Second Edition. Cambridge University Press, 1924.
- Eddington, Sir A. S. **Space, Time and Gravitation**. Harper & Row (New York), 1959.
- Edelen, D. G. B.; Kydonieffs, A. D. **An Introduction to Linear Algebra for Science and Engineering**, Second Edition. American Elsevier Publishing Company, 1976.
- Einstein, A. "Zur elektrodynamik bewegter Körper". **Annalen der Physik**, Vol.17, pp.891-921, (1905).
- Einstein, A. "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". **Annalen der Physik**, Vol.49, pp.769- , (1916).
- Einstein, A. **The Meaning of Relativity**, Fifth Edition. Princeton University Press (princeton, New Jersey), 1953. Fourth Printing, 1974.
- Einstein, A. **Relativity: The Special and The General Theory**, Three Rivers Press (New York), 1961. Crown (New York), 1961.



- Einstein, A.; Infeld, L. **The Evolution of Physics**. The Growth of Ideas from Early Concepts to Relativistic and Quanta. Simon and Schuster, 1938. 19<sup>th</sup> Printing, 1961.
- Einstein, A. **El Significado de La Relatividad**. Espasa-Calpe (Madrid), 1971.
- Eke, F. O.; Wang, S.-M. "Equations of Motion of Two-Phase Variable Mass Systems with Solid Base". **Journal of Applied Mechanics**, Vol.61, No.4, pp.855-860, (1994).
- Elliott, C. M.; Ockendon, J. R. **Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems**. Pitman Publishing, 1982.
- Elsgoltz, L. **Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional**. Editorial MIR (Moscú), 1977.
- Ericksen, J. L. "Tensor Fields". **Encyclopedia of physics**. Ed. S. Flügge, Vol.III/1. pp. 794 - 858. Springer - Verlag, 1960.
- Eringen, A. C. **Mechanics of Continua**. John Wiley & Sons (New York), 1967.
- Eringen, C. (Ed.) **Continuum Physics**. Vol.I: "Mathematics". Vol.II: "Continuum Mechanics of Single Substance Bodies". Vol.III: "Mixtures and EM Field Theories". Vol.IV: "Polar and Nonlocal Field Theories". Academic Press (New York), 1971.
- Estrada, R.; Kanwal, R. P. "Non-Classical Derivation of The Transport Theorems for Wave Fronts". **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Vol.159, pp.290-297, (1991).
- Fabrizio, M.; Morro, A. **Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity**. Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM (Philadelphia), 1992.
- Feder, J. **Fractals**. Plenum Press (New York), 1988. Third Printing, 1989.
- Feijóo, R. A.; Taroco, E.; Pereira, N. Z. **II Curso de Mecánica Teórica y Aplicada. Módulo I: Principios Variacionales en Mecánica**. Laboratorio de Computação Científica LNCC/CNPq, 1991.
- Feller, W. **An Introduction to Probability Theory and its Applications**, 3<sup>rd</sup> Edition, Vol.1-2. John Wiley & Sons (New York), 1968.
- Fenner, D. N. **Engineering Stress Analysis**, A Finite Element Approach with FORTRAN 77 Software. Ellis Horwood Limited - John Wiley & Sons, 1987.
- Ferziger, J. H.; Perić, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. Springer-Verlag (Berlín), 1996.
- Findley, W. N.; Lai, J. S.; Onaran, K. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials**, with an Introduction to Linear Viscoelasticity. North-Holland Publishing Company, 1976.
- Finlayson, B. A. **The Method of Weighted Residuals and Variational Principles**, with Application in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer. Academic Press, 1972.
- Flanders, H. **Differential Forms With Applications to the Physical Sciences**. Dover Publications, 1990. Academic Press, 1963.
- Fletcher, C. A. J. **Computational Techniques for Fluid Dynamics**, Second Edition. Vol.1: "Fundamental and General Techniques". Vol.2: "Specific Techniques for Different Flow Categories". Springer-Verlag (Berlín), 1991. Fourth Printing, 2000.
- Flügge, S.; (Ed.). **Encyclopedia of Physics**. Vol.VI: Elasticity and Plasticity. Springer-Verlag, 1958.
- Flügge, S. (Ed.). **Encyclopedia of Physics**. Vol.III/2: "Principles of Thermodynamics and Statistics". Springer-Verlag, 1959.
- Flügge, S.; Truesdell, C. A.; (Eds.). **Encyclopedia of Physics**. Vol.IX: "Gas Dynamics III". Springer-Verlag, 1960.
- Flügge, S.; Truesdell, C.; (Eds.). **Encyclopedia of Physics**. Vol.VIII/2: "Fluid Dynamics II". Springer-Verlag, 1963.
- Flügge, W. **Tensor Analysis and Continuum Mechanics**. Springer-Verlag (Berlín), 1972.
- Flügge, W. **Viscoelasticity**, Second Revised Edition. Springer-Verlag, 1975.

- Foias, C.; Manley, O.; Rosa, R.; Temam, R. **Navier-Stokes Equations and Turbulence**. Cambridge University Press, 2001.
- Fox, E. A. **Mechanics**. Harper International - Harper & Row - John Weatherhill, 1967.
- Fox, Ch. **An Introduction to the Calculus of Variations**. Dover Publications, 1987.
- Fox, R. W.; McDonald, A. **Introduction to Fluid Mechanics S. I.**, Fourth Edition. John Wiley & Sons (New York), 1994.
- Fraleigh, J. B. **Algebra Abstracta**. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- Frederick, D.; Chang, T. S. **Continuum Mechanics**. Scientific Publishers (Cambridge), 1965. Reprint, 1972.
- French, A. P. **Relatividad Especial**. Editorial Reverté (Barcelona), 1974.
- Friedlander, A. **Elementos de Programação Não-Linear**. Editora Da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP): Campinas, Brasil, 1994.
- Friedman, B. **Principles and Techniques of Applied Mathematics**. John Wiley & Sons (New York), 1956. Fifth Printing, 1962.
- Frisch, U. **Turbulence**. Cambridge University Press, 1995. Reprint, 1998.
- Frost, W.; Moulden, T. H.; Bitte, J. (Eds.) **Handbook of Turbulence**. Vol.1: "Fundamentals and Applications (Frost & Moulden)". Vol.2: "Modeling and Measurement (Frost, Moulden & Bitte)". Plenum Press (New York), 1977.
- Gaskell, D. R. **An Introduction to Transport Phenomena in Materials Engineering**. Macmillan Publishing Company (New York), 1992.
- Gelfand, I. M.; Fomin, S. V. **Calculus of Variations**. Prentice-Hall, 1963.
- Gerhart, P. M.; Gross, R. J.; Hochstein, J. I. **Fundamentals of Fluid Mechanics**, Second Edition. Addison-Wesley, 1992.
- Gerhart, P. M.; Gross, R. J.; Hochstein, J. I. **Fundamentos de Mecánica de Fluidos**, Segunda Edición. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- Germain, P.; Nguyen, Q. S.; Suquet, P. "Continuum Thermodynamics". **Transactions of the ASME**, Vol.50, pp.1010-1020, Dec., (1983).
- Germano, M.; Piomelli, U.; Moin, P.; Cabot, W. H. "A Dynamical Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model", **Phys. Fluid A**, Vol.3, No.7, pp.1760-1765, (1991).
- Giesekus, H. "A Simple Constitutive Equation for Polymer Fluids Based on The Concept of Deformation-Dependent Tensorial Mobility", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Vo.11, pp.69-109, (1968).
- Girault, V.; Raviart, P.-A. **Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations**. Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics No.749), 1979.
- Girault, V.; Raviart, P.-A. **Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations**. Springer-Verlag, 1986.
- Gökeler, M.; Schücker, T. **Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity**. Cambridge University Press, 1987.
- Goldstein, S. (Ed.). **Modern Developements in Fluid Dynamics**. Dover Publications, 1965.
- Goldstein, H. **Mecánica Clásica**. Aguilar S. A. de Ediciones, 1963/1969
- Goldstein, H. **Mecánica Clásica**, 2<sup>da</sup> Edition, 3<sup>ra</sup> Reimpresión . Aguilar S. A. de Ediciones, 1977. Editorial Reverté, 1998.
- Goldstein, H. **Classical Mechanics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Addison-Wesley, 1980.
- Goldstein, H.; Poole, Ch.; Saffko, J. **Classical Mechanics**, 3<sup>rd</sup> Edition. Addison-Wesley (San Francisco), 2002.
- Golovina, L. I. **Algebra Lineal y Algunas de sus Aplicaciones**, Tercera Edición. Editorial MIR-Moscú, 1986.

- Govier, G.W.; Aziz, K. **The Flow of Complex Mixtures in Pipes**. Robert E. Krieger Publishing Company, 1977.
- Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. **Tables of Integrals, Series, and Products**, 4<sup>th</sup> Edition. Academic Press (New York), 1965.
- Granados M., A. L. **Convección Forzada Turbulenta en Tuberías Verticales Expuestas a Convección Natural**. Tesis de Grado para la Maestría en Ingeniería Mecánica, Universidad Simón Bolívar. Sartenejas, Noviembre de 1988.
- Granados M., A. L. "Turbulent Developing Flow in Smooth Pipe". Trabajo presentado en la Conferencia sobre: *Estado del Arte en Mecánica de Fluidos Computacional*. Auditorium de INTEVEP S.A. Los Teques, del 27 al 28 de Mayo de 1991.
- Granados M., A. L. "Reynolds Transport Theorems as a Special Application of Leibniz Rule". **Proceedings of The Third Caribbean Congress on Fluid Dynamics and The Third Latin-American Symposium on Fluid Mechanics**. Universidad Simón Bolívar. Sartenejas, del 5 al 9 de Febrero de 1995.
- Granados M., A. L. "Aplicaciones de la Regla de Leibniz: Teoremas del Transporte de Reynolds y Principios de Conservación". **Boletín Técnico IMME** (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales - Universidad Central de Venezuela), Vol.34, No.3, pp.1-31, Octubre de (1996).
- Granados M. A. L.; Casanova M., E. L.; Müller-Karger P., C. M. "Whip Model for the Transient Response of Large Deflexion Beams". **Applied Mechanics in the Americas**, Vol.4: *Mechanics and Dynamics of Solids*. Edited by L. A. Godoy, M. Rysz, L. E. Suárez, College of Engineering, University of Puerto Rico at Mayagüez, pp.379-382, August 1996. *Proceedings of the Fifth Pan-American Congress of Applied Mechanics, PACAM V*. Hotel San Juan Marriott, San Juan of Puerto Rico, January 2-4, 1997.
- Granados M., A. L. "Mechanics of Continuous Material Systems". **Applied Mechanics in the Americas**. Vol.5: *Mechanics of Fluids, Thermal Problems, Optimization and Control, Experimental and Numerical Methods, Biomechanics, Applications*. edited by M. Rysz, L. A. Godoy, L. E. Suárez, College of Engineering, University of Puerto Rico at Mayagüez, pp.87-90, August 1996. *Proceedings of the Fifth Pan-American Congress of Applied Mechanics, PACAM V*. Hotel San Juan Marriott, San Juan of Puerto Rico, January 2-4, 1997.
- Granados M., A. L. *Principios Variacionales en la Mecánica del Continuo*. **Boletín Técnico IMME** (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales - Universidad Central de Venezuela), Vol.36, No.1, pp.19-42, Marzo de (1998).
- Granados, A. "Mecánica de Sistemas Materiales Continuos Desde Marcos de Referencia No Inerciales". Revista **Boletn Técnico IMME** (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales - Universidad Central de Venezuela), Vol.40, No.1, pp.59-94, Marzo de (2002).
- Granados, A. L. **Flujo Turbulento Cargado con Partículas Sólidas en una Tubería Circular**, Tesis Doctoral, Univ. Politécnica de Madrid, E. T. S. Ing. Industriales, 2003.
- Granger, R. A. **Fluid Mechanics**. Dover Publications (New York), 1995.
- Gray, A. **A treatise on Gyrostatics and Rotational Motion**, Theory and Application. Dover Publications (New York), 1959.
- Green, G. **Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism**. Nottingham, 1828.
- Green, A. E.; Zerna, W. **Theoretical Elasticity**, Second Edition. Oxford University Press, 1968.
- Greub, W. H. **Linear Algebra**, Third Edition. Springer-Verlag, 1967.
- Greub, W. H. **Multilinear Algebra**. Springer-Verlag, 1967.
- Guckenheimer, J.; Holmes, P. J. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields**. Springer-Verlag, 1983. 3<sup>rd</sup> Printing, 1990.
- Guggenheimer, H. W. **Differential Geometry**. Dover Publications, 1977.

- Gundersen, T. **Computer and Chemistry Engineering**. Vol.3, p.245, (1982).
- Gurtin, M. E. "The Linear Theory of Elasticity". **Encyclopedia of Physics**. Flügge, S.; Truesdell, C. (Eds.). Vol.VIa/2: "Mechanics of Solids II", pp. 1-295. Springer-Verlag, 1972.
- Gurtin, M. E. **An Introduction to Continuum Mechanics**. Academic Press, 1981.
- Gurtin, M. E.; Struthers, A.; Williams, W. O. "A Transport Theorem for Moving Interface". **Quarterly of Applied Mathematics**, Vol.47, No.4, pp.773-777, December (1989).
- Gurtin, M. E.; Fried, E.; Anand, L. **The Mechanics and Thermodynamics of Continua**. Cambridge University Press, 2009/2010.
- Hageman, L. A.; Young, D. M. **Applied Iterative Methods**. Academic Press, 1981.
- Hahn, W. **Stability of Motion**. Springer-Verlag, 1967.
- Hairer, E.; Nørsett, S. P.; Wanner, G. **Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems**. Springer-Verlag, 1987.
- Hairer, E.; Wanner, G. **Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems**. Springer-Verlag, 1991.
- Hale, J. K.; Koçak, H. **Dynamics and Bifurcations**. Springer-Verlag (New York), 1991.
- Hale, J. K.; Lunel, S. M. V. **Introduction to Functional Differential Equations**. Springer-Verlag (New York), 1993.
- Halmos, P. R.. **Lectures on Ergodic Theory**. Chelsea Publishing Company, 1956.
- Halmos, P. R. **Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity**, Second Edition. Chelsea Publishing Company, 1957.
- Halmos, P. R. **Finite Dimensional Vector Spaces**, Second Edition. D. Van Nostrand Company, 1958.
- Halmos, P. R. **Lectures on Boolean Algebras**. Van Nostrand Reinhold Company, 1963.
- Hansen, A. G. "Generalized Control Volume Analyses with Application to the basic Laws of Mechanics and Thermodynamics". **Bull. Mech. Engng. Educ.**, Vol.4, pp.161-168. Pergamon Press, (1965).
- Hartle, J. B. **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**. Addison Wesley, 2003.
- Hartley, B.; Hawkes, T. O. **Rings, Modules and Linear Algebra**. Chapman and Hall, 1970.
- Heinbockel, J. H. **Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics**. Old Dominion University, 1996.
- Hetsroni, G. (Ed.) **Handbook of Multiphase Systems**. McGraw-Hill, 1982.
- Hicks, N. J. **Notes on Differential Geometry**. Van Nostrand Reinhold Company, 1971.
- Hilbert, D. "Mathematical Problems". **Archiv für Mathematik und Physik**, Vol.1, No.3, pp.44-63,213-237, (1901).
- Hill, R. **The Mathematical Theory of Plasticity**. Oxford University Press, 1950. 10<sup>th</sup> Reprint, 1998.
- Hinrichsen, D.; Fernández, J. L. **Topología General**. Editorial Pueblo y Educación, 1977.
- Hinze, J. O. **Turbulence**, 2<sup>nd</sup> Edition. McGraw-Hill, 1975.
- Hirsch, M. W.; Smale, S. **Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra**. Academic Press, 1974.
- Hirschfelder, J. O.; Curtiss, C. F.; Bird, R. B. **Molecular Theory of Gases and Liquids**. Wiley, 1964.
- Hoffman, K. **Banach Spaces of Analytic Functions**. Prentice-Hall, 1962.
- Hoffman, K.; Kunze, R. **Algebra Lineal**. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1973.
- Holmes, Ph.; Lumley, J. L.; Berkooz, G. **Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry**. Cambridge University Press (U.K.), 1996.

- Horn, F. J. M. "Calculation of Dispersion Coefficients by Means of Moments". **AIChE J.**, Vol.17, No.3, pp.613-620, (1971).
- Hudson, J. A. **The Excitation and Propagation of Elastic Waves**. Cambridge University Press, 1980.
- Huilgol, R.R.; Phan-Thien, N. **Fluid Mechanics of Viscoelasticity**. Elsevier, 1997.
- Hurewicz, W. **Sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**. Ediciones RIALP, 1966.
- Hutton, J. F.; Pearson, J. R. A.; Walkers, K. (Eds.). **Theoretical Reology**. Applied Science Publishers, 1975.
- Incropera, F. P.; De Witt, D. P. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**, Third Edition. John Wiley & Sons (New York), 1990.
- Iooss, G. **Bifurcation of Maps and Applications**. North-Holland, 1979.
- Iooss, G.; Joseph, D. D. **Elementary Stability and Bifurcation Theory**, 2<sup>nd</sup> Edition. Springer-Verlag, 1990.
- Iribarren, I. L. **Topología de Espacios Métricos**. Editorial Limusa-Wiley, 1973.
- Iribarren, I. L. **Cálculo Diferencial en Espacios Normados**. Editorial Equinoccio, Universidad Simón Bolívar, 1980.
- Ishii, M. **Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow**. Eyrolles, 1975.
- Jackson, J. D. **Classical Electrodynamics**, Third Edition. John Wiley & Sons (New York), 1999.
- Jaric, J. P. "On a Transport Theorem for Moving Interface". **International Journal of Engineering Science**, Vol.30, No.10, pp.1535-1542, (1992).
- Jaumann, G. **Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem Modernen Standpunkte Aus**. Leipzig, 1905.
- Jaunzemis, W. **Continuum Mechanics**. The McMillan Company, 1967.
- Jeffreys, H. **Cartesian Tensors**. Cambridge University Press, 1952.
- Jeffreys, H.; Jeffreys, B. S. **Methods of Mathematical Physics**. Cambridge University Press, 1966.
- Jones, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
- Jones, W. P.; Launder, B. E. "The Prediction of Laminarization With a Two-Equation Model of Turbulence", **Int. J. Heat Mass Transfer**, Vol.15, No.2, pp.301-314, (1972).
- Joseph, D. D. **Stability of Fluid Motion**, Vols.I-II. Springer-Verlag, 1976.
- Joseph, D. D. **Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids**. Springer-Verlag, 1990.
- Jost, W. **Diffusion in Solids, Liquids, and Gases**. Academic Press, 1952. Sixth Printing, 1970.
- Kall, P. **Stochastic Linear Programming**. Springer-Verlag, 1976.
- Kane, T. R.; Levinson, D. A. **Dynamics: Theory and Applications**. McGraw-Hill (New York), 1985.
- Kantorovich, L. V.; Akilov, G. P. **Functional Analysis in Normed Spaces**. The Macmillan - Pergamon Press, 1964.
- Kaplan, W. **Elements of Ordinary Differential Equations**. Addison Wesley, 1964.
- Karpman, V. I. **Non-Linear Waves in Dispersive Media**. Pergamon Press, 1975.
- Kartashov, A. P.; Rozhdenstvenski, B. L. **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Fundamentos del Cálculo Variacional**. Editorial Reverté, 1980.
- Kay, D. C. **Cálculo Tensorial**, Teoría y Problemas. McGraw-Hill (Serie Schaum), 1990.
- Kays, W. M.; Crawford, M. E. **Convective Heat and Mass Transfer**, Second Edition. McGraw-Hill, 1980.
- Kec, W.; Teodorescu, P. P. **Applications of the Theory of Distributions in Mechanics**. Editura Academiei Române - Abacus Press, 1974.

- Kellogg, O. D. **Foundations of Potential Theory**. Springer-Verlag, 1929. Reprint, 1967.
- Kestin, J. **A Course in Thermodynamics**, Vol.I-II. Hemisphere Publishing Corporation - McGraw-Hill, 1979. Revised Printing.
- Kirillin, V. A.; Sychev, V. V.; Sheindlin, A. E. **Engineering Thermodynamics**. MIR Publisher (Moscow), 1976. Reprint, 1981.
- Kolmogorov, A. N. "The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Number". **Dokl. Akad. Nauk SSSR**, Vol.30, pp.299-303, (1941). [En Ruso]
- Kolmogorov, A. N. **Foundations of the Theory of Probability**, Second Edition. Chelsea Publishing Company, 1956.
- Kolmogórov, A. N.; Fomín, S. V. **Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional**, Tercera Edición. Editorial Mir (Moscu), 1978.
- Komkov, V. **Variational Principles of Continuum Mechanics With Engineering Applications**. Vol.1: "Critical Points Theory". Vol.2: "Introduction to Optimal Design Theory". D. Reidel Publishing Company (Dordrecht-Holland), 1986.
- Kondepudi D. K.; Prigogine I. **Modern Thermodynamics, From Heat Engines to Dissipative Structures**. John Wiley & Sons (New York), 1998.
- Koroliuk, V. S. **Manual de la Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática**. Editorial MIR (Moscu), 1981.
- Kotchine, N. E. "Sur la Théorie des Ondes de Choc dans un Fluide". **Rend. Circ. Mat. Palermo**, Vol.50, pp.305-344, (1926).
- Krasnov, M. L.; Kiseliiov, A. I.; Makarenko, G. I. **Funciones de Variable Compleja, Cálculo Operacional y Teoría de la Estabilidad**. Editorial Reverté, 1976.
- Kreider, D. L.; Kuller, R. G.; Ostberg, D. R. **Ecuaciones Diferenciales**. Fondo Educativo Interamericano, 1973.
- Kreider, D. L.; Kuller, R. G.; Ostberg, D. R.; Perkins, F. W. **An Introduction to Linear Analysis**. Addison-Wesley, 1966.
- Kreith, F. **Transmisión del Calor por Radiación**. Compañía Editorial Continental, S. A., 1965.
- Kreyszig, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. John Wiley & Sons (New York), 1978.
- Kreyszig, E. **Differential Geometry**. Dover Publications, 1991.
- Kuipers, L.; Timman, R.; (Eds.). **Handbook of Mathematics**. Pergamon Press, 1969.
- Kumar, S. **Gas Production Engineering**. Gulf Publishing Company, 1987.
- Kurosch, A. G. **Curso de Algebra Superior**. Editorial MIR (Moscu), 1977. 4<sup>ta</sup> Reimpresión, 1987.
- LaCalle, J. M.; Turet, J.; Nieto, R.; Honduvilla, J.; Teijeiro, A.; González, M. C.; Herrero, F. **Termodinámica**, Segunda Edición. Sección de Publicaciones, E. T. S. Ing. Industriales (Madrid), 1997.
- Ladyzhenskaya, O. A. **The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow**, 2<sup>nd</sup> Edition. Gordon and Breach Science Publishers, 1969. 2<sup>nd</sup> Printing, 1987.
- Ladyzhenskaya, O. A. **The Boundary Value Problem of Mathematical Physics**. Springer-Verlag (New York), 1985.
- Lai, W. M.; Rubin, D.; Krempl, E. **Introduction to Continuum Mechanics**, Revised Edition in SI/ Metric Units. Pergamon Press, 1974/1978. Third Edition, 1993/1996. Butterworth-Heinemann (Elsevier), 1999. Fourth Edition, 2010.
- Lakshmikantham, V.; Leela, S. **Differential and Integral Inequalities**, Theory and Applications. Vol.I: "Ordinary Differential Equations". Vol.II: "Functional, Partial, Abstract, and Complex Differential Equations". Academic Press, 1969.
- Lam, C. K. G.; Bremhorst, K. A. "Modified Form of the  $k-\varepsilon$  Model for Predicting Wall Turbulence", **Trans. ASME, J. Fluids Eng.**, Vol.103, pp.456-460, (1981).

- Lamb, H. **Statics**, Including Hydrostatics and the Elements of The Theory of Elasticity, Third Edition. Cambridge University Press, 1928. 6<sup>th</sup> Reprint, 1949.
- Lamb, H. **Hydrodynamics**, 6th Edition. Dover Publications, 1932.
- Lanczos, C. **The Variational Principles of Mechanics**, Fourth Edition. University of Toronto Press (Toronto), 1970. Dover Publications, 1986.
- Land, N. S. **A Compilation of Nondimensional Numbers**. NASA Report No. SP-274, 1972.
- Landahl, M. T.; Mollo - Christensen, E. **Turbulence and Randon Processes in Fluid Mechanics**, Second Edition. Cambridge University Press, 1992.
- Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **The Classical Theory of Fields**, 4<sup>th</sup> Revised Edition. Butterworth-Heinemann, 1987.
- Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **Teoría Clásica de los Campos**, Segunda Edición. Editorial Reverté, 1981.
- Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **Fluid Mechanics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Butterworth-Heinemann, 1987.
- Lang, S. **Introduction to Differentiable Manifolds**. Interscience Publishers, 1967. John Wiley & Sons (New York), 1962. 3<sup>rd</sup> Printing, 1967.
- Lang, S. **Differential Manifolds**. Addison-Wesley, 1972.
- Lang, S. **Algebra Lineal**. Fondo Educativo Interamericano, 1975.
- Langhaar, H. L. **Energy Methods in Applied Mechanics**. John Wiley & Sons (New York), 1962.
- La Salle, J.; Lefschetz, S. **Stability by Liapunov's Direct Method**, with Applications. Academic Press, 1961. Fourth Printing, 1967.
- Lass, H. **Vector and Tensor Analysis**. McGraw-Hill - Kōgakusha, 1950.
- Launder, B. E.; Reynolds, W. C.; Rodi, W. Mathieu, J.; Jeandel, D. **Turbulence Models and Their Applications (Vol.2)**. Editions Eyrolles (París), 1984.
- Lee, J. F.; Sears, F. W.; Turcotte, D. L. **Statistical Thermodynamics**. Addison-Wesley, 1963.
- Leigh, D. C. **Non Linear Continuum Mechanics**. McGraw-Hill, 1968.
- León L., J. **Mecánica**. Editorial Limusa, 1979. Segunda Edición, 1984.
- Lesieur, M. **Turbulence in Fluids**, Third Edition. Kluwer Academic Pub., 1997.
- Levenspiel, O. "How Much Mixing Occurs in a Pipe?". **Petroleum Refiner**, Vol.37, No.3, pp.191-194, (1958).
- Levenspiel, O. "Longitudinal Mixing of Fluids Flowing in Circular Pipes". **Ind. Eng. Chem.**, Vol.50, No.3, pp.343-346, (1958).
- Levi, E. **Elementos de Mecánica del Medio Continuo**. Editorial Limusa, 1971. Tercera Reimpresión, 1977.
- Levi-Civita, T. **The n-Body Problem in General Relativity**. D. Reidel Publishing Company (Dordrecht-Holland), 1964.
- Levi-Civita, T. **The Absolute Differential Calculus**, Calculus of Tensors. Dover Publications, 1977.
- Levich, V. G. **Physicochemical Hydrodynamics**. Prentice-Hall (Englewood Cliffs, N.J.), 1962.
- Lianis, G.; Rivlin, R. S. "Relativistic Equations of Balance in Continuum Mechanics". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.48, pp.64-82, (1972).
- Liepmann, H. W.; Roshko, A. **Elements of Gasdynamics**. John Wiley & Sons (New York), 1957.
- Lighthill, M. J. **Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions**. Cambridge University Press, 1958. 5<sup>th</sup> Reprint, 1970.
- Lighthill, J. **Waves in Fluids**. Cambridge University Press, 1978. Reprint, 1996.
- Lilly, D. K. "A Proposed Modification of The Germano Subgrid-Scale Closure Method", **Phys. Fluid A**, Vol.4, No.3, pp.633-635, (1992).

- Liñan, A.; Williams, F. A. **Fundamental Aspects of Combustion**. Oxford University Press, 1993.
- Lipschutz, M. M. **Geometría Diferencial**, Teoría y Problemas. McGraw-Hill (Serie Schaum), 1971.
- Lobatto, R. **Lessen over Differentiaal- en Integraal-Rekening**. 2 Vols. La Haye, 1851-52.
- Lodge, A. S. **Body Tensor Fields in Continuum Mechanics with Applications to Polymer Rheology**. Academic Press, 1974.
- Lorentz, H. A. "Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern". Brill, Leiden, 1895.
- Lorentz, H. A.; Einstein, A.; Minkowski, H.; Weyl, H. **The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs**. Dover Publications, 1952.
- Love, A. E. H. **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**, fourth Edition. Cambridge University Press, 1927. Dover Publications, 1944.
- Lovelock, D. "The Uniqueness of The Einstein Field Equations in a Four-Dimensional Space". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.33, pp.54-70, (1969).
- Lovelock, D.; Rund, H. **Tensors, Differential Forms, and Variational Principles**. Dover Publications (New York), 1989. John Wiley & Sons (New York), 1975.
- Luenberger, D. G. **Optimization by Vector Space Methods**. John Wiley & Sons (New York), 1969.
- Lumley, J. L. **Stochastic Tools in Turbulence**. Academic Press, 1970.
- Mach, E. **The Science of Mechanics**, A Critical Historical Account of its Development, 6<sup>th</sup> Edition. The Open Court Publishing Company, 1960. 3<sup>rd</sup> Paperback Edition, 1974. First Edition, 1893.
- Malliavin, P. **Geometría Diferencial Intrínseca**. Editorial Tecnos, 1975.
- Malvern, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Prentice-Hall, 1969.
- Mandelbrot, B. B. **Les Objets Fractals**. Forme, Hasard et Dimesion. Flammarion Editeur, 1975.
- Mandelbrot, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**, Updated and Augmented Edition. W. H. Freeman and Company (New York), 1983.
- Marin, J. **Mechanical Behavior of Engineering Materials**. Prentice-Hall, 1962.
- Marquardt, D. "An Algorithm for Least Squares Estimation of Non-Linear Parameters". Vol.11, pp.431-441, (1963).
- Marsden, J. E. **Applications of Global Analysis in Mathematical Physics**. Publish or Perish, 1974.
- Marsden, J. E.; Hughes, T. J. R. **Mathematical Foundations of Elasticity**. Prentice-Hall (Englewood Cliffs, New Jersey), 1983. Reprint, Dover Publications (New York), 1994.
- Marsden, J. E.; McCracken, M. **The Hopf Bifurcation and its Applications**. Springer-Verlag, 1976.
- Marsden, J. E.; Ratiu, T. S. **Introduction to Mechanics and Symetry**. Springer-Verlag (New York), 1994.
- Marsden, J. E.; Tromba, A. J. **Cálculo Vectorial**, 3<sup>ra</sup> Edición. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- Marti, J. T. **Introduction to Sobolev Spaces and Finite Elements Solution of Elliptic Boundary Value Problems**. Academic Press, 1986.
- Martin, J. B. **Plasticity: Fundamentals and General Results**. The MIT Press, 1975.
- Martín Pliego, F. J.; Ruíz-Maya, L. **Estadística**. Vol.I: "Probabilidad", 1<sup>ra</sup> Reimpresión Revisada. Editorial AC (Madrid), 1997.
- Mase, G. E. **Theory and Problems of Continuum Mechanics**. McGraw-Hill, 1970.
- Mathieu, J.; Jeandel, D.; Launder, B. E.; Reynolds, W. C.; Rodi, W. **Simulation of Turbulence Models and Their Applications (Vol.1)**. Editions Eyrolles (París), 1984.



- Mathieu, J. M.; Scott, J. F. **An Introduction to Turbulent Flow**. Cambridge University Press, 2000.
- Maugin, G. A.; Drouot, R.; Sidoroff, F. (Eds.) **Continuum Thermomechanics**, The Art and Science of Modelling Material Behaviour. Kluwer Academic Publishers (New York), 2002.
- McConnel, A. J. **Applications of Tensor Analysis**. Dover Publications, 1957.
- McGuinness, B.; (Ed.). **Ludwing Boltzmann: Theoretical Physics and Philosophical Problems**. Selected Writings. D. Reidel Publishing Company, 1974.
- Meirovitch, L. **Analytical Methods in Vibrations**. Macmillan Publishing Company (New York), 1967.
- Meirovitch, L. **Principles and Techniques of Vibrations**. Prentice-Hall - Simon & Schuster (New Jersey), 1997.
- Mendelson, A. **Plasticity: Theory and Application**. The Macmillan Company - Collier-Macmillan (Canada), 1968.
- Meriam, J. L.; Kraige, L. G. **Engineering Mechanics**, Second Edition. Vol.1: "Statics". Vol.2: "Dynamics". John Wiley & Sons (New York), 1987.
- Meriam, J. L. **Dinámica**. Editorial Reverté, 1990.
- Métais, O.; Ferziger, J. H.. **New Tools in Turbulence Modelling**. Springer-Verlag, 1997.
- Meyer, R. E. **Introduction to Mathematical Fluid Dynamics**. Wiley-Interscience, 1971. Dover Publications, 1982.
- Michelson, A. A.; Morley, E. W. **Am. J. Sci.**, Vol.134, pp.333, (1887):
- Milne-Thomson, L. M. **Theoretical Hydrodynamics**. Macmillan (New York), 1950.
- Mishchenko, A.; Fomenko, A. **A Course of Differential Geometry and Topology**. Mir Publishers Moscow, 1988.
- Molerus, O. **Principles of Flow in Disperse Systems**, Revised Edition. Chapman and Hall, 1993.
- Møller, C. **The Theory of Relativity**, Second Edition. Clarendon Press (Oxford), 1972.
- Monin, A. S.; Yaglom, A. M. **Statistical Fluid Mechanics**, Vol.I-II. The MIT Press, 1971/1975. 4<sup>th</sup>/3<sup>rd</sup> Printing, 1979/1987.
- Moody, L. F. "Friction factors for pipe flow", **Trans. ASME**, Vol.66, p.671, (1944).
- Morse, P. M.; Feshbach, H. **Methods of Theoretical Physics**, Parts I-II. McGraw-Hill, 1953.
- Mould, R. A. **Basic Relativity**. Springer-Verlag (New York), 1994.
- Munroe, M. E. **Measure and Integration**, Second Edition. Addison-Wesley, 1971.
- Munson, B. R.; Young, D. F.; Okiishi, T. H. **Fundamentals of Fluid Mechanics**, Fourth Edition, John Wiley & Sons Inc. (New York), 2002.
- Murnaghan, F. D. "Finite Deformation of an Elastic Solid". **American Journal of Mathematics**, Vol.59, pp.235-260, (1937).
- Muskhelishvili, N. I. **Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity**, Fundamental Equations, Plane Theory of Elasticity, Torsion and Bending. Second English Edition, Translation of the Fourth, Corrected and Augmented Edition, Moscow, 1954. P. Noordhoff Ltd. (Groningen, The Netherlands), 1963.
- Narasimhan, M. N. L. **Principles of Continuum Mechanics**. John Wiley & Sons (New York), 1993.
- Nakamura, S. **Métodos Numéricos Aplicados con Software**. Prentice-Hall, 1992.
- Nakayama, Y.; Woods, W. A.; Clark, D. G.; Japan Society of Mechanical Engineers; (Eds.). **Visualized Flow**. Pergamon Press, 1988.
- Nash, Ch.; Sen, S. **Topology and Geometry for Physicists**. Academic Press, 1983.
- Nayfeh, A. H. **Perturbation Methods**. John Wiley & Sons (New York), 1973.

- Nayfeh, A. H. **Introduction to Perturbation Techniques**. John Wiley & Sons (New York), 1981.
- Nayfeh, A. H.; Balachandran, B. **Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods**. John Wiley & Sons (New York), 1995.
- Naylor, A. W.; Sell, G. R. **Linear Operator Theory in Engineering and Science**. Springer-Verlag, 1982.
- Neumann, F. **Vorlesungen über die Theorie der Capillariat**. B. G. Teubner, Leipzig, 1894.
- Newell, A. C. **Solitons in Mathematics and Physics** SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics (Philadelphia), 1985.
- Nguyen **Bifurcation and Stability of Dissipative Systems**. Springer-Verlag, 1993.
- Noll, W. **Journal of Rational Mechanics Analysis**, Vol.4, pp.3-81, (1955).
- Noll, W. "A Mathematical Theory of Mechanical Behavior of Continous Media". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.2, pp.197-226, (1958). Reproducido en [Noll,1974].
- Noll, W. **The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics**. North-Holland, 1959. Reproducido en [Noll,1974].
- Noll, W. "A New Mathematical Theory of Simple Materials". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.48, pp.1-50, (1972). Reproducido en [Noll,1974].
- Noll, W. "Lectures on the Foundations of Continuum Mechanics and Thermodynamics". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.52, pp.62-92, (1973). Reproducido en [Noll,1974].
- Noll, W. **The Foundations of Mechanics and Thermodynamics**, Selected Papers. Springer-Verlag, 1974.
- Novo, S.; Obaya, R.; Rojo, J. **Ecuaciones y Sistemas Diferenciales**. McGraw-Hill, 1995.
- Obukhov, A. M. "Spectral Energy Distribution in Turbulent Flow", **Izv. Akad. Nauk SSSR**, Vol.5, pp.453-566, (1941).
- Obukhov, A. M. "Structure of the Temperature Field in a Turbulent Flow", **Izv. Akad. Nauk SSSR**, Vol.13, No.1, pp.58-69, (1949.a).
- Obukhov, A. M. "Pressure Fluctuations in a Turbulent Flow", **Dokl. Akad. Nauk SSSR**, Vol.66, No.1, pp.17-20, (1949.b).
- Odar, F. "Verification of the Proposed Equation for Calculation of the Forces on a Sphere Accelerating in a Viscous Flow". **J. Fluid Mech.**, Vol.25, pp.591-, (1966).
- Odar, F.; Hamilton, W. S. "Forces on a Sphere Accelerating in a Viscous Fluid". **J. Fluid Mech.**, Vol.18, pp.302-, (1964).
- Oldroyd, J. G. "On the Formulation of Rheological Equations of State". **Proceedings of the Royal Society**, Vol.A200,(1950).
- Oldroyd, J. G. "Some Steady Flows of the General Elastico-Viscous Liquid". **Proceedings of the Royal Society**, Vol.A283, (1965).
- O'Neill, B. **Elementary Differential Geometry**. Academic Press, 1966. 3<sup>rd</sup> Printing, 1969.
- O'Neill, B. **Semi-Riemannian Geometry**, with Applications to Relativity. Academic Press, 1983.
- Ott, S.; Mann, J. "An Experimental Investigation of The Relative Diffusion of Particle Pairs in Three-Dimensional Turbulent Flow", **J. Fluid Mech.**, Vol.422, pp.207-223, (2000).
- Özisik, N. Necati **Heat Conduction**, 2<sup>nd</sup> Edition. John Wiley & Sons (New York), 1993.
- Pak, R. Y. S.; Stauffer, E. J. "Nonlinear Finite Deformation Analysis of Beams and Columns". **Journal of Engineering Mechanics (ASCE)**, Vol.120, No.10, October, (1994).
- Parmakian, J. **Waterhammer Analysis**. Dover Publications, 1963.
- [•] Patel, V. C.; Rodi, W.; Scheuerer, G. "Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review", **AIAA J.**, Vol.23, No.9, pp.1308-1319, (1985)
- Pauli, W. **Theory of Relativity**. Dover Publications (New York), 1981.

- Peña, D. **Estadística, Modelos y Métodos**, 2ª Edición Revisada. Vol.1: “Fundamentos”. Vol.2: “Modelos Lineales y Series Temporales”. Alianza Editorial, 1989. Octava Reimpresión, 2000.
- Peña, D. **Regresión y Diseño de Experimentos**. Alianza Editorial, 2002.
- Petryk, H.; Mróz, Z. “Time Derivatives of Integrals and Functionals Defined on Varying Volume and Surface Domains”. **Arch. Mech.**, Vol.38, No.5-6, pp.697-724, (1986).
- Phan-Thien, N. **Understanding Viscoelasticity: Basics of Rheology**. Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg), 2002.
- Phan-Thien, N.; Tanner, R. “A New Constitutive Equation Derived From Network Theory”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Vol.2, pp.353-365, (1977).
- Piquet, J. **Turbulent Flows: Models and Physics**. Springer-Verlag (Berlín/Heidelberg), 1999. Revised 2<sup>nd</sup> printing, 2001.
- Planchart, E. **Geometría Simpléctica**. Fondo Editorial Acta Científica, Universidad Simón Bolívar, 1984.
- Planck, M. **Eight Lectures on Theoretical Physics**. Columbia University Press, 1915. Dover Publications (New York), 1998.
- Planck, M. **Treatise on Thermodynamics**, Third Edition. Dover Publications (New York), 1945
- Pogorélov, A. V. **Geometría Diferencial**. Editorial MIR-Moscú, 1977.
- Pope, S. B. **Turbulent Flows**. Cambridge university Press, 2000.
- Postnikov, M. **Linear Algebra and Differential Geometry**. URSS Publishers (Moscow), 1994.
- Postnikov, M. **Smooth Manifolds**, Vol.1-2. URSS Publishers (Moscow), 1994.
- Poston, T.; Stewart, I. N. **Catastrophe Theory and its Applications**. Pitman Publishing, 1978.
- Potter, M. C. **Mechanics of Fluids**. Prentice-Hall, 1991.
- Prager, W. **An Introduction to Plasticity**. Addison-Wesley Publishing Company, 1959.
- Prager, W. **Introduction to Mechanics of Continua**. Ginn (Boston), 1961.
- Prandtl, L.; Tietjens, O. G. **Fundamentals of Hydro - and Aeromechanics**. Dover Publications, 1934.
- Prandtl, L.; Tietjens, O. G. **Applied Hydro - and Aeromechanics**. Dover Publications, 1934.
- Prausnitz, J. M. **Molecular Thermodynamics of Fluid-Phase Equilibria**. Prentice-Hall, 1969.
- Protter, M. H.; Weinberger, H. F. **Maximum Principles in Differential Equations**. Springer-Verlag (New York), 1984.
- Rainich, G. Y. **Mathematics of Relativity**. Wiley, 1950.
- Rao, S. S. **Mechanical Vibration**, Second Edition. Addison-Wesley, 1990.
- Rasband, S. N. **Dynamics**. John Wiley & Sons (New York), 1983.
- Raudkivi, A. J.; Callander, R. A. **Advanced Fluid Mechanics. An Introduction**. Edward Arnold Publishers, 1975.
- Rayleigh, J. W. S. **The Theory of Sound**, Second Edition, Vols.I-II. Dover Publications, 1945.
- Reddy, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**, Third Edition. McGraw-Hill, 2005.
- Reddy, J. N.; Gartling, D. K. **The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics**, Second Edition. CRC Press, 2000.
- Reddy, J. N. **An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis**. Oxford University Press, 2004.
- Reddy, J. N. **Principles of Continuum Mechanics**, A Study of Conservation Principles with Applications. Cambridge University Press (New York), 2010.
- Reddy, J. N. **An Introduction to Continuum Mechanics**, With Applications. Cambridge University Press, 2008.

- Reed, M.; Simon, B. **Methods of Modern Mathematical Physics**. Academic Press, 1972.
- Reeks, M. W.; McKee, S. "The Dispersive Effects of Basset History Forces on Particle Motion in a Turbulent Flow". **Phys. Fluids**, Vol.27, No.7, pp.1573-, (1984).
- Reid, R. C.; Prausnitz, J. M.; Sherwood, T. K. **The Properties of Gases and Líquids**, Third Edition. McGraw-Hill, 1966.
- Reiner, M. **Selected Papers on Rheology**. Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.
- Reynolds, A. J. **Turbulent Flows in Engineering**. John Wiley & Sons (New York), 1974.
- Reynolds, O. "The Sub-Mechanics of the Universe". **Collected Papers**, Vol.3, 1903.
- Richards, J. P. G.; Williams, R. P. **Waves**. Penguin Books, 1972.
- Richardson, L. F. "Atmospheric Diffusion Shown on distance-neighbor Graph", **Proc. R. Soc. London**, Serie A, Vol.110, pp.709-737, (1926).
- Rindler, W. **Relativity: Special, General and Cosmological**. Oxford University Press, 2001. Second Edition, 2006.
- Roberts, Ch. E., Jr. **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**. Editorial Prentice-Hall Internacional - Editorial Dossat, 1980.
- Robertson, J. M. **Hydrodynamics in Theory and Application**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- Robinson, C. **Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos**. CRC Press (Boca Raton), 1995.
- Rodi, W. **Turbulence Models and Their Application in Hydraulics: A State of the Art Review**, Third Edition. Institut für Hydromechanik (University of Karlsruhe) - A. A. Balkema (Rotterdam), 1993. Second Print, 2000.
- Rojo, A. O. **Algebra**, Vol.I-II, 9<sup>na</sup>/4<sup>ta</sup> Edición. Librería El Ateneo Editorial, 1989/1991.
- Romano, A.; Marasco, A. **Continuum Mechanics**, Advanced Topics and Research Trends. Birkhäuser (Boston), 2010.
- Ross, C. T. F. **Advanced Applied Stress Analysis**. Ellis Horwood Limited (Chichester) - John Wiley & Sons (New York), 1987.
- Rotman, J. J. **The Theory of Group**, An Introduction. Allyn and Bacon, 1965. Third Printing, 1968.
- Routh, E. J. **A treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies**. Part I: The Elementary Part. Part II: The Advanced Part. 7<sup>th</sup>/6<sup>th</sup> Editions. Dover Publications, 1960/1955.
- Roy, M. **Mecánica**. Vol.I: "Cuerpos Rígidos". Vol.II: "Medios Continuos". Marcombo, 1970.
- Rudin, W. **Functional Analysis**. Tata - McGraw-Hill, 1973. 3<sup>rd</sup> Printing, 1977.
- Rudin, W. **Real and Complex Analysis**, Third Edition. McGraw-Hill, 1987.
- Ruelle, D. **Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory**. Academic Press, 1989.
- Rumpf, H. **Particle Technology**. Chapman and Hall, 1990.
- Sagaut, P. **Large Eddy Simulation for Incompressible Flows** Springer-Verlag (Berlín / Heidelberg), 2000.
- Samarski, A. A. **Introducción a los Métodos Numéricos**. Editorial MIR-Mocú, 1986.
- Samarski, A. A.; Andréiev, V. B. **Métodos en Diferencias para las Ecuaciones Elípticas**. Editorial MIR (Moscó), 1979.
- Santaló, L. A. **Vectores y Tensores con sus Aplicaciones**, 10<sup>ma</sup> Edición. Editorial Universitaria de Buenos Aires (EUDEBA), 1976.
- Sattinger, D. H.; Weaver, O. L. **Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics**. Springer-Verlag (New York), 1986.

- Saffman, P. G. **Vortex Dynamics**. Cambridge University Press, 1992. Reprint with corrections, 1995.
- Sawford, B. "Turbulent Relative Dispersion", **Annu. Rev. Fluid Mech.**, Vol.**33**, pp.289-317, (2001).
- Scheid, F.; Di Costanzo, R.E. **Métodos Numéricos**, 2da Edición. McGraw-Hill, 1991.
- Scheid, F.; Di Costanzo, R.E. **Métodos Numéricos**, 2da Edición. McGraw-Hill, 1991.
- Schetz, J. A. **Boundary Layer Analysis**. Prentice-Hall, 1993.
- Schiller, L.; Naumann, A. "Über die die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung". **Ver. Deut. Ing.**, Vol.**77**, pp.318-, (1933).
- Schlichting, H. **Boundary Layer Theory**, 6<sup>th</sup>/7<sup>th</sup> Editions. McGraw-Hill (New York), 1968/79.
- Schouten, J. A. **Ricci-Calculus**, 2<sup>nd</sup> Edition. Springer-Verlag, 1954.
- Schowalter, W. R. **Mechanics of Non-Newtonian Fluids**. Pergamon Press, 1978.
- Schrödinger, E. **Statistical Thermodynamics**. Cambridge University Press (Cambridge), 1952. Dover Publication (New York), 1989
- Schutz, B. F. **A First Course in General Relativity**. Cambridge University Press, 1985. Reprinted, 2001.
- Schutz, B. F. **Geometrical Methods of Mathematical Physics**. Cambridge University Press, 1980. Reprinted, 1999.
- Schwarzschild, K. "Über das Gravitationsfeld eines Masspunktes nach der Einsteinschen Theorie". **Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.**, pp.189-196, (1916).
- Scriven, L. E. "Dynamics of a Fluid Interface". **Chem. Engng. Sci.**, Vol.**12**, pp.98-108., (1960).
- Sedov, L. I. **Foundations of The Non-Linear Mechanics of Continua**. Pergamon Press, 1966.
- Sedov, L. I. **A Course in Continuum Mechanics**. Vol.I: "Basic Equations and Analytical Techniques". Vol.II: "Physical Foundations and Formulations of Problems". Vol.III: "Fluids, Gases, and The Generation of Thrust". Vol.IV: "Elastic and Plastic Solid and The Formation of Cracks". Wolters-Noordhoff Publishing (Groningen), 1971-1972.
- Sedov, L. I. (Ed.) **Macroscopic Theories of Matter and Fields: A Thermodynamic Approach**. MIR Publishers (Moscow), 1983.
- Seeger, R. J. **Men of Physics: J. Willard Gibbs**. American Mathematical Physicist *par excellence*. Pergamon Press, 1974.
- Segel, L. A. **Mathematics Applied to Continuum Mechanics**. Macmillan Publishing Co. (New York), 1977.
- Segel, L. A.; Handelman, G. H. **Mathematics Applied to Continuum Mechanics**. Dover Publication, 1987.
- Serrin, J. "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.**VIII/1**, pp.125-263. Springer-Verlag, 1959.
- Shames, I. H. **Engineering Mechanics**, Second Edition. Vol.I: "Statics". Vol.II: "Dynamics". Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- Shames, I. H. **Mechanics of Fluids**, Third Edition. McGraw-Hill, 1992.
- Shames, I. H. **Mecánica de Fluidos**, Tercera Edición. McGraw-Hill (Bogotá), 1995.
- Shames, I. H.; Cozzarelli, F. A. **Elastic and Inelastic Stress Analysis**. Prentice-Hall, 1992.
- Shames, I. H.; Dym, C. L. **Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics**. Hemisphere Publishing Corp. (New York), 1985.
- Shampine, L. F.; Watts, H. A.; Davenport, S. M. "Solving Non-Stiff Ordinary Differential Equations - The State of the Art". **SANDIA Laboratories**, Report No. SAND75-0182, 1975. **SIAM Review**, Vol.**18**, No.3, pp.376-411, (1976).

- Shapiro, A. H. **The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow**, Vol.I-II. John Wiley & Sons (New York), 1953.
- Sherman, F. S. **Viscous Flow**. McGraw-Hill, 1990.
- Sherwood, T. K.; Pigford, R. L.; Wilke, Ch. R. **Mass Transfer**. McGraw-Hill, 1975.
- Showalter, R. E. **Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations**. Pitman Publishing, 1977.
- Shub, M. **Global Stability of Dynamical Systems**. Springer-Verlag, 1987.
- Siegel, R.; Howell, J. R. **Thermal Radiation Heat Transfer**, 4<sup>th</sup> Edition. Hemisphere Publishing Co., 2001.
- Sikorski, R. **Boolean Algebra**, Third Edition. Springer-Verlag, 1969.
- Šilhavý, M. **The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media**. Springer-Verlag, 1996.
- Sinai, Ya. G.; (Ed.). **Dynamical Systems II**, Ergodic Theory with Applications to Dynamical Systems and Statistical Mechanics. Springer-Verlag, 1989.
- Slattery, J. C. **Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua**. McGraw-Hill, 1972.
- Slattery, J. C. **Advanced Transport Phenomena**. Cambridge University Press, 1999.
- Ślawianowski, J. **Geometry of Phase Spaces**. PWN - Polish Scientific Publishers (Warszawa), 1991.
- Smagorinsky, J. "General Circulation Experiments with The Primitive Equations", **Mon. Weath. Rev.**, Vol.91, No.3, pp.99-164, (1963).
- Smith, J. M.; Van Ness, H. C. **Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics**, 4<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill, 1987.
- Smith, J. M.; Van Ness, H. C. **Introducción a la Termodinámica en Ingeniería Química**, 2<sup>da</sup> Edición. McGraw-Hill, 1989.
- Smoller, J. **Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations**. Springer-Verlag (New York), 1983.
- Sneddon, I. N. "Functional Analysis". **Encyclopedia of physics**. Ed. S. Flügge. Vol.I: "Mathematical Methods II", pp.198-348. Springer-Verlag, 1955.
- Sobolev, S. L. **Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics**, Translated from the 1950 Russian Edition by F. Browder, Translations of Mathematical Monographs, Vol.7, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1963.
- Sobolev, S. L. **Partial Differential Equations of Mathematical Physics**. Pergamon Press, 1964. Dover Publications, 1989.
- Sokolnikoff, I. S. **Mathematical Theory of Elasticity**, Second Edition. McGraw-Hill (New York), 1956.
- Sokolnikoff, I. S.; Redheffer, R. M. **Mathematics of Physics and Modern Engineering**, Second Edition. McGraw-Hill Book Company, 1966.
- Sokolnikoff, I. S. **Análisis Tensorial**, 2<sup>da</sup> Edición. John Wiley & Sons, 1979.
- Sokolnikoff, I. S. **Tensor Analysis**, 2<sup>nd</sup> Edition. John Wiley & Sons (New York), 1979.
- Sommerfeld, A. **Mechanics of Deformable Bodies**. Lectures on Theoretical Physics, Vol.II. Academic Press, 1950. Fourth Printing, 1964.
- Sommerfeld, A. **Thermodynamics and Statistical Mechanics**. Lectures on Theoretical Physics, Vol.V. Academic Press, 1950.
- Sommerfeld, A. **Electrodynamics**. Lectures on Theoretical Physics, Vol.III. Academic Press, 1952.
- Spanier, J.; Oldham, K. B. **An Atlas of Functions**. Hemisphere Publishing Corporation, 1987.
- Sparrow, E. M.; Cess, R. D. **Radiation Heat Transfer**, Revised Edition. Wadsworth Publishing Company, 1970.

- Sparrow, C. **The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors** Springer-Verlag (New York), 1982.
- Spiegel, M. R. **Teoría y Problemas de Análisis de Fourier**. McGraw-Hill (Serie Schaum), 1976.
- Spielrein, J. **Lehrbuch de Vektorrechnung nach den Bedürfnissen in der Thechnischen Mechanik und Elektrizitätslehre**. Stuttgart, 1916.
- Spivak, M. **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry**. Publish or Perish; Vol.1, Second Edition, 1979; Vol.2, 1970; Vol.3-5, 1975.
- Spivak, M. **Cálculo en Variedades**. Editorial Reverté, 1982.
- Spurk, J. **Fluid Mechanics**. Springer-Verlag (Berlín), 1997.
- Stanišić, M. M. **The Mathematical Theory of Turbulence**. Springer-Verlag (New York), 1985.
- Sternberg, E. "On Saint-Venant's Principle", J. Appl. Math., Vol.11, pp.393-402, (1953-1954).
- Stewart, F. M. **Introduction to Linear Algebra**. Van Nostrand - Reinhold, 1963.
- Stokes, G. G. **Mathematical and Physical Papers**, Vols.1-5. Johnson Reprint Corporation, 1966.
- Strang, G. **Algebra Lineal y sus Aplicaciones**, 2<sup>da</sup> Edición. Addison-Wesley Iberoamericana, 1988.
- Streeter, V. L.; Wylie, E. B. **Mecánica de Fluidos**. McGraw-Hill, 1988.
- Streeter, V. L.; Wylie, E. B.; Bedford, K. W **Mecánica de Fluidos**, Novena Edición. McGraw-Hill, 2000.
- Sychev, V. V. **Complex Thermodynamic Systems**, Third Edition. MIR Publisher-Moscow, 1981.
- Sychev, V. V. **The Differential Equations of Thermodynamics**. MIR Publisher-Moscow, 1983.
- Synge, J. L. "Relativistic Hydrodynamics". **Proc. London Math. Soc.**, Second Series, Vol.43, (1937).
- Synge, J. L. "Classical Dynamics". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.III/1, pp.1-225. Springer-Verlag, 1960.
- Synge, J. L. **Relativity: The Special Theory**, Second Edition. North-Holland (Amsterdam), 1964. Third Printing, 1972.
- Synge, J. L. **Relativity: The General Theory**. North-Holland (Amsterdam), 1960. Fourth Printing, 1971.
- Synge, J. L.; Griffith, B. A. **Principles of Mechanics**. McGraw-Hill, 1959.
- Synge, J. L.; Griffith, B. A. **Principios de Mecánica**. McGraw-Hill, 1965.
- Synge, J. L.; Schild, A. **Tensor Calculus**. University of Toronto Press, 1956.
- Szekely **Fenómenos de Flujo de Fluidos en Procesamiento de Metales**. Editorial Limusa, 1988.
- Temam, R.; Miranville, A. **Mathematical Modeling in Continuum Mechanics**. Cambridge University Press, 2001.
- Tennekes, H.; Lumley, J. L. **A First Course in Turbulence**. The MIT Press, 1972.
- Thomas, T. Y. **Plastic Flow and Fracture in Solids**. Academic Press, 1961.
- Thompson, A. C. **Minkowski Geometry**. Cambridge University Press (New York), 1996.
- Thompson, J. M. T.; Hunt, G. W. **A General Theory of Elastic Stability**. John Wiley & Sons (New York), 1973.
- Thorpe, J. A. **Elementary Topics in Differential Geometry**. Springer-Verlag, 1979.
- Thomson, W. T. **Teoría de Vibraciones, Aplicaciones**. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1982.
- Thomson, W. T.; Dahleh, M. D. **Theory of Vibration with Applications**, 5<sup>th</sup> Edition. Prentice-Hall, 1998.
- Tichacek, L. J.; Barkelew, C. H.; Baron, T. "Axial Mixing in Pipes". **AIChE J.**, Vol.3, No.4, pp.439-442, (1957).

- Timoshenko, S. P.; Woinowsky-Krieger, S. **Theory of Plates and Shells**, Second Edition. McGraw-Hill, 1959.
- Timoshenko, S. P.; Goodier, J. N. **Theory of Elasticity**, Third Edition. McGraw-Hill, 1970.
- Timothy, L. K.; Bona, B. E. **State Space Analysis**, An Introduction. McGraw-Hill, 1968.
- Tolstoy, I. **Wave Propagation**. McGraw-Hill, 1973.
- Toupin, R. A. "World Invariant Kinematics". **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Vol.1, pp.181-211, (1957).
- Townsend, A. A. **The Structure of Turbulent Shear Flow**. Cambridge University Press, 1980.
- Tranter, C. J. **Transformadas Integrales en la Física Matemática**, Segunda Edición. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, 1964.
- Trenoguin, V. A.; Pisarieviski, B. M.; Sóboleva, T. S. **Problemas y Ejercicios de Análisis Funcional**. Editorial MIR-Moscú, 1987.
- Truesdell, C. A.; Toupin, R. A. "The Classical Field Theories". **Encyclopedia of Physics**. Ed. S. Flügge. Vol.III/1, pp.226-793. Springer-Verlag, 1960.
- Truesdell, C. A.; Noll, W. "The Non-Linear Field Theories of Mechanics". **Encyclopedia of physics**. Ed. S. Flügge. Vol.III/3. Springer-Verlag, 1965.
- Truesdell, C. A. **The Elements of Continuum Mechanics**. Springer-Verlag, 1966.
- Truesdell, C. A. **Continuum Mechanics I: The Mechanical Foundation of Elasticity and Fluid Dynamics**. Gordon and Breach Science Publishers, 1966.
- Truesdell, C. A. **Essays in the History of Mechanics**. Springer-Verlag, 1968.
- Truesdell, C. A.; (Ed.). **Mechanics of Solids**. Vol.I: "The experimental Foundations of Solid Mechanics". Vol.II: "Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity". Vol.III: "Theory of Viscoelasticity, Plasticity, Elastic Waves, and Elastic Stability". Vol.IV: "Waves in Elastic and Viscoelastic Solids (Theory and Experiments)". Springer-Verlag, 1974.
- Truesdell, C. A. **A First Course in Rational Continuum Mechanics**. Vol.1: "General Concepts". Academic Press, 1977.
- Truesdell, C. A.; Muncaster, R. G. **Fundamentals of Maxwell's Kinetic Theory of a Simple Monatomic Gas**, Treated as a Branch of Rational Mechanics. Academic Press, 1980.
- Truesdell, C. A. **Rational Thermodynamics**, 2<sup>nd</sup> Edition. Springer-Verlag, 1984.
- Turner, G. A. **Heat and Concentration Waves**, Analysis and Applications Academic Press, 1972.
- Turns, S. R. **An Introduction to Combustion: Concepts and Applications**, Second Edition. McGraw-Hill (Boston), 2000.
- Ungarish, Y. M. **Hydrodynamics of Suspensions**. Springer-Verlag, 1993.
- Urwin, K. M. **Cálculo Superior y Teoría del Vector-Campo**. Editorial Alhambra, 1969.
- Valanis, K. C. **Irreversible Thermodynamics of Continuous Media**, Internal Variable Theory. Springer-Verlag, 1972.
- Van Driest, E. R. "On Turbulence Flow Near a Wall", **Journal of Aerospace Science**, Vol.23, p.1007-1011, (1956).
- Van Dyke, M. **An Album of Fluid Motion**. Parabolic Press, 1982.
- Van Dyke, M. **Perturbation Methods in Fluid Mechanics**. Academic Press, 1964. The Parabolic Press (Stanford), 1975. Second Printing, 1978.
- Van Wylen, G. J.; Sonntag, R. E. **Fundamentals of Classical Thermodynamics**. John Wiley & Sons (New York), 1965. Second Printing, 1966.
- Van Wylen, G. J.; Sonntag, R. E. **Fundamentos de Termodinámica**. Editorial Limusa, 1967. 8<sup>va</sup> Reimpresión, 1979.



- Versteeg, H. K.; Malalasekera, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. Longman Scientific & Technical, 1995.
- Vidyasagar, M. **Nonlinear Systems Analysis**, Second Edition. Prentice-Hall International, 1993.
- Viète, François. *Tratado De Emendatione*, 1615.
- Vladimirov, V. S. **Generalized Functions in Mathematical Physics**. MIR Publishers-Moscow, 1979.
- Voevodin, V. V. **Algebra Lineal**. Editorial MIR-Moscú, 1982.
- Volkovyski, L. I.; Lunts, G. L.; Aramanovich, I. G. **Problemas sobre la Teoría de Funciones de Variable Compleja**, Segunda Edición. Editorial MIR-Moscú, 1977.
- Von Kármán, Th. “Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz”, *Nach. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse*, Vol.58, (1930). NACA TM 611, (1931).
- Von Kármán, Th. “On Laminar and Turbulent Friction”, *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol.1, (1921), pp.235-236.
- Von Mises, R. **Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow**. Academic Press (New York), 1958. Second Printing, 1966.
- Von Seggern, D. H. **CRC Handbook of Mathematical Curves and Surfaces**. CRC Press (Boca Ratón), 1990
- Von Westenholz, C. **Differential Forms in Mathematical Physics**. North-Holland Publishing, 1978.
- Wadsworth, G. P.; Bryan, J. G. **Aplicaciones de la Teoría de Probabilidades y Variables Aleatorias**, Segunda Edición. Editorial Alhambra, 1979.
- Walker, J. A. **Dynamical Systems and Evolution Equations**, Theory and Applications. Plenum Press, 1980.
- Wallis, G. B. **One-Dimensional Two-Phase Flow**. McGraw-Hill, 1969.
- Wang, C.- C. **Mathematical Principles of Mechanics and Electromagnetism**. Part A: Analytical and Continuum Mechanics. Part B: Electromagnetism and Gravitation. Plenum Press (New York), 1979.
- Wang, C.- C.; Truesdell, C. **Introduction to Rational Elasticity**. Noordhoff International Publishing (Leyden-Netherlands), 1973.
- Wark, R. **Thermodynamics**, 4<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill, 1983.
- Wark, R. **Termodinámica**. McGraw-Hill, 1988.
- Warner, F. W. **Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups**. Springer-Verlag (New York), 1983.
- Washizu, K. **Variational Methods in Elasticity and Plasticity**. Pergamon Press, 1968.
- Weatherburn, C. E. **Differential Geometry of Three Dimensions**. Cambridge University Press, 1927.
- Webb, R. L. **Principles of Enhanced Heat Transfer**. John Wiley & Sons (New York), 1994.
- Weinberger, H. F. **Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales**. Editorial Reverté, 1970. Segunda Reimpresión, 1979.
- Weinberger, H. F. **A First Course in Partial Differential Equations**, With Complex Variables and Transform Methods. Dover Publications, 1995.
- Weisberg, S. **Applied Linear Regression**, 2<sup>nd</sup> Edition John Wiley & Sons (New York), 1985.
- Welty, J. R.; Wicks, Ch. E.; Wilson, R. E. **Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa**. Editorial Limusa, 1982. 4<sup>ta</sup> Reimpresión, 1991.
- Westlake, J. R. **Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations**. John Wiley & Sons (New York), 1968.

- Whitaker, S. **Introduction to Fluid Mechanics**. Krieger, 1968.
- White, F. M. **Viscous Fluid Flow**. McGraw-Hill, 1974.
- White, F. M. **Fluid Mechanics S. I.**, Third Edition. McGraw-Hill, 1994.
- White, F. M. **Mecánica de Fluidos**, Quinta Edición. McGraw-Hill (Madrid), 2004.
- Whitham, G. B. **Linear and Nonlinear Waves** John Wiley & Sons (New York), 1974.
- Wiggins, S. **Global Bifurcations and Chaos**, Analytical Methods. Springer-Verlag (New York), 1988.
- Wiggins, S. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. Springer-Verlag (New York), 1990.
- Wilcox, D. **Turbulence Modeling for Cfd**, 2<sup>nd</sup> Edition. DCW Industries, 1998.
- Wilf, H. S. **Mathematics for the Physics Sciences**. Dover Publications, 1978.
- Williams, F. A. **Combustion Theory**, The Fundamental Theory of Chemically Reacting Flow Systems. Addison-Wesley Publishing Company, 1965. Second Edition, Perseus Books, 1985. Reprint, 1994.
- Willmore, T. J. **Riemannian Geometry**. Clarendon Press (Oxford), 1993.
- Wolf, J. P.; Song, Ch. **Finite-Element Modelling of Unbounded Media**. John Wiley & Sons (West Sussex, England), 1996. Reprint, 1997.
- Woods, L.C. **The Thermodynamics of Fluid Systems**. Clarendon Press - Oxford University Press, 1975.
- Wu, H.-Ch. **Continuum Mechanics and Plasticity**. Chapman & Hall / CRC Press (Boca Raton), 2005.
- Wu, J. **Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations**. Springer-Verlag (New York), 1996.
- Wu, S. **Polymer Interface and Adhesion**. Marcel Dekker (New York), 1982.
- Wylie, E. B.; Streeter, V. L.; Suo, L. **Fluid Transients in Systems**. Prentice-Hall, 1993.
- Xiao, J., **A Comprehensive Mechanistic Model for Two-Phase Flow in Pipelines**. MSc. Thesis, Tulsa University, 1990.
- Yahya, S. M. **Fundamentals of Compressible Flow: With Aircraft and Rocket Propulsión**, Second Edition (SI Units). Wiley Eastern Limited, 1982. Reprint, 1992.
- Yákovlev, G. N. **Algebra y Principios del Análisis**, Parte 1/2. Editorial MIR-Moscú, 1984.
- Yao, Y. L. **Irreversible Thermodynamics**. Science Press - Van Nostrand Reinhold Company - Litton Educational Publishing, 1981.
- Yoshizawa, T. **Stability Theory by Liapunov's Second Method**. Mathematical Society of Japan, 1966.
- Young, T. "Collected Works" (D. Peacock, Ed.), **Proc. Roy. Soc. (London)**, December, (1804).
- Yuan, S. W. **Foundations of Fluid Mechanics**. Prentice Hall, (Englewood Cliffs, New Jersey), 1967.
- Zajárov, V. K.; Sevastiánov, B. A.; Chistiakov, V. P. **Teoría de Las Probabilidades**. Editorial MIR-Mocú, 1985.
- Zemansky, M. W. **Heat and Thermodynamics**. McGraw-Hill (New York), 1943.
- Zemansky, M. W.; Dittman, R. H. **Heat and Thermodynamics**, 6<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill, 1981.
- Zemansky, M. W.; Dittman, R. H. **Calor y Termodinámica**, 6<sup>ta</sup> Edición. McGraw-Hill, 1984.
- Zhang, H.; Faghri, M.; White, F. M. "A New Low-Reynolds-Number  $k - \varepsilon$  Model for Turbulent Flow Over Smooth and Rough Surfaces", **Journal of Fluids Engineering**, Vol.118, No.2, pp.255-259, (1996).

- Ziegler, F. **Mechanics of Solids and Fluids** Springer-Verlag (New York), 1991.
- Zierep, J. **Theoretical Gasdynamics**. Springer-Verlag, 1978.

## PUBLICACIONES PERIODICAS

- ★ **AIChE Journal**, American Institute of Chemical Engineering (AIChE).§†‡
- **American Journal of Mathematics**.¶
- **Annual Review of Fluid Mechanics**.†
- ★ **Applied Mechanics Reviews**.§†
- **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Springer-Verlag.§†
- ★ **Archive of Applied Mechanics**.§†
- ★ **Archive of Mechanics**.§†
- ★ **Biorheology**.†
- ★ **British Society of Rheology**.†
- ★ **Bulletin of Mechanical Engineering Education**.§†‡
- ★ **Chemical Engineering**.‡
- ★ **Computational Mechanics**, Springer-Verlag.§†‡
- ★ **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**.§†
- **Computers and Fluids**.†
- ★ **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, Springer-Verlag. §†‡¶
- **Heat Transfer Engineering**.§†‡
- ★ **Heat and Mass Transfer**, Springer-Verlag.‡
- ★ **Industrial Lubrication and Tribology**, MCB University Press.†
- **International Communications in Heat and Mass Transfer**.§†‡
- **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons.§†
- ★ **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, John Wiley & Sons.†
- ★ **International Journal for Numerical Methods in Heat and Fluid Flow**, John Wiley & Sons.†‡
- ★ **International Journal of Engineering Science**.§†
- **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Pergamon Press.§†‡
- ★ **International Journal of Multiphase Flow**, Pergamon Press & Elsevier Science Publisher.§†‡
- **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Pergamon Press.§†
- ★ **International Journal of Solids and Structures**.§
- ★ **Journal of Aeronautical Science**.§†
- **Journal of Applied Mechanics**. Transactions of the ASME.§†
- ★ **Journal of Applied Mathematics and Physics**.§†
- ★ **Journal of Colloidal Science**.§†
- **Journal of Computational Physics**.§†
- ★ **Journal of Energetics and Fluids Engineering**, John Wiley & Sons.†‡
- ★ **Journal of Engineering Science**.§†
- **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers.§†
- **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press.†
- **Journal of Fluids Engineering**, Transactions of the ASME.†‡
- **Journal of Hydraulic Engineering**, American Society of Civil Engineers.†
- **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Academic Press.¶
- ★ **Journal of Mechanics and Physics of Solids**.§
- **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier Science Publishers.†

- ★ **Journal of Rational Mechanics Analysis.**§†
- ★ **Journal of Rheology.**†
- ★ **Journal of the Acoustical Society of America.**§
- **Mathematical Methods in Applied Sciences.**§†
- **Mechanical Engineering,** American Society of Mechanical Engineers (ASME).§†
- **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, Part B: Fundamentals.**§†‡
- ★ **Philosophical Transactions of the Royal Society of London.**§†‡
- **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics,** American Institute of Physics.†
- **Previews of Heat and Mass Transfer,** Rumford Publishing Company & Pergamon Press.§†‡
- ★ **Proceeding of the Cambridge Philosophical Society.**§†
- ★ **Proceeding of the Institute of Civil Engineers.** London.§†
- ★ **Proceeding of the International Association for Testing Materials.**§
- **Proceeding of the Royal Society.**§†‡¶
- ★ **Quarterly Journal of Applied Mathematics.**§†¶
- ★ **Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics.**§¶
- ★ **Quarterly of Applied Mathematics.**¶
- **Rheological Acta,** Steinkopff Darmstadt.†
- **SIAM Journal on Applied Mathematics,** Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).§†¶
- **SIAM Journal on Numerical Analysis,** Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).§†¶
- ★ **Theoretical and Computational Fluid Dynamics,** Springer-Verlag.†¶
- ★ **Transactions of the Society of Rheology.**†

#### **Leyenda:**

- Está en la Biblioteca de la USB de forma actualizada.
- Está en la Biblioteca de la USB con una suscripción incompleta o cancelada.
- ★ No está en la Biblioteca de la USB.
- § Relacionada con sólidos.
- † Relacionada con fluidos.
- ‡ Relacionada con fenómenos de transferencia.
- ¶ Relacionada con matemáticas aplicadas.