UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

MODELO DE ACUMULACIÓN DE CAPITAL HUMANO (LUCAS)

En esta sección introduciremos el capital humano en un modelo de crecimiento como plantea *Lucas (1988),* y mostraremos que el crecimiento en forma sostenida del capital humano es suficiente para tener un crecimiento económico sostenido, como nos muestra *Lucas en "On the Mechanics of Development Planning"* (En las Mecánicas de Planificación de Desarrollo), por este y otros trabajo Lucas gano el *Premio Nobel de Economía en 1995.*

Este modelo desarrollo es el pilar sobre el que descansan las nuevas teorías del crecimiento y en especial la contribución del capital humano al crecimiento económico de acuerdo con las teorías del crecimiento endógeno, la capacidad productiva de los individuos aumenta con su educación, no solo por la incorporación de habilidades y capacidades para el trabajo, sino también por el impacto sobre la salud y alimentación, que incrementa la productividad laboral.[1]
En este modelo a diferencia del modelo AZ, desarrollado anteriormente, se diferencia por que no considera al capital humano y físico igual (bienes similares), ni que ambos eran producidos con la misma tecnología, sino considera el capital físico y el capital humano son bienes distintos y que son producidos con tecnología distinta.

En *Uzawa* (1965) y *Lucas* (1988) se presentan las ideas básicas que permiten introducir el capital humano como potenciador del capital y como factor de su propia reproducción y crecimiento.[2]

Robert Lucas nos dice que un individuo dedica muchos años de su vida a la escuela, con el fin de obtener capacidades que le permitan mejorar su capacidad productiva. La decisión de invertir en la educación se basa sobre una comparación entre los costos de la enseñanza (ingresos, gastos de escolaridad, pasajes, útiles, etc.) y las ventajas futuras de una escolaridad mas avanzada. Por lo que considerar la escolaridad como una decisión de inversión para aumentar el capital humano de una persona.

La doble característica del capital humano nos dice: De un lado, de ser de información del saber (como la tecnología) y del otro lado, de ser apropiable por los individuos (como el capital físico). Siendo del saber, es producido esencialmente consigo mismo, los alumnos son formados por los profesores y aquellos utilizan sus conocimientos presentes para adquirir nuevos conocimientos. Esto hace que el

[1] Estas nota han sido desarrollado en base al articulo de *Robert Lucas (1988) "On the Mechanics of Development Planning"* (En las Mecánicas de Planificación de Desarrollo). Journal of Monetary Economics (El periódico de Economía Monetaria) , pp. 3-42.
[2] Por lo que el capital humano puede ser definido como la suma de las capacidades habiendo una eficiencia productiva incorporada a los individuos o a las colectividades. Esas capacidades pueden ser diversas: salud, fuerza física, conocimientos generales o técnicos

capital humano se aparenta al conocimiento técnico y las reglas de acumulación con rendimientos de escala dinámicas le pueden ser aplicadas, además genera un proceso de crecimiento endógeno.[3]

Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista que tiene dos sectores:
- ✓ Existen dos tipos de capital:
- ✓ El stock de capital físico se deprecia a una tasa constante y exógena: δ_K
- ✓ El stock de capital humano se deprecia a una tasa constante y exógena: δ_H
- ✓ Toda la población trabaja en esta economía.
- ✓ La fuerza de trabajo crece a una tasa constante y exógena. n
- ✓ La acumulación de capital físico ocurre como la detracción del consumo.
- ✓ La acumulación de capital físico ocurre como la detracción del consumo

Sector de producción del bien final

Asume una función de producción *Cobb-Douglas*

$$Y_t = AK_t H_p^{\alpha 1-\alpha}$$

Donde

Y_t: Voluta de producción del sector del bien final en el instante "*t*".

K_t: Stock de capital físico que opera en el sector del bien final en el instante "*t*".

H_p: Stock de capital humano que opera en el sector del bien final.

H_t: Stock de capital humano en el instante "*t*".

A: Índice del nivel de tecnología en el sector de producción del bien final.

α : Elasticidad producto respecto al capital físico.

$1-\alpha$: Elasticidad producto respecto al capital humano.

Sea

u: Representa la fracción de capital humano que labora en el sector de producción del bien final.

$$u = \frac{H_p}{H_t} \Rightarrow H_p = uH_t \ldots (I)$$

[3] Lucas privilegia al capital humano sobre la tecnología como factor de crecimiento, por que la tecnología es un bien publico accesible de manera idéntica a todas las naciones, además, no puede explicar las diferencias internacionales de nivel y de la tasa de crecimiento del ingreso

Reemplazando la ecuación (I) en la función de producción del bien final, tenemos:

$Y_t = AK_t^{\alpha}(uH_t)^{1-\alpha}$

Para expresar esta función en términos per cápita y así halla la función de producción intensiva, pasa remos a dividir la función de producción de bien final entre el total de trabajadores (L_t) de a economía.

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{AK_t^{\alpha} u^{1-\alpha} H_t^{1-\alpha}}{L_t}$$

Usando el artificio: $L_t = L_t^{\alpha}.L_t^{1-\alpha}$

$$\frac{Y_t}{L_t} = A\frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}} u^{1-\alpha} \frac{H_t^{1-\alpha}}{L_t} \Rightarrow \boxed{y_t = Ak_t^{\alpha} u^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha} \ldots (FPI)}$$

Ecuación de acumulación de capital físico

De la condición de equilibrio macroeconómico

$Y_t = C_t + I^b$

$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep} \quad \Rightarrow \quad Y_t = C_t + \dot{K}_t + \delta_K K_t$

Resolviendo la ecuación para $\dot{K}_t$ y reemplazando en la función de producción

$$\dot{K}_t = AK_t^{\alpha} u^{1-\alpha} H_t^{1-\alpha} - C_t - \delta_K K_t$$

Esta ecuación de acumulación de capital físico neto, es el remanente del producto respecto al consumo y respecto a la inversión en reposición.

Ecuación Diferencial del sector de producción del bien final

De la condición de equilibrio macroeconómico

$Y_t = C_t + I^b$

Dividiendo a la condición macroeconómica entre el total de trabajadores L_t para hallar la ecuación en términos per cápita.

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{C_t}{L_t} + \frac{I^b}{L_t} \Rightarrow y_t = c_t + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta k_t \Rightarrow y_t = c_t + \dot{k}_t + (n+\delta)k_t$$

Resolviendo la ecuación para $\dot{k}_t$ y reemplazando la (FPI)

$$\boxed{\dot{k}_t = Ak_t^{\alpha} u^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t}$$

Sector educacional

Asume por simplicidad que este sector no usa capital físico sino solo capital humano y formula la siguiente función de producción.

$$Y_E = BH_E$$

Donde

Y_E: Volumen en el sector educacional.

H_E: Stock de capital humano que opera en el sector educacional.

B: Índice del nivel de tecnología en el sector educacional.

Sea

$(1-u)$: La fracción de capital humano que labora en el sector educacional.

$$(1-u) = \frac{H_E}{H_t} \quad \Rightarrow \quad H_E = (1-u)H_t$$

El capital humano que opera en el sector educacional es una fracción que operar en el sector educacional, donde H_E es una fracción $(1-u)$ de capital humano.
Reemplazando el stock de capital humano que opera en el sector educacional en la función del sector educacional tenemos:

$$Y_E = B(1-u)H_t$$

Para hallar la función de producción intensiva vamos a dividir entre la cantidad de trabajadores a la ecuación a la nueva función de producción obtenida tenemos:

$$\frac{Y_E}{L_t} = B(1-u)\frac{H_t}{L_{tt}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_E = B(1-u)H_t \ldots (FPI)}$$

Ecuación diferencial del sector educacional

De la condición de equilibrio macroeconómico

$Y_H = C_H + I_H^b$

Pero como sabemos que en capital no tiene consumo $C_H = 0$, reemplazando obtenemos:

$$Y_H = I_H^b \Rightarrow BH_E = I_H^n + I_H^{rep} \quad \Rightarrow \quad B(1-u)H_t = \dot{H}_t + \delta_H H_t$$

Resolviendo para $\dot{H}_t$ obtenemos:

$$\boxed{\dot{H}_t = B(1-u)H_t - \delta_H H_t}$$

Esta ecuación del proceso de acumulación neta de capital humano y esto va indicar que la tasa de cambio de capital humano es igual al remanente del producto educacional respecto a la acumulación en reposición del capital humano.

Sistema de Ecuaciones Diferenciales

De la condición macroeconómica tenemos:

$$Y_E = I_H^b \Rightarrow BH_E = I_H^n + I_H^{rep} \quad \Longrightarrow \quad B(1-u)H_t = \dot{H}_t + \delta_H H_t$$

Dividiendo la ecuación anterior entre el numero de trabajadores

$$B(1-u)\frac{H_t}{L_t} = \frac{\dot{H}_t}{L_t} + \delta_H \frac{H_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad B(1-u)h_t = \frac{\dot{H}_t}{L_t} + \delta_H h_t$$

$$B(1-u)h_t = \dot{h}_t + (n+\delta_H)h_t$$

Resolviendo para $\dot{h}_t$, obtenemos:

$$\boxed{\dot{h}_t = B(1-u)h_t - (n+\delta_H)h_t}$$

Esta ecuación representa el proceso de acumulación del capital humano.

Sistema de Ecuaciones Diferenciales

1er Ecuación diferencial: $\dot{k}_t = Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t$

2da Ecuación diferencial: $\dot{h}_t = B(1-u)h_t - (n+\delta_H)h_t$

Para simplificar el análisis se supone que las tasas de depreciación de los tipos de capital son iguales $\delta_K = \delta_H = \delta$.

Planteamiento del problema

Lucas asume que las familias productoras tienen la siguiente utilidad, la misma que maximizan. El planteamiento del problema será, que las familias productoras va elegir, aquella trayectoria de consumo y aquella fracción que le permite maximizar su fracción de bienestar a través del tiempo y sujeto a las condiciones de movimiento de la condición inicial.

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty}\left(\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right).e^{-(\rho-n)t}dt \ldots (\textit{Función objetivo})$$

$$s.a: \quad \begin{aligned} \dot{k}_t &= Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t \\ \dot{h}_t &= B(1-u)h_t - (n+\delta_H)h_t \end{aligned}$$

$$k(0) = k_0 \wedge h(0) = h_0 \ldots (\textit{Estado inicial de capital físico y humano})$$

$$k_0 \geq 0 \wedge h_0 \geq 0$$

$$0 \leq u \leq 1$$

Donde

$$Variable-de-control:\begin{cases}c_t\\u_t\end{cases}$$

$$Variable-de-estado:\begin{cases}k_t\\h_t\end{cases}$$

$$Variable-de-coestado:\begin{cases}\lambda_t\\v_t\end{cases}$$

Planteamiento de la función Hamiltoniana tenemos:

$$\mathrm{H}\equiv H\left(c_t,u_t,k_t,h_t,\lambda_t,v_t,t\right)$$

$$\mathrm{H}=\left(\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right).e^{-(\rho-n)t}+\lambda_t\left[Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha}-c_t-(n+\delta)k_t\right]+v_t\left[B(1-u)h_t-(n+\delta_H)h_t\right]$$

Condición de Primer Orden (CIO)

a) Tomando la derivada del hamiltoniano con respecto de las variables de control e imponiendo la condición igual a cero.

$$\frac{\partial H}{\partial c_t}\equiv\frac{\partial U}{\partial c_t}+\frac{\partial\lambda_t}{\partial c_t}+\frac{\partial v_t}{\partial c_t}=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial c_t}=e^{-(\rho-n)t}.c_t^{-\theta}+\lambda_t(-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad e^{-(\rho-n)t}.c_t^{-\theta}=\lambda_t\ldots(I)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_t}\equiv\frac{\partial U}{\partial u_t}+\frac{\partial\lambda_t}{\partial u_t}+\frac{\partial v_t}{\partial u_t}=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_t}=\lambda_t(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}u^{-\alpha}h_t^{1-\alpha}-Bv_th_t=0\ldots(II)$$

$$\lambda_t=\frac{Bv_th_tu^{\alpha}}{(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}h_t^{1-\alpha}}\ldots(II')$$

b) Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto a las variables de estado e imponiendo las condiciones del negativo de la derivada de los multiplicadores con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial H}{\partial k_t}=-\dot{\lambda}_t \quad\Longrightarrow\quad \lambda_t\left[\alpha Ak_t^{\alpha-1}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha}-(n+\delta)\right]=-\dot{\lambda}_t\ldots(III)$$

$$\left[\alpha A k_t^{\alpha-1} u^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha} - (n+\delta)\right] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \ldots (IV)$$

$$\frac{\partial H}{\partial h_t} = -\dot{v}_t \quad \Longrightarrow \quad \lambda_t\left[(1-\alpha)A k_t^{\alpha} u^{1-\alpha} h_t^{-\alpha}\right] + v_t\left[B(1-u) - (n+\delta)\right] = -\dot{v}_t \ldots (V)$$

c) Tomando la derivada con respecto al multiplicadores lagrangiano tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t \quad \Longrightarrow \quad A k_t^{\alpha} u^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t = \dot{k}_t \ldots (VI)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v_t} = \dot{v}_t \quad \Longrightarrow \quad B(1-u)h_t - (n+\delta)h_t = \dot{h}_t \ldots (VII)$$

Condición de Segundo Orden (CIIO)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c_t^2} = \underbrace{-\theta}_{<0} \; x \; \underbrace{\frac{1}{e^{(\rho-n)t}} \cdot \frac{1}{c_t^{1+\theta}}}_{0<} < 0$$

Esta condición nos asegura un máximo.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_t^2} = \underbrace{-\alpha}_{<0} \; x \; \underbrace{(1-\alpha)\lambda_t A u^{-(1+\alpha)} h_t^{1-\alpha} k_t^{\alpha}}_{0<} < 0$$

Condición de Transversalidad

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\, \lambda_t k_t = 0$$

Esto quiere decir que $\lambda_t = 0$ (el precio implícito de capital en el periodo final) o que $k_t = 0$ (el stock de capital en el momento que muere).

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\, \lambda_t = \frac{1}{c_t^{\theta}}\left(\frac{1}{e^{(\rho-n)\infty}}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underset{t\to\infty}{Lím}\, \lambda_t = 0$$

$$(1/\infty) \approx 0$$

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\, v_t h_t = 0$$

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\, v_t = 0$$

❖ Reemplazando (II') en (V) tenemos:

$$\frac{Bv_t h_t u^{\alpha}}{A(1-\alpha)h_t^{1-\alpha}k_t^{\alpha}}\left[(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{-\alpha}\right]+v_t\left[B(1-u)-(n+\delta)\right]=-\dot{v}_t\ldots(VIII)$$

Operando y simplificando obtenemos

$$B-(n+\delta)=-\frac{\dot{v}_t}{v_t}\ldots(IX)$$

❖ De la ecuación (I) aplicaremos logaritmo

$$-(\rho-n)t-\theta Lnc_t=Ln\lambda_t\ldots(I')$$

❖ Tomando la derivada con respecto al tiempo y multiplicando por -1 a la ecuación (I')

$$\frac{\partial[(\rho-n)t]}{\partial t}+\theta\frac{\partial[Ln(c_t)]}{\partial t}=-\frac{\partial[Ln(\lambda_t)]}{\partial t}$$

$$(\rho-n)+\theta\frac{\dot{c}_t}{c_t}=-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

$$(\rho-n)+\theta\gamma_c=-\gamma_\lambda\ldots(X)$$

$$\gamma_c^*=\frac{1}{\theta}\left[-\gamma_\lambda-(\rho-n)\right]$$

Reemplazando la ecuación (IV) en la ecuación (X) y despejando la tasa de crecimiento del consumo

$$\gamma_c^*=\frac{1}{\theta}\left[\alpha Ak_t^{\alpha-1}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha}-(n+\delta)-(\rho-n)\right] \qquad \gamma_c^*=\frac{1}{\theta}\left[\alpha Ak_t^{\alpha-1}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha}-(\rho+\delta)\right]$$

Esta ecuación de la tasa de crecimiento del consumo nos quiere decir, que la tasa de crecimiento del consumo depende del producto marginal del capital físico menos la tasa de depreciación y la tasa de descuento intertemporal entre la utilidad marginal del consumo.

Como se aprecia en la ecuación donde el producto marginal de capital físico depende del capital humano y de la fracción que utiliza el sector final.

❖ Reemplazando la ecuación (IV) en la ecuación (X)

$$(\rho-n)+\theta.\gamma_c^*=\alpha Ak_t^{\alpha-1}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha}-(n+\delta)$$

Operando tenemos:

$$\frac{(\rho-\delta)+\theta.\gamma_c^*}{\alpha Au^{1-\alpha}}=k_t^{\alpha-1}h_t^{1-\alpha}\ldots(XI)$$

Lucas nos dice que en el estado proporcionado todas las variables crecen a la misma tasa constante. Y sabemos que la tasa de crecimiento de *u* debe ser cero por que es una fracción.

❖ Tomando logaritmo a la ecuación (XI)

$$Ln\left[\frac{(\rho-\delta)+\theta.\gamma_c^*}{\alpha A(u^*)^{1-\alpha}}\right]=(\alpha-1)Ln(k_t)+(1-\alpha)Ln(h_t)$$

Derivando con respecto al tiempo a la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(Ln\left[\frac{(\rho-\delta)+\theta.\gamma_c^*}{\alpha A(u^*)^{1-\alpha}}\right]\right)}=(\alpha-1)\underbrace{\frac{d}{dt}Ln(k_t)}+(1-\alpha)\underbrace{\frac{d}{dt}Ln(h_t)}$$

$$0 \quad = \quad (\alpha-1)\frac{\dot{k}_t}{k_t} \quad -(\alpha-1)\frac{\dot{h}_t}{h_t}$$

$$0=(\alpha-1)\gamma_k^*-(\alpha-1)\gamma_h^*$$

$$\boxed{\gamma_h^*=\gamma_k^*}$$

Esto demuestra que la tasa de crecimiento del capital físico es igual a la tasa de crecimiento del capital humano.

- ❖ Dividiendo entre k_t a la ecuación de movimiento de capital físico

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t}=\frac{Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha}}{k_t}-\frac{c_t}{k_t}-(\delta+n) \quad \Rightarrow \quad \frac{c_t}{k_t}=\frac{Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha}}{k_t}-(\delta+n)-\frac{\dot{k}_t}{k_t}$$

Aplicando logaritmo a la ecuación anterior

$$Ln(c_t)-Ln(k_t)=Ln\left[A(u^*)^{1-\alpha}\right]+Ln\left[\left(\frac{h_t}{k_t}\right)^*\right]^{1-\alpha}-Ln(\delta+n)-Ln(\gamma_k^*)$$

Como en el estado de crecimiento proporcionado las tasa de crecimiento son constantes. Derivando a la ecuación anterior por el tiempo

$$\frac{d}{dt}\left[Ln(c_t)\right]-\frac{d}{dt}\left[Ln(k_t)\right]=0+0-0-0$$

$$\gamma_c^*=\gamma_k^*=0$$

$$\boxed{\gamma_c^*=\gamma_k^*}$$

Esto demuestra que la tasa de crecimiento del consumo es igual a la tasa de crecimiento del capital físico.

❖ De la función de producción intensiva del bien final se tiene:

$$y_t = Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} \ldots (FPI)$$

Aplicando logaritmo a la función intensiva de bienes finales

$$Ln(y_t) = Ln(A) + \alpha Ln(k_t) + (1-\alpha)Ln(u) + (1-\alpha)Ln(h_t)$$

Aplicando una derivada temporal a la expresión anterior

$$\frac{d}{dt}[Ln(y_t)] = \frac{d}{dt}[Ln(A)] + \alpha\frac{d}{dt}[Ln(k_t)] + (1-\alpha)\frac{d}{dt}[Ln(u)] + (1-\alpha)\frac{d}{dt}[Ln(h_t)]$$

$$\gamma_y = \alpha\gamma_y + (1-\alpha)\gamma_u + (1-\alpha)\gamma_h$$

Recordemos que en el estado de crecimiento proporcionado $\gamma_u^* = 0$ y $\gamma_k^* = \gamma_h^*$, reemplazando en la expresión anterior tenemos:

$$\gamma_y^* = \alpha\gamma_h^* + (1-\alpha)0 + (1-\alpha)\gamma_h^* \Rightarrow \gamma_y^* = \alpha\gamma_h^* + (1-\alpha)0 + (1-\alpha)\gamma_h^*$$

$$\gamma_y^* = \alpha\gamma_h^* + \gamma_h^* - \alpha\gamma_h^*$$

$$\boxed{\gamma_y^* = \gamma_h^*}$$

Esto demuestra que la tasa de crecimiento del producto es igual a la tasa de crecimiento del capital humano.

Por lo que *Lucas* llego a la conclusión que todas las tasa de crecimiento son iguales y constante.

$$\boxed{\gamma_j^* = \gamma_h^* = \gamma_c^* = \gamma_y^*}$$

❖ De la condición de primer orden (ecuación (II)) multiplicando por u_t

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)u = 0 \Rightarrow \lambda_t\left[(1-\alpha)Au^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha}\right] - Bh_t uv_t = 0$$

En el estado de crecimiento proporcionado, la tasa de crecimiento de *t u* debe ser cero por que es una fracción.

$$\frac{\lambda_t}{v_t} = \frac{Bh_t^* u^*}{(1-\alpha)A(u^*)^{1-\alpha}(h_t^*)^{1-\alpha}} \Rightarrow Ln\left(\frac{\lambda_t}{v_t}\right) = Ln\left(\frac{Bh_t^* u^*}{(1-\alpha)A(u^*)^{1-\alpha}(h_t^*)^{1-\alpha}}\right)$$

Derivado con respecto al tiempo y recortado que el estado de crecimiento proporcionado todas las variables crece a un ritmo constante.

$$\frac{dLn(\lambda_t)}{dt}-\frac{dLn(v_t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[Ln\left(\frac{Bh_t^*u^*}{(1-\alpha)A(u^*)^{1-\alpha}(h_t^*)^{1-\alpha}}\right)\right] \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}-\frac{\dot{v}_t}{\lambda_t}=0$$

$$\gamma_\lambda^*-\gamma_v^*=0 \Rightarrow \boxed{\gamma_\lambda^*=\gamma_v^*}$$

❖ Como se demostró que $\gamma_\lambda^*=\gamma_v^*$, igualando la ecuación (IV) con la ecuación (X)

$$B-(n+\delta)=(\rho-n)+\theta.\gamma_c^*$$

$$\boxed{\gamma_c^*=\frac{B-(\rho+\delta)}{\theta}}$$

❖ Igualando la ecuación (X) con la ecuación (IV)

$$(\rho-n)+\theta\gamma_c^*=\frac{-\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}=\alpha Ak_t^{\alpha-1}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha}-(n+\delta)$$

Operando se obtiene:

$$\boxed{\gamma_c^*=\frac{Pmgk-(\rho+\delta)}{\theta}}$$

Se asume competencia perfecta en los mercados de bienes y factores

❖ Del mercado de capital físico se tiene:

$$Pmgk=R \Rightarrow Pmgk=r+\delta$$

$$R=r+\delta$$

Reemplazando el producto marginal del capital físico en la expresión de la tasa de crecimiento del consumo se tiene:

$$\gamma_c^*=\frac{r+\delta-(\rho+\delta)}{\theta} \Rightarrow \boxed{\gamma_c^*=\frac{r-\delta}{\theta}\text{, la regla de } \textit{Ramsey – Keynes}}$$

La regla de *Keynes-Ramsey*, nos quiere decir que, a lo largo de la senda óptima pequeñas modificaciones en el consumo que impliquen un ahorro hoy para una mejora en el futuro no conllevan aumento de bienestar social, por otra parte los rendimientos decrecientes a escala del capital hacen que cualquier posible aumento en el crecimiento en el corto plazo, obtenido por alguna política de ahorro e inversión desaparezca en el largo plazo (*Blanchard y Fischer* 1898).