UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

El Modelo básico de Solow

Robert Solow en 1956 publicó un ensayo titulado “A Contribution to the Theory of Economic Growth” (Una contribución a la teoría del crecimiento económico), Que seria de gran influencia para las generaciones futuras. A este aporte conocido es un modelo del crecimiento considerando la respuesta ortodoxa al modelo keynesiano de Harrod y Domar. Por este y otros trabajo más se le otorgo el *Premio Nobel de Economía en 1987*.

En este articulo Solow demostrará que si se descarta las proporciones fijas, como lo establecían Harrod-Domar el crecimiento regular no seria inestable, sino estable. Para esto Solow incorpora el equilibrio general estable, de que la función de producción que permite la sustitución de factores (capital y trabajo)[1].

Partiendo del equilibrio macroeconómico entre ahorro e inversión; incluye: al capital físico como un activo acumulable, a la mano de obra como reproducible, al ahorro real como función del ingreso, la tasa de depreciación y el crecimiento poblacional. De manera general podemos decir con rigurosidad que, el modelo de Solow es un modelo de la síntesis clásico-keynesiana y parte de las siguientes hipótesis[2]:

Por que retomo la hipótesis del Keynesianismo:

- En el mercado de bienes: El ahorro es función del ingreso, la relación entre ahorro y la tasa de interés del enfoque neoclásico no ha sido considerada; conservo la ley psicológica fundamental de Keynes.
- En el mercado de trabajo: rechazó la teoría neoclásica, en el sentido de que la oferta de trabajo es independiente del salario real.

De la reflexión clásica o neoclásica retomó:

- La función de producción con factores sustitutivos (capital y trabajo).
- Todo el ahorro es invertido, por consiguiente necesariamente hay equilibrio en el mercado de los productos y por lo tanto no existe problema de salida o de demanda.

Este modelo podremos notar, la tasa de ahorro endógena y la ausencia del progreso tecnológico como en los modelos anteriores de Harrod y Domar.

---

[1] El lector interesado puede revisar el modelo con mas detalle ``A Contribution to the Theory of Economic Growth." (1956), pp: 56-94.

[2] El modelo de Solow ha sido considerado como de inspiración neoclásica, ello por oposición al modelo de tipo Keynesiano de Harrod y Domar.

Critica de Solow

En esta parte Solow hace un balance de los modelos de crecimiento de Harrod y Domar.

- ✓ Modelo de crecimiento pesimista respecto al desenvolvimiento del capital.
- ✓ La proposición de Harrod, de que la ecuación del capital tienda a una ecuación inestable.
- ✓ Es como si tuviera un doble "filo".
- ✓ Dichos modelo soslaya la sustitución de factores siendo ello su principal defecto.
- ✓ El periodo de auge del capitalismo en post-guerra coincide con el pronostico de Harrod y Domar.
- ✓ Solow plantea, un modelo neoclásico donde la relación entre factores sea variable.
- ✓ Importancia en que los factores se sustituye entre si.
- ✓ Nos dice que la economía capitalista en el largo plazo tiende a un equilibrio dinámico estable.
- ✓ La economía capitalista en el largo plazo tiende a un equilibrio dinámico proporción.

2.1.1 Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía de mercado donde solo se produce un bien el mismo que se consume e invierte[3].
- ✓ La relación capital-producto es endógena y flexible: v
- ✓ La fuerza de trabajo agregad crece a una tasa constante y exógena: n
- ✓ El ahorro agregado, s, es una proporción del ingreso nacional, dado la proporción marginal ahorrar.
- ✓ Mercado de competencia perfecta.
- ✓ La economía no tiene relación con el exterior.

[3] Se supone una economía parecida a la de Robinson Crusoe, donde no hay empresas, ni empleados y ni mercados, donde Robinson combinaba su propio trabajo para producir.

Función de Producción Agregada (*FPA*)

Solow plantea una función de producción Neoclásica agregada que permite sustitución entre los factores de manera que dicha función puede ser expresada de la siguiente manera:

$$Y_t = F(K_t, L_t)\ldots(I)$$

Donde:

Y_t : Producción agregada en el instante "*t*".

K_t : Stock de capital agregado en el instante "*t*".

L_t : Fuerza de trabajo en el instante "*t*".

Esta ecuación (I) representa el lado de la oferta de una economía simplificada y señala que el producto producido está en función de la acumulación de capital y del monto de mano de obra.

Esta función esta sujeta a Rendimiento de Escala Constante (*REC*), es decir, si se aumentan o disminuyen, los factores de producción en determinada proporción, por ejemplo (II), el producto aumentaría o disminuiría en la misma proporción, o sea, (II). De ahí que la función de producción pueda ser rescrita de la siguiente manera:

$$\lambda Y_t = F(\lambda.K_t, \lambda.L_t) = \lambda.F(K_t, L_t)\ldots(II) \qquad \forall\lambda \geq 0$$

Como se sabe la función presenta rendimiento constante a escala[4]. Entonces $\lambda > 1$, nos da

$\lambda Y_t < F(\lambda.K_t, \lambda.L_t)$, si se invierte la desigualdad la función de producción agregada muestra rendimiento decrecientes a escala.

Si $\lambda = \dfrac{1}{L_t}$, reemplazado en la función $\dfrac{Y_t}{L_t} = F\left(\dfrac{K_t}{L_t}, 1\right) \Rightarrow y_t = F(k_t)\ldots(FPI)$[5]

Donde:

$k_t = \dfrac{K_t}{L_t}$: Cantidad por trabajo en el instante "t".

$y_t = \dfrac{Y_t}{L_t}$: Producción por unidad de trabajo en el instante "*t*".

La ecuación de la *(FPI)* expresa el producto por unidad de trabajo como una función del capital por unidad de trabajo solamente. Para entender la intuición de esta

---

[14] Como sabemos por microeconomía los rendimiento constante a escala da un numero de empresas que es indeterminado, esto quiere decir, que no esta determinado por el modelo. Y es nos permite trabajar con la función de producción en su forma intensiva.

[15] FPI: función de producción intensiva

ecuación, supongamos un aumento en la escala de operaciones mediante un aumento proporcional en L_t y K_t donde el producto por trabajador no cambiaría.

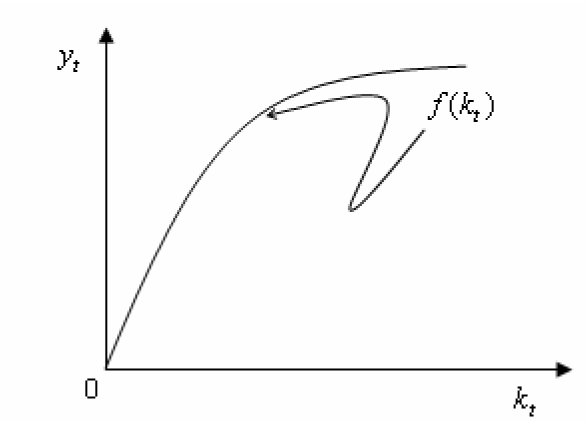
De manera que la producción por trabajador no depende del tamaño total de la economía sino, de la cantidad de capital por trabajad (persona activa). Como es sabido, la teoría de la producción se centra en los niveles de empleo de cualquier factor de producción para los que el producto marginal es positivo pero decreciente, de manera que para nuestra función de producción representada en la ecuación (III) tenemos:

$$y_t = f(0) = 0$$

$$PMg_k = \frac{dy_t}{dk_t} = f'(k) > 0 \ldots (CIO^{6})$$

$$\frac{dPMg_k}{dk^2} = f'(k) < 0 \ldots (CIIO^{7})$$

Gráfica Nº 1: La función de producción per cápita



En el Gráfico Nº1, podemos apreciar la función de producción intensiva, que cumple con las condiciones de primer y segundo orden de la función.

La función es de buen comportamiento esto quiere decir que satisface las condiciones de INADA, es decir:

a) Sin factores productivos no hay producción.
b) La magnitud de los productos marginales (PMg) son positivos.

$$\frac{df}{dL_t} = f'_L > 0 \qquad \frac{df}{dK_t} = f'_K > 0$$

[6] CIO: Condición de primer orden para maximizar la función.
[7] CIIO: condición de segundo orden, y que nos asegura que $f(k)$ es cóncava y tiene un máximo.

c) La curva de los productos marginales son decrecientes.

d) Cuando k_t tiende al infinito, entonces el $PMg_{k(t)}$ tiene al vector nulo.

$$Lím_{K(t)\to\infty} = PMg_K = 0$$

e) Cuando L_t tiende al infinito, entonces el $PMg_{L(t)}$ tiene al vector nulo.

$$Lím_{L(t)\to\infty} = PMg_L = 0$$

f) Cuando k_t tiende al cero, entonces el $PMg_{K(t)}$ tiene al infinito.

$$Lím_{K(t)\to 0} = PMg_K = \infty$$

g) Cuando L_t tiende al cero, entonces el $PMg_{K(t)}$ tiene al infinito.

$$Lím_{L(t)\to 0} = PMg_L = \infty$$

Inversión neta por trabajador (I^n)

Se plantea que la inversión neta por trabajador, va ser igual a la suma de la tasa de cambio por trabajador.

Demostración:

$k = \frac{K_t}{L_t} \Rightarrow K_t = k_t.L_t$, Derivado con respecto al tiempo,"*t*".

$$\frac{dK_t}{dt} = k_t.\frac{dL_t}{dt} + L_t.\frac{dk_t}{dt} \Rightarrow \dot{K}_t = k_t.\dot{L}_t + L_t.\dot{k}_t \ldots x\frac{1}{L_t} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{\dot{K}_t}{L_t}} = k.\underbrace{\frac{\dot{L}_t}{L_t}} + \frac{L_t}{L_t}.\dot{k}$$

$$I^n = k.g_l + \dot{k} \Rightarrow \qquad \boxed{I^n = k.n + \dot{k} \text{ , la inversión por trabajador}}$$

Inversión neta por trabajador = Profundización del capital + Ampliación neta de capital

Donde;

$\dot{k}_t$: Tasa de cambio de capital por trabajador en el instante "*t*".
k_t : Capital por trabajador en el instante "*t*".
n : Tasa de crecimiento de la fuerza laboral.
I^n : Inversión neta.

Ecuación Fundamental de *Solow*

De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos:

$$S = I \Rightarrow s.Y = I^n$$

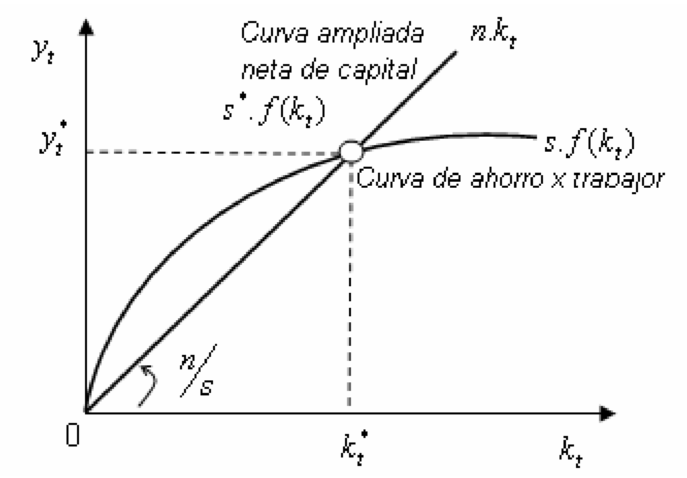
$$s.F\overbrace{(K_t, L_t)} = I^n \ldots x\frac{1}{L_t} \quad \Longrightarrow \quad s.f\underbrace{(\frac{K_t}{L_t},1)} = \underbrace{\frac{I_t}{L_t}}$$

$$\boxed{s.f(k_t) = \dot{k}_t + n.k_t \text{ , la ecuación de Solow}}$$

La versión de *Branson* de la ecuación fundamental de *Solow*

Si $\dot{k}_t = 0 \Longrightarrow \quad s.f(k_t) = n.k_t \Rightarrow \frac{f(k_t)}{k_t} = \frac{n}{s}$, se determina $\begin{cases} k^* \\ y^* \end{cases}$

Gráfica Nº 2: El Diagrama de *Solow*



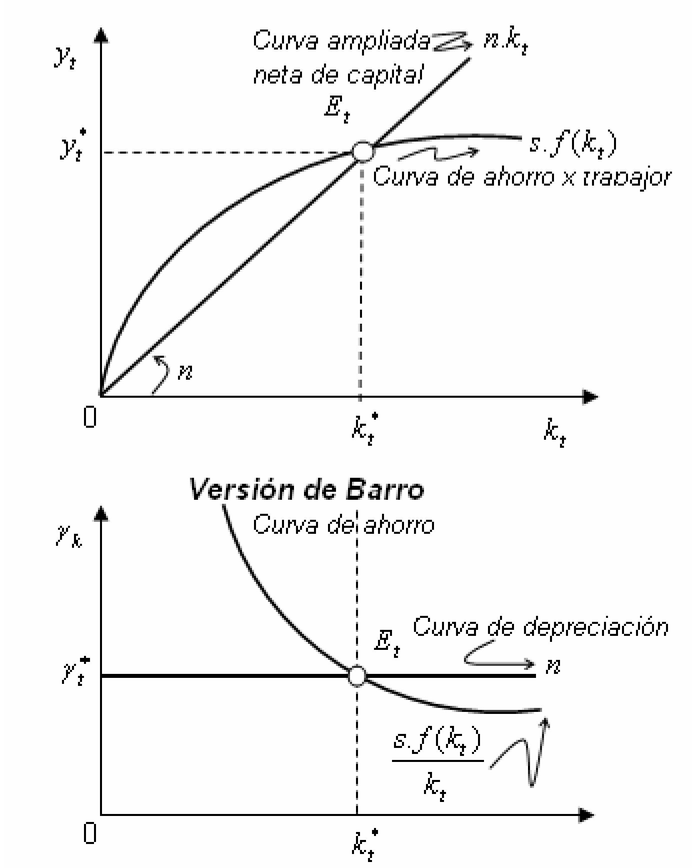
❖ **Versión de *Barro***

Nos dice que si partimos de la ecuación fundamental de *Solow*, y la dividimos entre el capital por trabajador nos dará la tasa de crecimiento proporcionado (g_k);

$s.f(k_t) = \dot{k}_t + n.k_t$, dividiendo entre $k_t \Longrightarrow \quad \frac{\dot{k}_t}{k_t} = s.\frac{f(k_t)}{k_t} - n$

$$g_k = s.\frac{f(k_t)}{k_t} - n$$

Gráfica Nº 3: La función de producción



En el Gráfico Nº3, se puede apreciar que cuando, el crecimiento proporcionado g_k es nulo, entonces $g_k = 0 \Rightarrow \frac{f(k_t)}{k_t} = \frac{n}{s}$, con lo cual se determina k_t^*.

Crecimiento Proporcionado

Es aquel crecimiento en que todas las variables agregadas crecen a la misma tas constante positiva.

$$\boxed{g_Y = g_K = g_L}$$

También se puede expresar en términos de variable por trabajador, donde el crecimiento

$g_y = g_k = g_l = 0$ $\qquad$ $g_K - g_L = g_k = 0$

Proporcionado ocurre cuando las tasas de crecimiento de las variables por trabajador son nulas.

$g_y = g_k = 0$

Growth steady state: $\begin{cases} \text{Crecimiento proporcionado} \\ \text{Crecimiento Balanceado} \end{cases}$

En el modelo de *Solow* el crecimiento proporcionado ocurre cuando; $g_k = 0 \rightarrow \dot{k}_t = 0$
Luego la ecuación Fundamental deviene:

$$\dot{k}_t = s.f(k_t) - n.k_t$$

Puesto que crece proporcionado cuando: $\dot{k}_t = 0$

$$0 = s.f(k_t) - n.k_t$$

$$s.f(k_t) = n.k_t$$

Con lo cual se determina el capital por trabajador de equilibrio.

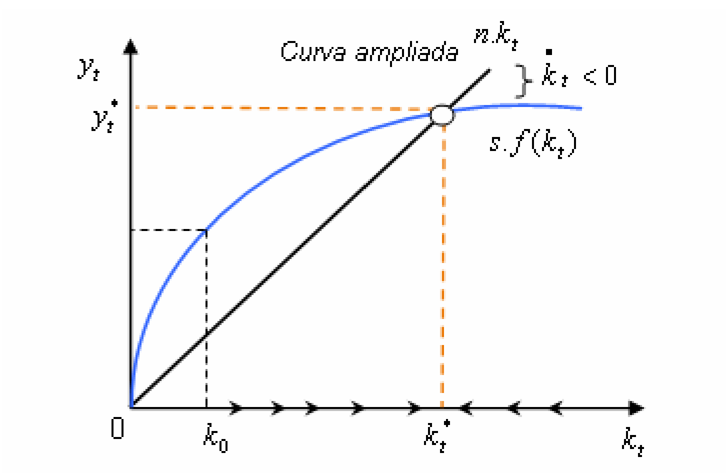
Sobre la Estabilidad

En una economía capitalista en el largo plazo tiende aun análisis de equilibrio dinámico de tipo estable, cualquiera que se a el valor inicial de la relación capital-trabajo (k_t), se generan fuerzas internas que llevan a que la relación capital-trabajo tienda a la relación capital trabajo de equilibrio.

❖ **Caso I ($k_0 > k^*$)**

En este caso vemos en el Gráfico Nº 4 que, la economía tiene hoy un capital k_0, la inversión por trabajador (ahorro neto por trabajador) supera a la ampliación neta de capita. Esto quiere decir que va ocurrir una profundización (k_0 aumentara con el tiempo), hasta llegar a igualarse con el capital por trabajador k_t^*, cuando $\dot{k}_t = 0$, las curvas originado un punto $n.k_t = s.f(k_t)$, que es llamado el estado proporcionado, donde la cantidad de capital por trabajador permanece constante.

Gráfica Nº 4: La Estabilidad Caso (I)



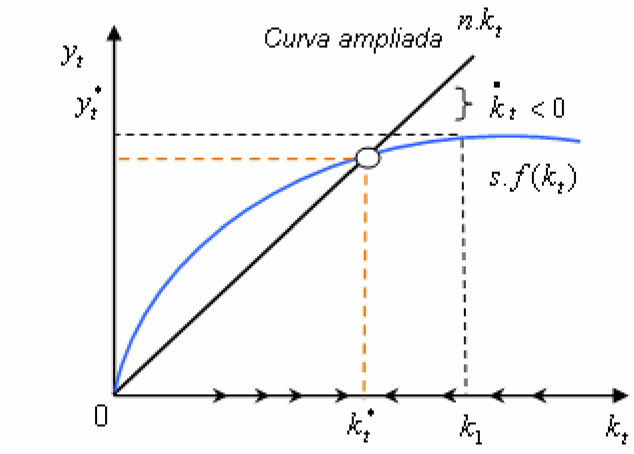
$$k_0 < k_t^* \Rightarrow Lím_{k(0)\to\infty} = k^*$$

❖ **Caso II ($k_1 < k^*$)**

Si el capital por trabajador se encuentra a la derecha k_t^*, como se puede apreciar en el Gráfico Nº 5, donde el capital por trabajador esta expresado como k_1.En esta región la ampliación neta de capital supera al ahorro por trabajador, esto quiere decir que el ahorro es menor a la cantidad necesaria para mantener la proporción capital-trabajo constante.

Como $\dot{k}_t < 0$, por consiguiente la cantidad de capital por trabajador k_1 comienza a declinar hasta que se iguale con k_t^*.

Gráfica Nº 5: La Estabilidad Caso (II)

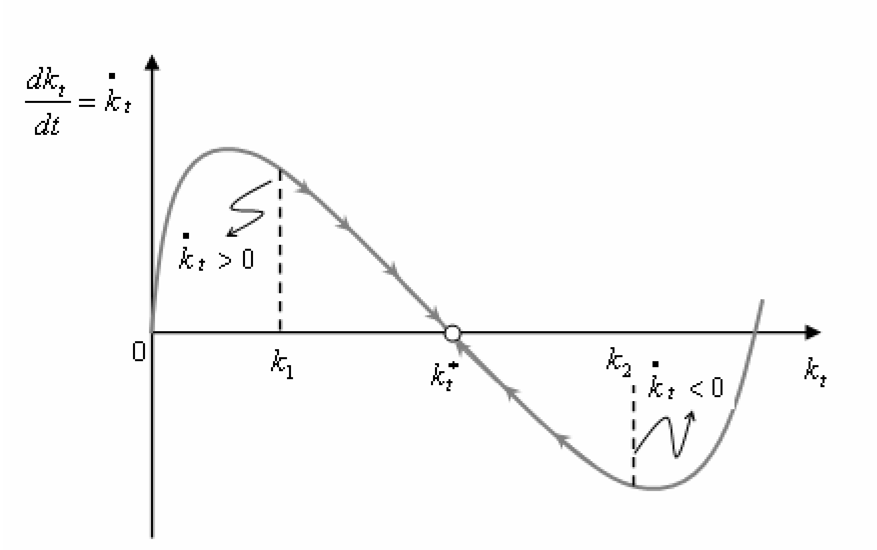


$$k_1 > k_t^* \Rightarrow Lím_{k(1)\to\infty} = k^*$$

Beneficios, salarios y distribución del ingreso

El modelo de *Solow* asume competencia perfecta en los mercados de bienes y de factores, plantea que para cualquier punto en la curva del producto se puede obtener lo siguiente:

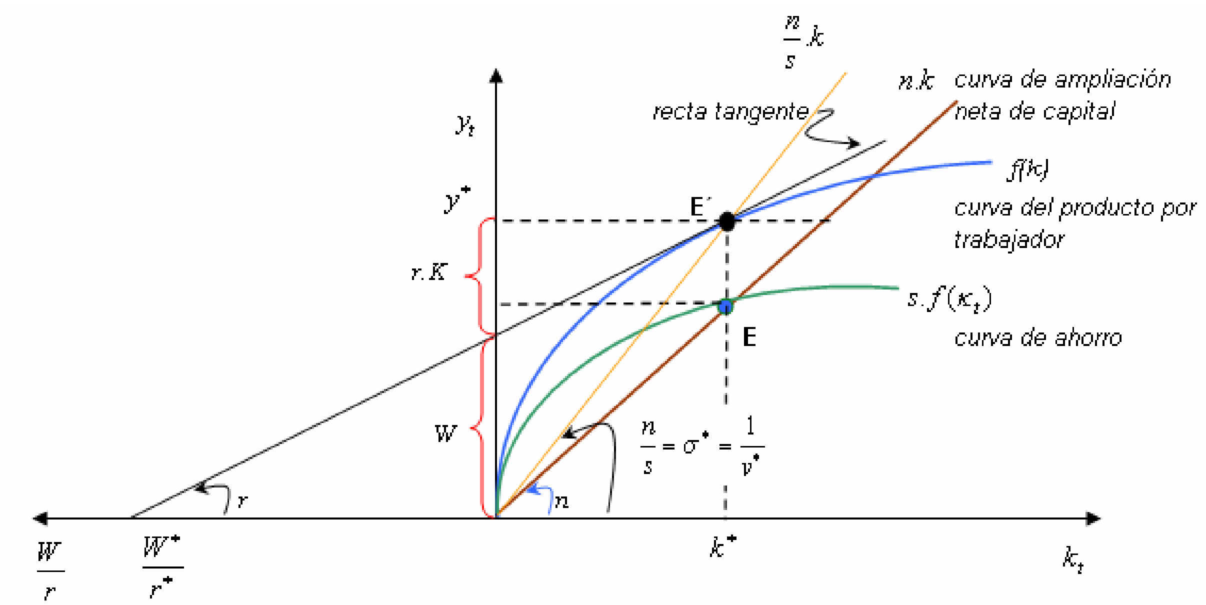
Gráfica Nº 6: El Diagrama de Fases



En el Gráfico Nº 6, podemos apreciar como k_1 y k_2 que se encuentran en la curva, tienden a $\overset{*}{k}_t$, donde este punto nos da el estado proporcionado del modelo. También se puede apreciar en el Gráfico que en k_1, la tasa de cambio por trabajador es positiva, pero en k_2, la tasa de cambio por trabajador es negativa.

- ❖ Los parámetros
  - ν^* : *Relación capital-producto*
  - σ^* : *Relación producto-capital*
- ❖ Las variables por trabajador
  - k^* : *Capital por trabajador*
  - y^* : *Producto por trabajador*
- ❖ La retribución de los factores
  - W : *Masa de salario*
  - r : *Tasa de interés*
- ❖ Los precios relativos de los factores
  - : $\frac{W}{r}$

Gráfica Nº 7: La Distribución del Ingreso



En el Gráfico Nº 7 se aprecia como se a distribuido el ingreso entre la masa salarial (W) y el beneficio total ($r.K = B$).

Analíticamente la ecuación fundamental de *Solow*; $\dot{k}_t = s.f(k_t) - n.k_t$, en el estado del crecimiento proporcionado, $\dot{k}_t = 0$ entonces

$$\left\{\begin{array}{l} s.f(k_t) = n.k_t \text{, se determina : } k^* \\ f(k_t) = \dfrac{n.k_t}{s} \text{, se determina } \left\{\begin{array}{l} k^* \\ \\ y^* \end{array}\right. \end{array}\right.$$

❖ **Mercado de capitales**

Como, $y_t = f(k_t)$ esta definido como:

$\frac{Y_t}{L_t} = f(k_t) \rightarrow Y_t = f(k_t).L_t$, derivado con respecto a K_t

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = L_t.\frac{\partial f(k_t)}{\partial k_t} + f(k_t)\overset{\approx 0}{\cancel{\frac{\partial L_t}{\partial K_t}}}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = L_t.\frac{\partial f(k_t)}{\partial k_t}.\frac{\partial k_t}{\partial K_t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = L_t.f'(k_t).\frac{\partial\left(K_t/L_t\right)}{\partial k_t}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = L_t.f'(k_t).\frac{1}{L_t}$$

$$\boxed{PMgK_t = f'(k_t)}$$

❖ **Mercado de Trabajo**

$$PMgL_t = W$$
$$PMgL_t = f(k_t) - r.k_t \quad \Rightarrow \quad PMgL_t = f(k_t) - f'(k_t).k_t$$

$$\boxed{W = f(k_t) - f'(k_t).k_t}$$

Distribución del Ingreso

En esta parte veremos como se divide el ingreso, en masa salarial y beneficio.

$Y = W + B \Rightarrow Y = w.L + r.K \ldots (\phi)$

Dividiendo a la ecuación (ϕ) entre $\frac{1}{L_t}$, nos dará:

$\frac{Y}{L} = w. + r.k \ldots (\varphi) \rightarrow$ *Producto x Trabajador = Tasa de salario + Beneficio neto x trabajador*

Dividiendo a la ecuación (φ) entre y, nos dará:

$$1 = \frac{w}{y} + \frac{r.k}{y}$$

Donde:

$\frac{w}{y}$: Participación del salario en el ingreso nacional.

$\frac{w}{y} = \frac{w}{Y/L} = \frac{w.L}{Y} = \frac{W}{Y}$

$\frac{r.k}{y}$: Participación de los beneficios en el ingreso nacional.

$\frac{r.k}{y} = \frac{r.(K/L)}{Y/L} = \frac{r.K}{Y} = \frac{B}{Y}$