UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

MODELO DE CRECIMIENTO CON CAPITAL FÍSICO Y HUMANO

Este modelo es una extensión de los modelo de crecimiento y que va considerar explícitamente el capital físico y el capital humano.

Supuestos del modelo

A los supuestos básicos se le añaden los siguientes supuestos:

- ✓ Sea una economía sin relación con el exterior.
- ✓ Existe un stock de capital físico que se encuentra representado con el subíndice *K.*
- ✓ Existe un stock de capital humano que se encuentra representado con un subíndice *H.*
- ✓ Ambos stock de capital se deprecian a una misma tasa constante y exógena $\delta_H = \delta_K = \delta$.
- ✓ Existe una función de producción *Cobb-Douglas.*

Función de producción agregada (FPA)

Sea una función de producción *Cobb-Douglas* en la que los dos factores de producción son capital físico, *K*, y capital humano, *H.*

$$Y_t = BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} \ldots (FPA)$$

Siendo $0 < \alpha < 1$

Donde

Y_t: Producción agregada en el instante "*t*".

K_t: Stock de capital físico agregado en el instante "*t*".

H_t: Stock de capital humano agregado en el instante "*t*".

B: Índice de nivel de tecnología.

α : Elasticidad producto respecto al capital físico.

Esta ecuación dinámica de acumulación de capital físico y de capital humano, en una economía capitalista a través del tiempo.

Ecuación Dinámica fundamental

De la condición de equilibrio macroeconómico

$Y_t = C_t + I^b$

$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep}$

$BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} = C_t + \dot{K}_t + \delta_K + \delta_H + \dot{H}_t$

Resolviendo para: $\dot{H}_t + \dot{K}_t$

$$\boxed{\dot{K}_t + \dot{H}_t = BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} - C - (\delta_K K_t + \delta_H H_t) \text{ La ecuación fundamental}}$$

Donde

δ_K : Tasa de depreciación del stock de capital físico.
δ_H : Tasa de depreciación del stock de capital humano.
$1-\alpha$: Elasticidad producto respecto al capital humano.

Esta ecuación dinámica de acumulación de capital físico y de capital humano, en una economía capitalista a través del tiempo.

La ecuación establece que la tasa de cambio del capital físico mas la tasa de cambio del capital humano, son iguales al remanente del producto agregado, respecto al consumo agregado y a la inversión en reposición del capital físico y del capital humano.

Mercado de capital físico

Las empresas capitalistas maximizan sus beneficios contratando aquella cantidad de capital físico hasta que iguale al producto marginal del capital físico con la tasa de rendimiento bruto de capital.

$$\boxed{PmgK_{físico} = R_K \text{, la condición de optimización de beneficios}}$$

Donde

R_K : Tasa de rendimiento neto de capital físico.

r_K : Tasa de rendimiento del capital físico.

$R_K = r_K + \delta_K$

De la función de producción obtenemos, el producto marginal del capital físico:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha B K_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha}$$

$$PmgK_t = \alpha B \underbrace{\frac{K_t^{\alpha}}{K_t} H_t^{1-\alpha}}$$

$$\boxed{PmgK_t = \alpha PmeK_t}$$

Gráfico [6.10]: El producto medio del capital físico

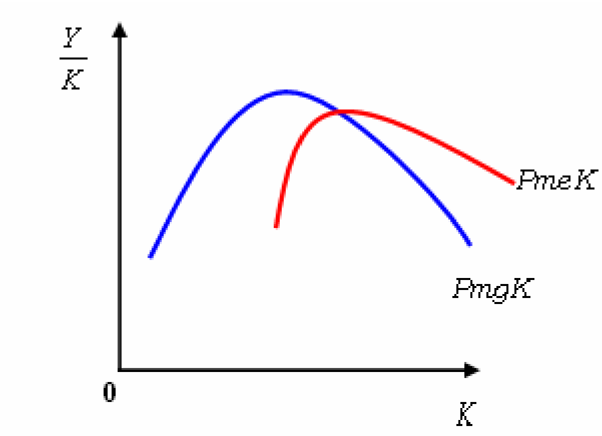
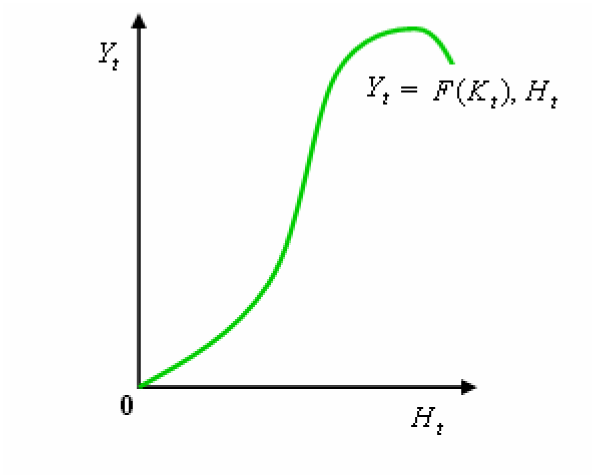


Gráfico [6.11]: El producto agregado del capital físico con capital humano constante



Mercado de capital humano

Las empresas capitalistas maximizan sus beneficios contratando aquella cantidad de capital humano hasta que iguale al producto marginal del capital humano con la tasa de rendimiento bruto de capital.

$PmgH = R_H$, la condición de optimización de beneficios

Donde

R_H : Tasa de rendimiento neto de capital humano.

r_H : Tasa de rendimiento de capital humano.

$R_H = r_H + \delta_H$

De la función de producción obtenemos, el producto marginal del capital humano:

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial H_t}} = (1-\alpha)BK_t^{\alpha}H_t^{-\alpha}$$

$$PmgH_t = \alpha BK_t^{\alpha}\underbrace{\frac{H_t^{1-\alpha}}{H_t}}$$

$$\boxed{PmgH_t = (1-\alpha)PmeH}$$

Gráfico [6.12]: El producto medio del capital humano

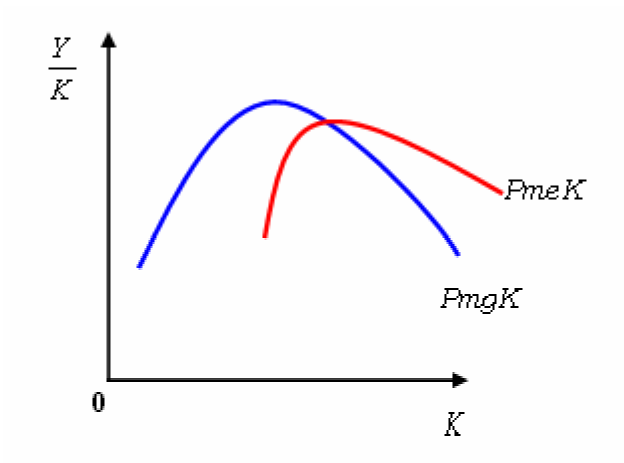
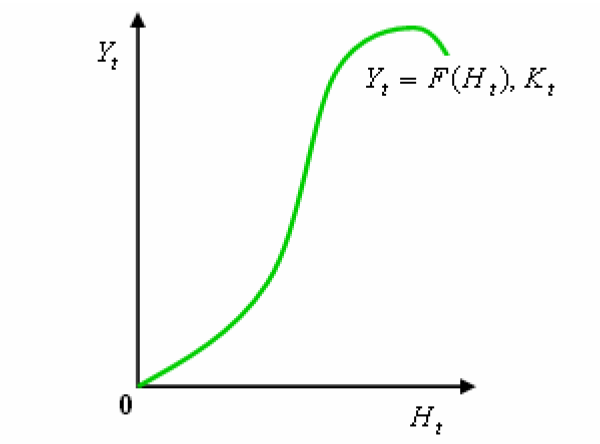


Gráfico [6.13]: El producto agregado del capital humano con capital físico constante



6.1.1 Transformación de la agregada *Cobb-Douglas*

De la condición de equilibrio macroeconómico

$$Y_t = C_t + I^b$$

$$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep}$$

$$BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} = C_t + \dot{K}_t + \delta_K + \delta_H + \dot{H}_t$$

Resolviendo para: $\dot{H}_t + \dot{K}_t$

$$\boxed{\dot{K}_t + \dot{H}_t = BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} - C - (\delta_K K_t + \delta_H H_t) \text{ La ecuación fundamental}}$$

Donde

δ_K : Tasa de depreciación del stock de capital físico.

δ_H : Tasa de depreciación del stock de capital humano.

$1-\alpha$: Elasticidad producto respecto al capital humano.

Para hallar esta transformación lo primero que tenemos que hacer es, igualar las tasas de rendimiento neto de capital.

De: $R_K = r_K + \delta_K \Rightarrow r_K = R_K - \delta_K$

De: $R_H = r_H + \delta_H \Rightarrow r_H = R_H - \delta_H$

Luego se sabe por uno de los supuestos del modelo que:

$$r_K = r_H$$

$$R_K - \delta_K = R_H - \delta_H$$

Puesto que asumimos por simplicidad que las diversas tasas de interés son iguales, tenemos de la igualdad:

$$\delta_K = \delta_H = \delta$$

Reemplazando esta igualdad en la ecuación anterior se tiene:

$$R_K - \delta = R_H - \delta \Rightarrow \underbrace{R_K}_{PmgK} \underbrace{=}_{=} \underbrace{R_H}_{pmgH}$$

$$PmgK = pmgH$$

$$\underbrace{\alpha.PmeK}_{\alpha \frac{Y_t}{K_t}} = \underbrace{(1-\alpha)pmeH}_{(1-\alpha)\frac{Y_t}{H_t}}$$

$$\alpha \frac{Y_t}{K_t} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{H_t}$$

Resolviendo la ecuación anterior para $\frac{H_t}{K_t}$, qué es la razón de capital humano con respecto al capital físico

$$\frac{H_t}{K_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \Rightarrow \boxed{H_t = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)K_t}$$

Donde la ecuación obtenida representa el stock de capital humano es una proporción del stock de capital físico.

Ahora para transformar la función de producción:

$Y_t = BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha}$, pasaremos a reemplazar $H_t = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)K_t$ en la función:

$$Y_t = BK_t^{\alpha}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)K_t\right)^{1-\alpha} \Rightarrow Y_t = BK_t^{\alpha}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha} K_t^{1-\alpha}$$

$$\boxed{Y_t = B\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} K_t}$$

Como $B\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} = cte = A$, si reemplazamos este valor en la ecuación obtenemos:

$$Y_t = AK_t$$

Obtenemos la famosa función *AK* o como nosotros lo hemos venido llamando en este libro el modelo *AZ*.

Este en un motivo también consideran al modelo *AZ*, como un modelo en el coexisten capital físico y capital compuesto.

Ejercicios resueltos

Problema #1

Del modelo de un sector con capital físico y capital humano, se tiene la siguiente función de producción agregada: $Y_t = BK_t^{3/4}H_t^{1/4}$ asuma que las tasas de depresión son iguales

a) Hallar la ecuación dinámica fundamental del modelo
b) Analice el mercado de capital físico.
c) Analice el mercado de capital humano.

d) Halle la razón $\frac{H_t}{K_t}$.

Rpt:

a) De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos:

$$Y_t = C_t + I^b$$
$$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep}$$
$$BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} = C_t + \dot{K}_t + \delta_K + \delta_H + \dot{H}_t$$

Resolviendo para: $\dot{H}_t + \dot{K}_t$

Asumiendo que las tasas de interés i depreciación son iguales $\delta_K = \delta_H = \delta$

$$\boxed{\dot{K}_t + \dot{H}_t = BK_t^{3/4} H_t^{1/4} - C - (K_t + H_t)\delta \quad \text{La ecuación fundamental}}$$

b) **Mercado de capital físico**

El mercado de capital físico es de tipo competencia perfecta esto implica:

$$\boxed{PmgK = R_K \quad \text{(Rendimiento bruto del capital)}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}}_{\boxed{PmgK = \frac{3}{4}\frac{Y_t}{K_t}}} = \frac{3}{4}\frac{BK_t^{3/4}H_t^{1/4}}{K_t} \Rightarrow \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{3}{4}\frac{Y_t}{K_t} = \frac{3}{4} PmeK$$

c) **Mercado de capital Humano**

El mercado de capital físico es de tipo competencia perfecta esto implica:

$$\boxed{PmgK = R_K \quad \text{(Rendimiento bruto del capital)}}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial H_t} = \frac{1}{4}\frac{BK_t^{3/4}H_t^{1/4}}{H_t} \Rightarrow \frac{\partial Y_t}{\partial H_t} = \frac{1}{4}\frac{Y_t}{H_t} = \frac{1}{4}PmeH$$

$$\boxed{PmgH = \frac{1}{4}\frac{Y_t}{H_t}}$$

d) En el equilibrio y bajo el supuesto tenemos:

$$\boxed{r_K = r_H = r}$$

$$r_K = R_K - \delta_K$$
$$r_H = R_H - \delta_H$$

Asumiendo que la depreciación es la misma para los dos mercados $\delta_K = \delta_H = \delta$

$$R_H - \cancel{\delta_H} = R_K - \cancel{\delta_K} \Rightarrow R_K = R_H$$

$$PmgK = PmgH$$
$$\frac{3}{4}\frac{Y_t}{K_t} = \frac{1}{4}\frac{Y_t}{H_t} \Rightarrow \boxed{\frac{H_t}{K_t} = \frac{4}{3}}$$

e) De la función de producción tenemos:

$Y_t = BK_t^{3/4}H_t^{1/4}$ Reemplazando H_t en la función

$$Y_t = BK_t^{3/4}\left(\frac{4K_t}{3_t}\right)^{1/4} \Rightarrow \boxed{Y_t = B\left(\frac{4}{3}\right)^{1/4}K_t}$$

Si consideramos a $B\left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} = cte = A$

Reemplazando en la función nos da; $Y_t = AK_t$ que es la nueva función que tiene la forma del modelo AZ, visto en este libro o como muchos libros lo llaman la función AK.

Problema #2

Del modelo de un sector con capital físico y capital humano, se tiene la siguiente función de producción agregada: $Y_t = BK_t^{3/5}H_t^{2/5}$ asuma que las tasas de depresión son iguales

a) Hallar la ecuación dinámica fundamental del modelo

b) Analice el mercado de capital físico.

c) Analice el mercado de capital humano.

d) Halle la razón $\frac{H_t}{K_t}$.

Rpt:

a) De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos:

$$Y_t = C_t + I^b$$

$$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep}$$

$$BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} = C_t + \dot{K}_t + \delta_K + \delta_H + \dot{H}_t$$

Resolviendo para: $\dot{H}_t + \dot{K}_t$

Asumiendo que las tasas de interés i depreciación son iguales $\delta_K = \delta_H = \delta$

$$\boxed{\dot{K}_t + \dot{H}_t = BK_t^{3/5} H_t^{2/5} - C - (K_t + H_t)\delta \quad \text{La ecuación fundamental}}$$

b) **Mercado de capital físico**

El mercado de capital físico es de tipo competencia perfecta esto implica:

$$\boxed{PmgK = R_K \ \text{(Rendimiento bruto del capital)}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}}_{\boxed{PmgK = \frac{3}{5}\frac{Y_t}{K_t}}} = \frac{3}{5}\frac{BK_t^{3/4}H_t^{1/4}}{K_t} \Rightarrow \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{3}{5}\frac{Y_t}{K_t} = \frac{3}{5} PmeK$$

c) **Mercado de capital Humano**

El mercado de capital físico es de tipo competencia perfecta esto implica:

$$\boxed{PmgK = R_K \ \text{(Rendimiento bruto del capital humano)}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial H_t}} = \frac{2}{5}\frac{BK_t^{3/4}H_t^{1/4}}{H_t} \Rightarrow \frac{\partial Y_t}{\partial H_t} = \frac{2}{5}\frac{Y_t}{H_t} = \frac{2}{5} PmeH$$

$$\boxed{PmgH = \frac{2}{5}\frac{Y_t}{H_t}}$$

d) En el equilibrio y bajo el supuesto tenemos:

$$\boxed{r_K = r_H = r}$$

$$r_K = R_K - \delta_K$$
$$r_H = R_H - \delta_H$$

Asumiendo que la depreciación es la misma para los dos mercados $\delta_K = \delta_H = \delta$

$$R_H - \cancel{\delta_H} = R_K - \cancel{\delta_K} \Rightarrow R_K = R_H$$

$$PmgK = PmgH$$
$$\frac{3}{4}\frac{Y_t}{K_t} = \frac{1}{4}\frac{Y_t}{H_t} \Rightarrow \boxed{\frac{H_t}{K_t} = \frac{2}{3}}$$

e) De la función de producción tenemos:

$Y_t = BK_t^{3/5}H_t^{2/5}$ Reemplazando H_t en la función

$$Y_t = BK_t^{3/5}\left(\frac{2K_t}{3}\right)^{2/5} \Rightarrow \boxed{Y_t = B\left(\frac{2}{3}\right)^{2/5}K_t}$$

Si consideramos a $B\left(\frac{2}{3}\right)^{2/5} = cte = A$

Reemplazando en la función nos da; $Y_t = AK_t$ que es la nueva función que tiene la forma del modelo AZ, visto en este libro o como muchos libros lo llaman la función AK.