UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

Modelo de crecimiento con educación (Jones)

Charles Jones (1990) formula un modelo de crecimiento modelo de crecimiento en países donde la frontera tecnológica esta lejos y se debe producir una transferencia para acortar la distancia y en el que considera la educación, como un elemento importante en el análisis del crecimiento económico. *Jones* va elaborar este modelo de crecimiento desde un enfoque neoclásico, haciendo una extensión del modelo de *Solow.*

En este modelo de crecimiento endógeno aparece como el resultado de que los individuos aprenden a usar los bienes de capital mas avanzados en la frontera tecnológica. Esta idea tiene que ver que los individuos mas calificados asimilaran más rápido los avances de la ciencia y la tecnología, lo cual contribuye al desarrollo del país, de lo que se deriva la importancia del conocimiento vinculado a nivel de creatividad y a desarrollo tecnológico en la definición de la política economica.

Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista sin sector público.
- ✓ Dicha economía no tiene relación con el exterior.
- ✓ La economía produce un solo bien.
- ✓ Coexisten dos tipos de capitales.
- ✓ Existen sustitución entre capital físico y capital humano.
- ✓ El capital humano aumenta a través de las capacitaciones y de la educación.
- ✓ Los individuos de esta economía acumulan capital humano al dedicar un tiempo al aprendizaje de nuevas habilidades en lugar de trabajar.
- ✓ u : Representa el tiempo que las personas dedican a la producción.
- ✓ $(1-u)$: Representa la parte del tiempo que una persona dedica a aprender habilidades.

Análisis

$H_t = e^{\psi(1-u)}L_t \ldots (I)$ $\psi > 0$**:** Es una constante positiva

Esta ecuación representa las habilidades de aprendizaje de la mano de obra calificada y nos dice además que el capital humano se desarrolla a través de la educación. El desarrollo del aprendizaje de nuevas habilidades se logra destinando un tiempo, $(1-u)$ a la educación.

Si $u = 0$ entonces $(1-u) = 1$, se desarrolla el capital humano como se expresa al reemplazar el valor en la ecuación (I).

$$H_t = e^{\psi\,(1-0)} L_t \Rightarrow H_t = e^{\psi} L_t$$

Si por el contrario $u = 1$ entonces $(1-u) = 0$, no habrá capital humano sino trabajo no calificado, reemplazar el valor en la ecuación (I).

$$H_t = e^{\psi\,(1-1)} L_t \Rightarrow H_t = L_t$$

Si aplicamos logaritmo a la ecuación (I) tenemos:
$Ln(H_t) = \psi\,(1-u) + Ln(L_t)$

Derivando la ecuación anterior respecto a $(1-u)$ obtenemos:

$$\frac{\partial Ln(H_t)}{\partial(1-u)} = \psi > 0$$

Esto nos expresa, que una aumento pequeño de $(1-u)$, aumenta H_t por el porcentaje ψ .

Ahora dividiendo la ecuación (I) entre la cantidad de trabajadores

$$\frac{H_t}{L_t} = e^{\psi\,(1-u)} \qquad \Rightarrow \qquad h_t = e^{\psi\,(1-u)}$$

Esta ecuación expresa que el capital humano depende del tiempo.

Función de producción agregada

Jones de manera similar a *Romer* parte del hecho de que el país produce un articulo Y_t, usando trabajo L_t, capital K_t y utiliza bienes de capital y añade que el uso de estos bienes de capital esta limitado por el nivel de calificación de la fuerza laboral n.

Jones considera que cualquier bien intermedio de capital se puede producir con una unidad bruta de bienes de capital. Formula una *Cobb - Douglas* común $Y_t = K_t^{\alpha}\left[BH_t\right]^{\beta}$, en este caso asume la calificación h_t, como un supuesto acumulativo resultado del uso de tecnología.

$$Y_t = K_t^{\alpha}\left[BH_t\right]^{\beta} \ldots (FPA)$$
$$s.a: \quad \alpha + \beta = 1$$

Donde

Y_t: Producto agregado en el instante "*t*".

K_t: Stock de capital agregado en el instante "*t*".

H_t: Stock de capital humano en el instante "*t*".

BH_t: Stock de capital eficiente en el instante "*t*".

α : Elasticidad producto respecto al capital físico.

β : Elasticidad producto respecto al capital humano.

B : Factor aumentativo de la eficiencia del trabajo.

Para hallar la producción agregada en términos per cápita vamos a dividir la (FPA) entre el capital humano eficiente.

$$\frac{Y_t}{BH_t} = K_t^{\alpha}\left[\frac{BH_t}{BH_t}\right]^{\beta-1} \Rightarrow \frac{Y_t}{BH_t} = \frac{K_t^{\alpha}}{\left(BH_t\right)^{1-\beta=\alpha}} \Rightarrow \frac{Y_t}{BH_t} = \left[\frac{K_t}{BH_t}\right]^{\alpha}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha} \ldots (FPI)$$

Donde

$\frac{Y_t}{BH_t} = \tilde{y}_t$: Representa el producto por unidad de capital eficiente.

$$\frac{Y_t / L_t}{BH_t / L_t} = \frac{y_t}{Bh_t} = \frac{\bar{y}_t}{h_t} = \tilde{y}_t$$

$\frac{K_t}{BH_t} = \tilde{k}_t$: Representa el capital físico por unidad de capital humano eficiente.

$$\frac{K_t / L_t}{BH_t / L_t} = \frac{k_t}{Bh_t} = \frac{\bar{k}_t}{h_t} = \tilde{k}_t .$$

Nota: El superíndice "~"denota la variable por unidad de capital humano eficiente

Ecuación fundamental

De la ecuación fundamental de *Solow* – *Swan* con progreso tecnológico

$$\frac{\partial \tilde{k}_t}{\partial t} = sf(\tilde{k}_t) - (n + m_L + \delta)\tilde{k}_t$$

Se tiene: $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$

$$\boxed{\frac{\partial\tilde{k}_t}{\partial t} = s\tilde{k}_t^{\alpha} - (n + m_L + \delta)\tilde{k}_t \text{, la ecuación fundamental de } \textit{Jones}}$$

Es una ecuación dinámica del proceso de acumulación de capital físico y humano en una economía capitalista.

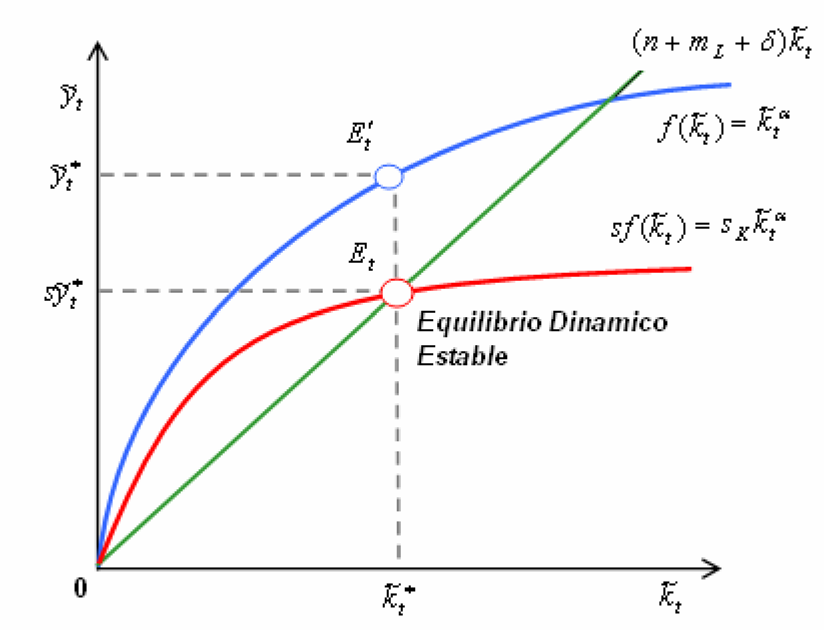
Crecimiento proporcionado

El crecimiento proporcionado en un estado dinámico se alcanza cuando $\frac{\partial\tilde{k}_t}{\partial t}$, es nulo.

Si $\frac{\partial\tilde{k}_t}{\partial t} = 0$ entonces $s\tilde{k}_t^{\alpha} = (n + m_L + \delta)\tilde{k}_t$, se determina el capital físico por unidad de capital humano eficiente ($\tilde{k}_t^*$) como se aprecia en el gráfico, donde el equilibrio se encuentra en el punto E_t, donde $s\tilde{k}_t^{\alpha} = (n + m_L + \delta)\tilde{k}_t$.

$$\boxed{\tilde{k}_t^* = \left[\frac{s}{n + m_L + \delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

El diagrama de *Jones* y la función de producción



Al sustituir $\tilde{k}_t^*$ en la función de producción intensiva (FPI) se encuentra el valor de estado proporcional del producto por unidad de capital eficiente, también como se aprecia en la grafico.

$$\boxed{\tilde{y}_t^* = \left[\frac{s}{n + m_L + \delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

Versión de *Barro*

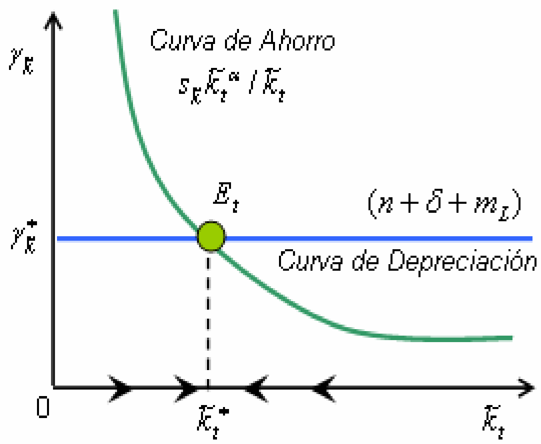
Dividiendo la ecuación fundamental de *Jones* entre $\tilde{k}_t$

$$\underbrace{\frac{1}{\tilde{k}_t}\frac{\partial \tilde{k}_t}{\partial t}} = s\frac{\tilde{k}_t^{\alpha}}{\tilde{k}_t} - (n + m_L + \delta)$$

$$\gamma_{\tilde{k}} = s\frac{\tilde{k}_t^{\alpha}}{\tilde{k}_t} - (n + m_L + \delta)$$

Si $\gamma_{\tilde{k}} = 0$ entonces la curva de ahorro y depreciación se cortan en el punto donde: $s\frac{\tilde{k}_t^{\alpha}}{\tilde{k}_t} = (n + m_L + \delta)$ determina el equilibrio dinámico del modelo en el punto E_t, como se aprecia en el gráfico, donde se aprecia que la tasa de crecimiento converge a un punto en el largo plazo.

Dinámica de transmisión



Problema

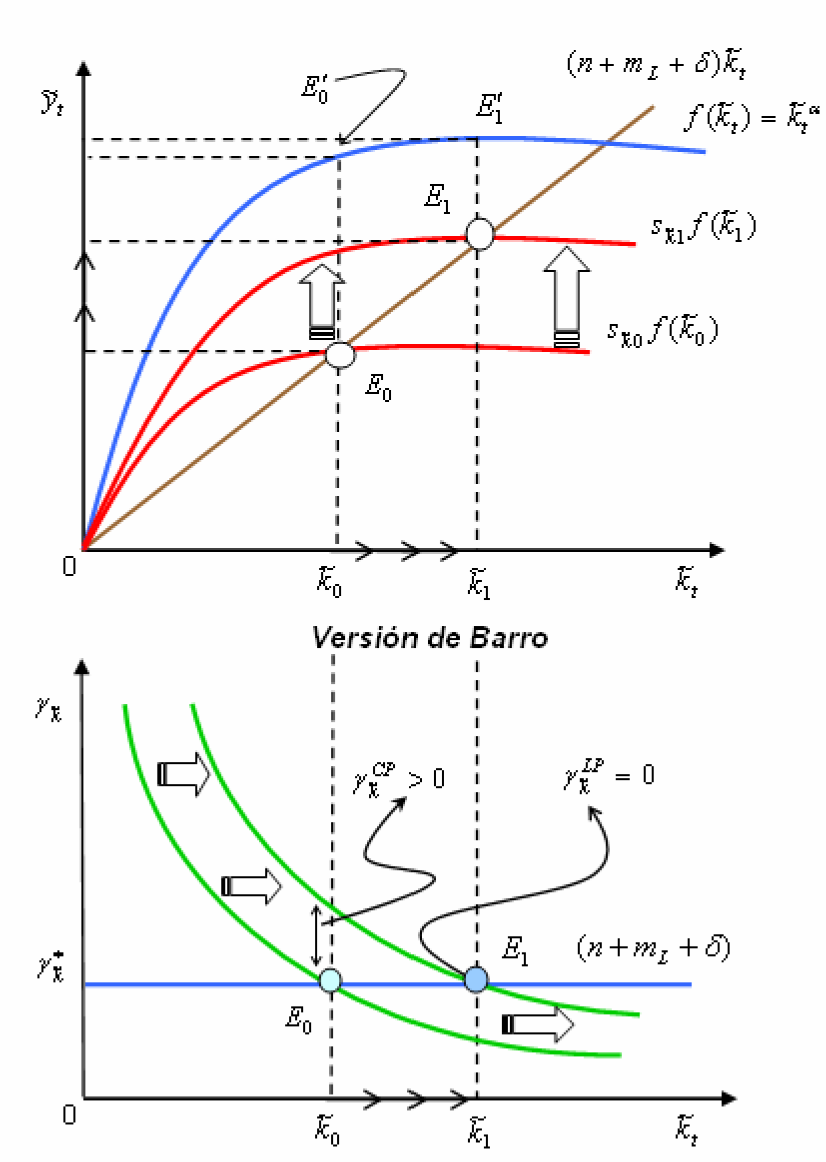
Analicemos el impacto de un aumento permanente de la tasa de ahorro que se destina al sector de producción de bien final.

Rpt:

El aumento de la tasa de ahorro desplaza en forma ascendente la curva $s_{\tilde{k}0}\tilde{k}_t^{\alpha}$ a $s_{\tilde{k}1}\tilde{k}_t^{\alpha}$, como se puede apreciar en la gráfico, por lo que la inversión por trabajador eficiente excede a la cantidad necesaria para mantener constante el capital físico por unidad de capital humano eficientes, por consiguiente la economía comenzara una profundización del capital físico por unidad de capital humano eficiente.

Esta profundización continuara hasta llegar al punto E_t donde $s_{\tilde{k}1}\tilde{k}_t^{\alpha} = (n + m_L + \delta)\tilde{k}_t$ y la existencia de capital físico por unidad de capital humano eficiente llega a un valor más alto que es $\tilde{k}_1$. Por lo que la economía se encuentra ahora con mayor capital y por ende un mayor per capita por trabajador eficiente.

Aumento permanente de la tasa de ahorro



En la versión de *Barro*, que se puede apreciar en la parte inferior de la grafico [6.30] donde el aumento de la tasa de ahorro, eleva a la economía a obtener una mayor tasa de crecimiento en el corto plazo positiva $\gamma_{\tilde{k}}^{CP} > 0$ esto ocurre hasta que la economía llegue al estado de crecimiento proporcionado, donde su tasa de crecimiento de largo plazo es constante y nula $\gamma_{\tilde{k}}^{LP} = 0$, donde el nuevo proporcionado es el punto E_1, como se puede apreciar en la parte inferior de la grafico [6.30], de esta manera esta economía pasa a tener un mayor $\tilde{k}_t^{*}$.