



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS  
**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS**  
 (Universidad del Perú, Decana de América)

### Modelo de crecimiento con educación (Uzawa)

Este es un modelo pionero y antecedente al modelo de *Lucas*, plantea el rol de la educación como influye en el crecimiento. En *Uzawa* (1965) se presentan las ideas básicas que permiten introducir el capital humano como potenciador del capital y como factor de su propia reproducción y crecimiento

#### Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista que tiene dos sectores:
  - Un sector de producción del bien final.
  - En sector educacional.
- ✓ Sea el ahorro para la acumulación de capital físico es una proporción del ingreso nacional.
- ✓ La economía no tiene relación con el exterior.
- ✓ La fuerza de trabajo crece a una tasa constante:  $n$
- ✓ La función de producción es neoclásica.
- ✓ Sea  $u$ , una fracción de la fuerza de trabajo que se destina al trabajo productivo

$$(L_p), \text{ donde: } u = \frac{L_p}{L}$$

- ✓ Sea  $(1-u)$ , una fracción de la fuerza de trabajo que se destina al trabajo educacional:  $(1-u) = \frac{L_E}{L}$
- ✓ Se tiene dos tipos de trabajo:
  - Trabajo productivo  $L_p$ , es aquel trabajo que se destina a la producción del bien final.
  - Trabajo educacional  $L_E$ , es aquel trabajo que se destina al sector educacional.
- ✓ La tasa del progreso tecnológico  $m_L$ , depende del trabajo educacional
 
$$m_L = \phi(1-u).$$

**Sector de producción del bien final**

La función de este sector esta representada por la siguiente ecuación:

$$Y_t = F(K_t, BL_p) \dots \text{(Función de producción del bien final)}$$

Donde

$Y_t$ : Producto del bien fina en el instante " $t$ ".

$K_t$ : Stock de capital físico del sector del bien final en el instante " $t$ ".

$L_p$ : Representa el trabajo productivo.

$BL_p$ : Trabajo productivo eficiente en el instante " $t$ ".

Sabemos que  $u = \frac{L_p}{L} \Rightarrow L_p = uL \dots (I)$

Reemplazando la ecuación (I) en la función de producción del bien final.

$$Y_t = F(K_t, B.uL_t) \dots (II)$$

$B$ : Factor aumentativo de la eficiencia del trabajo con las propiedades:

Si  $t = 0$  entonces  $B(t = 0) = 1$

Si  $t > 0$  entonces  $B(t) > 1 \Leftrightarrow \dot{B}(t) > 0$

**Función de producción intensiva del bien final**

$$Y_t = F(K_t, BL_p)$$

Pero se sabe que el tiempo dedicado para la producción es  $L_p = uL$

Reemplazando el tiempo dedicado para la producir en la función de producción

$$Y_t = F(K_t, uL_t)$$

Sabemos que el trabajo productivo eficiente esta expresado como:

$$\frac{Y_t}{BuL_t} = F\left(\frac{K_t}{BuL_t}, 1\right) \Rightarrow \frac{y_t}{Bu} = f\left(\frac{k_t}{Bu}, 1\right) \Rightarrow \frac{\bar{y}_t}{u} = f\left(\frac{\bar{k}_t}{u}, 1\right)$$

$$\hat{y}_t = f(\hat{k}_t) \dots \text{(FPI del trabajo productivo eficiente)}$$

Donde

$\hat{y}_t = \frac{Y_t}{BuL_t}$ : Producto por unidad de trabajo productivo eficiente.

$$\frac{Y_t}{BuL_t} = \frac{y_t}{Bu} = \frac{\bar{y}_t}{u} = \hat{y}_t$$

$\hat{k}_t = \frac{K_t}{BuL_t}$ : Capital por unidad de trabajo eficiente.

$$\frac{K_t}{BuL_t} = \frac{k_t}{Bu} = \frac{\bar{k}_t}{u} = \hat{k}_t$$

### Sector educación

Uzawa para este sector plantea la siguiente función:

$$Y_E = BL_E \dots \text{(FPA del sector educacional)}$$

Sabemos por el supuesto que:  $(1-u) = \frac{L_E}{L} \Rightarrow L_E = (1-u)L \dots \text{(III)}$

Reemplazando la ecuación (III) en la función de producción del sector educacional

$$Y_E = B(1-u)L$$

En el modelo de Uzawa el progreso tecnológico es endógeno

$$m_L = \phi(1-u)$$

$$m_L = \frac{\dot{B}}{B} = g_B \quad \Rightarrow \quad m_L = \frac{\dot{B}}{B} = \phi(1-u)$$

Con el aumento de la fracción de trabajo que se destina a la educación, aumentara la educación y con ello se elevara la productividad de los trabajadores.

### Ecuación diferencial en el sector producción del bien final

De la ecuación fundamental de Solow-Swan con progreso tecnológico

$$\dot{\bar{k}}_t = sf(\bar{k}_t) - (n + m_L + \delta)\bar{k}_t$$

Se tiene que  $\hat{y}_t = f(\hat{k}_t)$

Reemplazando la variable  $\hat{k}_t$  en la ecuación y la tasa de depreciación del capital  $\delta_K$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{K_t}{BuL_t} \right] = s_K f \left( \frac{K_t}{BuL_t} \right) - (n + m_L + \delta) \frac{K_t}{BuL_t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{k_t}{Bu} \right] = s_K f \left( \frac{k_t}{Bu} \right) - (n + m_L + \delta) \frac{k_t}{Bu}$$

$$\boxed{\frac{\partial \hat{k}_t}{\partial t} = s_K f(\hat{k}_t) - (n + m_L + \delta) \hat{k}_t}$$

### Función de producción intensiva del sector educacional

$$Y_E = BL_E$$

Pero se sabe que el tiempo dedicado para la educación es  $L_E = (1 - u)L_t$

Reemplazando el tiempo dedicado para producir en la función de producción

$$Y_E = B(1 - u)L_t$$

Dividiendo a la función de producción entre el trabajo productivo eficiente tenemos:

$$\frac{Y_E}{BuL_t} = \frac{B(1-u)L_t}{BuL_t} \Rightarrow \frac{y_E}{Bu} = \frac{(1-u)}{u} \Rightarrow \frac{\bar{y}_E}{u} = \frac{1-u}{u}$$

$$\boxed{\hat{y}_E = \left( \frac{1-u}{u} \right) \dots \text{(FPI del sector educacional)}}$$

Donde

$\hat{y}_E = \frac{Y_E}{BuL_t}$ : La razón del producto educacional respecto al trabajo productivo eficiente.

$\hat{k}_E = \frac{K_E}{BuL_t}$ : La razón del capital educacional respecto al trabajo productivo eficiente.

### Ecuación diferencial en el sector educación

Como el progreso tecnológico es endógeno tenemos:

$$m_L = \frac{\dot{B}_t}{B_t} = \phi(1 - u) \Rightarrow \dot{B}_t = B_t \phi(1 - u)$$