

Apuntes sobre Sistemas Dinámicos

por
José Antonio Belinchón

Último Borrador: Diciembre 2013.

Índice general

Resumen	III
1. Conceptos básicos	1
1.1. Grupos uniparamétricos y EDO.	1
1.1.1. Clasificación topológica.	2
1.1.2. El caso \mathbb{R}^2 .	3
1.2. Campos vectoriales.	7
1.3. Estructura local de los puntos singulares hiperbólicos.	9
1.4. Estudio de las singularidades no hiperbólicas.	13
1.4.1. Teorema de la variedad centro.	13
1.4.2. Formas normales	22
1.4.3. Blowing up	28
1.4.4. Espacio de fases en el infinito	30
2. Estabilidad y sistemas conservativos	35
2.1. Estabilidad y funciones de Lyapunov.	35
2.1.1. Otros criterios de estabilidad.	39
2.2. Sistemas gradientes.	41
2.3. Sistemas Hamiltonianos.	43
3. Ciclos límite	53
3.1. Introducción	53
3.2. La aplicación de Poincaré	54
3.3. Soluciones periódicas. Teorema de Poincaré-Bendixson.	57
3.3.1. Revisión del teorema de Poincaré-Bendixson.	70
3.4. Índice de un punto singular.	71
3.5. Integrales de Melnikov	74
3.6. Estabilidad Estructural. El Teorema de Peixoto.	76
4. Los Ejemplos Típicos.	79
4.1. Especies en competencia.	79
4.1.1. Modelo presa-depredador. Lotka-Volterra.	85
4.2. El Péndulo.	87
4.2.1. El péndulo sin rozamiento.	87
4.2.2. Péndulo linealizado con rozamiento.	89
4.2.3. Péndulo sin linealizar y con rozamiento.	89
4.3. El Oscilador de Van der Pol.	90
5. Introducción a la teoría de la bifurcación	95
5.1. Bifurcación saddle-node	96
5.2. Bifurcación transcítica	98
5.3. Bifurcación de pitchfork (encajonada)	101
5.4. Bifurcación de Hopf	104
5.5. Bifurcación hamiltoniana	110
5.6. Bifurcaciones con lazos homoclínicos	112

6. Dinámica Caótica	115
6.1. Sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad	115
6.2. Caos	118
6.2.1. El atractor de Lorenz	120
6.3. Sistemas no-autónomos	121
6.3.1. El oscilador de Duffing	121
6.4. Melnikov y los exponentes de Lyapunov	121

Resumen

Estas notas, evidentemente no terminadas, están basadas en un trabajo que hice cuando estudiaba la licenciatura. Allí tenía que demostrar todas las proposiciones y teoremas pero aquí he preferido no demostrar ninguna proposición, éstas aparecen en los libros, a cambio de incorporar numerosos ejemplos. Ahora las he retomado como un pasatiempo descubriendo que con el tiempo uno se vuelve cada día más y más torpe, parece algo irremediable.

No expongo nada más que los típicos tópicos que uno se puede encontrar en la literatura clásica al respecto y en la medida de lo posible he intentado trivializar los resultados expuestos de esta forma estas notas están al alcance de cualquier lector que al menos tenga unos conocimientos mínimos en ecuaciones diferenciales y nada más.

El primer capítulo es el esencial, es donde se exponen todos los resultados básicos, Hartman etc.. que luego se irán aplicando a lo largo de todos los capítulos.

ADVERTENCIA: Estas notas no están concluidas y es muy posible que hayan sobrevivido numerosas erratas. Toda observación en este sentido es bien recibida en jabel70@gmail.com.

Capítulo 1

Conceptos básicos

Índice del capítulo

1.1. Grupos uniparamétricos y EDO.	1
1.1.1. Clasificación topológica.	2
1.1.2. El caso \mathbb{R}^2	3
1.2. Campos vectoriales.	7
1.3. Estructura local de los puntos singulares hiperbólicos.	9
1.4. Estudio de las singularidades no hiperbólicas.	13
1.4.1. Teorema de la variedad centro.	13
1.4.2. Formas normales	22
1.4.3. Blowing up	28
1.4.4. Espacio de fases en el infinito	30

1.1. Grupos uniparamétricos y EDO.

El punto de partida es $x(t, \xi) = R(t, 0)\xi$ tal que $R(t, 0) \in Isom(\mathbb{R}^n)$, i.e. la resolvente para un sistema de EDO con coeficientes constantes. La familia $G = \{R(t, 0) / t \in \mathbb{R}\}$ constituye un grupo,

1. Conviene saber si un grupo uniparamétrico de isomorfismos lineales de \mathbb{R}^n define o no una ODE.
2. Establecer criterios que lleven a una adecuada clasificación de los grupos de isomorfismos lineales, si esto es posible, entonces disponer de una clasificación paralela de los procesos a ellos asociados.

Observación 1.1.1 *Tratándose de grupos de isomorfismos lineales el marco debería ser $Isom(\mathbb{R}^n)$ pero debido a las propiedades de la función exponencial e^{tA} , que es un difeomorfismo y por lo tanto un homeomorfismo, se puede hacer una clasificación más general.*

La mayor importancia de esta parte está en la clasificación topológica, pues, la relación topológica entre grupos repercutirá en una relación topológica entre sus órbitas.

Sea

$$x'(t) = Ax(t), \tag{1.1}$$

donde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, se verifica que

$$e^{A(t+t')} = e^{At} \cdot e^{At'}, \tag{1.2}$$

entonces, $t \mapsto R(t, 0) = e^{At}$ es un homomorfismo del grupo aditivo \mathbb{R} en $Isom(\mathbb{R}^n)$ con la topología inducida por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto, $isom(\mathbb{R}^n)$ tiene estructura de grupo topológico.

A todo homomorfismo de $(\mathbb{R}, +) \mapsto isom(\mathbb{R}^n)$ se le denomina grupo uniparamétrico de isomorfismos lineales.

Proposición 1.1.1 Sea $t \rightarrow B(t)$ un homomorfismo del grupo aditivo $(\mathbb{R}, +) \mapsto \text{isom}(\mathbb{R}^n)$ tal que $B \in C^1$ y $B'(0) = A$, entonces $B(t)$ es solución a

$$B'(t) = AB(t) \implies B(t) = e^{At}.$$

Definición 1.1.1 Decimos que A es generador infinitesimal (hiperbólico) del grupo uniparamétrico de isomorfismos lineales de $\{B(t)/t \in \mathbb{R}\}$.

1.1.1. Clasificación topológica.

Definición 1.1.2 Decimos que

$$e^{At} \approx e^{Bt},$$

son linealmente equivalentes sii $\exists P \in \text{isom}(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$e^{Bt} = P \cdot e^{At} \cdot P^{-1}.$$

Dos grupos son linealmente equivalentes sii tienen idénticas formas de Jordan sus respectivos generadores infinitesimales. Debida a esta equivalencia lineal podemos hablar de equivalencia entre

$$x'(t) = Ax \approx y'(t) = By. \quad (1.3)$$

En general, recordamos unos resultados básicos para grupos de Lie.

Definición 1.1.3 Dos grupos de Lie G y \tilde{G} son linealmente equivalentes sii existe un homomorfismo $\phi : G \rightarrow \tilde{G}$ que sea abierto y diferenciable.

Asociados a los grupos aparecen sus respectivas álgebras \mathfrak{g} y $\tilde{\mathfrak{g}}$, entonces decimos que están relacionadas si existe una aplicación ϕ tal que

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}, \quad \phi([A, B]) \rightarrow [\phi A, \phi B],$$

para todo $A, B \in \mathfrak{g}$. Campos ϕ – relacionados.

Teorema 1.1.1 Si $\phi : G \rightarrow \tilde{G}$ es un homeomorfismo de grupos de Lie, entonces $d\phi(e) : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ es un homeomorfismo de álgebras de Lie.

Corolario 1.1.1 $\phi * A = \tilde{A}$, campos ϕ – relacionados. i.e. curvas integrales de A se transforman por ϕ en curvas integrales de \tilde{A} . En particular:

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tA) \in G, \text{ c.i. de } A \text{ por } e$$

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \phi \exp(tA) \in \tilde{G}, \text{ c.i. de } \tilde{A}, \text{ por } e$$

se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & \tilde{G} \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\phi} & \tilde{\mathfrak{g}} \end{array}$$

$$\phi \exp(tA) = \exp(t\tilde{A}),$$

recordamos que

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G,$$

es un difeomorfismo local.

Aquí se agota la clasificación lineal y se pasa a la diferencial.

Definición 1.1.4 Decimos que

$$e^{At} \approx e^{Bt},$$

son diferencialmente (topológicamente) equivalentes sii $\exists H \in (\mathbb{R}^n)$, un difeomorfismo (homeomorfismo) tal que

$$e^{Bt} = H \cdot e^{At} \cdot H^{-1}.$$

Proposición 1.1.2 *Equivalencia diferencial sii lineal (por las propiedades de la función exponencial).*

Sean $e^{At} \approx e^{Bt}$ grupos topológicamente, diferenciablemente equivalentes. ¿Qué relación existe entre las órbitas a ellos asociados?. El homeomorfismo H tal que $e^{Bt} = H \cdot e^{At} \cdot H^{-1}$. Esto nos lleva a la clasificación topológica.

Definición 1.1.5 *Decimos que A , generador infinitesimal, es hiperbólico si todos los autovalores de A tienen la parte real no nula.*

Definición 1.1.6 *Se denomina índice del generador al número de autovalores con la parte real negativa.*

Teorema 1.1.2 *Sean $e^{At} \approx e^{Bt}$ grupos uniparamétricos de isomorfismos tales que $\text{ind}(A) = \text{ind}(B) = n$, entonces son topológicamente equivalentes.*

Corolario 1.1.2 *$e^{At} \approx e^{Bt}$ i.e. son topológicamente equivalentes si $\text{ind}(A) = \text{ind}(B)$.*

Proposición 1.1.3 *Dado un grupo e^{At} con generador infinitesimal A hiperbólico, entonces existe una descomposición de \mathbb{R}^n en suma directa de subespacios E^s y E^u i.e. $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, tal que:*

1. E^s y E^u son los subespacios invariantes por A y del grupo e^{At} .
2. Los autovalores de $A^s = A_{E^s}$ (resp. $A^u = A_{E^u}$) tienen parte real negativa (resp. positiva).

Observación 1.1.2 *Si el grupo e^{At} tiene un generador A no hiperbólico entonces \mathbb{R}^n se descompone en suma directa de subespacios E^s , E^u y E^c i.e. $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$. E^c , es el autoespacio generado por los autovectores asociados a los autovalores con parte real nula. Al igual que los otros dos subespacios, éste también es invariante por e^{At} .*

En general se denominan:

1. E^s variedad estable (stable),
2. E^u variedad inestable (unstable),
3. E^c variedad centro,

del grupo e^{At} .

Proposición 1.1.4 *Sea e^{At} el grupo uniparamétrico tal que A es su generador infinitesimal hiperbólico, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x = 0 \iff x \in E^s, \quad t \in \mathbb{R}^+,$
2. $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{At}x = 0 \iff x \in E^u, \quad t \in \mathbb{R},$

1.1.2. El caso \mathbb{R}^2 .

Consideremos el sistema lineal:

$$\dot{x} = Ax \quad / \quad A \in \mathcal{M}_{2 \times 2},$$

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x + a_{12}y \\ y'(t) = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

sabemos por el álgebra lineal que $J = P^{-1}AP$ donde J es la forma de Jordan de la matriz A . Las posibles formas de J son:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad J_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$.

Si \bar{x} es la singularidad, entonces podemos distinguiremos los siguientes casos (ver fig 1.1):

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, entonces \bar{x} es una singularidad inestable,
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$, entonces \bar{x} es una singularidad estable,
- $\lambda_1 \in \mathbb{R}^-, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, entonces \bar{x} es una singularidad punto de silla.

2. $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

Consideramos el siguiente cambio a polares:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x + \beta y \\ y'(t) = -\beta x + \alpha y \end{cases} / \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} r' = \alpha r \\ \theta' = -\beta \end{cases}$$

distinguiendo los siguientes casos:

- Si $\alpha > 0$ entonces \bar{x} es un foco inestable,
- Si $\alpha = 0$ entonces \bar{x} es un centro,
- Si $\alpha < 0$ entonces \bar{x} es un foco estable,
- Si $\theta' > 0$ entonces las trayectorias son espirales en sentido antihorario,
- Si $\theta' < 0$ entonces las trayectorias son espirales en sentido horario.

3. $\lambda_1 = \lambda_2$.

- Si $\dim(V_\lambda) = 2$, entonces \bar{x} es un nodo singular,
- Si $\dim(V_\lambda) = 1$, entonces \bar{x} es un nodo degenerado.

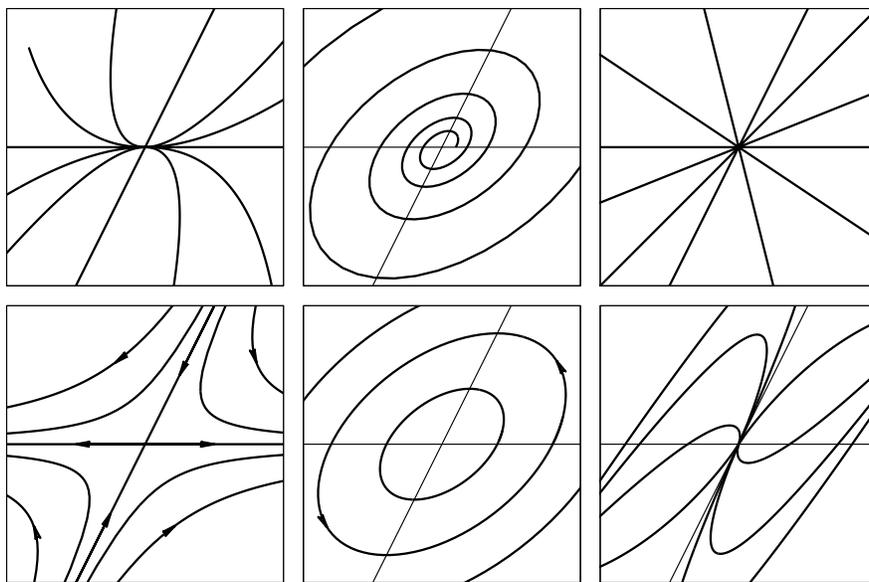


Figura 1.1: Diagramas de fases para los distintos autovalores.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1.1 Clasificar la singularidad del sistema lineal:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x + y \\ y'(t) = x + 2y \end{cases} \quad (1.4)$$

Solución. Vemos que el generador infinitesimal es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde ya hemos calculado su forma de Jordan, por lo tanto los autovalores son:

$$\sigma(\lambda) = (1, 3),$$

que nos indica que la singularidad es inestable (ver fig 1.2). Es decir el sistema lineal (1.4) es equivalente al sistema (ver fig. 1.2):

$$\begin{cases} x'(t) = x \\ y'(t) = 3y \end{cases} \quad (1.5)$$

Los autovectores asociados a cada autovalor son:

$$V_1 = \{1, -1\}^T, \quad V_3 = \{1, 1\}^T,$$

de esta forma vemos que: $\mathbb{R}^2 = E^u$, ya que $E^u = \{V_1, V_3\}$, mientras que $E^s = E^c = \emptyset$.

Por último vemos que la solución al sistema es:

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

ver figura adjunta para entender la relación existente entre el campo lineal (fig. (1.2)) y su forma adjunta dada por la matriz de Jordan (fig. (1.2)).

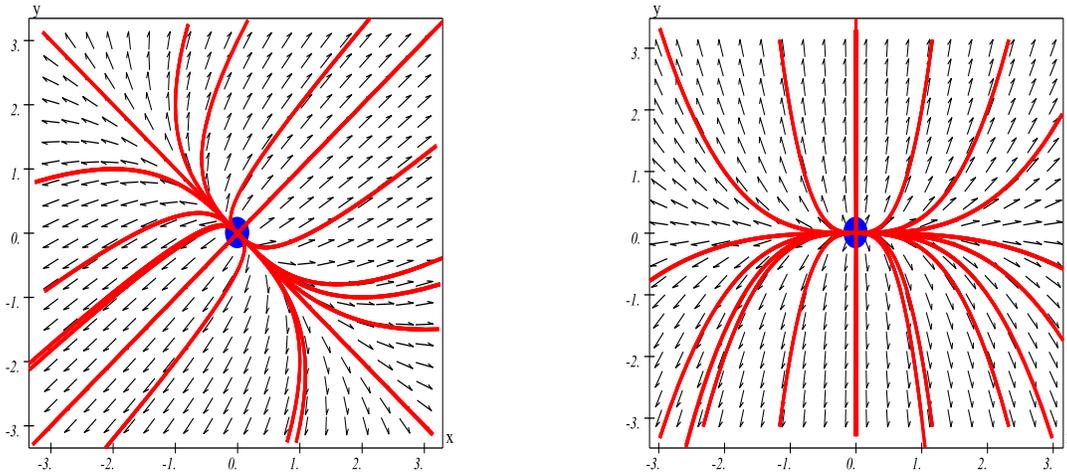


Figura 1.2: La figura de la izquierda representa el espacio de fases del sistema (1.4) mientras que la figura de la derecha representa el espacio de fases asociado al sistema de Jordan. La singularidad está representada en color azul.

■

Ejemplo 1.1.2 Clasificar la singularidad del sistema lineal:

$$\begin{cases} x'(t) = -2x \\ y'(t) = -4x - 2y \end{cases} \quad (1.6)$$

Solución. Vemos que el generador infinitesimal es:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

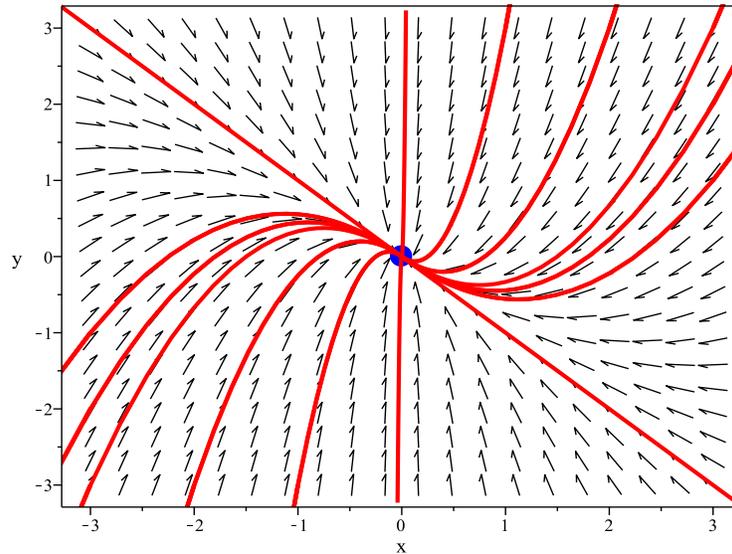


Figura 1.3: Espacio de fases del sistema (1.6)

si atendemos a la clasificación anteriormente expuesta, vemos que se trata de un nodo degenerado estable (los dos autovalores son negativos) ya que la dimensión del subespacio asociado al autovalor -2 es 1, i.e. $\dim V_{-2} = 1$, donde $V_{-2} = \{(0,1)^T\}$ i.e. el eje OY . La variedad estable por lo tanto será: $E^s = V_{-2} = \{(0,1)\}$.

Si ponemos toda esta información junta obtenemos la figura (1.3). ■

Ejemplo 1.1.3 Estudiar el sistema:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X. \quad (1.7)$$

Solución. Vemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, los autovalores de A son $\sigma(\lambda) = (-1, 1, 4)$, de esta forma sabemos que la singularidad es de tipo silla. Las variedades estable e inestable son:

$$E^s = \{V_{-1} : (1, -1, 0)\}, \\ E^u = \{V_1, V_4 : (1, 1, -2), (1, 1, 1)\},$$

La solución general es:

$$x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t},$$

Vemos que cualquier solución para la cual $\alpha = \beta = 0$, implica que

$$x = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

hemos encontrado una solución estable. Mientras que si $\gamma = 0$, entonces

$$x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0,$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Vemos por lo tanto que la mecánica es muy rutinaria, calcular los autovalores, clasificarlos en función de los resultados anteriormente expuestos y por último calcular las variedades estable e inestable.

1.2. Campos vectoriales.

La clasificación y relación entre ecuación (caso lineal) y grupo está clara, pero cuando el sistema viene definido por

$$x' = x_i(x_1, \dots, x_n),$$

donde las x_i son funciones NO lineales, nos podemos preguntar si le podemos asociar un grupo o no.

Definición 1.2.1 Una familia (x^t) de aplicaciones

$$x^t : M \longrightarrow M,$$

se las denomina grupo uniparamétrico de aplicaciones si sean cuales fueren s y t se verifica:

$$\begin{aligned} x^{t+s} &= x^t \cdot x^s \\ x^0 &= \mathbb{I}_M \end{aligned}$$

con $s, t \in \mathbb{R}$, x^t grupo conmutativo.

Definición 1.2.2 Sea $\xi \in M$ un punto del espacio de fases M , entonces llamamos movimiento del punto ξ sometido a la acción del grupo uniparamétrico $\{x^t\}$ a la aplicación

$$x(t) = x^t(\xi).$$

Definición 1.2.3 Grupo uniparamétrico de difeomorfismos en $M \subset \mathbb{R}^n$, tal que $M = \mathring{M}$ a toda aplicación

$$x : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M,$$

que verifica:

1. x es diferenciable,
2. $\forall t$ $x^t : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo,
3. $\{x^t\}$ es un grupo uniparamétrico.

Definición 1.2.4 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, un abierto. Definimos campo vectorial, denotado $X \in \mathfrak{X}(M)$, como el asociado al sistema $x' := X(x)$. aplicación que asocia a cada punto de M (variedad diferenciable) su vector tangente i.e. $X : M \longrightarrow TM$
Las soluciones son las curvas integrales i.e. son las $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $I \subset \mathbb{R}^n$ y

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t)),$$

i.e. φ es curva integral de X sii

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)),$$

Un grupo uniparamétrico de difeomorfismos define un campo vectorial. ¿Es cierta la afirmación contraria?. En general no, pero podemos preguntarnos bajo que condiciones un campo define a su vez un grupo de difeomorfismos.

Disponemos ya de una respuesta precisa para campos lineales. Ahora bien, el concepto de isomorfismos lineales da paso al de difeomorfismos y en vez de referirnos a grupos nos tendremos que referir a núcleos de grupo (flujos) asociados al campo que será donde repose la diferenciabilidad de $\varphi(t)$ solución de la ODE.

Gracias al teorema de rectificación de campos veremos que desde un punto de vista dinámico y topológico los verdaderos problemas que presenta el estudio de campos radica en sus singularidades (Arnold califica a este teorema como el fundamental de la teoría de las ODE).

Los campos lineales tienen asociados grupos uniparamétricos. En relación con los campos vectoriales en general sólo podemos hablar de núcleos de grupo (flujos) de difeomorfismos. ¿Existen campos no necesariamente lineales para los que se puede hablar de auténticos grupos uniparamétricos de difeomorfismos?. La respuesta es que sí, se trata de los campos con soporte compacto.

Definición 1.2.5 Sea $\varphi : D \rightarrow A$, $A \subset \mathbb{R}^n$ y $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, donde $D = \{(t, x) \mid t \in I_x, x \in A\}$ se llama flujo generado por el campo X .

Observación 1.2.1 Las condiciones de flujo son:

$$\begin{aligned}\varphi(0, x) &= x, \\ \varphi(t + s, x) &= \varphi(t, \varphi(s, x)).\end{aligned}$$

Está claro que si $I_x = \mathbb{R}, \forall x$ el flujo generado por X es un flujo en A . Pero muchas veces $I_x \neq \mathbb{R}$, por lo que tenemos sólo flujos locales o grupos locales, tenemos el homeomorfismo $t \mapsto \varphi_t$

$$\begin{aligned}\varphi_{t+s} &= \varphi_t \cdot \varphi_s, \\ \varphi_{-t} &= \varphi_t^{-1},\end{aligned}$$

donde $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$. Es válido asimilar la imagen de que los puntos de A fluyen a lo largo de las trayectorias de X .

Es aquí donde la noción de campo con soporte compacto juega un papel decisivo, si X es de soporte compacto entonces X es completo y por lo tanto las curvas integrales de X están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Dado $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que U es compacto, X se puede prolongar a una función continua con soporte compacto de suerte que $\text{supp } p(f) \supset U$. Si el campo llega a la periferia con valores no nulos podemos prolongar más allá de U extinguiéndose de manera continua dentro de los límites impuestos por algún compacto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.1 Sea X un campo vectorial con soporte compacto $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe un grupo uniparamétrico de difeomorfismos cuyo campo de velocidades es justamente X .

Si el campo X que consideramos no tiene soporte compacto enfoques globales resultan inoperantes siendo preciso enfoques locales. El teorema de rectificación de campos es a este respecto de capital importancia pues gracias a él veremos como el estudio de un campo presenta problemas sólo en sus singularidades.

Definición 1.2.6 Dos núcleos son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo H que los relaciona. $\frac{3}{4}$ de lo mismo para difeomorfismos.

Sean X_1, X_2 dos campos definidos en A_1, A_2 abiertos de \mathbb{R}^n . Decimos que son topológicamente equivalentes i.e. $X_1 \approx X_2$, si existe h , homeomorfismo $h : A_1 \rightarrow A_2$, tal que si $p \in A_1$ y $\gamma^1(p)$ es una órbita orientada de X_1 pasando por p , entonces $h(\gamma^1(p))$ es una órbita orientada: $\gamma^2(h(p))$ de X_2 pasando por $h(p)$.

Definición 1.2.7 Sean

$$\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

flujos generados por los campos

$$X_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad X_2 : A_2 \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

entonces $X_1 \approx X_2$, si existe h , homeomorfismo $h : A_1 \rightarrow A_2$, tal que

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x)),$$

Observación 1.2.2 h me lleva puntos singulares en puntos singulares y órbitas periódicas en órbitas periódicas etc...

Observación 1.2.3 Si h es un difeomorfismo recuperamos la definición de campo ϕ – relacionado.

Si tomo un entorno suficientemente pequeño de cualquier punto $\xi \neq 0$ (o punto regular no singular) se da un marcado paralelismo entre las órbitas que cruzan la región U elegida. Este paralelismo, estrechamente ligado a la auténtica clasificación establecida por $\{e^{At}\}$, cesa por completo si U engloba al origen de las configuraciones dado por un punto de silla.

Parece pertinente pensar si no existirá un difeomorfismo que localmente en las cercanías de un punto no singular de un campo X logre rectificarlo haciéndolo diferencialmente equivalente a un campo que por autonomasia reúna estas condiciones de paralelismo perfecto entre sus órbitas, tal campo es $Y = (1, 0, \dots, 0)$. El teorema de rectificación de campos demuestra que existe un difeomorfismo que establece la equivalencia diferencial.

Teorema 1.2.2 Sea $X : U = \mathring{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y sea ξ_0 un punto no singular de X , entonces existe $V \in \text{Ent}(\xi_0)$ y un difeomorfismo $H, H : V \rightarrow W$, con $V \subset U$ y $W \subset \mathbb{R}^n$

$$H : X|_V \rightarrow Y,$$

establece la equivalencia diferencial, siendo $Y = (1, 0, \dots, 0)$.

Idea de la demostración. Consideramos el flujo ϕ_t del campo $X : W \rightarrow E$ y supongamos que $O \in E$. Una **sección local** en O de X es un conjunto abierto S que contiene a O y está contenido en un hiperplano $H \subset E$ tranveral a X . Decir que $S \subset H$ es transversal a X significa que $X(x) \notin H, \forall x \in S$. Nuestra primera aplicación de la sección local en O será la construcción de una **caja de flujo** en un entorno de O . Una caja de flujo proporciona una descripción completa de un flujo en un entorno de cualquier punto no estacionario de dicho flujo por medio de coordenadas no lineales. La descripción es simple. Los puntos se mueven en rectas paralelas a velocidad constante.

Entonces tomamos un difeomorfismo $\Psi : U \rightarrow V$, una caja de flujo es un difeomorfismo $\mathbb{R} \times H \supset N \xrightarrow{\Psi} W$, de un entorno de N en $(0, 0)$ en un entorno O de W que transforma el campo $X : W \rightarrow E$ en un campo vectorial constante $Y = (1, 0)$ sobre $\mathbb{R} \times H$, el flujo de X se convierte de este modo en el simple flujo sobre $\mathbb{R} \times H$.

La derivada de Ψ en $(0, 0)$ se calcula fácilmente que la aplicación lineal igual a la identidad en $O \times H$ y que en $R = R \times O$, transforma 1 en $X(0)$. Como $X(0)$ es transversal a H se sigue que $D\Psi(0, 0)$ es un isomorfismo, entonces por el teorema de la función inversa Ψ aplica un entorno abierto N de $(0, 0)$ difeomorficamente sobre un entorno V de O en E .

Tomamos N deforma $(-\sigma, \sigma) \times S$ tal que $S \subset H$ es una sección de O , $V_\sigma = \Psi(N)$, donde V_σ es una caja de flujo de $O \in E$. Una propiedad importante de una caja de flujo es que si $x \in V_\sigma$, entonces $\phi_t(x) \in S$ para un único $t \in (-\sigma, \sigma)$. ■

1.3. Estructura local de los puntos singulares hiperbólicos.

Sea p un punto regular de un campo X , por el teorema del flujo tubular (rectificación decampos) sabemos que existe un difeomorfismo que conjuga X en una vecindad del punto p con un campo constante $Y = (1, 0, \dots, 0)$. Consecuentemente dos campos X e Y son localmente ϕ -relacionados, en entornos de puntos regulares. Por causa de esta observación podemos considerar satisfactorio el conocimiento cualitativo local de las órbitas en un campo en torno a puntos regulares. Pero si p es singular la cosa es más compleja.

Definición 1.3.1 Un punto singular p de un campo se llama hiperbólico si todos sus autovalores de $DX(p)$ tienen la parte real no nula i.e. $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$.

Observación 1.3.1 Sean X, Y dos campos h -relacionados i.e. $h : X \rightarrow Y$ en torno a una singularidad $p \in X$, entonces $q = h(p)$ es una singularidad de Y .

Definición 1.3.2 El número de autovalores de $DX(p)$ que tienen parte real negativa se llama índice de estabilidad de X en p .

Teorema 1.3.1 (Hartman-Grobman). Sea $X : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, sea p un punto singular hiperbólico, entonces existe un entorno del punto p i.e. $\exists V \in \text{Ent}(p) \subset A, W \in \text{Ent}(0) \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$X|_V \rightarrow DX(p)|_W,$$

son topológicamente equivalentes, i.e. existe un homeomorfismo entre un núcleo de grupo y un grupo entorno a una singularidad hiperbólica.

Hablamos de equivalencia topológica y no diferencial a pesar de que X posea cualidades de tipo diferencial. Para conseguir la equivalencia diferencial exige unas condiciones muy fuertes a los autovalores de $DX(p)$.

Teorema 1.3.2 (Stenberg). *Sea p una singularidad hiperbólica y los autovalores de $DX(p)$ verifica*

$$\lambda_i \neq \sum m_j \lambda_j,$$

donde los m_j son enteros y además se verifica que

$$2 \leq \sum m_j \leq k,$$

con $k = 2, \dots, \infty$, entonces existe un difeomorfismo entre

$$X|_V \longrightarrow DX(p)|_W.$$

Como en el caso lineal podemos definir las variedades estable e inestable de p (singularidad hiperbólica de X) ahora denotadas como $W_{loc}^s(p)$ y $W_{loc}^u(p)$

$$W_{loc}^s(p) = \{x \in U \mid \varphi_t(x) \longrightarrow p; t \longrightarrow \infty \text{ y } \varphi_t(x) \in U \forall t \geq 0\},$$

$$W_{loc}^u(p) = \{x \in U \mid \varphi_t(x) \longrightarrow p; t \longrightarrow -\infty \text{ y } \varphi_t(x) \in U \forall t \leq 0\},$$

donde $U \in Ent(p)$. Las variedades $W_{loc}^s(p)$ y $W_{loc}^u(p)$ son análogas a E^s y E^u del caso lineal, de hecho podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3 (Teorema de la variedad estable) *Supongamos que el campo X tiene una singularidad hiperbólica. Entonces existen las variedades $W_{loc}^s(p)$ y $W_{loc}^u(p)$ tales que $\dim(W_{loc}^s(p)) = \dim(E^s)$ y $\dim(W_{loc}^u(p)) = \dim(E^u)$ ya que $W_{loc}^s(p)$ es tangente a E^s y $W_{loc}^u(p)$ es tangente a E^u .*

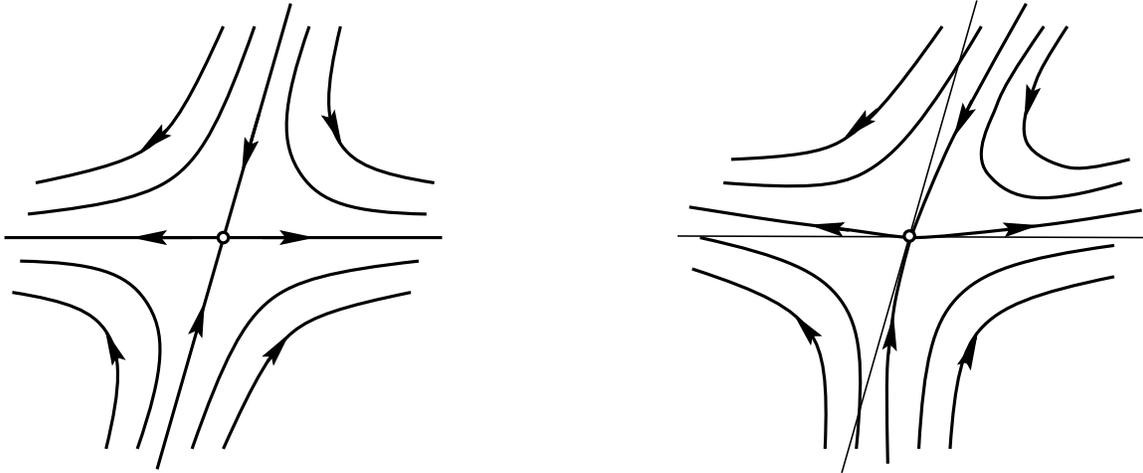


Figura 1.4: Esquema del Teorema de la variedad estable.

Observación 1.3.2 *Si p es una singularidad no hiperbólica del campo X entonces de forma análoga al caso lineal existe una tercera variedad, $W_{loc}^c(p)$, variedad centro. Este punto será formalizado más adelante cuando estudiemos el teorema de la variedad centro.*

Las variedades $W_{loc}^s(p)$ y $W_{loc}^u(p)$ se pueden definir de forma global como sigue:

$$W^s(p) = \bigcup_{t \leq 0} \varphi_t(W_{loc}^s(p)),$$

$$W^u(p) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(W_{loc}^u(p)).$$

Veamos algunos ejemplos de clasificación de singularidades hiperbólicas en el caso no lineal.

Ejemplo 1.3.1 Clasificar las singularidades del sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + x^2 \end{cases} \quad (1.8)$$

Solución. En primer debemos calcular las singularidades del sistema, en este caso sólo existe una y es $S = (0, 0)$. Aplicando el teorema de Hartman, linealizamos el sistema, de tal forma que obtenemos:

$$DX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \quad DX(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto los autovalores del sistema lineal son $\sigma(\lambda) = \{1, -1\}$, vemos por lo tanto que se trata de una singularidad hiperbólica, y por el teorema de Hartman sabemos que se trata de un punto de silla.

Las variedades estable e inestable del sistema lineal son:

$$E^s = \left\{ V_{-1} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\},$$

$$E^u = \left\{ V_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}.$$

Si escribimos (1.8) como una ecuación de primer orden encontramos que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + x,$$

integrando esta ecuación, obtenemos la familia de soluciones

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x},$$

donde c es cierta constante de integración.

Los teoremas expuestos implican que $W_{loc}^u(0, 0)$ puede ser representada como una función $y = h(x)$ con $h(0) = Dh(0) = 0$ ya que W_{loc}^u es tangente a E^u . Entonces, ver fig (1.5)

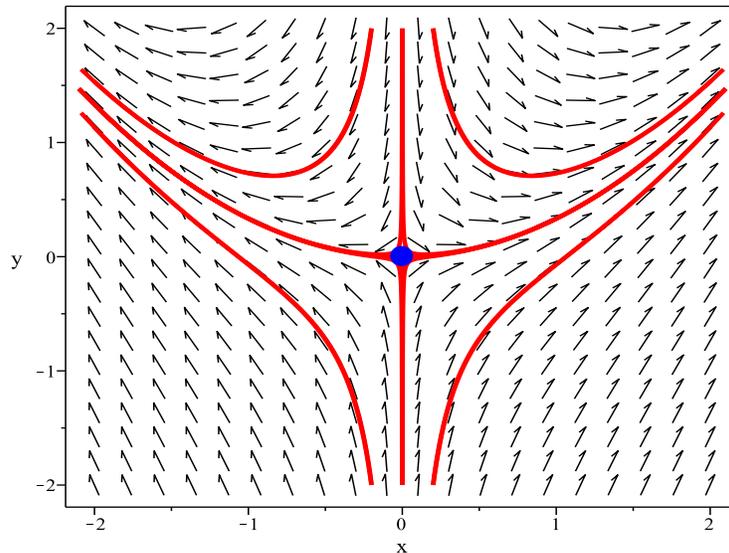


Figura 1.5: Espacio de fases de la ecuación (1.8)

$$W_{loc}^u = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{x^2}{3} \right\},$$

donde hemos tomado $c = 0$. Por otro lado $x(0) = 0$ implica que $x' = 0$, por lo tanto

$$W_{loc}^s(0, 0) \equiv E^s,$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 1.3.2 Estudiar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(-\sin x + 5y - 9z) \\ y' = \frac{1}{4}(4x - e^z + 1) \\ z' = \frac{1}{4}(4x - 4\sin y + 3z) \end{cases}. \quad (1.9)$$

Solución. En primer lugar debemos calcular las singularidades, siendo una de éstas: $S_1 = (0, 0, 0)$. Linealizamos el sistema encontrando que:

$$DX = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\cos x & 5 & -9 \\ 4 & 0 & -e^z \\ 4 & -4\cos y & 3 \end{pmatrix} \quad DX(S_1) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -9 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

de tal forma que los autovalores y sus autovectores son:

$$V_1 = (1, 1, 0)^T, \quad V_{-\frac{1}{4}+i} = (i, 1, 1)^T, \quad V_{-\frac{1}{4}-i} = (-i, 1, 1)^T,$$

de esta forma vemos que la solución lineal general es:

$$X = \alpha V_1 e^t + \beta V_{-\frac{1}{4}+i} e^{(-\frac{1}{4}+i)t} + \bar{\beta} V_{-\frac{1}{4}-i} e^{(-\frac{1}{4}-i)t},$$

si $\alpha = 0$ entonces obtenemos una solución (superficie) que define el plano tangente a W^s mientras que si $\beta = 0$ lo que obtenemos es una recta tangente a W^u . Vemos por lo tanto que S_1 es un punto de silla. ■

Ejemplo 1.3.3 Estudiar el sistema:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(-x - 2y + z + 4y^3) \\ y' = \frac{1}{2}(-x + z) \\ z' = z - (x + z)y^2 \end{cases}. \quad (1.10)$$

Solución. En primer lugar debemos calcular las singularidades, siendo éstas:

$$S = \left\{ (0, 0, 0), \left(\alpha, \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \alpha \right), \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

Seguimos la estrategia del ejercicio anterior, por lo tanto linealizamos el sistema:

$$DX = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 + 6y^2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -y^2 & -(x+z) & 1 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Estudiaremos los siguientes casos:

1. $S = (0, 0, 0)$; Por lo tanto:

$$DX(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

de esta forma vemos que

$$\sigma(\lambda) = \left(-1, 1, \frac{1}{2} \right) \\ V_{-1} = \{(2, 1, 0)\}, \quad V_1 = \{(0, 1, 2)\} \quad V_{1/2} = \{(-1, 1, 0)\}$$

por lo tanto el punto singular $(0,0,0)$ es un punto de silla. La solución general del sistema lineal es:

$$x = \alpha V_{-1} e^{-t} + \beta V_1 e^t + \gamma V_{1/2} e^{(1/2)t}$$

observando que para una solución que verifique $\beta = \gamma = 0$ se obtiene una solución estable i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha V_{-1} e^{-t} \rightarrow 0$$

mientras que la variedad inestable está definida por el plano $\beta V_1 e^t + \gamma V_{1/2} e^{(1/2)t}$, ($\alpha = 0$) observar que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \beta V_1 e^t + \gamma V_{1/2} e^{(1/2)t} \rightarrow 0.$$

Es decir:

$$E^s = V_{-1} \text{ tangente a } W^s$$

$$E^u = (V_1, V_{1/2}) \text{ tangente a } W^u$$

2. Para $(\alpha, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \alpha)$

$$DX(S_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2\alpha & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \sigma(\lambda) = \left(0, \sqrt{(-1-\alpha)}, -\sqrt{(-1-\alpha)}\right).$$

Vemos que si $\alpha = -1$ entonces: $\sigma(\lambda) = (0,0,0)$, mientras que si $\alpha < -1$, entonces $\sigma(\lambda) = (0, \beta, \beta)$, donde $\beta \in \mathbb{R}^+$. Y si $\alpha > -1$, entonces $\sigma(\lambda) = (0, z, z)$, donde $z \in \mathbb{C}$, con $z = a + ib$ donde $a = 0$, i.e. un imaginario puro. Por lo tanto nuestro teorema sobre linealización (Hartman) no puede ser aplicado en el estudio de esta singularidad.

■

1.4. Estudio de las singularidades no hiperbólicas.

1.4.1. Teorema de la variedad centro.

Como acabamos de ver, el teorema de Hartman no funciona cuando la singularidad es no hiperbólica. El teorema de la variedad centro representa una generalización del teorema de la variedad estable (o invariante) y contempla la existencia de un subespacio invariante W^c tangente a E^c (del caso lineal).

Sea $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial con singularidades no hiperbólicas en el origen i.e. $X(0) = 0$ y $DX(0)$ con autovalores con parte real nula, supongamos que:

$$DX(0) = E^s \oplus E^u \oplus E^c,$$

entonces tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.4.1 (Teorema de la variedad centro). Sea φ_t el flujo del campo X . Entonces existe de forma local la variedad centro W_{loc}^c que contiene el origen y es invariante bajo φ_t , además W_{loc}^c es tangente a E^c en $x = 0$. Además existen de forma local, W_{loc}^s y W_{loc}^u tangentes a E^s y E^u invariantes por φ_t donde $(\varphi_t | W_{loc}^s)$ es una contracción y $(\varphi_t | W_{loc}^u)$ es una dilatación.

Observación 1.4.1 Es importante resaltar que (W_{loc}^c) no es necesariamente única.

Ejemplo 1.4.1 Vamos a ver que el sistema

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -y \end{cases}, \quad (1.11)$$

tiene una variedad centro no única.

Solución. Vemos que la singularidad del sistema (1.11) es $S = (0, 0)$, y que la parte lineal del sistema viene dada por:

$$DX = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad DX(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo que los autovalores son $\sigma(\lambda) = (0, -1)$ i.e. se trata de una singularidad no hiperbólica que el teorema de Hartman es incapaz de clasificar. El teorema de la variedad centro nos asegura que existe (W_{loc}^c) .

Los autovectores asociados a cada uno de los autovalores son:

$$V_0 = \{(1, 0)^T\} \quad \text{y} \quad V_{-1} = \{(0, 1)^T\},$$

obteniendo por lo tanto la siguiente descomposición del espacio:

$$DX(S) = E^s \oplus E^c,$$

donde $E^s = L(V_{-1})$ y $E^c = L(V_0)$. Vemos en la fig (1.6) el diagrama del espacio de fases correspondiente al sistema (1.11)

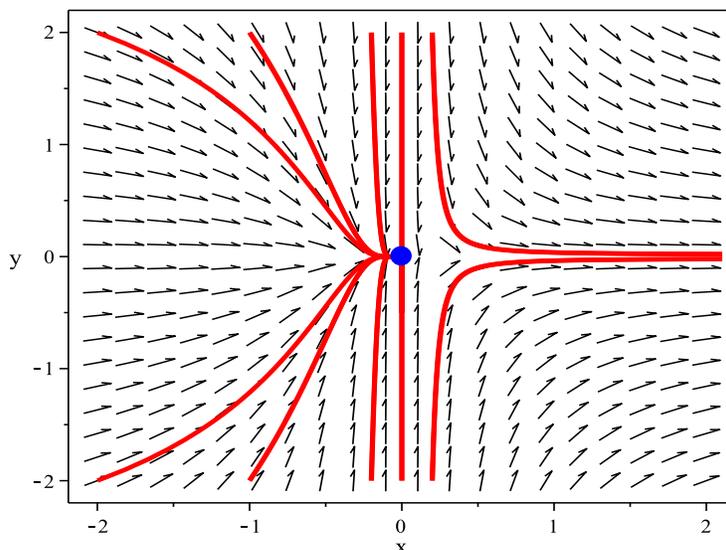


Figura 1.6: Espacio de fases del sistema (1.11)

En este caso $W_{loc}^c = E^c$ sin embargo existen otras variedades centro, la órbita que pasa por el punto (x_0, y_0) con $x_0 < 0$ está dada por la solución particular de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x^2} \implies y = y_0 \exp\left(\frac{1}{x}\right),$$

por lo tanto la curva

$$y = \begin{cases} y_0 \exp\left(\frac{1}{x}\right) & x_0 < 0 \\ 0 & x_0 > 0 \end{cases},$$

es invariante bajo el flujo. Además vemos que W_{loc}^c puede existir de forma global. ■

Ejemplo 1.4.2 Estudiemos el sistema lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = -x + y - z \\ \dot{z} = -y - z \end{cases} \quad (1.12)$$

Solución. Obviamente la única singularidad es: $S = (0,0,0)$, y los autovalores de la matriz de este sistema lineal son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} + \frac{3}{4}i & \frac{3}{4} - \frac{3}{4}i \\ 0 & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 - i & 1 \\ 1 & -1 + i & 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto tenemos que $\sigma(\lambda) = \{-1, i, -i\}$, con

$$V_{-1} = (-1, 0, 1), \quad V_{\pm i} = \left(1, \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}i, -\frac{1}{3}\right),$$

La solución del sistema es:

$$X = \alpha V_i e^{it} + \bar{\alpha} V_{-i} e^{-it} + \beta V_{-1} e^{-t},$$

el subespacio estable está generado por:

$$E^s = L(V_{-1}),$$

mientras que E^c está generada por los autovectores V_i y V_{-i} i.e.

$$E^c = L(V_i, V_{-i}),$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 1.4.3 Estudiar el sistema no-lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - xz \\ \dot{y} = x - y^3 \\ \dot{z} = -z - 2xy - 2x^4 + x^2 \end{cases}. \quad (1.13)$$

Solución. En primer lugar calculamos las singularidades del sistema, siendo éstas:

$$S_1 = (0,0,0), \quad S_2 = (\alpha, -\alpha^2, \alpha) \quad \text{y} \quad S_3 = (\alpha, -\alpha^3, \alpha^2),$$

donde α es una raíz de $1 + Z^8$.

Nos centraremos nada más que en la primera singularidad i.e. en S_1 . Por lo tanto linealizaremos el sistema obteniendo:

$$DX = \begin{pmatrix} -z & -1 & -x \\ 1 & -3y^2 & 0 \\ -2y - 8x^3 + 2x & -2x & -1 \end{pmatrix} \implies DX(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores y sus autovectores correspondientes son:

$$V_{\pm i} = (\pm i, 1, 0)^T, \quad V_{-1} = (0, 0, 1)^T,$$

por lo tanto tenemos la siguiente descomposición:

$$E^c = L(V_i, V_{-i}), \quad E^s = L(V_{-1}).$$

Del sistema vemos que

$$\dot{z} = -z + x^2 + 2x\dot{x} - 2x^4 + 2x^2z,$$

ó

$$\frac{d}{dt} (z - x^2) = -(z - x^2)(1 - 2x^2),$$

por lo tanto

$$z = x^2 := W^c,$$

donde W^c es tangente a E^c en el origen. Sobre esta superficie (x, y) satisfacen:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}, \quad (1.14)$$

por lo tanto soluciones que partan de esta superficie se quedan en ella.

Si tenemos en cuenta la función de Lyapunov (que más adelante estudiaremos más a fondo) $V(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{dV}{dt} = -\partial_x V \dot{x} - \partial_y V \dot{y} = -2x^4 - 2y^4 < 0,$$

de esta forma sabemos que el sistema (1.14) tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable, además, toda solución que parte de la superficie $z = x^2$ permanece en ella y tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.

La solución exacta es

$$x = y = 0, \quad z = \beta e^{-t},$$

todo esto sugiere que el origen (nuestra singularidad S_1) es asintóticamente estable. ■

Teorema 1.4.2 Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que X tiene singularidades no hiperbólicas \bar{x} . Sea $\tilde{X} = X|_{W_{loc}^c}$ entonces el flujo de $\dot{x} = X(x)$ es topológicamente equivalente, en una vecindad de \bar{x} , al sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{X}(x_c) & / & \quad x_c \in W_{loc}^c \\ \dot{x} &= x_u & / & \quad x_u \in W_{loc}^u \\ \dot{x} &= -x_s & / & \quad x_s \in W_{loc}^s \end{aligned} \quad (1.15)$$

Este teorema implica que el tipo topológico del punto singular no hiperbólico está determinado por el comportamiento topológico de el flujo restringido a su variedad centro. Este teorema nos permitirá determinar el carácter topológico de los puntos singulares no hiperbólicos.

Supongamos ahora que escribimos el sistema (1.15) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{f}(x) \\ \dot{\tilde{y}} &= -\tilde{y} \\ \dot{\tilde{z}} &= -\tilde{z} \end{aligned} \quad (1.16)$$

queremos atacar el problema de calcular el campo vectorial reducido \tilde{f} . Consideramos el siguiente sistema reducido:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + f(x, y) \\ \dot{y} &= Cy + g(x, y) \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde $B, C \in \mathcal{M}_{n \times n}$ donde $\sigma(\lambda)$ sólo tiene parte real nula o negativa y las funciones tales que

$$\partial_x f = \partial_y f = \partial_x g = \partial_y g = 0|_{\bar{x}=(0,0)}. \quad (1.18)$$

Como W_{loc}^c es tangente a E^c (el espacio $y = 0$), entonces podemos representarla como

$$W_{loc}^c = \{(x, y) \mid y = h(x)\} \quad / \quad h(0) = Dh(0) = 0, \quad (1.19)$$

consideremos ahora la proyección del campo sobre $y = h(x)$

$$\dot{x} = Bx + f(x, h(x)), \quad (1.20)$$

al ser $h(x)$ tangente a $y = 0$, las soluciones de esta ecuación proporcionan una buena aproximación de el flujo de $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(x)|_{W_{loc}^c}$.

Teorema 1.4.3 Si el origen $\bar{x} = 0$ de (1.20) es localmente asintóticamente estable (resp. inestable) entonces el origen de (1.17) es también localmente asintóticamente estable (resp. inestable).

Podemos calcular o al menos aproximar la función $h(x)$ sustituyendo $y = h(x)$ en (1.17) utilizando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Dh(x)\dot{x} = Dh(x)[Bx + f(x, h(x))] = Ch(x) + g(x, h(x)) \quad \text{ó} \\ \mathcal{N}(h(x)) &= Dh(x)[Bx + f(x, h(x))] - Ch(x) - g(x, h(x)) = 0 \end{aligned}$$

con $h(0) = Dh(0) = 0$. Esta ecuación no puede ser resuelta por lo general para h , pero si podemos aproximarla como una serie de Taylor.

Teorema 1.4.4 Si una función $\phi(x)$, $\phi(0) = D\phi(0) = 0$ puede ser encontrada tal que $\mathcal{N}(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^p)$ para algún $p > 1$ cuando $|x| \rightarrow 0$, entonces $h(x) = \phi(x) + \mathcal{O}(|x|^p)$ cuando $|x| \rightarrow 0$.

Ejemplo 1.4.4 Estudiar el caracter topológico de la singularidad del campo

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + y^2 \\ \dot{y} = y - x^2 \end{cases} \quad (1.21)$$

Solución. Vemos que las singularidades son: $S_1 = (0,0)$ y $S_2 = (-1,1)$

$$DX = \begin{pmatrix} y & x+2y \\ -2x & 1 \end{pmatrix} \implies DX(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad DX(S_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

vemos sin problemas que el punto $S_2 = (-1,1)$ es un punto de silla ya que los autovalores de la matriz $DX(S_2)$ son $\sigma(\lambda) = \{\sqrt{2} + 1, 1 - \sqrt{2}\}$, sin embargo Hartman no nos puede decir nada sobre el punto $S_1 = (0,0)$ ya que los autovalores de la matriz $DX(S_1)$ son $\sigma(\lambda) = \{0,1\}$ donde los autovectores asociados a cada uno de los autovalores son: $V_0 = \{(1,0)^T\}$, $V_1 = \{(0,1)^T\}$ por lo tanto W_{loc}^c es tangente al eje \overrightarrow{OX} .

Asumimos ahora que W_{loc}^c se puede escribir de la siguiente forma:

$$y = g(x) = \sum_{m=0}^r a_m x^m + \mathcal{O}(|x|^{r+1}),$$

para algún $r \in \mathbb{N}$. Sustituimos ahora y, \dot{y} en la ODE

$$\left(\sum_{m=0}^r m a_m x^{m-1} \right) \left[x \sum_{m=0}^r a_m x^m + \left(\sum_{m=0}^r a_m x^m \right)^2 \right] = \sum_{m=0}^r a_m x^m + \mathcal{O}(|x|^{r+1}),$$

vemos que al ser W_{loc}^c es tangente a $y = 0$ i.e. al eje \overrightarrow{OX} , en $x = 0$ esto implica que $a_0 = a_1 = 0$.

Comparando coeficientes de x^2 da $a_2 = 1$ por lo tanto $y = x^2 + \mathcal{O}(|x|^3)$, entonces $X|_{W_{loc}^c}$ toma la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + \mathcal{O}(|x|^3) \\ \dot{y} = 2x^4 + \mathcal{O}(|x|^5) \end{cases} \quad ,$$

ya que $\dot{y} = 2x + \mathcal{O}(|x|^2)$. El sistema es debilmente repulsivo en el origen, el origen es por lo tanto un nodo débil (no hiperbólico), ver la figura adjunta en la que se representa el espacio de fases del sistema (1.21)

■

Ejemplo 1.4.5 Estudieemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = x^2 - xy \\ y' = -y + x^2 \end{cases} \quad (1.22)$$

Solución. Atacamos su estudio como siempre i.e. calculando las singularidades del campo, que son:

$$S_1 = (0,0) \quad y \quad S_2 = (1,1),$$

el siguiente paso es linealizar el campo i.e.

$$DX = \begin{pmatrix} 2x - y & -x \\ 2x & -1 \end{pmatrix},$$

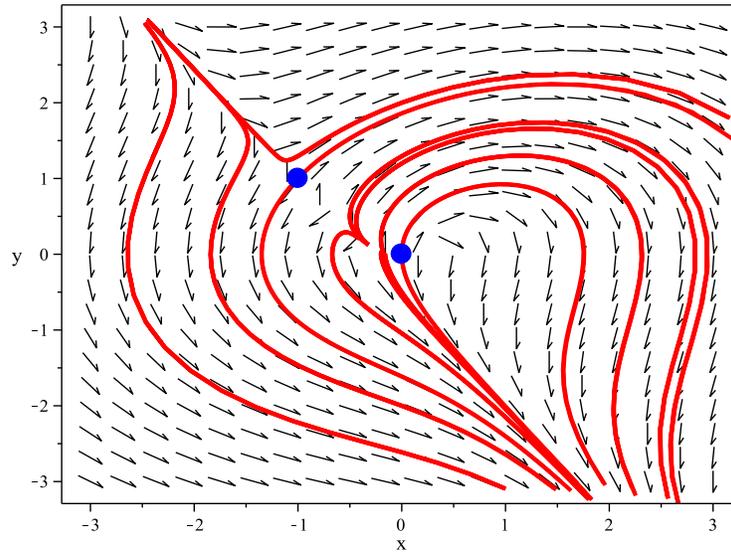


Figura 1.7: Espacio de fases del sistema (1.21).

y calcular los autovalores de DX en los puntos singulares i.e.

$$DX(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = (0, -1),$$

$$DX(S_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = (\pm i),$$

de esta forma vemos que con las únicas herramientas de que disponemos i.e. Hartman no podemos decir nada puesto que ambas singularidades no son hiperbólicas.

Podemos utilizar el teorema de la variedad centro para intentar clasificar la singularidad S_1 .

Sea $y = h(x)$ y supongamos que $h(x) = ax^2 + bx^3 + \dots$ entonces:

$$\begin{aligned} Dh(x) [f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) &= 0 \\ (2ax + 3bx^2) [x^2 - x(ax^2 + bx^3)] + (ax^2 + bx^3) - x^2 &= 0, \end{aligned}$$

simplificando e igualando términos de igual orden encontramos que:

$$x^2 : a - 1 = 0 \iff a = 1$$

$$x^3 : 2a + b = 0 \iff b = -2$$

\vdots

por lo tanto

$$h(x) = x^2 - 2x^3,$$

de esta forma la ecuación reducida queda:

$$x' = x^2 - xy = x' = x^2 - x(x^2 - 2x^3) = x^2 - x^3 + 2x^4,$$

por lo tanto la singularidad S_1 es un punto de equilibrio inestable aunque ligeramente atractivo al estar el sistema compensado por el autovalor ($\lambda = -1$). Observar que

$$E^s = L(V_{-1}) = \{(0, 1)\}, \quad E^c = L(V_0) = \{(1, 0)\},$$

esto nos indica que el eje \overrightarrow{OY} , es la variedad lineal estable mientras que la variedad lineal centro es el eje \overrightarrow{OX} , como podemos comprobar en la figura (1.8).

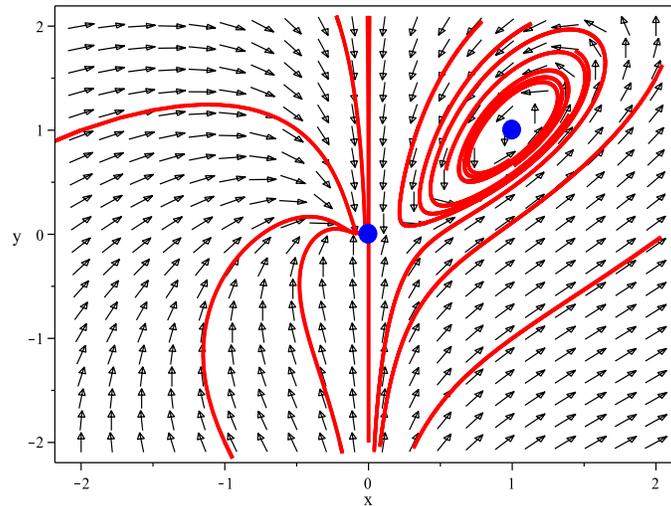


Figura 1.8: Espacio de fases del sistema (1.22)

No será hasta el capítulo 5 cuando podamos tener las herramientas suficientes para poder clasificar la singularidad S_2 , de momento nos conformaremos con observar su espacio de fases (ver fig.1.8). ■

Ejemplo 1.4.6 Clasificar topológicamente los puntos de equilibrio del sistema:

$$\begin{cases} x' = x^2y - x^5 \\ y' = -y + x^2 \end{cases} \quad (1.23)$$

Solución. Como en ejemplos previos lo primero es calcular las singularidades del sistema (1.23) siendo éstas:

$$S_1 = (0,0) \quad \text{y} \quad S_2 = (1,1),$$

calculamos a continuación la parte lineal del sistema i.e.

$$DX = \begin{pmatrix} 2xy - 5x^4 & x^2 \\ 2x & -1 \end{pmatrix},$$

y calculamos los autovalores de cada una de las singularidades

$$\begin{aligned} DX(S_1) &= \begin{pmatrix} 2xy - 5x^4 & x^2 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2.6795 & 0 \\ 0 & -3.7321 \end{pmatrix}, \\ DX(S_2) &= \begin{pmatrix} 2xy - 5x^4 & x^2 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

viendo de esta forma que S_1 es un punto estable mientras que por Hartman no podemos decir nada sobre S_2 . Las variedades lineales asociadas a S_2 son:

$$E^c = L(V_0) = \{(1,0)\}, E^s = L(V_{-1}) = \{(0,1)\}.$$

Consideremos

$$W^c = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h(x), \quad |x| < \delta, \quad h(0) = Dh(0) = 0 \right\},$$

con δ suficientemente pequeño. Supongamos que h es de la forma $h(x) = ax^2 + bx^3 + \mathcal{O}(x^4)$ y que el sistema (1.23) está escrito de la forma:

$$\begin{cases} x' = Ax + f(x, h(x)), \\ y' = Bh(x) + g(x, h(x)), \end{cases}$$

Con esta observación termina este ejemplo. ■

Ejemplo 1.4.7 Estudiar el sistema:

$$\begin{cases} x' = -x + dy^2 \\ y' = xy - y^3 \end{cases}, \quad (1.24)$$

donde $d \in \mathbb{R}$.

Solución. Como en ejemplos previos lo primero es calcular las singularidades del sistema (1.24) siendo ésta $S_1 = (0, 0)$. Calculamos a continuación la parte lineal del sistema i.e.

$$DX = \begin{pmatrix} -1 & 2dy \\ y & x - 3y^2 \end{pmatrix},$$

y calculamos los autovalores de cada una de las singularidades

$$DX(S_1) = \begin{pmatrix} -1 & 2dy \\ y & x - 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Las variedades lineales asociadas a S_1 son:

$$E^c = L(V_0) = \{(0, 1)\}, E^s = L(V_{-1}) = \{(1, 0)\},$$

Consideremos como siempre:

$$W^c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = h(y), \quad |y| < \delta, \quad h(0) = Dh(0) = 0 \right\},$$

con δ suficientemente pequeño. Supongamos que h es de la forma $h(y) = ay^2 + by^3 + cy^4 + \mathcal{O}(y^5)$ y que el sistema (1.24) está escrito de la forma:

$$\begin{cases} x' = Ah(y) + f(h(y), y), \\ y' = By + g(h(x), y), \end{cases},$$

sabemos que $h(x)$ debe verificar: $y' = Dh(x)x'$ i.e.

$$y' = \mathcal{N}(h(x)) = Dh(x)x' = Dh(x) [Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0,$$

donde para este caso tenemos que:

$$A = -1, \quad B = 0, \quad f = dy^2, \quad g = xy - y^3,$$

entonces:

$$\mathcal{N}(h(x)) = (2ay + 3by^2 + 4cy^3 \dots) \left[(ay^2 + by^3 + cy^4 + \dots) y - y^3 \right] + (ay^2 + by^3 + cy^4 + \dots) - dy^2 = 0,$$

simplificando e igualando coeficientes de igual potencia tenemos que:

$$\begin{aligned} y^2 : a - d &= 0 \iff a = d, \\ y^3 : b &= 0, \\ y^4 : 2a^2 + c - 2a &= 0 \iff c = 2d(1 - d) \\ &\vdots \end{aligned}$$

por lo que la variedad centro tiene un desarrollo de Taylor de la forma:

$$h(y) = dy^2 + 2d(1 - d)y^4 + \mathcal{O}(y^5),$$

de esta forma encontramos que el campo vectorial restringido a la variedad centro está dado por:

$$y' = yh(y) - y^3 = (d - 1)y^3 + 2d(1 - d)y^5 + \mathcal{O}(y^6),$$

entonces para y suficientemente pequeño, $y = 0$ es:

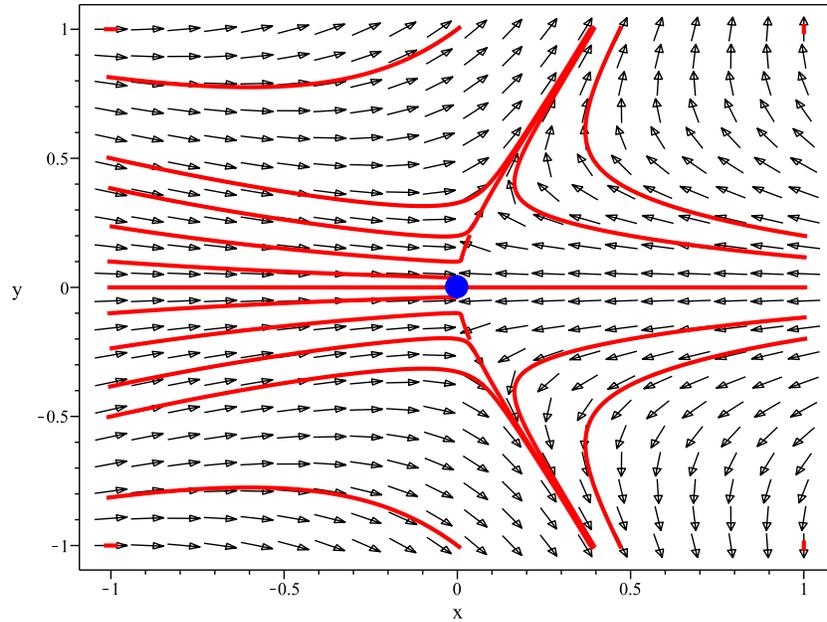


Figura 1.10: Espacio de fases del sistema (1.24) con $d = 1$.

1. Asintóticamente estable si $d < 1$.
2. Inestable con $d > 1$.

Esto se puede demostrar utilizando una función de Lyapunov del tipo: $L(y) = y^2$. Por lo tanto el sistema original es asintóticamente estable si $d < 1$ e inestable si $d > 1$. El caso $d = 1$ es especial ya que hace que $h(y) = y^2$ por lo que la curva $x = y^2$ es la única variedad centro. Por lo tanto el origen sería estable.

En la figura adjunta vemos como se comporta el sistema (ver fig. (1.10)). ■

1.4.2. Formas normales

Empezamos asumiendo que el teorema de la variedad centro ha sido aplicado al sistema bajo estudio y que por lo tanto nuestra atención se centrará en el flujo dentro de esta variedad centro, i.e.

$$x' = Ax + f(x, h(x)). \quad (1.25)$$

Intentaremos encontrar transformaciones de coordenadas que nos ayuden a simplificar la expresión analítica del campo vectorial sobre la variedad centro. El campo resultante se denomina **formas normales**. Empezamos con el sistema

$$x' = f(x), \quad (1.26)$$

que tiene un punto de equilibrio en 0. Nos gustaría encontrar un cambio de coordenadas $x = h(y)$ con $h(0) = 0$, tal que (1.26) resulte lo más simple posible. En la coordenada y

$$Dh(y)y' = f(h(y)) \quad \text{ó} \quad y' = (Dh(y))^{-1} f(h(y)), \quad (1.27)$$

formalmente uno puede intentar encontrar una secuencia de transformaciones de coordenadas $(h_i)_i$ que elimine los términos de grado superior de la serie de Taylor de (1.27). Cuando una aplica este procedimiento a un punto crítico hiperbólico entonces obtenemos la parte formal del teorema de Hartman.

Asumimos por el momento que $Df(0)$ tiene distintos autovalores $\{\lambda_i\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j; \forall i, j$ y que un cambio lineal de coordenadas hace que $Df(0)$ sea diagonalizable entonces (1.26) se puede escribir como:

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda_1 x_1 + g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = \lambda_n x_n + g_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{ó} \quad x' = \Lambda x + g(x), \quad (1.28)$$

donde las funciones $(g_i)_i$ se anulan (en segundo orden) en el origen. Nos gustaría encontrar un cambio de coordenadas h de la forma, identidad más términos de orden superior que verifique que (1.27) tenga términos no lineales que anulan términos de orden superior que los de g . Si k es el menor grado para una derivada de g_i que no se anula, entonces intentamos que h sea de la forma:

$$x = h(y) = y + P(y), \quad (1.29)$$

tal que P es el polinomio de grado k , tal que el grado más bajo de los términos no lineales en (1.27) es $(k+1)$. Por lo tanto (1.27) toma la forma:

$$y' = (I + DP(y))^{-1} f(y + P(y)), \quad (1.30)$$

desarrollamos esta expresión pero sólo hasta términos de grado k . Denotamos g_i^k al término de g_i de grado k y

$$P(y) = (P_1(y), \dots, P_n(y)),$$

entonces

$$y'_i = \lambda_i y_i + \lambda_i P_i(y) + g_i^k(y) - \sum_{j=1}^n \partial_{y_j} P_j(\lambda_i y_j), \quad (1.31)$$

entonces queremos encontrar P tal que

$$\lambda_i P_i(y) - \sum_{j=1}^n \partial_{y_j} P_j(\lambda_i y_j) = -g_i^k(y). \quad (1.32)$$

Observamos que el operador que asocia a P el lado izquierdo de la ecuación (1.32) es lineal en los coeficientes de P . En particular, si P_i es de forma monómica $y_1^{a_1} \dots y_n^{a_n}$, entonces

$$\partial_{y_j} P_j(\lambda_i y_j) = a_j \lambda_j P_i, \quad (1.33)$$

y por lo tanto el lado izquierdo de (1.32) queda:

$$\left(\lambda_i - \sum_j a_j \lambda_j \right) P_i, \quad (1.34)$$

y por lo tanto los monomios son autovectores para el operador con autovalores $\lambda_i - \sum_j a_j \lambda_j$. Concluimos que P puede ser encontrado satisfaciendo (1.32) lo que implica que $\lambda_i - \sum_j a_j \lambda_j \neq 0$ cuando (a_j) son no negativos tal que $\sum_j a_j = k$ y que por lo tanto la ecuación puede ser linealizada. Resaltamos que:

1. La solución depende sólo de la parte lineal del campo.
2. El problema puede ser reducido a una serie de ecuaciones lineales a resolver.

El resultado final es una serie de Taylor para el campo que contiene sólo los términos resonantes esenciales. Si $L = Df(0)x$ es la parte lineal de (1.26) en $x = 0$ entonces L induce la aplicación adL sobre el espacio lineal H_k de los campos vectoriales cuyos coeficientes son polinomios homogéneos de grado k .

La aplicación adL se define como:

$$adL = [Y, L] = DLY - DY L, \quad (1.35)$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de Lie. El principal resultado es:

Teorema 1.4.5 Sea $x' = f(x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales C^r con $f(0) = 0$ y $Df(0)x = L$. Elegimos un complemento G_k para $adL(H_k)$ en H_k tal que $H_k = adL(H_k) + G_k$. Entonces existe un cambio de coordenadas analítico en la vecindad del origen que transforma $x' = f(x)$ en:

$$y' = g(y) = g^{(1)}(y) + \dots + g^{(r)}(y) + R_r \quad (1.36)$$

donde $L = g^{(1)}(y)$ y $g^{(k)} \in G_k$ con $k \in [2, r]$ y $R_r = \mathcal{O}(|y|^r)$. Decimos que la ecuación (1.36) es de la forma normal.

Ejemplo 1.4.8 Queremos calcular la forma normal para un campo vectorial en \mathbb{R}^2 que en la vecindad de un punto fijo tiene la parte lineal dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = (\pm i). \quad (1.37)$$

Solución. En un sistema apropiado de coordenadas vemos que $L = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Vamos a calcular la acción de adL sobre H_2 donde

$$H_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para cada base Y_i de H_2 tenemos:

$$adL(Y_i) = DLY_i - DY_iL = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_i^1 \\ Y_i^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_x Y_i^1 & \partial_y Y_i^1 \\ \partial_x Y_i^2 & \partial_y Y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\begin{aligned} adL \left(\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}, \\ adL \left(\begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ xy \end{pmatrix}, \\ adL \left(\begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 \end{pmatrix}, \\ adL \left(\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \\ adL \left(\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}, \\ adL \left(\begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces la tabla para H_2 es:

	x^2	xy	y^2
∂_x	$2xy\partial_x + x^2\partial_y$	$(y^2 - x^2)\partial_x + xy\partial_y$	$-2xy\partial_x + y^2\partial_y$
∂_y	$-x^2\partial_x + 2xy\partial_y$	$-xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y$	$-y^2\partial_x - 2xy\partial_y$

entonces en términos de la base:

$$\{x^2\partial_x, xy\partial_x, y^2\partial_x, x^2\partial_y, xy\partial_y, y^2\partial_y\},$$

adL tiene la siguiente matriz

	$x^2\partial_x$	$xy\partial_x$	$y^2\partial_x$	$x^2\partial_y$	$xy\partial_y$	$y^2\partial_y$
$x^2\partial_x$	0	-1	0	-1	0	0
$xy\partial_x$	2	0	-2	0	-1	0
$y^2\partial_x$	0	1	0	0	0	-1
$x^2\partial_y$	1	0	0	0	-1	0
$xy\partial_y$	0	1	0	2	0	-2
$y^2\partial_y$	0	0	1	0	1	0

esta matriz es no-singular ($\det = 9$), entonces todos los términos cuadráticos de un campo vectorial cuya parte lineal sea $-y\partial_x + x\partial_y$ pueden ser eliminados mediante una transformación de coordenadas.

Para términos cúbicos hacemos lo mismo i.e.

$$H_3 = \{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$$

i.e

$$H_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy^2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^3 \end{pmatrix} \right\},$$

entonces:

$$adL \left(\begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{pmatrix},$$

$$adL \left(\begin{pmatrix} x^2y \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 - x^3 \\ x^2y \end{pmatrix} \dots$$

etc... que producen la siguiente tabla:

	x^3	x^2y	xy^2	y^3
∂_x	$3x^2y\partial_x + x^3\partial_y$	$(2xy^2 - x^3)\partial_x + x^2y\partial_y$	$(y^3 - 2x^2y)\partial_x + xy^2\partial_y$	$-3xy^2\partial_x + y^3\partial_y$
∂_y	$-x^3\partial_x + 3x^2y\partial_y$	$-x^2y\partial_x + (2xy^2 - x^3)\partial_y$	$-xy^2\partial_x + (y^3 - 2x^2y)\partial_y$	$-y^3\partial_x - 3xy^2\partial_y$

entonces en términos de la base:

$$\left\{ x^3\partial_x, x^2y\partial_x, xy^2\partial_x, y^3\partial_x, x^3\partial_y, x^2y\partial_y, xy^2\partial_y, y^3\partial_y \right\},$$

adL tiene la siguiente matriz

	$x^3\partial_x$	$x^2y\partial_x$	$xy^2\partial_x$	$y^3\partial_x$	$x^3\partial_y$	$x^2y\partial_y$	$xy^2\partial_y$	$y^3\partial_y$
$x^3\partial_x$	0	-1	0	0	-1	0	0	0
$x^2y\partial_x$	3	0	-2	0	0	-1	0	0
$xy^2\partial_x$	0	2	0	-3	0	0	-1	0
$y^3\partial_x$	0	0	1	0	0	0	0	-1
$x^3\partial_y$	1	0	0	0	0	-1	0	0
$x^2y\partial_y$	0	1	0	0	3	0	-2	0
$xy^2\partial_y$	0	0	1	0	0	2	0	-3
$y^3\partial_y$	0	0	0	1	0	0	1	0

el rango de esta matriz es 6, entonces adH_3 tiene un complementario de dimensión 2. Una base para G'_3 puede ser

$$\left\{ (x^2 + y^2) x\partial_x + y\partial_y, (x^2 + y^2) (-y)\partial_x + x\partial_y \right\}.$$

Por el teorema de la forma normal, hemos encontrado una transformación de coordenadas que transforma el sistema:

$$\begin{cases} x' = -y + \mathcal{O}(|x|, |y|) \\ y' = x + \mathcal{O}(|x|, |y|) \end{cases},$$

en:

$$\begin{cases} u' = -v + (au - bv)(u^2 + v^2) + \text{términos superiores} \\ y' = x + (av + bu)(u^2 + v^2) + \text{términos superiores} \end{cases},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Esta forma jugará un papel decisivo en el análisis de la bifurcación de Hopf. ■

Ejemplo 1.4.9 Queremos calcular la forma normal de un campo cuya parte lineal en un punto de equilibrio es:

$$DL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies L = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.38}$$

Solución. Como en el ejemplo anterior, vamos a calcular la acción de adL sobre H_2 donde

$$H_2 = span \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para cada base Y_i de H_2 tenemos:

$$adL(Y_i) = DLY_i - DY_iL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_i^1 \\ Y_i^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_x Y_i^1 & \partial_y Y_i^1 \\ \partial_x Y_i^2 & \partial_y Y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 adL \left(\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 adL \left(\begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 adL \left(\begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 adL \left(\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \\
 adL \left(\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ -y^2 \end{pmatrix}, \\
 adL \left(\begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

entonces la tabla para H_2 es:

	x^2	xy	y^2
∂_x	$-2xy\partial_x$	$-y^2\partial_x$	0
∂_y	$x^2\partial_x - 2xy\partial_y$	$xy\partial_x - y^2\partial_y$	$y^2\partial_x$

entonces en términos de la base:

$$\{x^2\partial_x, xy\partial_x, y^2\partial_x, x^2\partial_y, xy\partial_y, y^2\partial_y\}$$

adL tiene la siguiente matriz

	$x^2\partial_x$	$xy\partial_x$	$y^2\partial_x$	$x^2\partial_y$	$xy\partial_y$	$y^2\partial_y$
$x^2\partial_x$	0	0	0	1	0	0
$xy\partial_x$	-2	0	0	0	1	0
$y^2\partial_x$	0	-1	0	0	0	1
$x^2\partial_y$	0	0	0	0	0	0
$xy\partial_y$	0	0	0	-2	0	0
$y^2\partial_y$	0	0	0	0	-1	0

cuyo rango es: 4. Hemos visto que sólo 4 son linealmente independientes

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ -y^2 \end{pmatrix} \right\},$$

por lo tanto términos de 2º orden que sean combinación lineal de estos 4 vectores pueden ser eliminados. Para determinar la naturaleza de los términos de 2º orden que no pueden ser eliminados, calculamos G_2 . Para ello nos fijamos en la matriz anterior de la que deberemos calcular dos autovectores del 0 que sean LI. Dos de estos vectores pueden ser

$$\left\{ \left(1, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0 \right), (0, 0, 0, 1, 0, 0) \right\},$$

por lo que

$$G_2 = span \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ \frac{1}{2}xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \right\},$$

estos dos vectores son los que generan $G_2 \subset H_2$ que es el complementario de $adL(H_2)$. Esto implica que la forma normal está dada por:

$$\begin{cases} x' = y + a_1x^2 + \mathcal{O}(3) \\ y' = a_2xy + a_3x^2 + \mathcal{O}(3) \end{cases} \quad / \quad (a_i) \in \mathbb{R},$$

Como es obvio esta elección de G_2 no es única. Si por ejemplo tomamos como autovectores

$$\{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 0)\},$$

por lo que

$$G_2 = span \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \right\},$$

estos dos vectores son los que generan $G_2 \subset H_2$ que es el complementario de $adL(H_2)$. Esto implica que, en este caso, la forma normal está dada por:

$$\begin{cases} x' = y + a_1 x^2 + \mathcal{O}(3) \\ y' = a_2 x^2 + \mathcal{O}(3) \end{cases} \quad / \quad (a_i) \in \mathbb{R},$$

o por ejemplo si los autovectores son:

$$\{(0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 1)\},$$

por lo que

$$G_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \end{pmatrix} \right\},$$

estos dos vectores son los que generan $G_2 \subset H_2$ que es el complementario de $adL(H_2)$. Esto implica que, en este caso, la forma normal está dada por:

$$\begin{cases} x' = y + a_1 y^2 + a_2 xy + \mathcal{O}(3) \\ y' = a_3 y^2 + \mathcal{O}(3) \end{cases} \quad / \quad (a_i) \in \mathbb{R},$$

etc.... ■

Proposición 1.4.1 Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, tal que los autovalores de DX son: $\sigma(\lambda) = \{\lambda, 0\}$, entonces la forma normal de X está dada por:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \sum_{r=2}^N \begin{pmatrix} a_r y_1 y_2^{r-2} \\ b_r y_2^r \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|y|^{N+1}), \quad (1.39)$$

donde $a_r, b_r \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.4.2 Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, tal que los autovalores de DX son: $\sigma(\lambda) = \{\pm i\}$, entonces la forma normal de X está dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{1}{2}(N-1) \rfloor} (y_1^2 + y_2^2)^r \left(a_r \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b_r \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) + \mathcal{O}(|y|^{N+1}),$$

donde $a_r, b_r \in \mathbb{R}$, $\beta = (\det(DX))^{1/2}$, $N \geq 3$ y $\lfloor \cdot \rfloor :=$ parte entera de \cdot .

Proposición 1.4.3 Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, tal que los autovalores de DX son: $\sigma(\lambda) = \{0, 0\}$, entonces la forma normal de X está dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \sum_{r=2}^N \begin{pmatrix} a_r y_1^r \\ b_r y_1^r \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|y|^{N+1}),$$

donde $a_r, b_r \in \mathbb{R}$.

Observación 1.4.3 Hemos visto en los ejemplos que estas formas no son únicas.

Terminaremos esta sección con un último ejemplo.

Ejemplo 1.4.10 Queremos clasificar la singularidad de un campo cuya forma normal asociada es:

$$\begin{cases} x' = x \left(\lambda + \sum_{i=1}^{N-1} a_i y^i \right) + \mathcal{O}(|x|^{N+1}) \\ y' = \sum_{i=2}^N b_i y^i + \mathcal{O}(|x|^{N+1}) \end{cases}, \quad (1.40)$$

con $N \geq 2, b_2 \neq 0$.

Solución. Sea la variedad centro W_{loc}^c tangente al eje Y dada por

$$x = g(y) = \sum_{m=2}^N c_m y^m + \mathcal{O}(|y|^{N+1}), \quad (1.41)$$

si diferenciamos (1.41) con respecto a t y sustituimos en (1.40) entonces:

$$\left(\sum_{m=2}^N m c_m y^{m-1} \right) \left(\sum_{i=2}^N b_i y^i \right) = \left(\sum_{m=2}^N c_m y^m \right) \left(\lambda + \sum_{i=1}^{N-1} a_i y^i \right) + \mathcal{O}(|x|^{N+1}), \quad (1.42)$$

comparando coeficientes de y^2 , entonces obtenemos que $\lambda c_2 = 0$ ya que $b_2 \neq 0$, la parte izquierda de (1.42) puede empezar para $m = 3$.

Ahora comparamos coeficientes para y^3 , entonces obtenemos que $\lambda c_3 = 0$ ya que la parte izquierda de (1.42) es de orden 4 y así sucesivamente, concluyendo que $c_m = 0, \forall m \in [0, N]$ ya que $W_{loc}^c := \{x = 0\}$.

Sobre W_{loc}^c , (1.40) toma la forma

$$\begin{cases} x' = \mathcal{O}(|y|^{N+2}) \\ y' = b_2 y^2 + \mathcal{O}(|y|^3) \end{cases}, \quad (1.43)$$

En cualquier caso, la expansión ($\lambda > 0$) o la contracción ($\lambda < 0$) hiperbólica nos indica que el punto es:

1. ligeramente atractivo si $b_2 < 0, \lambda < 0$ y
2. ligeramente repulsivo si $b_2 < 0, \lambda > 0$,

por lo que el caracter topológico del flujo restringido a la variedad centro depende de b_2 i.e. del signo de b_2 . ■

1.4.3. Blowing up

Terminamos este capítulo comentando brevemente una técnica muy común y que utilizaremos ampliamente en el capítulo 3, se trata de la transformación de coordenadas a polares. Sabemos que se nos puede presentar un sistema, en coordenadas cartesianas, tal que los autovalores de la parte lineal del sistema sean o nulos o imaginarios, en este caso el teorema de Hartman es inoperante y por lo tanto deberemos recurrir a otras tácticas como ésta, la transformación de coordenadas a polares (blowing-up). Veamos un ejemplo aclaratorio de semejante táctica.

Ejemplo 1.4.11 *Estudiar el sistema*

$$\begin{cases} x' = x^2 - 2xy \\ y' = y^2 - 2xy \end{cases} \quad (1.44)$$

Solución. Vemos que la única singularidad que presenta este sistema es $S_1 = (0, 0)$ y que la parte lineal del sistema es:

$$DX = \begin{pmatrix} 2(x-y) & -2x \\ -2y & 2(y-x) \end{pmatrix} \implies DX(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto los autovalores de esta matriz son: $\sigma(\lambda) = (0, 0)$. Vemos que no podemos clasificar este punto, por lo tanto aplicaremos un cambio de variables, a polares, al sistema (1.44). Dicho cambio viene dado por la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}, \implies \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

por lo que la ecuación (1.44) se re-escribirá como:

$$\begin{aligned} rr' &= xx' + yy' \\ r^2 \theta' &= xy' - yx' \end{aligned}$$

i.e. tenemos un sistema de la forma:

$$\begin{cases} r' = X_r(r, \theta) \\ \theta' = r^{-1} X_\theta(r, \theta) \end{cases} \implies \begin{cases} r' = r^{k+1} R(r, \theta) \\ \theta' = r^k \theta(r, \theta) \end{cases}$$

este es el sistema que vamos a estudiar en $r = 0$, pero ¡; Observamos que el plano de fases se obtiene de la siguiente forma

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{rR(r, \theta)}{\theta(r, \theta)}$$

por lo que al final sólo nos deberemos fijar en la ecuación del tipo:

$$\begin{cases} r' = rR(r, \theta) \\ \theta' = \theta(r, \theta) \end{cases}$$

en esta ecuación si podemos utilizar Hartman.

De esta forma:

$$\begin{cases} rr' = x(x^2 - 2xy) + y(y^2 - 2xy) \\ r^2\theta' = x(y^2 - 2xy) - y(x^2 - 2xy) \end{cases} \implies$$

aplicando ahora la transformación a polares,

$$\begin{cases} rr' = 3r^3 \cos^3 \theta - 3r^3 \cos^2 \theta \sin \theta + r^3 \sin \theta - 2r^3 \cos \theta \\ r^2\theta' = 3r^3 \cos \theta - 3r^3 \cos^3 \theta - 3r^3 \cos^2 \theta \sin \theta \end{cases} \implies$$

haciendo tremendas y esforzadas simplificaciones (si no fuera por los ordenadores...¿?)

$$\begin{cases} r' = r^2(\cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ \theta' = 3r \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) \end{cases} \quad (1.45)$$

y por lo tanto estudiamos este nuevo sistema que es topológicamente equivalente a:

$$\begin{cases} r' = r(\cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ \theta' = 3 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) \end{cases} \quad (1.46)$$

al que si que podemos aplicar Hartman en $r = 0$.

Las singularidades cuando $r = 0$ son:

$$\theta = \left(0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right)$$

Calculamos la parte lineal del sistema (1.46) obteniendo:

$$\begin{aligned} \partial_r R(r, \theta) &= \cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 3 \cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta - 2 \cos \theta + 1 - \cos^2 \theta \\ \partial_\theta R(r, \theta) &= r \left[-7 \cos^2 \theta \sin \theta + 4 \cos \theta \sin^2 \theta - 2 \cos^3 \theta + 2 \sin^3 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \right] \\ \partial_r \theta(r, \theta) &= 0 \\ \partial_\theta \theta(r, \theta) &= -3 \sin \theta \sin \theta [\sin \theta - \cos \theta] + 3 (\cos \theta \cos \theta [\sin \theta - \cos \theta]) ([\sin \theta - \cos \theta] + \theta [\cos \theta + \sin \theta]) \end{aligned}$$

De esta forma “vemos” que

$$DX(r=0, \theta=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

i.e. se trata de un punto de silla. Vemos en la imagen adjunta (fig. (1.11)) el espacio de fases del sistema en coordenadas cartesianas.

■

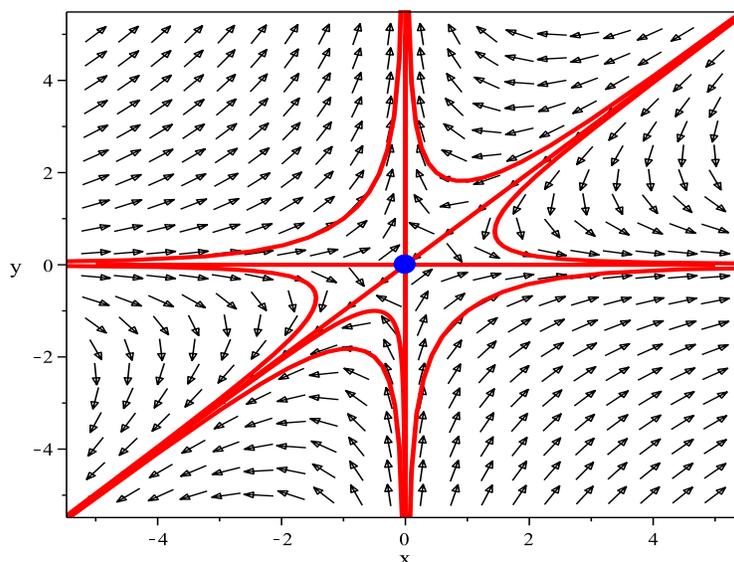


Figura 1.11: Espacio de fases del sistema (1.44) en coordenadas cartesianas (x, y) .

1.4.4. Espacio de fases en el infinito

Hasta ahora hemos mostrado los espacios de fases en un entorno de los puntos singulares, pero no hemos mostrado que es lo que sucede fuera de estas regiones. En los ejemplos anteriores dichos espacios de fases tienen una estructura sencilla y saber que pasa fuera de las regiones o entornos de los puntos críticos no supone una gran pérdida de información, pero en modelos más complicados el conocimiento de dichas áreas puede ser importante. A continuación detallaremos un ejemplo en el que mostramos como a través del empleo de coordenadas proyectivas podemos incluir los puntos del infinito en el espacio de fases, de esta forma tendremos toda la información sobre nuestro sistema dinámico.

Ejemplo 1.4.12 Construir el espacio de fases incluyendo el flujo en el infinito para el siguiente sistema

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -4x - 5y.\end{aligned}\tag{1.47}$$

Solución. Vemos que se trata de un sistema lineal que posee una única singularidad $S_0 = (0, 0)$, tal que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

con

$$V_{-4} = \left(-\frac{1}{4}, 1\right)^T, \quad V_{-1} = (-1, 1)^T,$$

viendo así que se trata de un foco estable. Precisamente estos dos autovectores definen dos rectas que pasan por el origen,

$$r_1 : y = -x, \quad r_2 : y = -4x.$$

Sabemos, por los resultados expuestos anteriormente, que todas las trayectorias son tangentes a r_1 en el origen y paralelas a r_2 en el infinito.

Utilizaremos ahora la siguiente transformación de coordenadas:

$$u = \frac{y}{x}, \quad z = \frac{1}{x},$$

con inversa

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z},$$

de tal forma que el sistema (1.47) resulta:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{xy' - yx'}{x^2} = -4 - 5u - u^2, \\ z' &= -\frac{x'}{x^2} = -uz, \end{aligned}$$

encontrando que los puntos de equilibrio de este nuevo sistema son;

$$S_1 = (-1, 0), \quad S_2 = (-4, 0),$$

linealizamos y vemos

$$A' = \begin{pmatrix} -5 - 2u & 0 \\ -z & -u \end{pmatrix}$$

tal que

$$A(S_1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(S_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

deduciendo así que el punto $S_1 = (-1, 0)$ es un punto de silla mientras que el punto $S_2 = (-4, 0)$ es un nodo inestable. En la figura adjunta detallamos el espacio de fases del sistema (1.47) en coordenadas (u, z) (ver Fig. (1.12))

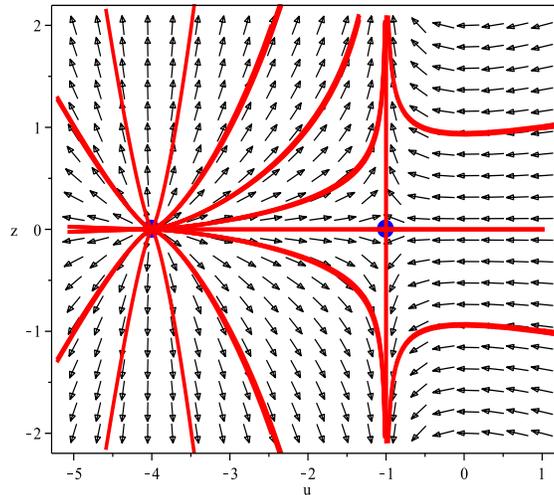


Figura 1.12: Espacio de fases del sistemas (1.47) en coordenadas (u, z) .

Para examinar el espacio de fases en el infinito en la dirección $\pm y$ tendremos que llevar a cabo una transformación de coordenadas

$$v = \frac{x}{y}, \quad z = \frac{1}{y}, \quad \implies \quad x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z},$$

obteniendo dos nuevos puntos singulares.

Si ordenamos toda esta información en el plano (x^*, y^*) entonces obtenemos el siguiente gráfico (ver Fig. (1.13)) donde la singularidad del origen S_0 está representada en color azul, mientras que las singularidades obtenidas con las transformaciones proyectivas $S_1 = (-1, 0) := E_1$, $S_2 = (-4, 0) := Q_1$, corresponden a las intersecciones en el infinito de las recta r_1 y r_2 con la circunferencia. De forma similar, mediante la transformación (v, z) hemos obtenido los puntos E_2 y Q_2 . ■

A continuación formalizaremos este procedimiento. Consideremos el sistema autónomo

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y), \quad (1.48)$$

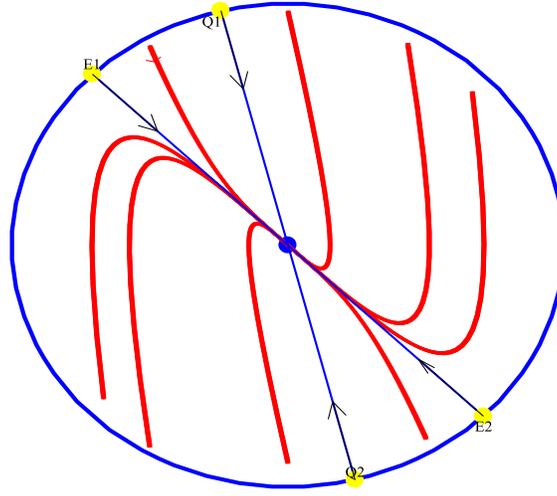


Figura 1.13: Espacio de fases en el infinito del sistemas (1.47).

que reescribimos mediante una transformación de coordenadas a polares de la siguiente manera;

$$\begin{aligned} r' &= r^n f_{n+1}(\theta) + r^{n-1} f_{n-1}(\theta) + \dots + f_1(\theta), \\ \theta' &= r^{n-1} g_{n+1}(\theta) + r^{n-2} g_{n-1}(\theta) + \dots + r^{-1} g_1(\theta), \end{aligned} \quad (1.49)$$

donde f_m y g_m son polinomios de grado m en $(\cos \theta, \sin \theta)$. Mediante una nueva transformación

$$\rho = r^{-1}, \quad \rho' = -r' r^{-2},$$

el sistema (1.49) se escribe ahora como:

$$\begin{aligned} \rho' &= -\rho f_{n+1}(\theta) + O(\rho^2), \\ \theta' &= g_{n+1}(\theta) + O(\rho). \end{aligned}$$

Teorema 1.4.6 Los puntos críticos en el infinito se encuentran resolviendo las ecuaciones: $\rho' = \theta' = 0$ con $\rho = 0$, lo que resulta equivalente a resolver

$$g_{n+1}(\theta) = \cos \theta Q_n(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_n(\cos \theta, \sin \theta),$$

siendo P_n y Q_n polinomios homogéneos de grado n .

Para determinar el flujo cerca de los puntos críticos en el infinito, uno debe proyectar la semiesfera $X > 0$, en el plano $X = 1$, con ejes y, z o proyectar la semiesfera $Y > 0$, en el plano $Y = 1$ con ejes x, z .

Teorema 1.4.7 El flujo definido sobre el plano yz ($X = \pm 1$) excepto los puntos $(0, \pm 1, 0)$ es equivalente al flujo definido por

$$\begin{aligned} \pm y' &= yz^n P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - z^n Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right), \\ \pm z' &= z^{n+1} P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right), \end{aligned}$$

donde la dirección del flujo está determinado por $g_{n+1}(\theta)$.

De forma similar, el flujo definido sobre el plano xz ($Y = \pm 1$) excepto los puntos $(\pm 1, 0, 0)$ es equivalente al flujo definido por

$$\begin{aligned} \pm x' &= xz^n Q\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right) - z^n P\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right), \\ \pm z' &= z^{n+1} Q\left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}\right), \end{aligned}$$

donde la dirección del flujo está determinado por $g_{n+1}(\theta)$.

Veamos algunos ejemplillos para ver como funciona toda esta artillería.

Ejemplo 1.4.13 Construir el espacio de fases incluyendo el flujo en el infinito para el siguiente sistema

$$\begin{aligned}x' &= -x + 2y, \\y' &= 2x + 2y.\end{aligned}\tag{1.50}$$

Solución. Vemos que como en el ejemplo anterior el sistema es lineal, por lo que de forma inmediata obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

con

$$V_3 = (1, 2)^T, \quad V_{-2} = (2, -1)^T,$$

viendo así que se trata de un punto de silla, V_{-2} define la subvariedad estable, mientras que V_3 la subvariedad inestable. Precisamente estos dos autovectores definen dos rectas que pasan por el origen,

$$r_1 : y = 2x, \quad r_2 : y = -x/2.$$

Los puntos críticos en el infinito satisfacen la ecuación $g_2(\theta) = 0$, donde $(x' = P, y' = Q)$

$$g_2(\theta) = \cos \theta Q_n(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_n(\cos \theta, \sin \theta),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}g_2(\theta) &= 2 \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta) - \sin \theta (-\cos \theta + 2 \sin \theta) \\ &= 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta \sin \theta - 2 \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

por lo que las raíces son:

$$\theta_1 = \tan^{-1}(2) \text{ rad}, \quad \theta_2 = \tan^{-1}(2) + \pi \text{ rad}, \quad \theta_3 = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ rad}, \quad \theta_4 = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi \text{ rad},$$

podemos comprobar que estos puntos corresponde a las intersecciones de las rectas r_1 y r_2 con la circunferencia unidad.

El flujo está definido por

$$\begin{aligned}\pm y' &= yz \left(-\frac{1}{z} + \frac{2y}{z} \right) - 2z \left(\frac{1}{z} + \frac{y}{z} \right), \\ \pm z' &= z^2 \left(-\frac{1}{z} + \frac{2y}{z} \right),\end{aligned}$$

simplificamos y encontramos que el flujo está descrito por el sistema

$$\begin{aligned}y' &= -2y^2 + 3y + 2, \\ z' &= z(2 - y),\end{aligned}$$

que tiene dos singularidades

$$A = (2, 0), \quad B = \left(-\frac{1}{2}, 0 \right).$$

Linealizamos para ver el caracter de las mismas:

$$L = \begin{pmatrix} -4y + 3 & 0 \\ -z & -y \end{pmatrix} \quad L(A) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad L(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

de esta forma llegamos a la conclusión de que el punto A es un nodo estable mientras que el punto B es un punto de silla. ■

Capítulo 2

Estabilidad y sistemas conservativos

Índice del capítulo

2.1. Estabilidad y funciones de Lyapunov.	35
2.1.1. Otros criterios de estabilidad.	39
2.2. Sistemas gradientes.	41
2.3. Sistemas Hamiltonianos.	43

2.1. Estabilidad y funciones de Lyapunov.

Para hacer posible la descripción matemática de un fenómeno real, inevitablemente hay que simplificarlo, idealizarlo, haciendo resaltar y tomando en cuenta sólo los factores más sustanciales que actúan sobre éste y despreciando los menos considerables. Entonces surgen los problemas sobre si fueron adecuadas las variables tomadas o no. Es posible que los factores no considerados influyan fuertemente sobre el fenómeno estudiado y cambien sus características cuantitativas y cualitativas. En muchos problemas se puede señalar las condiciones bajo las cuales ciertas simplificaciones no son posibles.

Si cierto fenómeno se describe por medio del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \phi_i(t, y_1, \dots, y_n), \\ y_i(t_0) &= y_{i0}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

las cuales por lo general son tomadas del experimento (de ciertas mediciones) y por lo tanto con un cierto error, entonces surge el problema sobre la influencia de pequeñas variaciones de las condiciones iniciales (c.i.) sobre la solución buscada.

Si variaciones arbitrariamente pequeñas de las c.i. pueden cambiar mucho la solución, entonces, la solución determinada por las c.i. inexactas que hemos elegido no pueden describir ni siquiera de forma aproximada el problema planteado (estabilidad estructural)¹. Por consiguiente surge el problema de gran importancia práctica, el de hallar las condiciones bajo las cuales una variación arbitrariamente pequeña de los valores iniciales ocasiona una variación arbitrariamente pequeña de la solución. Si el parámetro t varía en el intervalo finito $t_0 \leq t \leq T$, entonces la solución a este problema la da el teorema sobre dependencia continua de la solución con respecto a las condiciones iniciales.

Observación 2.1.1 Recordaremos el enunciado de dicho teorema:

Si el segundo miembro de la ecuación diferencial $\frac{dy_i}{dx} = f(x, y, \mu)$ es continua en μ para $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$ y satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad y la constante de Lipschitz N no depende de μ , entonces la solución $y(x, \mu)$ de la ecuación considerada que satisface la condición $y(t_0) = y_0$ depende de forma continua de μ .

Si en cambio el parámetro t puede tomar valores arbitrariamente grandes, de este caso se ocupa la teoría de la estabilidad.

¹Este concepto será ampliamente estudiado en el próximo capítulo.

Definición 2.1.1 La solución $\varphi_i(t)$ del sistema (2.1) se llama estable (en el sentido Lyapunov) si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, tal que $\forall y_i(t)$ solución del sistema cuyos valores iniciales satisfacen

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \implies \forall t \geq t_0 \quad |y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon,$$

i.e. para condiciones iniciales próximas, entonces soluciones próximas.

Observación 2.1.2 Si el sistema satisface las condiciones del teorema de dependencia continua, entonces en la definición de estabilidad, en lugar de $t \geq t_0$ se puede escribir $t \geq T \geq t_0$, debido a que en virtud de este teorema, las soluciones permanecen cercanas en el segmento $t_0 \leq t \leq T$ para c.i. suficientemente próximas.

Si para un $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño por lo menos para una solución $y_i(t)$ la desigualdad $|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon$ no se verifica entonces la solución se llama **inestable**.

Si la solución $\varphi_i(t)$ no sólo es estable sino que además verifica la siguiente condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad \text{si } |y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta_1 > 0,$$

entonces decimos que $\varphi_i(t)$ es **asintóticamente estable**.

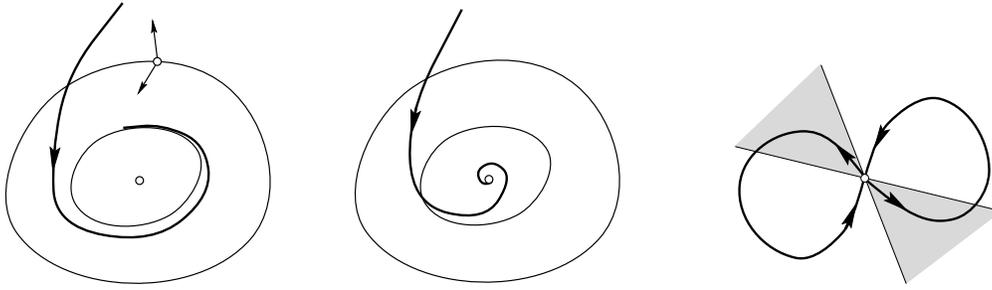


Figura 2.1: (a) Solución estable. (b) Solución asintóticamente estable. (c) Solución inestable.

Veremos a continuación una serie de resultados que nos garantizarán la existencia de soluciones estables.

Teorema 2.1.1 (Lyapunov). Si existe una función derivable $V(x_1, \dots, x_n)$, llamada función de Lyapunov que satisface en un entorno de la solución singular x^* las siguientes condiciones:

1. $V(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ en un entorno del punto x^* , i.e. dicha función tiene un mínimo estricto en dicho punto.
2. Si

$$\frac{dV}{dt} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad \forall t \geq t_0,$$

entonces, x^* , la solución es estable.

3. Si además

$$\frac{dV}{dt} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) < 0 \quad \forall t \geq t_0,$$

entonces, x^* , la solución es asintóticamente estable.

En realidad Lyapunov demostró este teorema bajo unas condiciones más generales, en particular consideró que la función V podía depender del parámetro t , tiempo.

Teorema 2.1.2 Sea x^* un punto de equilibrio tal que la matriz A de la parte lineal del sistema i.e. $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$ tiene todos sus autovalores con la parte real negativa, entonces x^* es asintóticamente estable.

Ejemplo 2.1.1 Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = -y^3 \\ y' = x^3 \end{cases}, \quad (2.2)$$

determinar la estabilidad del origen.

Solución. Vemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3y^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(\lambda) = \{0, 0\},$$

por lo tanto deberíamos probar algunas de las tácticas desarrolladas anteriormente (teorema de la variedad centro o formas normales), pero en este caso aplicaremos las funciones de Lyapunov para estudiar el caracter de la singularidad S_1 .

El truco del almendruco está en probar con una función definida positiva del tipo

$$V(x, y) = x^4 + y^4,$$

y comprobamos que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 4x^3(-y^3) + 4y^3(x^3) = 0,$$

por lo tanto la singularidad es estable pero no asintóticamente estable. ■

Teorema 2.1.3 (Chetaev) Sea x^* una solución singular del sistema (2.1). Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{E}nt(x^*)$ y $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \setminus \{x^*\}$. supongamos que existe un abierto \mathcal{W} tal que $x^* \in \bar{\mathcal{W}}$ y una función continua $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $V \in \mathcal{C}(\mathcal{U}_0)$ y que además satisface:

1. $V(x) > 0, \forall x \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{W}$;
2. $\dot{V}(x) > 0, \forall x \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{W}$;
3. $V(x) = 0, \forall x \in \mathcal{U}_0 \cap \partial\mathcal{W}$;

Entonces x^* una solución inestable.

Teorema 2.1.4 Sea x^* un punto de equilibrio tal que la matriz A de la parte lineal del sistema i.e. $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$ tiene al menos un autovalor con la parte real positiva, entonces x^* es inestable.

Ejemplo 2.1.2 Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = y - 3z - x(y - 2z)^2 \\ y' = -2x + 3z - y(x + z)^2 \\ z' = 2x - y - z \end{cases}, \quad (2.3)$$

calcular la función de Lyapunov etc...

Solución. Probamos con una función del tipo:

$$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

con:

$$DV = 2ax(y - 3z - x(y - 2z)^2) + 2by(-2x + 3z - y(x + z)^2) + 2cz(2x - y - z) = 0,$$

por lo tanto:

$$2ax(y - 3z) + 2by(-2x + 3z) + 2cz(2x - y) \leq 0,$$

reagrupando términos:

$$(2a - 4b)xy + (4c - ba)z + (bb - 2c)zy \leq 0,$$

$$(2a - 4b) = 0 \implies a = 2,$$

$$(4c - ba) = 0 \implies b = 1,$$

$$(bb - 2c) = 0 \implies c = \frac{1}{2},$$

encontrando de esta forma que

$$V(x, y, z) = 2x^2 + 1y^2 + \frac{1}{2}z^2.$$

vemos que V es una función definida positiva y que DV es semidefinida negativa. ■

En general el método de las funciones de Lyapunov tiene el pequeño inconveniente de tener que construirse una función particular para cada ecuación bajo estudio (cosa que a lo mejor no resulta demasiado fácil).

Ejemplo 2.1.3 Estudiar mediante el método de Lyapunov la estabilidad del origen para el sistema:

$$\begin{cases} x' = 2y(z - 1) \\ y' = -x(z - 1) \\ z' = -z^3 \end{cases} \quad (2.4)$$

Solución. Vemos que la singularidad del sistema es $S_1 = (0, 0, 0)$ y que si linealizamos entonces encontramos la siguiente matriz cuyos autovalores para la singularidad son:

$$DX = \begin{pmatrix} 0 & 2z - 2 & 2y \\ -(z - 1) & 0 & -x \\ 0 & 0 & -3z^2 \end{pmatrix}, \quad DX(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = (0, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}),$$

por lo que el famoso teorema sobre linealización no dice gran cosa.

Buscamos una función por lo tanto del tipo:

$$L(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

donde las constantes $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Sabemos que esta función debe verificar:

$$L' = \partial_{x_i} L \cdot x_i \leq 0,$$

$$L' = 2(axx' + byy' + czz') \leq 0,$$

i.e.

$$\frac{1}{2}L' = ax(2y(z - 1)) + by(-x(z - 1)) + cz(-z^3) \leq 0,$$

y esto lo conseguiremos haciendo que: $c = 1, 2a = b$. Por lo tanto la función de Lyapunov que buscamos es de la forma:

$$L = x^2 + 2y^2 + z^2,$$

por lo que podemos concluir que el origen es una singularidad asintóticamente estable ya que L es claramente estricta. ■

Ejemplo 2.1.4 Investigar la estabilidad del origen para el sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y(1 - x^2) \end{cases} \quad (2.5)$$

usando la función de Lyapunov: $V(x, y) = x^2 + y^2$.

Solución. Vemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2xy & -(1 - x^2) \end{pmatrix} \implies A(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

los autovalores del sistema son:

$$\sigma(\lambda) = \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right\},$$

de esta forma vemos que la parte real de los autovalores es negativa y que por lo tanto el sistema debe ser asintóticamente estable, pero nos gustaría probarlo con la función de Lyapunov dada, para ello operamos de la siguiente forma:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2x(y) + 2y(-x - y(1 - x^2)) = 2y^2(x^2 - 1),$$

encontrando que $\frac{dV}{dt} \leq 0 \iff |x| \leq 1$, por lo tanto si una trayectoria empieza dentro del círculo de radio 1 centrado en el origen entonces se aproximará al origen asintóticamente, concluyendo que el origen es asintóticamente estable. ■

Ejemplo 2.1.5 Investigar la estabilidad del origen para el sistema

$$\begin{cases} x' = -8x - xy^2 - 3y^2 \\ y' = 2x(x + y^2) \end{cases} \quad (2.6)$$

mediante el método de Lyapunov.

Solución. Vemos que

$$A = \begin{pmatrix} -8 - y^2 & -x - 6y \\ 2(2x + y^2) & 2x(x + 2y) \end{pmatrix} \implies A(S_1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

viendo que

$$A(S_1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pero por Hartman no podemos saber nada.

Consideramos la función de Lyapunov: $V(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ y comprobamos que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -4x(8x + xy^2 - 3xy + 3y^2 - 3y^3),$$

encontrando que $\frac{dV}{dt} \leq 0 \iff |x| \leq 1$, por lo tanto si una trayectoria empieza dentro del elipsoide centrado en el origen $2x^2 + 3y^2 < 12$, entonces se aproximará al origen asintóticamente, concluyendo que el origen es asintóticamente estable. ■

Estudiaremos a continuación otros criterios de estabilidad.

2.1.1. Otros criterios de estabilidad.

Si la ecuación característica tiene un grado muy elevado, entonces su resolución es muy complicada, por ello son de gran importancia los métodos que permiten conocer si las raíces tendrán o no parte real negativa sin llegar a resolver la ecuación.

Teorema 2.1.5 (Rauß-Hurwitz). La condición necesaria y suficiente para que las partes reales de todas las raíces del polinomio

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

con coeficientes reales sean negativas es que todos los menores diagonales principales de la matriz de Hurwitz sean positivas. La matriz de Hurwitz es

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ a_5 & \dots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

y por lo tanto los menores son:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{etc..}$$

Ejemplo 2.1.6 Examinar la estabilidad de la solución trivial de la ecuación diferencial:

$$y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0. \quad (2.7)$$

Solución. Vemos que, aplicando al pie de la letra el teorema anterior tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

siendo por lo tanto los menores:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = 3 > 0, \quad \Delta_3 = 5 > 0, \quad \Delta_4 = 8 > 0 \quad \Delta_5 = 24 > 0,$$

por lo tanto la solución trivial es asintóticamente estable. ■

Ejemplo 2.1.7 Examinar la estabilidad del sistema en función de los distintos valores de la constante α .

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = -3x \\ z' = \alpha x + 2y - z \end{cases}. \quad (2.8)$$

Solución. La matriz del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & -1 \end{pmatrix} \implies P(X) = X^3 + X^2 - \alpha X + 6,$$

aplicando el teorema vemos que:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

siendo por lo tanto los menores:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = -\alpha - 6 > 0, \quad \Delta_3 = -6\alpha - 36 > 0,$$

por lo tanto la solución trivial es asintóticamente estable sii $\alpha < -6$.

Observar que, a pesar de que el sistema es lineal, es bastante pesado calcular los autovalores del sistema. ■

Teorema 2.1.6 (Lienard-Chipard) Para que el polinomio

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n, \quad (2.9)$$

tenga todas las raíces con las partes reales negativas es necesario y suficiente que:

1. todos los coeficientes del polinomio $p(\lambda)$ sean positivos i.e. $a_i > 0; \forall i$.
2. se verifiquen las desigualdades determinantes:

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \text{etc..}$$

Ejemplo 2.1.8 Examinar la estabilidad de la solución trivial de la ecuación diferencial:

$$y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0. \quad (2.10)$$

Solución. Vemos que, aplicando al pie de la letra el teorema anterior tenemos que todos los $a_i > 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

siendo por lo tanto los menores:

$$\Delta_4 = 8 > 0 \quad \Delta_2 = 3 > 0,$$

por lo tanto, al verificarse las dos condiciones del teorema, la solución trivial es asintóticamente estable. ■

Existen más criterios, como el de Mijailov, quizás más geométrico pero pasaremos a estudiar una clase de sistemas muy importantes, los Hamiltonianos y los sistemas gradientes.

2.2. Sistemas gradientes.

Un sistema gradiente en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es un sistema dinámico de la forma:

$$x' = -\text{grad}V(x), \quad (2.11)$$

donde la función

$$V : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad V \in \mathcal{C}^2, \quad (2.12)$$

y donde

$$\text{grad}V(x) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{grad}V(x) = (\partial_{x_i} V)_{i=1}^n.$$

Recordaremos algunas de las cuestiones básicas relacionadas con la aplicación $\text{grad}V(x)$. Empezamos recordando el significado geométrico asociado a dicho operador i.e.

$$DV(x)y = \langle \text{grad}V(x), y \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior de \mathbb{R}^n . En coordenadas tenemos:

$$DV(x)y = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} V(x) \cdot y_i.$$

Sea $V' : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, la derivada de V a lo largo de las trayectorias (curvas integrales) del campo (2.11) i.e.

$$V'(x) = \frac{d}{dt} V(x(t))|_{t=0},$$

entonces tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1 $V'(x) \leq 0 \forall x \in U$ y $V'(x) = 0$ sii x es una singularidad de (2.11).

Geoméricamente tenemos la siguiente situación. Consideramos las superficies de nivel de la función $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$, que son los conjuntos $V^{-1}(c); c \in \mathbb{R}$. Si $u \in V^{-1}(c)$ es un punto regular i.e. $\text{grad}V(u) \neq 0$, entonces $V^{-1}(c)$ es una hipersuperficie. El plano tangente a esta gráfica es exactamente el núcleo de $DV(u)$. Pero este ker es el subespacio $(n-1)$ dimensional formado por los vectores perpendiculares a $\text{grad}V(u)$ (trasladados paralelamente a u), así pues tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.2 En los puntos regulares, el campo vectorial $-\text{grad}V(x)$ es perpendicular a las superficies de nivel de V .

Por lo tanto, recapitulando; Sea $x' = -\text{grad}V$ un sistema gradiente. En los puntos regulares las trayectorias cruzan las superficies de nivel ortogonalmente. Los puntos no regulares, son puntos de equilibrio del sistema y los mínimos aislados de V son asintóticamente estables.

Veamos el siguiente ejemplo para aclarar todo esto un poco más.

Ejemplo 2.2.1 Estudiar el sistema gradiente tal que

$$V(x, y) = x^2(x - 1)^2 + y^2 \quad (2.13)$$

Solución. Como la función potencial viene dada por (2.13) entonces el sistema asociado será:

$$\begin{cases} x' = -\partial_x V \\ y' = -\partial_y V \end{cases} \implies \begin{cases} x' = -2x(x - 1)(2x - 1) \\ y' = -2y \end{cases}, \quad (2.14)$$

por lo que empezamos estudiando sus singularidades, i.e.

$$S_1 = (0, 0), \quad S_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad S_3 = (1, 0).$$

A continuación estudiamos su parte lineal, i.e.

$$DX = \begin{pmatrix} \partial_{xx}V & \partial_{xy}V \\ \partial_{yx}V & \partial_{yy}V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(6x^2 - 6x + 1) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

vemos que al ser $V \in \mathcal{C}^2$, entonces $\partial_{xy}V = \partial_{yx}V$ (teorema de Euler).

Vemos que

$$DX(S_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad DX(S_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad DX(S_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

por lo que las singularidades S_1 y S_3 son asintóticamente estables mientras que S_2 es un punto de silla, como queda reflejado en el siguiente gráfico:

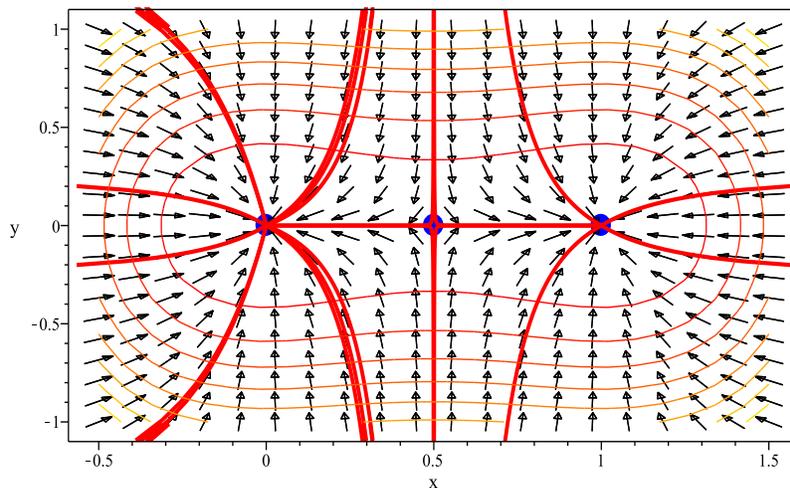


Figura 2.2: Espacio de fases del sistema (2.14) y curvas de nivel del potencial $V(x)$.

■

De este ejemplo podemos deducir además que:

Teorema 2.2.3 En un punto de equilibrio de un sistema gradiente los autovalores son reales.

Esto es inmediato de ver ya que como hemos indicado en el ejemplo al ser $V \in \mathcal{C}^2$, entonces $\partial_{xy}V = \partial_{yx}V$ entonces la matriz de DX es simétrica (resultados elementales del álgebra lineal). Por esta razón un sistema gradiente "no" puede tener puntos de equilibrio que sean espirales o centros. De hecho, tampoco puede tener nodos impropios ya que toda matriz simétrica es diagonalizable.

Ejemplo 2.2.2 Consideramos una masa constante m que se mueve bajo la influencia de un campo de fuerzas conservativo $F = -\text{grad}V(x)$, donde la función potencial está definida por: $V(x) : U \rightarrow \mathbb{R}$, con $U \subset \mathbb{R}^3$. Vamos a estudiar el sistema dinámico asociado.

Solución. El correspondiente sistema dinámico es:

$$mx'' = -\text{grad}V(x) \quad \implies \quad \begin{cases} x' = v \\ y' = -\frac{1}{m}\text{grad}V \end{cases}$$

para no enfarragar las cuentecillas supondremos que $m = 1$ y por lo tanto la eliminaremos de nuestra ecuación.

Sea $(x^*, v^*) \in U \times \mathbb{R}^3$ el punto de equilibrio del sistema, entonces $v^* = 0$ y $\text{grad}V(x) = 0$. Para investigar la estabilidad de $(x^*, 0)$ tratamos de usar la energía total i.e.

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \phi(x),$$

para construir una función de Lyapunov. Puesto que la función de Lyapunov ha de anularse en $(x^*, 0)$, sustraemos de $E(x, v)$ la energía del estado $(x^*, 0)$ que es $V(x)$ y definimos la función $F : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$F(x, v) = E(x, v) - E(x^*, 0) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) - V(x^*).$$

Por la conservación de la energía $F' = 0$. Como $\frac{1}{2}mv^2 \geq 0$, entonces supongamos que $V(x) > V(x^*)$ con un $x \in \text{Ent}(x^*)$, para conseguir que F sea función de Lyapunov. En consecuencia, hemos demostrado el conocido teorema de Lagrange:

Un punto de equilibrio $(x^, 0)$ de un campo de fuerzas conservativo es estable si la energía potencial tiene un mínimo local estricto en x^* .*

Con este ejemplo en mente ya podemos introducir los sistemas Hamiltonianos. ■

2.3. Sistemas Hamiltonianos.

Definición 2.3.1 Un sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^2 se dice Hamiltoniano (con un grado de libertad) si puede expresarse de la forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

o en notación clásica

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

donde q_i son las coordenadas de posición y p_i son las coordenadas momento. La función $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, se denomina Hamiltoniano..

El sistema se dice conservativo si no se disipa (si no hay disipación). El Hamiltoniano H se define como la suma

$$H = T + V,$$

de las energías cinética y potencial.

Ejemplo 2.3.1 para una partícula de masa m donde $q = x$ y por lo tanto $p = m\dot{x}$, el Hamiltoniano se define como

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

de tal forma que:

$$\dot{x} = \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad m\ddot{x} = \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -V(q) = F(x),$$

tal que $F(x) = -q(x)$ es la fuerza. (sistema conservativo).

Teorema 2.3.1 (Conservación de la energía y volumen). El flujo definido por un sistema Hamiltoniano preserva el volumen. Más aun, las curvas solución (i.e. las trayectorias u órbitas) yacen sobre las superficies de nivel $H(q, p) = C$.

Demostración. Sabemos que un campo preserva el volumen sii su divergencia es nula, por lo tanto

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0.$$

la segunda afirmación se sigue de:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [H(x(t))] &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0, \end{aligned}$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Definición 2.3.2 Un punto crítico del sistema $\dot{x} = f(x)$ para el que la matriz jacobiana no tiene autovalores nulos se denomina no degenerado, en caso contrario se denomina punto crítico degenerado.

Teorema 2.3.2 Todo punto crítico no degenerado de un sistema Hamiltoniano es o un punto de silla o un centro.

Este teorema refleja un hecho más general, que los sistemas Hamiltonianos preservan el volumen del flujo (teorema de Liouville, anteriormente demostrado).

Estudiaremos con un pelín más de cuidado los sistemas bidimensionales.

Cerca del punto crítico (ξ, η) desarrollamos en series de Taylor tal que

$$2V(x, y) = a_{11}(x - \xi)^2 + 2a_{12}(x - \xi)(y - \eta) + a_{22}(y - \eta)^2 + \dots,$$

donde

$$a_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

entonces:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - \xi \\ y - \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \xi \\ y - \eta \end{pmatrix} + \dots,$$

los autovalores de la matriz a_{ij} son las raíces de la ecuación:

$$\lambda^2 = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.3.3 Un punto crítico no degenerado de un sistema Hamiltoniano plano es un extremo (máximo o mínimo) de H cuando $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$ y un punto de silla cuando H tiene un punto de silla i.e. $a_{11}a_{22} < a_{12}^2$.

Si $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$, el comportamiento de las trayectorias es indeterminado, deberemos observar que al ser la superficie $z = H(x, y)$ horizontal en el punto crítico, $\det(a_{ij})$ es precisamente la curvatura Gaussiana.

Un caso particular de sistemas conservativos no lineales lo forman las ecuaciones de la forma

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) \end{cases},$$

donde

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int f(x) dx := \frac{y^2}{2} + V(x),$$

donde $V(x)$ representa la energía potencial.

Cualquier punto fijo del sistema debe yacer en el eje OX y corresponde a un punto crítico de $V(x)$, por lo tanto la función $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, determina la forma local del campo y por lo tanto del flujo cerca del punto crítico. Además de $H(x, y) = C$ podemos obtener información sobre la estructura global de las curvas solución ya que

$$y = \pm \sqrt{2(C - V(x))},$$

función simétrica con respecto al eje OX .

Una consecuencia de esto es que si hay dos puntos de silla con igual energía, correspondientes a dos máximos de $V(x)$, entonces estos dos puntos de silla deben estar conectados por órbitas **heteroclínicas**.

Veamos a continuación algunos ejemplos que nos ayudarán a entender todo esto.

Ejemplo 2.3.2 Estudiar el sistema:

$$\ddot{x} - x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + x^2 \end{cases} \quad (2.15)$$

Solución. Vemos que las singularidades son:

$$S_1 = (0, 0) \quad \text{y} \quad S_2 = (-1, 0),$$

seguimos el procedimiento estándar i.e.

$$DX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + 2x & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$DX(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(\lambda) = \{1, -1\}, \quad V_1 = (-1, 1)^T, \quad V_{-1} = (1, 1)^T$$

$$DX(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(\lambda) = \{i, -i\}, \quad V_1 = (i, 1)^T, \quad V_{-1} = (-i, 1)^T$$

vemos que S_1 por Hartman es un punto de silla mientras que para S_2 no podemos decir nada (mediante Hartman) pero al ser el sistema Hamiltoniano, sabemos por uno de los teoremas anteriormente expuestos que se trata de un centro.

Calculamos el Hamiltoniano, siendo éste:

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \int (x + x^2) dx = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3},$$

pasamos a calcular los máximos y mínimos de esta función

$$\nabla H = (-x - x^2, y) = 0 \iff (x = 0, y = 0) \quad \text{y} \quad (x = -1, y = 0),$$

su Hessiano es:

$$Hess := \begin{pmatrix} -1 - 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (x = 0, y = 0) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (x = -1, y = 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

por lo tanto $(x = 0, y = 0) := S_1$ es un punto de silla (como ya sabíamos) mientras que $S_2 = (x = -1, y = 0)$ es un mínimo para H y por lo tanto es un punto estable.

La moraleja está, en que hemos utilizado el Hamiltoniano H como función de Lyapunov.

Podemos calcular la separatriz

$$y = \pm \sqrt{2(C - V(x))},$$

para ello calculamos el valor del Hamiltoniano en dicho punto i.e.

$$H(-1, 0) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}$$

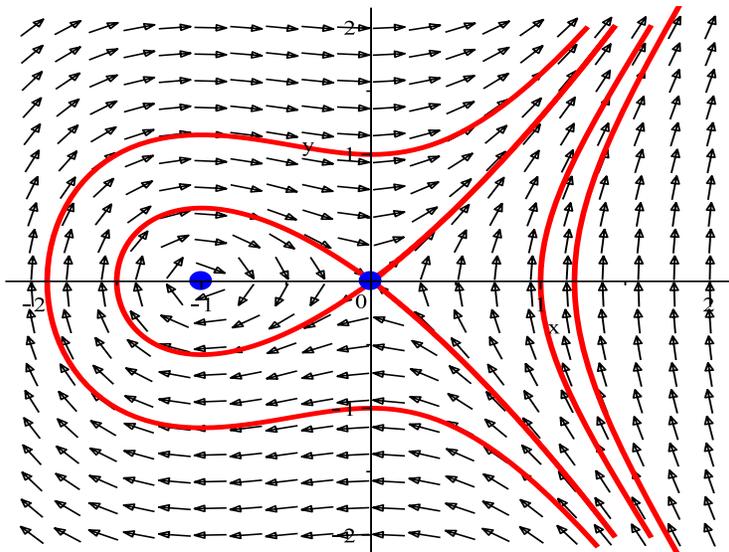


Figura 2.3: Espacios de fases del sistema $\ddot{x} - x - x^2 = 0$ (eq. 2.15)

entonces:

$$y = \pm \sqrt{2 \left(\frac{1}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)}.$$

Vemos que en este caso existe una **órbita homoclínica**, la órbita (lazo) que pasa por la singularidad $(0,0)$ ya que conecta este punto consigo mismo. También es una **separatriz**. ■

Ejemplo 2.3.3 Estudiar el sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^2 + x^4 \end{cases} \quad (2.16)$$

Solución. Vemos que las singularidades del campo son $\{(0,0), (1,0), (-1,0)\}$, linealizamos el campo

$$DX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x + 4x^3 & 0 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto:

$$DX(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = \{0,0\},$$

$$DX(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = \{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\},$$

$$DX(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\},$$

vemos que el único punto que podemos clasificar por Hartman es la singularidad $S_3 = (1,0)$ que se trata de un punto de silla. Para clasificar las otras dos singularidades recurriremos al Hamiltoniano.

La función de Liapunov es en este caso el propio Hamiltoniano del sistema

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x s^2 - s^4 ds = \frac{1}{2}y^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5},$$

comprobamos que las singularidades del campo se corresponden con los puntos críticos del Hamiltoniano

$$\partial_x H = \partial_y H = 0 \Leftrightarrow \{(0,0), (1,0), (-1,0)\},$$

formamos ahora la matriz Hessiana de H

$$H = \begin{pmatrix} 2x - 4x^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{(0,0)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{(-1,0)} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{(1,0)}$$

vemos que el punto estable $(-1,0)$ se corresponde con un mínimo para el Hamiltoniano, por lo tanto a un punto estable, mientras que el punto $(1,0)$, como ya sabíamos, se trata de un punto de silla. Sin embargo seguimos sin poder decir nada sobre el punto $(0,0)$, que por el teorema 2,3,2, sabemos que se trata de un centro ¿?, pero nada sobre si es estable o no, ver figura adjunta (2.4).

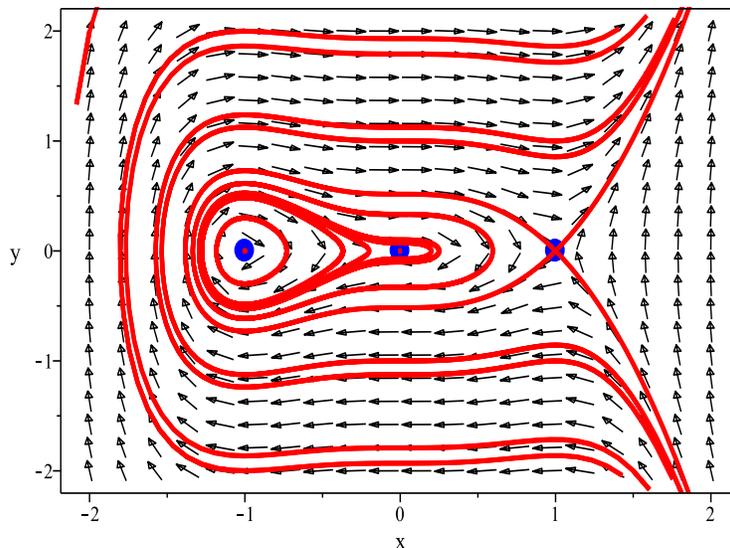


Figura 2.4: Espacios de fases de la ecuación (2.16)

La ecuación de la separatriz es:

$$H(1,0) = \frac{2}{15}, \implies y = \pm \sqrt{2 \left(\frac{2}{15} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)}.$$

Comprobamos ahora que curvatura (Gauss) tiene el Hamiltoniano en dicho punto. Para ello consideramos la siguiente parametrización del Hamiltoniano

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}v^2 + \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \end{cases} \implies \begin{cases} \partial_u = (1, 0, -u^4 + u^2) \\ \partial_v = (0, 1, v) \end{cases},$$

por lo que

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + (-u^4 + u^2)^2 & v(-u^4 + u^2)^2 \\ v(-u^4 + u^2)^2 & 1 + v^2 \end{pmatrix} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

siendo

$$\vec{n} = \frac{\partial_u \wedge \partial_v}{\|\partial_u \wedge \partial_v\|} = \frac{(u^4 - u^2, -v, 1)}{\sqrt{((u^4 - u^2)^2 + v^2 + 1)}},$$

de esta forma

$$\begin{cases} \partial_{uu}^2 \cdot \vec{n} = (0, 0, -4u^3 + 2u) \\ \partial_{vu}^2 \cdot \vec{n} = (0, 0, 0) \\ \partial_{vv}^2 \cdot \vec{n} = (0, 0, 1) \end{cases} \implies \begin{cases} \partial_{uu}^2 \cdot \vec{n} = \frac{(-4u^3 + 2u)}{\sqrt{((u^4 - u^2)^2 + v^2 + 1)}} \\ \partial_{uv}^2 \cdot \vec{n} = 0 \\ \partial_{vv}^2 \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{((u^4 - u^2)^2 + v^2 + 1)}} \end{cases},$$

donde

$$\begin{pmatrix} \partial_{uu}^2 \cdot \vec{n} & \partial_{uv}^2 \cdot \vec{n} \\ \partial_{uv}^2 \cdot \vec{n} & \partial_{vv}^2 \cdot \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

llegando así a

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2},$$

si simplificamos y sustituimos en los tres puntos obtenemos los siguientes valores para K

$$K = \begin{cases} 2 & \text{en } (-1,0) \\ 0 & \text{en } (0,0) \\ -2 & \text{en } (1,0) \end{cases}.$$

Vemos que la curvatura de Gauss es positiva en el punto estable y negativa en el punto inestable. Vamos a calcular ahora el operador de forma o tensor Shape.

$$S = \frac{1}{\det g_{ij}} \begin{pmatrix} fF - eG & eF - fE \\ gF - fG & fF - gE \end{pmatrix},$$

utilizando los resultados anteriores, en este caso el tensor Shape queda reducido a:

$$S = \frac{1}{\det g_{ij}} \begin{pmatrix} -eG & 0 \\ 0 & -gE \end{pmatrix},$$

en donde $\det g_{ij} = 1$ en los puntos $(\pm 1, 0)$ y $(0, 0)$. De esta forma obtenemos que:

$$S = \begin{cases} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{en } (-1,0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{en } (0,0) \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{en } (1,0) \end{cases},$$

observamos que el punto $(-1, 0)$ las curvaturas principales tienen signo negativo y corresponden a un punto estable. ■

Ejemplo 2.3.4 Estudiar el sistema:

$$\begin{cases} x' = y + x^2 - y^2 \\ y' = -x - 2xy \end{cases}. \quad (2.17)$$

Solución. En primer lugar calculamos las singularidades del sistema, siendo éstas:

$$S_1 = (0, 0), \quad S_2 = (0, 1), \quad S_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad S_4 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Linealizamos,

$$DX = \begin{pmatrix} 2x & 1 - 2y \\ -1 - 2y & -2x \end{pmatrix},$$

y pasamos a sustituir cada punto,

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = \{\pm i\} / V_i = \{(1, i)\}, V_{-i} = \{(1, -i)\},$$

$$DX(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = \{\pm\sqrt{3}\} / V_{\sqrt{3}} = \{(1, -\sqrt{3})\}, V_{-\sqrt{3}} = \{(1, \sqrt{3})\},$$

$$DX\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = \{\pm\sqrt{3}\} / V_{\sqrt{3}} = \{(1, 0)\}, V_{-\sqrt{3}} = \{(0, 1)\},$$

$$DX\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = \{\pm\sqrt{3}\} / V_{\sqrt{3}} = \{(1, 0)\}, V_{-\sqrt{3}} = \{(0, 1)\},$$

por lo tanto sólo necesitamos estudiar el punto $(0,0)$ que como sabemos por uno de los teoremas expuestos se trata de un centro. El resto de las singularidades son puntos de silla.

El hamiltoniano lo calcularemos de la siguiente manera, como:

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

entonces integrando

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} = y + x^2 - y^2, &\implies H = \frac{y^2}{2} + x^2y - \frac{y^3}{3}, \\ -\frac{\partial H}{\partial x} = -x - 2xy, &\implies H = \frac{x^2}{2} + x^2y, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$H(x,y) = \frac{x^2}{2} + x^2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3},$$

lo único que nos queda es estudiar si el punto $(0,0)$ es un extremo para el Hamiltoniano y de que tipo.

Vemos que

$$\nabla H = (x + 2xy, y + x^2 - y^2),$$

mientras que

$$\text{Hess}(H) = \begin{pmatrix} 1+2y & 2x \\ 2x & 1-2y \end{pmatrix}_{(0,0)} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de esta forma podemos decir que se trata de un mínimo y que por lo tanto es una singularidad estable como podemos comprobar en la figura adjunta.

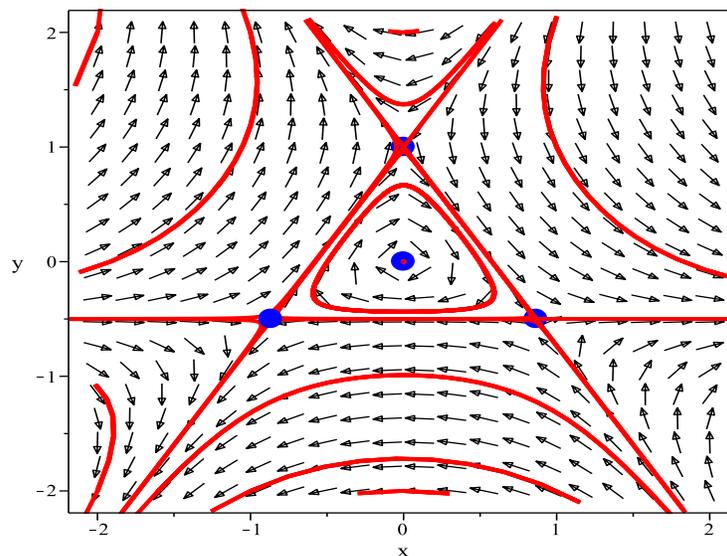


Figura 2.5: Espacio de fases de la ecuación (2.17)

En este caso vemos que existen **órbitas heteroclínicas**, las que conectan los puntos de silla i.e. distintos puntos críticos. ■

Veamos un último.

Ejemplo 2.3.5 Estudiar el siguiente sistema;

$$\begin{cases} x' = y(13 - x^2 - y^2) \\ y' = 12 - x(13 - x^2 - y^2) \end{cases}, \quad (2.18)$$

indicando que se trata de un sistema Hamiltoniano y clasificando sus singularidades.

Solución. En primer lugar debemos comprobar que el sistema (2.18) verifica la relación:

$$\operatorname{div}(X) = \partial_x X + \partial_y Y = 0,$$

i.e.

$$\begin{aligned} \partial_x X + \partial_y Y &= \partial_x (y(13 - x^2 - y^2)) + \partial_y (12 - x(13 - x^2 - y^2)) = 0 \\ &= (-2xy) + (2xy) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto se trata de un sistema Hamiltoniano. Pasaremos a calcular el Hamiltoniano del sistema:

$$\begin{aligned} \partial_x H &= - (12 - x(13 - x^2 - y^2)), \\ \partial_y H &= (y(13 - x^2 - y^2)), \end{aligned}$$

integrando obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int \partial_x H dx &= - \int (12 - x(13 - x^2 - y^2)) dx = -12x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{13}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y), \\ \int \partial_y H dy &= \int (y(13 - x^2 - y^2)) dy = -\frac{1}{4}y^4 + \frac{13}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 + f(x), \end{aligned}$$

por lo que el Hamiltoniano será:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= -12x - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{13}{2}x^2 + \frac{13}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 = \\ &= -12x - \frac{1}{4}(x^4 + y^4) + \frac{13}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}x^2y^2 + C. \end{aligned}$$

Ahora calcularemos las singularidades del sistema (2.18) siendo éstas:

$$\begin{cases} 0 = y(13 - x^2 - y^2) \\ 0 = 12 - x(13 - x^2 - y^2) \end{cases} \iff \begin{cases} S_1 = (1, 0) \\ S_2 = (3, 0) \\ S_3 = (-4, 0) \end{cases},$$

y que clasificamos siguiendo la misma estrategia que en ejemplos anteriores, i.e.:

$$DX = \begin{pmatrix} -2xy & 13 - x^2 - 3y^2 \\ 13 - 3x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix},$$

por lo que:

$$\begin{aligned} DX(S_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}, \implies \sigma(\lambda) = \{2i\sqrt{30}, -2i\sqrt{30}\}, \\ DX(S_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}, \implies \sigma(\lambda) = \{2\sqrt{14}, -2\sqrt{14}\}, \\ DX(S_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 35 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = \{i\sqrt{105}, -i\sqrt{105}\}, \end{aligned}$$

de esta forma podemos asegurar que S_1 y S_3 son centros y que S_2 es un punto de silla.

Por los teoremas expuestos anteriormente sólo debemos comprobar si los centros corresponden a un máximo o un mínimo para el Hamiltoniano i.e. calcular el Hessiano del Hamiltoniano:

$$\operatorname{Hess}(H) = \begin{pmatrix} 13 - 3x^2 - y^2 & -2xy \\ -2xy & 13 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix},$$

de esta forma vemos que

$$\text{Hess}(H)_{S_1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \text{ def. positiva}$$

$$\text{Hess}(H)_{S_3} = \begin{pmatrix} -35 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \text{ def. negativa}$$

por lo tanto el punto S_1 es estable mientras que el punto S_3 es inestable.

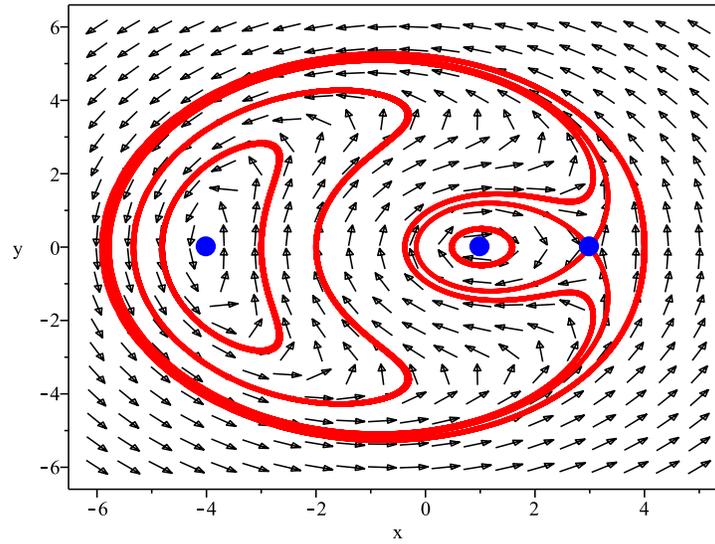


Figura 2.6: Espacio de fases del sistema (2.18).

Vemos en la figura adjunta (ver fig.2.6) el espacio de fases del sistema (2.18). ■

Capítulo 3

Ciclos límite

Índice del capítulo

3.1. Introducción	53
3.2. La aplicación de Poincaré	54
3.3. Soluciones periódicas. Teorema de Poincaré-Bendixson.	57
3.3.1. Revisión del teorema de Poincaré-Bendixson.	70
3.4. Índice de un punto singular.	71
3.5. Integrales de Melnikov	74
3.6. Estabilidad Estructural. El Teorema de Peixoto.	76

3.1. Introducción

En 1887 el rey Oscar III de Suecia ofreció 2500 coronas por resolver el siguiente problema. ¿Es estable el sistema solar? Un estado de reposo o de movimiento es estable si no cambia mucho bajo el efecto de pequeñas perturbaciones. Poincaré intentó resolver el problema pero no lo consiguió (de todas formas se le concedió el premio), pero hizo buena mella en él, introdujo la topología.

En aquella época ya se conocía la solución al problema de los dos cuerpos, por ejemplo, la Tierra describe una órbita periódica alrededor del Sol, pero es precisamente la periodicidad la que nos proporciona un control muy útil sobre la estabilidad.

Poincaré en su memoria “lucha” con la cuestión de existencia de órbitas periódicas para las ecuaciones diferenciales planteadas. Comienza por el procedimiento clásico y demuestra como obtener tales soluciones desarrollando la variable involucrada como una serie infinita en donde cada término es una función periódica de t de lo que resulta que existen series cuyos coeficientes son periodos y que satisfacen “formalmente” las ecuaciones.

El procedimiento parece tener sentido ¡pero! le aparece el problema de demostrar la convergencia de la serie infinita planteada, no lo hizo y abandonó el método e inició uno nuevo, su idea era la de demostrar la existencia de soluciones periódicas lo que demostraría la convergencia de la serie. La idea es la siguiente. Supongamos que en t_0 el sistema está en un estado particular y que en un estado $t \gg t_0$ vuelve al mismo estado tal que todas las posiciones y velocidades son exactamente las mismas que antes simultáneamente. Por lo tanto, la unicidad de las soluciones significa que debe repetirse una y otra vez, por lo tanto el movimiento es periódico.

Imaginamos que el estado del sistema se describe por las coordenadas de un punto en el espacio físico a medida que t avanza, ese punto describe una trayectoria (curva) para regresar de nuevo a si mismo, entonces la curva es cerrada. La existencia de soluciones periódicas depende de propiedades topológicas, de la relación entre la posición de un punto ahora y después de un tiempo t . La idea es la de colocar una superficie completa de estados iniciales y sigamos la evolución de cada uno hasta que regrese y choque contra la superficie (sección de Poincaré). ¿Podemos encontrar un estado que regrese exactamente a su punto de partida? si es así, entonces la solución es periódica aunque la mera existencia de una sección de Poincaré puede forzar algunas veces (por motivos topológicos) a que tenga lugar una solución periódica.

Poincaré y Bendixson sólo pudieron demostrar su teorema para sistemas con dos grados de libertad, no olvidar que el plano tiene toda clase de características especiales. Sin embargo Smale en su tesis doctoral demostró un teorema general que implica, entre otras muchas cosas, que se le puede dar la vuelta a una esfera cambiando el

interior con el exterior, está permitido pasarla a través de ella pero ha de permanecer lisa. Smale se preguntó ¿cual es el análogo al teorema de Poincaré-Bendixson en tres o más dimensiones?

Desde el punto de vista de Smale la propiedad más importante de un sistema dinámico es su comportamiento a largo plazo. Esto selecciona un conjunto mucho más sencillo de movimientos de entre todos los del sistema completo. ¿Qué hace un sistema dinámico a largo plazo? se puede estabilizar en un atractor. La esencia de un tractor es que es alguna porción del espacio de fases tal que cualquier punto que comienza a moverse en sus proximidades se aproxima cada vez más a él. El toerema de Poincaré-Bendixson no dice que para sistemas estructuralmente estables en el plano, los únicos atractores son: los puntos aislados y los ciclos límite estables.

Consideremos un sistema en el plano que tenga un ciclo límite estable i.e. una órbita cerrada tal que las soluciones cercanas se mueven hacia él. La receta es la siguiente: sigamos la dinámica hasta que nos choquemos de nuevo contra el segmento, determina una aplicación del segmento en si mismo que lo comprime hacia el punto en el cual el ciclo límite lo cruza. Tenemos ahora otro sistema, el cual puede o no tener un ciclo límite, no lo sabemos todavía. Supongamos que algún segmento de línea en el espacio de fases con la propiedad de que cada punto inicial en el segmento finalmente regresa y choca de nuevo contra el segmento. Puede que lo haya o puede que no, veamos que pasa cuando lo hay. Afirmamos que necesariamente hay al menos un ciclo límite que atraviesa el segmento, la razón es el teorema de Brower (sobre el punto fijo). La idea que subyace a la demostración es parecida a lo que sigue. El extremo izquierdo del segmento sea plica en algún punto del segmento, si este punto es también el extremo izquierdo entonces ya tenemos nuestro punto fijo. Si no es el extremo izquierdo se desplaza a la derecha. Simultáneamente el extremo derecho se desplaza a la izquierda de modo que todo el segmento se contre dentro de si. Si hay un segmento de línea tal que todo punto que comience sobre él y que finalmente regresa a él entonces hay al menos una solución periódica que pasa a través de dicho segmento. Es un teorema bastante notable ya que no dependede detalles dinámios, sólo requiere que el flujo sea continuo. Por lo tanto un flujo en \mathbb{R}^n que posea una sección de Poincaré a de tener una trayectoria periódica que pase a través de la sección (por el teorema de Brower).

3.2. La aplicación de Poincaré

Consideremos el siguiente sistema autónomo

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y), \quad (3.1)$$

y supongamos que existe una sección transversal a las trayectorias del sistema, denotada por Σ , es decir las trayectorias del sistema no son tangenciales a esta sección denominada de Poincaré. Consideremos un punto r_0 sobre esta sección, seguimos el flujo de las trayectorias del sistema (3.1) hasta que éste se vuelve a cruzar con la sección Σ , obteniendo de esta forma un nuevo punto r_1 . Este punto se conoce con el nombre del primer punto de retorno de la aplicación discreta de Poincaré $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$, tal que $P(r_n) = r_{n+1}$, los puntos $(r_i)_{i=1}^n$ se encuentran en la sección de Poincaré Σ .

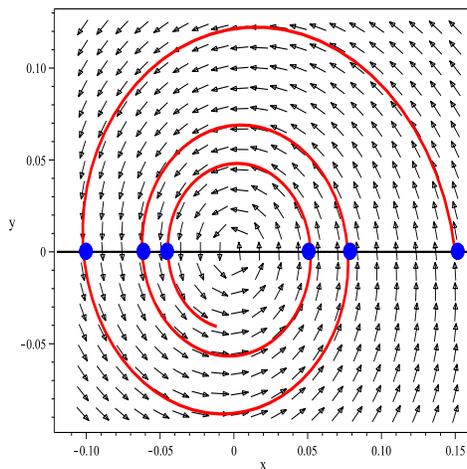


Figura 3.1: Ejemplo de la aplicación de Poincaré.

En la figura (3.1) vemos que la curva integral empieza en la parte derecha justo en r_0 , siguiendo el flujo del

campo, la curva vuelve a cortar a la sección de Poincaré (representada como la recta de color negro) obteniendo así r_1 y así sucesivamente. El problema de encontrar la función P es equivalente a resolver la ODE (3.1), lo cual no siempre resulta fácil.

Definición 3.2.1 Un punto r^* que satisfaga la ecuación $P(r^*) = r^*$ se denomina punto fijo de periodo uno.

Ilustraremos el método mediante dos ejemplillos.

Ejemplo 3.2.1 Encontrar la aplicación de Poincaré para el sistema

$$x' = -y - x(x^2 + y^2)^{1/2}, \quad y' = x - y(x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Solución. Tal y como veremos a lo largo de este capítulo, resultará muy útil transformar el sistema de coordenadas cartesianas a polares, de esta forma, el sistema (3.2) se escribe como

$$r' = -r^2, \quad \theta' = 1,$$

de esta forma podemos ver que el origen es una singularidad estable y que el flujo del sistema gira en sentido antihorario ($\theta' = 1$). En la siguiente figura (ver Fig. (3.2)) detallamos el espacio de fases del sistema (en coordenadas cartesianas)

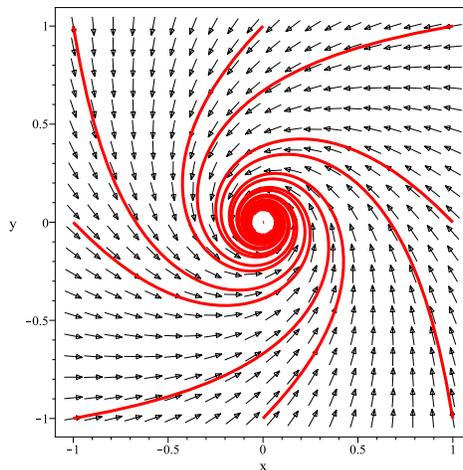


Figura 3.2: Espacio de fases del sistema (3.2).

Para encontrar la aplicación de Poincaré resolvemos el sistema escrito en coordenadas polares, con las siguientes condiciones iniciales: $r(0) = 1$, y $\theta(0) = 0$, de esta forma obtenemos

$$r(t) = \frac{1}{1+t}, \quad \theta(t) = t, \quad \implies \quad r(t) = \frac{1}{1+\theta(t)},$$

las trayectorias fluyen de forma antihoraria alrededor del origen con un periodo de 2π , por lo que los retornos se producirán cuando $\theta = 2\pi, 4\pi, \dots$. Una aplicación que define este sistema viene dado por

$$r_n = \frac{1}{1+2\pi n}$$

que define una sucesión de puntos sobre la sección de Poincaré Σ , donde $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = 0\}$. Vemos que

$$r_{n+1} = \frac{1}{1+2(n+1)\pi}$$

por lo que concluimos que la aplicación de Poincaré está definida por la aplicación

$$r_{n+1} = P(r_n) = \frac{r_n}{1 + 2\pi r_n},$$

observando que el punto fijo es el origen. ■

Ejemplo 3.2.2 *Estudiar si el sistema*

$$x' = -y + x \left(1 - (x^2 + y^2)^{1/2}\right), \quad y' = x + y \left(1 - (x^2 + y^2)^{1/2}\right), \quad (3.3)$$

posee una órbita periódica (o ciclo límite).

Solución. Transformamos el sistema a polares, reescribiéndolo como

$$r' = r(1 - r), \quad \theta' = 1,$$

por lo que el origen es un foco inestable y aparece una órbita cerrada o periódica de radio 1 y centrada en el origen, que denotaremos por Γ . En la siguiente figura (ver Fig. (3.3)) detallamos el espacio de fases del sistema (en coordenadas cartesianas)

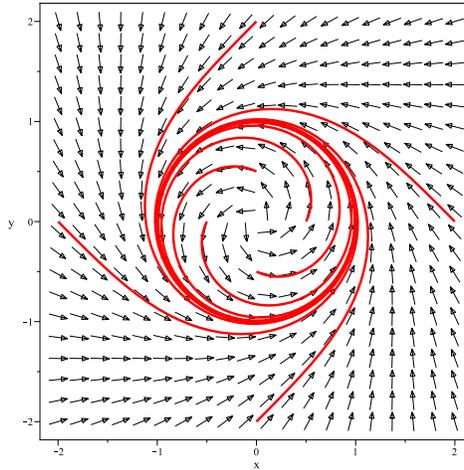


Figura 3.3: Espacio de fases del sistema (3.3).

Al igual que en el ejemplo anterior, podemos integrar fácilmente el sistema en coordenadas polares obteniendo la siguiente solución

$$r(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}, \quad \theta(t) = t + \theta_0, \quad C, \theta_0 \in \mathbb{R},$$

las trayectorias fluyen de forma antihoraria alrededor del origen con un periodo de 2π . Supongamos que una trayectoria empieza fuera de Γ , por ejemplo, fijamos $r_0 = 2$, esto nos permite fijar las constantes de integración $C, \theta_0 \in \mathbb{R}$, por lo que las soluciones son

$$r(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-t}}, \quad \theta(t) = t, \quad \implies \quad r_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-2n\pi}},$$

pero si una órbita empieza en el interior de Γ , por ejemplo $r_0 = 1/2$, entonces

$$r(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}, \quad \theta(t) = t, \quad \implies \quad \tilde{r}_n = \frac{1}{1 + e^{-2n\pi}},$$

observando que en ambos casos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{r}_n$$

de esta forma probamos que existe un ciclo límite y que además éste es hiperbólico estable. ■

El siguiente teorema nos proporciona un criterio para determinar la estabilidad del ciclo límite.

Teorema 3.2.1 Definimos el parámetro M como

$$M = \left. \frac{dP}{dr} \right|_{r^*},$$

donde r^* es el punto fijo de la aplicación de Poincaré correspondiente al ciclo límite Γ . Entonces:

1. Si $|M| < 1$, entonces Γ es un ciclo límite hiperbólico estable
2. Si $|M| > 1$, entonces Γ es un ciclo límite hiperbólico inestable
3. Si $|M| = 1$, y

$$\frac{d^2P}{dr^2} \neq 0,$$

entonces Γ es un ciclo límite estable a un lado e inestable al otro. En este caso el ciclo límite se denomina semiestable.

Observación 3.2.1 Un punto fijo r^* de la aplicación de Poincaré se dice hiperbólico si $|M| \neq 1$.

Gracias a este teorema, vemos que en el último ejemplo teníamos

$$r_n = \frac{1}{1 + Ce^{-2n\pi}},$$

y por lo tanto obtenemos la siguiente aplicación de Poincaré

$$r_{n+1} = \frac{1}{1 + Ce^{-2(n+1)\pi}},$$

por lo que

$$r_{n+1} = P(r_n) = \frac{r_n}{r_n + (1 - r_n)e^{-2\pi}},$$

viendo que dicha aplicación posee dos puntos fijos, uno el trivial $r_1^* = 0$, y el segundo $r_2^* = 1$, que corresponde al ciclo límite. Si tenemos en cuenta el criterio que nos proporciona el teorema, entonces,

$$\frac{dP}{dr} = \frac{e^{-2\pi}}{(r + (1 - r)e^{-2\pi})^2},$$

y por lo tanto

$$\left. \frac{dP}{dr} \right|_{r^*=1} = e^{-2\pi} < 1,$$

deduciendo de esta forma que el ciclo límite Γ es estable.

No siempre resulta tan fácil como en estos ejemplos el calcular la aplicación de Poincaré, por lo que en las siguientes secciones de este capítulo expondremos diversos criterios para determinar la existencia de ciclos límite y estudiar su estabilidad. Empezaremos considerando un sistema plano y sobre él actuaremos de forma geométrica e intuitiva para luego intentar generalizar los resultados obtenidos en la línea de lo expuesto anteriormente.

3.3. Soluciones periódicas. Teorema de Poincaré-Bendixson.

Consideramos un sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}, \quad (3.4)$$

tal que $f, g \in C^1$. Todo lo que sabemos por ahora apenas nos da información sobre las trayectorias de (3.4) a no ser en entorno de puntos críticos. Pero muchas veces estamos interesados en conocer propiedades globales más que locales. Son propiedades globales de las trayectorias aquellas que describen su comportamiento sobre grandes regiones del plano de fases, que por lo general resultan muy difíciles de establecer. Un problema central es establecer si (3.4) tiene o no soluciones periódicas. Una solución $(x(t), y(t))$ de (3.4) se llama periódica si está

definida para todo t . El t más pequeño con esa propiedad se llama periodo T . Cada solución periódica define una órbita cerrada, recíprocamente, es fácil ver que si $C = (x(t), y(t))$ es una trayectoria cerrada del sistema (3.4), entonces $(x(t), y(t))$ define una solución periódica.

Por otro lado sabemos que un sistema lineal tiene trayectorias cerradas si las raíces de la ecuación auxiliar son puramente imaginarias, entonces para un sistema lineal o todas son cerradas o ninguna lo es pero un sistema no lineal puede tener una trayectoria cerrada y otras que no lo sean.

Estudiemos el siguiente ejemplo, el cual nos dará una imagen de cual es nuestro problema:

Ejemplo 3.3.1 Estudiemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (3.5)$$

Solución. La mejor forma de tratar este tipo de sistemas es la de hacer un cambio de variables de tal forma que:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} / x^2 + y^2 = r^2; \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt} \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\begin{cases} x'x + y'y \\ x'y - y'x \end{cases} \mapsto \begin{cases} r \frac{dr}{dt} = r^2(1 - r^2) \\ r^2 \frac{d\theta}{dt} = -r^2 \end{cases} \implies \begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta' = -1, \end{cases}$$

esta ecuación es fácil de resolver, siendo su solución:

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}, \quad \theta = t + t_0, \quad (3.6)$$

lo que corresponde a:

$$x = \frac{\cos(t + t_0)}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}, \quad y = \frac{\sin(t + t_0)}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}, \quad (3.7)$$

que es la solución al sistema (3.5).

Si nos fijamos en la solución en coordenadas polares (eq. (3.6)) podemos observar los siguientes casos en función de la constante c :

1. Si $c = 0$ entonces

$$r = 1, \quad \theta = t + t_0,$$

entonces $x^2 + y^2 = 1$ en sentido contrario a las agujas del reloj.

2. Si $c < 0$, entonces $r > 1$ tal que $r \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$. Espirales que se acercan a la circunferencia unidad
3. Si $c > 0$, entonces $r < 1$ tal que $r \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$. Espirales que se alejan del origen y se aproximan a la circunferencia unidad.

Todo esto lo podemos ver en la figura (3.4).

Vemos que el sistema tiene una única trayectoria cerrada por construcción directa, pero en general esto es muy complicado. Por lo tanto necesitamos criterios que nos permitan decidir si ciertas regiones del plano de fases contiene o no trayectorias cerradas. ■

De este ejemplo podemos establecer:

Definición 3.3.1 *Ciclo límite.* Un ciclo límite es una solución periódica aislada.

Así mismo hemos observado que:

Teorema 3.3.1 (Poincaré). Una trayectoria cerrada del sistema (3.4) rodea necesariamente al menos un punto crítico.

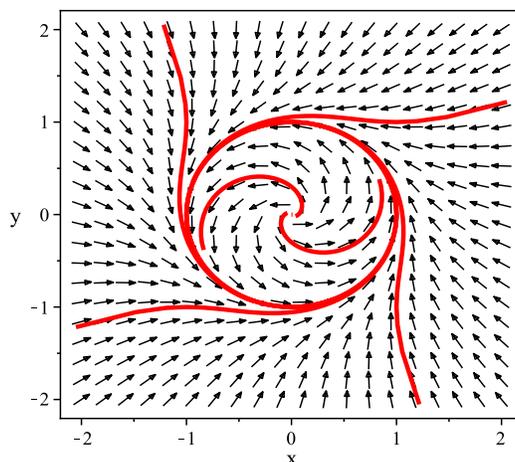


Figura 3.4: Espacio de fases de la ecuación (3.5)

Este teorema proporciona un criterio negativo de interés limitado, un sistema sin puntos críticos en cierta región, no puede tener órbitas cerradas.

En el ejemplo anterior podemos ver que la única singularidad del sistema (3.5) es: $(x = 0, y = 0)$ y que si aplicamos las técnicas que conocemos para clasificarlo llegamos a la conclusión de que es un punto singular inestable, pero no sabemos nada sobre el tipo de trayectorias que salen de dicha singularidad.

Teorema 3.3.2 (Criterio de Bendixson). Se considera el sistema (3.4) y supongamos que \mathcal{R} es una región del plano simplemente conexa donde

$$\operatorname{div}(\varphi X) = \partial_x(\varphi f) + \partial_y(\varphi g) \neq 0,$$

en \mathcal{R} , entonces no tiene trayectorias cerradas enteramente contenidas en esa región.

Ejemplo 3.3.2 Demostrar que los sistemas:

$$(a) \begin{cases} x' = y + x^3 \\ y' = x + y + y^3 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x' = 2xy - 2y^4 \\ y' = x^2 - y^2 - xy^3 \end{cases}, \quad (3.8)$$

no tienen soluciones periódicas.

Solución. En ambos ejemplos se va aplicar de forma inmediata el criterio de Bendixson, viendo de esta forma que;

(a) La divergencia del campo X es:

$$\operatorname{div}(X) = \partial_x(\varphi f) + \partial_y(\varphi g) = 3x^2 + 1 + 3y^2 \neq 0,$$

entonces no existen ciclos límite

(b) de igual forma vemos que:

$$\operatorname{div}(X) = \partial_x(\varphi f) + \partial_y(\varphi g) = -3xy^2 \neq 0,$$

por lo que

$$\operatorname{div}(X) = -3xy^2 \neq 0,$$

sii $x \neq 0$, ó $y \neq 0$, ó ambos son distintos de cero. Si $x = 0$, entonces:

$$x' = -2y^4 \leq 0,$$

si $y = 0$ entonces:

$$y' = x^2 \geq 0,$$

por lo tanto un ciclo límite debe estar completamente contenido en uno de los cuatro cuadrantes. Pero esto es imposible ya que $\operatorname{div}(X) \neq 0$ aquí, por lo tanto no puede existir un ciclo límite por el criterio de Bendixson.

Como se ve es sencillo de aplicar el criterio. ■

Estos teoremas son útiles a veces, pero lo que realmente deseamos son criterios positivos que formulen condiciones suficientes para la existencia de las trayectorias cerradas de (3.4).

Teorema 3.3.3 (Poincaré-Bendixson). Sea \mathcal{R} una región acotada del plano de fases junto con su contorno y supongamos que \mathcal{R} no contiene puntos críticos del sistema (3.4). Si $C = [x(t), y(t)]$ es una trayectoria de (3.4) que está en \mathcal{R} para cierto t_0 y permanece en \mathcal{R} para todo $t \geq t_0$, entonces C o bien es una trayectoria cerrada o tiende en forma de espiral hacia una trayectoria cerrada cuando $t \rightarrow \infty$. Así pues, el sistema (3.4) tiene en \mathcal{R} una trayectoria cerrada.

Ejemplo 3.3.3 Queremos demostrar que el sistema

$$\begin{cases} x' = x - y - x \left(x^2 + \frac{3}{2}y^2 \right) \\ y' = x + y - y \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right) \end{cases}, \quad (3.9)$$

tiene una solución periódica.

Solución. Intentaremos encontrar dos círculos concéntricos centrados en el origen (pues el origen es la única singularidad del sistema (3.9)) con las propiedades requeridas por el teorema de Poincaré-Bendixson.

Sea $n = n(x, y)$ la normal saliente en un punto p del círculo de radio r y sea $X = (f, g)$ la dirección que siguen las trayectorias que pasan por p . Definimos

$$\cos \phi = \frac{n \cdot X}{\|n\| \|X\|},$$

de tal forma que si $\cos \phi > 0$ las trayectorias salen del círculo, mientras que si $\cos \phi < 0$ las trayectorias entran. Tenemos por lo tanto;

$$\begin{aligned} n \cdot X &= x \left(x - y - x \left(x^2 + \frac{3}{2}y^2 \right) \right) + y \left(x + y - y \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right) \right) = \\ &= x^2 - x^4 - \frac{5}{2}x^2y^2 + y^2 - \frac{1}{2}y^4, \end{aligned}$$

que pasamos a polares ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) :por lo que

$$\begin{aligned} x^2 - x^4 - \frac{5}{2}x^2y^2 + y^2 - \frac{1}{2}y^4 &= r^4 \cos^4 \theta - \frac{3}{2}r^4 \cos^2 \theta + r^2 - \frac{1}{2}r^4 \\ &= r^2 - \frac{1}{4}r^4(4 + \cos 2\theta - \cos^2 2\theta), \end{aligned}$$

viendo que por ejemplo cuando $r = 1/2$ entonces $n \cdot X > 0 \forall \theta$, i.e. todas las trayectorias salen del círculo, mientras que cuando $r = 2$ entonces $n \cdot X < 0 \forall \theta$, i.e. todas las trayectorias entran en el círculo, por lo tanto, en virtud del teorema de Poincaré-Bendixson podemos concluir que entre el círculo $r = 1/2$ y el círculo $r = 2$ existe una órbita periódica u órbita cerrada como podemos ver en la siguiente figura (ver fig. (3.5)).

Hay que resaltar que hemos elegido una región que no contenía al punto crítico siguiendo así la receta del teorema. ■

Ejemplo 3.3.4 Estudiar si el sistema

$$\begin{cases} x' = x + y - x(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y - y(x^2 + y^2) \\ z' = -z \end{cases}, \quad (3.10)$$

tiene una solución periódica.

Solución. Intentaremos encontrar una solución periódica alrededor de la singularidad $S = (0, 0, 0)$. Linealizamos y vemos que pasa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - (3x^2 + y^2) & 1 - 2xy & 0 \\ -1 - 2xy & 1 - (x^2 + 3y^2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies A(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

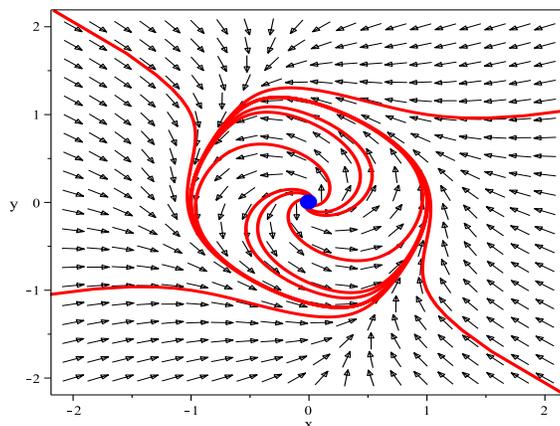


Figura 3.5: Espacio de fases del sistema (3.9).

encontrando que tiene autovalores complejos :

$$A(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así que podemos asegurar que $W = W^s \oplus W^u$, donde los autovectores asociados a los autovalores complejos forman la variedad inestable mientras que el autovector del autovalor real (negativo) genera la variedad estable. De esta forma conjeturamos que S es una singularidad inestable (repulsiva) al menos en el plano XY .

Escribiendo el sistema en coordenadas polares vemos que

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ y' = 1 \\ z' = -z \end{cases},$$

si $r = 0$, entonces existirá un ciclo límite. En las figuras adjuntas (ver Fig. (3.6)) hemos representado el espacio de fases en 3D y en 2D proyectando el sistemas sobre el plano XY .

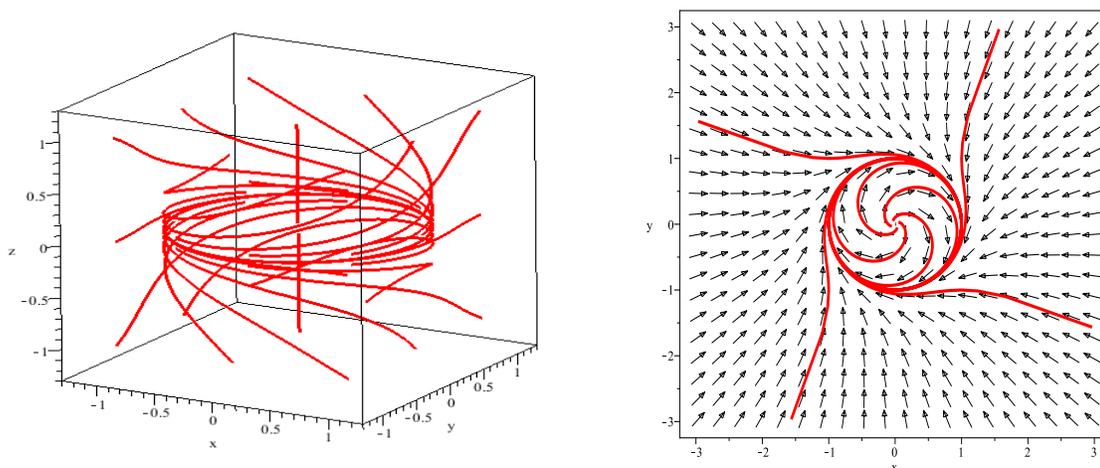


Figura 3.6: Espacio de fases del sistema (3.10) en 3D y en 2D proyectando el sistemas sobre el plano XY .

■

Ejemplo 3.3.5 Estudiar si el sistema

$$\begin{cases} x' = y - 8x^3 \\ y' = -4x + 2y - 2y^3 \end{cases}, \quad (3.11)$$

tiene una solución periódica.

Solución. Vemos que $S = (0, 0)$ y si linealizamos, encontramos que

$$A = \begin{pmatrix} -24x^2 & 0 \\ -4 & 2 - 6y^2 \end{pmatrix} \quad A(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que decimos que S es inestable. aplicando Dulac, deducimos que existe un ciclo límite, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\psi X) &= \partial_x (x^m y^n (y - 8x^3)) + \partial_y (x^m y^n (-4x + 2y - 2y^3)) \\ &= -8y^n x^{m+2} (m+3) - 2(n+3) x^m y^{n+2} + 2(n-1) x^m y^n + m x^{m-1} y^{n+1} - 4n x^{m+1} y^{n-1}, \end{aligned}$$

si definimos $m = 2, n = 1$, entonces

$$\operatorname{div}(\psi X) = -2x (20x^3 y + 2x^2 + 4xy^3 - 2xy - y^2),$$

no cambia de signo en $\mathcal{R} = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

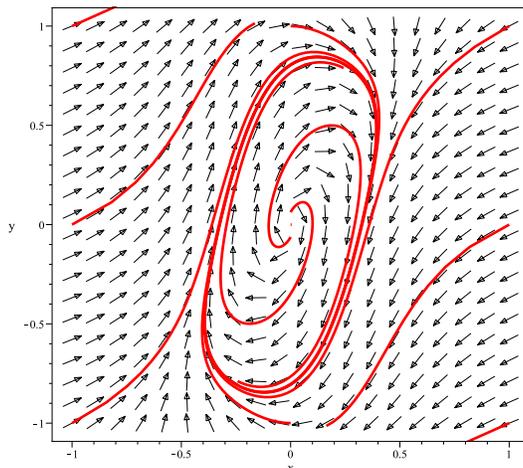


Figura 3.7: Espacio de fases del sistema (3.11).

En la figura adjunta (ver fig. (3.7)) representamos el espacios de fases del sistema (3.11). ■

El teorema de Poincare-Bendixson es satisfactorio desde un punto de vista teórico, pero es difícil de aplicar, sobre todo a la hora de buscar la región \mathcal{R} que verifique el teorema. Por ello se tiene el siguiente criterio:

Teorema 3.3.4 (Criterio de Dulac). Consideramos una región anular $\mathcal{R} \subset A$, donde A es un abierto. Si

$$\nabla(\varphi X) = \operatorname{div}(\varphi X) = \partial_x \varphi X + \partial_y \varphi X,$$

no cambia de signo en \mathcal{R} entonces existe como mucho un ciclo límite completamente contenido en \mathcal{R} .

Ejemplo 3.3.6 Vamos a estudiar el sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2) \\ y' = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2) \end{cases}, \quad (3.12)$$

haciendo ver que dicho sistema tiene un ciclo límite.

Solución. Aplicando la estrategia seguida en el primer ejemplo, i.e. escribiendo el sistema en coordenadas polares, estudiaremos el sistema, es decir:

$$\begin{aligned} r' &= r(1 - 2r^2 - r^2 \sin^2 \Theta) \\ \Theta' &= 1 \end{aligned} ,$$

recordamos que la transformación seguida es:

$$\begin{aligned} rr' &= xx' + yy' \\ r^2 \Theta' &= xy' - yx' \end{aligned} ,$$

La única singularidad del sistema es el origen i.e. $(0, 0)$ ya que $\Theta' = 1$. Consideramos $r = \frac{1}{2}$ y vemos que

$$r' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 \Theta \right) > 0,$$

y si consideramos ahora $r = 1$ entonces vemos que

$$r' = -1 - \sin^2 \Theta < 0,$$

por lo que podemos asegurar que en la región $R = (r : \frac{1}{2} < r < 1)$, existe un ciclo límite.

Sin embargo si aplicamos directamente el criterio de Dulac, entonces vemos que

$$\operatorname{div}(X) = 2(1 - 4r^2 - 2r^2 \sin^2 \Theta),$$

si consideramos que $r \in (\frac{1}{2}, 1)$, entonces $\operatorname{div}(X) < 0$, no cambia de signo en dicha región, por lo que por el criterio de Dulac podemos asegurar que existe un ciclo límite en dicha región. ■

Otro punto de vista relacionado con el método de Lyapunov es el siguiente.

Consideremos una función $V(x, y) = c > 0$, tal que la constante c pertenezca al intervalo $c \in (c_1, c_2)$ i.e. estamos seleccionando una banda de curvas cerradas. Si para todo punto p , se verifica que:

$$V'_p = \frac{dV}{dt}_p = f\partial_x V + g\partial_y V > 0,$$

entonces todas las trayectorias salen de la región. La táctica a seguir es la misma que en el criterio de Dulac o en el teorema de Poincaré-Bendixson i.e. delimitar una región del plano en la que $V'_p > 0$ y $V'_p < 0$ por lo que debe existir en dicha región un ciclo límite. Veamos un ejemplo que aclare este método.

Ejemplo 3.3.7 Probar que el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y - x^3 + x \\ y' &= -x - y^3 + y \end{aligned} \quad (3.13)$$

tiene al menos una órbita cerrada.

Solución. Tomamos la función

$$V(x, y) = x^2 + y^2,$$

por lo tanto

$$V'_p = \frac{dV}{dt}_p = f\partial_x V + g\partial_y V = 2x(y - x^3 + x) + 2y(-x - y^3 + y) = 2(x^2 + y^2 - x^4 - y^4),$$

por lo que en la región $x^2 + y^2 < 1$

$$x^2 + y^2 > (x^2 + y^2)^2 \geq x^4 + y^4,$$

entonces $V' > 0$ en la región $x^2 + y^2 = c$ con $c \in (0, 1)$.

Por otro lado para $x^2 + y^2 > 2$,

$$2(x^4 + y^4) \geq (x^2 + y^2)^2 > 2(x^2 + y^2),$$

por lo que $V' < 0$ en la región $x^2 + y^2 = c$ con $c > 2$. Por lo tanto el sistema tiene al menos una órbita cerrada entre los dos círculos.

En la figura adjunta (3.8) se muestra el espacio de fases de la ecuación (3.13). ■

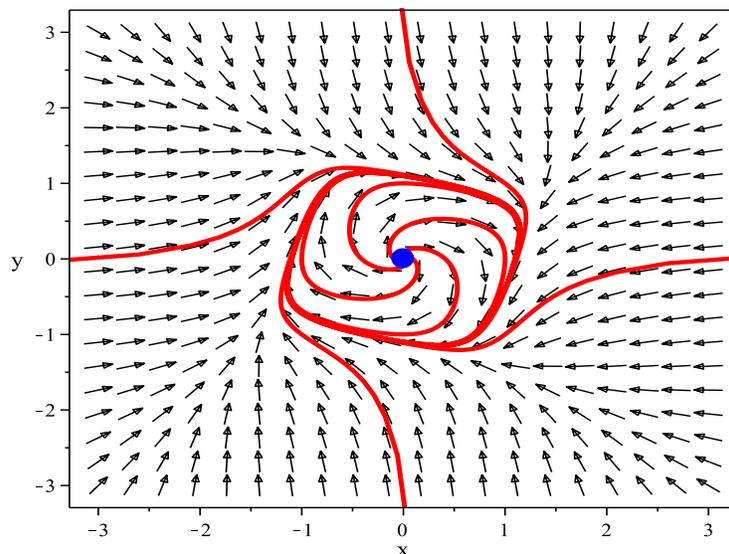


Figura 3.8: Espacio de fases de la ecuación (3.13)

Ejemplo 3.3.8 Probar que el sistema

$$\begin{aligned} x' &= x(1 - 4x + y) \\ y' &= y(2 + 3x - 2y) \end{aligned} \quad (3.14)$$

no tiene ciclos límite.

Solución. Aplicamos el criterio de Dilac con

$$\varphi = x^m y^n, \quad m, n \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi X) &= \partial_x (x^m y^n (x(1 - 4x + y))) + \partial_y (x^m y^n (y(2 + 3x - 2y))) \\ &= x^m y^n (m + 2n - 5x - 3y - 4mx + my + 3nx - 2ny + 3), \end{aligned}$$

fijando $m = \frac{1}{2}$ y $n = -\frac{5}{4}$, encontramos que

$$\operatorname{div}(\varphi X) = -\frac{43}{4} x^{\frac{3}{2}} y^{-\frac{5}{4}},$$

lo que prueba que no existen ciclos límite. ■

Vemos que por lo general es difícil encontrar las curvas con las propiedades requeridas. Sin embargo es posible construir argumentos no demasiado rigurosos como el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.9 Probar que el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -4x - 5y + \frac{6y}{1+x^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

tiene una órbita periódica.

Solución. El único punto singular del sistema es el origen i.e. $S_1 = (0,0)$. Si tenemos en cuenta la aproximación lineal a la Lyapunov i.e. despreciando todos los términos no lineales entonces el sistema resultante es:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -4x - 5y \end{aligned}$$

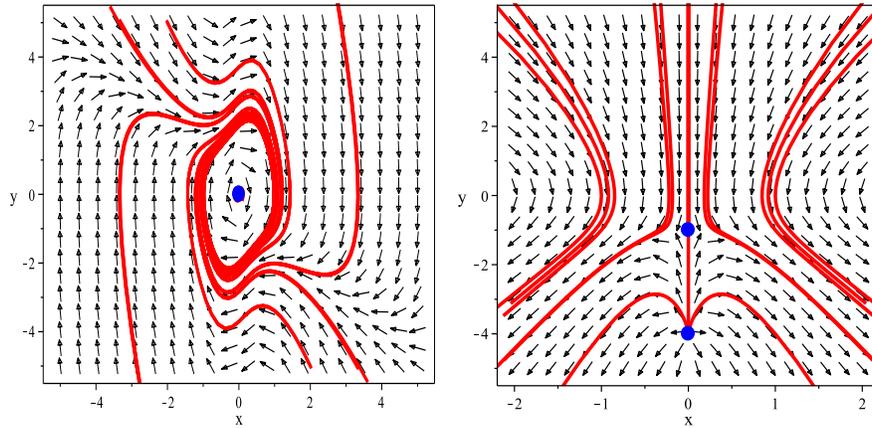


Figura 3.9: Espacio de fases de la ecuación (3.15) (figura de la izquierda). En la figura de la derecha hemos representado el espacio de fases de la ecuación (3.16).

por lo que S_1 es una espiral inestable. Sin embargo la existencia de una función de Lyapunov como la del ejemplo anterior garantiza la existencia de una órbita periódica en cierta región del plano de fases. En la figura (3.9) vemos el espacio de fases de la ecuación (3.15).

Pero quisiéramos saber que pasa a grandes distancias, para ello utilizaremos la siguiente estrategia. Utilizaremos coordenadas proyectivas

$$z = \frac{1}{x}, \quad u = \frac{y}{x},$$

de esta forma el sistema se reescribe como

$$\begin{aligned} z' &= -uz \\ u' &= -4 - 5u - u^2 + \frac{6uz^2}{z^2+1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

cuyas singularidades son

$$S_1 = (0, -1), \quad S_2 = (0, -4),$$

ambas inestables, S_1 punto de silla y S_2 foco inestable tal y como muestra la figura adjunta (3.9b). ■

Ejemplo 3.3.10 *Estudiar el sistema*

$$\begin{aligned} x' &= -y - x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4), \\ y' &= x - y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Demostración. Vemos que el sistema sólo tiene una única singularidad $S = (0, 0)$, linealizando vemos que

$$A = \begin{pmatrix} -5x^4 - 6x^2y^2 + 15x^2 - y^4 + 5y^2 - 4 & -2xy(2x^2 + 2y^2 - 5) - 1 \\ -2xy(2x^2 + 2y^2 - 5) + 1 & -x^4 - 6x^2y^2 + 5x^2 - 5y^4 + 15y^2 - 4 \end{pmatrix},$$

donde

$$A(S) = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 - i & 0 \\ 0 & -4 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix},$$

que al tener autovalores con la parte real negativa entonces concluimos que se trata de un foco estable (un punto atractivo). Sin embargo, si hacemos una transformación de coordenadas a polares,

$$\begin{aligned} r' &= -r(r^2 - 1)(r^2 - 4), \\ \theta' &= -1, \end{aligned}$$

vemos que aparecen dos ciclos límite definidos por las circunferencias de radios 1 y 2 respectivamente, C_1 y C_2 . Al ser el origen estable, entonces podemos "intuir" que el C_1 es inestable, es decir, que las trayectorias cercanas a C_1 (en su interior) se aproximan a S cuando $t \rightarrow \infty$, al ser S un punto estable, mientras que si consideramos trayectorias cercanas a S_1 (desde el exterior) éstas se aproximarán a C_2 tratándose por tanto de un ciclo límite estable. En la figura adjunta (Fig. (3.10)) hemos representado el espacio de fases del sistema (3.17).

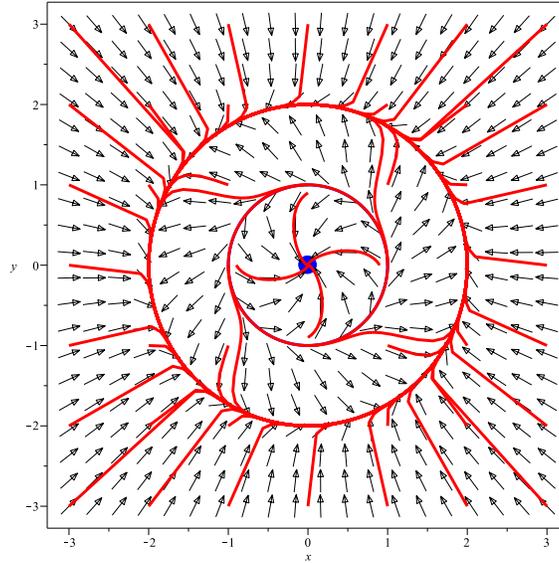


Figura 3.10: Espacio de fases del sistema (3.17).

Veamos ahora una variante de este ejemplo considerando el nuevo sistema

$$\begin{aligned} x' &= -y - x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9), \\ y' &= x - y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9). \end{aligned} \quad (3.18)$$

el cual tiene una singularidad en el origen, $S = (0, 0)$, que es inestable en este caso, ya que si linealizamos, podemos ver que:

$$A(S) = \begin{pmatrix} 36 & -1 \\ 1 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 - i & 0 \\ 0 & 36 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix},$$

por tanto, al tener la parte real positiva, sabemos que se trata de un punto inestable.

Al transformar el sistema a coordenadas polares, obtenemos

$$\begin{aligned} r' &= -r(r^2 - 1)(r^2 - 4)(r^2 - 9), \\ \theta' &= -1, \end{aligned}$$

que tiene un único punto singular en el origen ya que $\theta' \neq 0$. Aparecen de forma clara tres ciclos límite al resolver $r' = 0$, las circunferencias C_1, C_2 y C_3 de radios 1, 2 y 3 respectivamente centradas en el origen. Sin embargo el espacio de fases cambia ya que la singularidad en el origen es inestable, por lo que C_1 es un ciclo límite atractivo (estable) las trayectorias parten del origen y se dirigen a C_1 . Al ser C_1 un ciclo límite estable, entonces C_2 debe ser inestable, las órbitas cercanas a C_2 se alejan de este ciclo, acercándose a C_1 y a C_3 siendo éste último otro ciclo límite estable.

En la figura adjunta (Fig. (3.11)) se representa el espacio de fases del sistema (3.18) en coordenadas (x, y) . ■

Ejemplo 3.3.11 Estudiar si el sistema

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{x}{2} - y - x^2 + xy + y^2, \\ y' &= x(1 + x - 3y), \end{aligned} \quad (3.19)$$

tiene un ciclo límite.

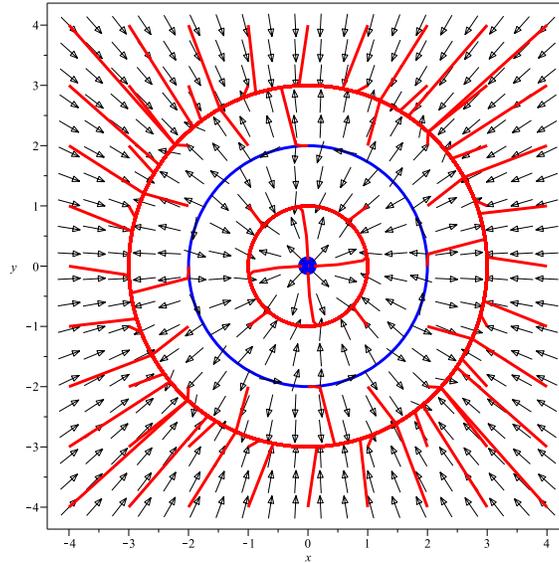


Figura 3.11: Espacio de fases del sistema (3.18)

Demostración. De forma mecánica empezamos por calcular las singularidades del sistema (3.19) siendo éstas

$$S_1 = (0,0), \quad S_2 = (0,1),$$

mientras que al linealizar vemos que

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 2x + y & -1 + x + 2y \\ 1 + 2x - 3y & -3x \end{pmatrix}$$

de tal forma que

$$A(S_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma(\lambda) = \left\{ -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{15}i), -\frac{1}{4}(1 - \sqrt{15}i) \right\},$$

$$A(S_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \approx \sigma(\lambda) = \left\{ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{31}i), \frac{1}{4}(1 + \sqrt{31}i) \right\},$$

viendo así que S_1 es una singularidad estable mientras que S_2 es inestable.

Los puntos críticos en el infinito satisfacen la ecuación $g_3(\theta) = 0$, donde

$$g_3(\theta) = \cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^2 \theta - \sin^3 \theta,$$

que tiene sólo dos raíces;

$$\theta_1 = 0,37415 \text{ rad}, \quad \theta_2 = 3,51574 \text{ rad}.$$

Utilizando coordenadas proyectivas, el sistema (3.19) se reescribe como

$$\pm y' = -\frac{yz}{2} - y^2z + 2y + y^2 + y^3 - z - 1,$$

$$\pm z' = -\frac{z^2}{2} - yz^2 - z + yz + y^2z,$$

encontrando que tiene una singularidad en el punto $(y,z) = (0,39265,0)$ que es un punto de silla. Al ser n un número par entonces el punto antipodal también es un punto de silla, pero la dirección del flujo es inversa, recordar que la dirección del flujo viene determinada por la función $g_3(\theta)$.

Por uno de los colorarios del teorema de Poincaré-Bendixon, deducimos que al menos existen dos ciclos límite que contienen a las singularidades del sistema original. ■

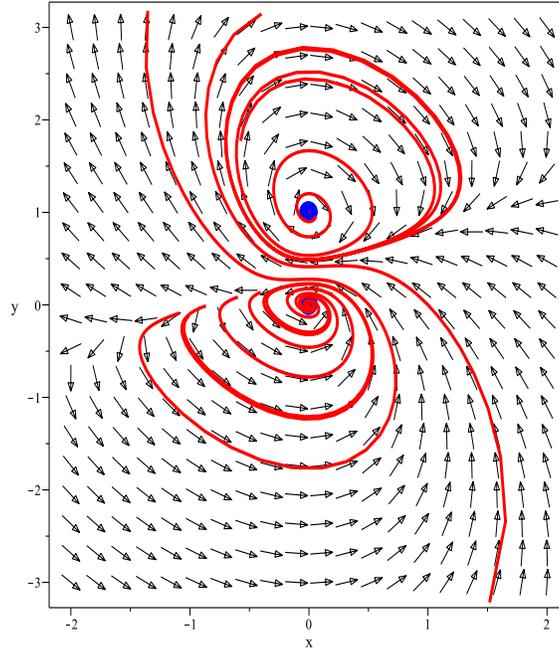


Figura 3.12: Espacio de fases del sistema (3.19).

Ejemplo 3.3.12 *Estudiar el sistema dinámico*

$$\begin{aligned} x' &= -y^3 (x^2 - 1) (2 + xy), \\ y' &= x^3 (y^2 - 1) (2 - xy). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Demostración. Las singularidades del sistema son:

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1, 1), & A_2 &= (1, 1), & A_3 &= (1, -1), \\ A_4 &= (-1, -1), & B_1 &= (-2, 1), & B_2 &= (1, 2), \\ B_3 &= (2, -1), & B_4 &= (-1, -2), & O &= (0, 0). \end{aligned}$$

Si linealizamos, entonces vemos que

$$L = \begin{pmatrix} -y^3 (3yx^2 + 4x - y) & -2y^2 (2xy + 3) (x^2 - 1) \\ -2x^2 (2xy - 3) (y^2 - 1) & x^3 (-3xy^2 + 4y + x) \end{pmatrix},$$

de tal forma que los autovalores de los puntos $(A_i)_{i=1}^4$ son $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = 2$, por lo tanto estos puntos son puntos de silla inestables. Los autovalores de los puntos $(B_i)_{i=1}^4$ son $\lambda_1 = -64, \lambda_2 = -3$, por lo tanto estos puntos son estables y por último los autovalores asociados al punto $O = (0, 0)$ son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ i.e. se trata de un punto degenerado. En la figura adjunta (Fig. (3.13)) hemos representado el espacio de fases del sistema (3.20).

Vemos que las trayectorias que unen los puntos $(A_i)_{i=1}^4$ forman una secuencia de separatrices que unen dichos puntos de silla inestables $(A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1)$ de tal forma que constituyen un diagrama cerrado. Las trayectorias dentro de este cuadrado centrado en el origen parten cerca del punto degenerado $O = (0, 0)$ y se aproximan al cuadrado en espiral, esto prueba la existencia de oscilaciones del sistema dinámico (3.20) dentro del cuadrado $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1, |y| < 1\}$.

Para estudiar el carácter del punto degenerado $O = (0, 0)$ haremos una transformación de coordenadas a polares (r, φ) de tal forma que el sistema (3.20) se escribire ahora de la siguiente manera

$$\begin{aligned} r' &= r \left(-\frac{1}{2} \sin 4\varphi + \frac{1}{4} r^2 \sin^2 2\varphi - \frac{1}{8} r^4 \sin^4 2\varphi \right), \\ \varphi' &= -2 + \sin^2 2\varphi + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi (\sin 2\varphi + \cos 2\varphi) - \frac{1}{16} r^4 \sin^2 2\varphi \sin 4\varphi, \end{aligned} \quad (3.21)$$

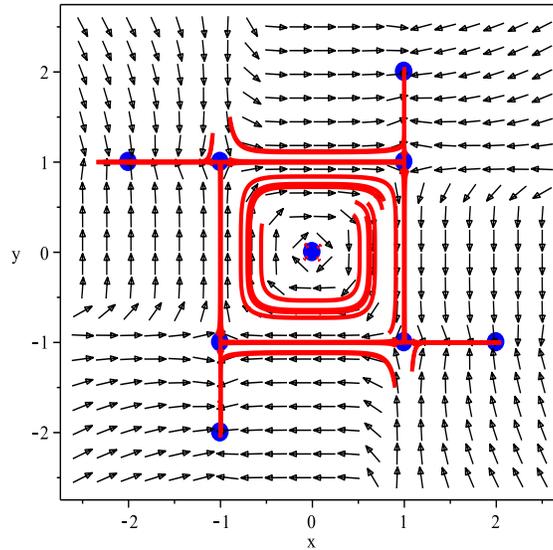


Figura 3.13: Espacio de fases del sistema (3.20).

que no tiene singularidades cuando $r = 0$. El punto $O = (0,0)$ se transforma en $S^1 : r = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, el cual es una trayectoria cerrada del sistema (3.21), por lo tanto, cuando $r \ll 1$, todas las trayectorias del sistema (3.20) ejecutan un número infinito de vueltas en torno al punto crítico $O = (0,0)$.

Para probar que no existen ciclos límite dentro del cuadrado \mathcal{C} , para ello utilizaremos el criterio de Dulac-Bendixon, considerando la función

$$\psi = (x^2 - 1)^{-1} (y^2 - 1)^{-1},$$

y calculando

$$\partial_x(\psi P) + \partial_y(\psi Q), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1, |y| < 1,$$

vemos trivialmente que

$$\partial_x(\psi P) + \partial_y(\psi Q) = \frac{x^4}{1-x^2} + \frac{y^4}{1-y^2} > 0,$$

en \mathcal{C} , probando así que no existen trayectorias cerradas dentro de \mathcal{C} .

Por último analizaremos las trayectorias del sistema (3.20) en el infinito. Para ello utilizaremos las coordenadas proyectivas

$$z = \frac{1}{x'}, \quad u = \frac{y}{x} \quad y \quad w = \frac{1}{y'}, \quad v = \frac{x}{y'},$$

de esta forma el sistema (3.20) se escribe como

$$\begin{aligned} z' &= zu^3(1-z^2)(u+2z^2), \\ u' &= (u^2-z^2)(-u+2z^2) + u^4(1-z^2)(u+2z^2), \end{aligned} \quad (3.22)$$

encontrando que el nuevo sistema tiene tres singularidades en la región $z \geq 0$, que denominamos

$$D_2(u=1), \quad D_3(u=-1), \quad C_3(u=0),$$

y de forma análoga otras tres en la región $z \leq 0$, que denominamos

$$D_1(u=1), \quad D_4(u=-1), \quad C_1(u=0).$$

Los autovalores asociados a los puntos críticos D_2 y D_3 son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, por lo tanto se trata de puntos inestables mientras que el punto C_3 es un punto de silla. Al estudiar el sistema original en coordenadas (w, v) encontramos otras dos singularidades, C_2 y C_4 que se comportan como puntos de silla.

En la figura (3.14) hemos representado el espacio de fases del sistema con las singularidades en el infinito.

■

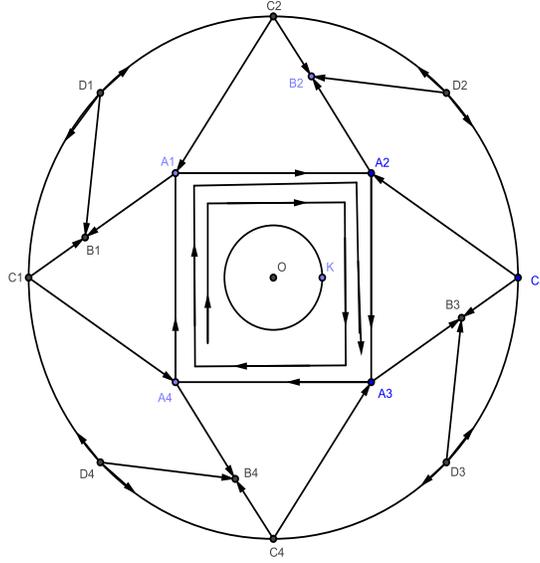


Figura 3.14: Espacio de fases del sistema (3.20) conteniendo los puntos del infinito.

3.3.1. Revisión del teorema de Poincaré-Bendixson.

Sea γ una órbita periódica del flujo ϕ_t , asociado al campo X . Consideramos la **sección transversal** Σ (hipersuperficie) / $X \cdot n \neq 0, \forall x \in \Sigma / n \in \Sigma^\perp$, i.e. es la normal a Σ . Sea p el único punto donde γ intersecta Σ y sea $U \in \text{Ent}(p)$, con $U \subset \Sigma$. Entonces definimos la **aplicación de Poincaré** P como; $P : U \rightarrow \Sigma$, tal que asocia a cada punto $q \in U$ el flujo $\phi_\tau(q)$ tal que $\tau = \tau(q)$ es el tiempo que la órbita $\phi_\tau(q)$ tarda en volver a Σ .

El punto p es un punto fijo para P , de tal forma que la estabilidad de p para P refleja la estabilidad de γ para ϕ_t . En particular si p es hiperbólico y $DP(p)$ (la aplicación de Poincaré linealizada) tiene n_s autovalores con módulo menor que uno y n_u mayor que uno ($n_s + n_u = n - 1$) entonces $\dim W^s(p) = n_s, \dim W^u(p) = n_u$. Como las órbitas de P , que yacen en W^s y W^u , están formadas por intersecciones de órbitas de ϕ_t con Σ , entonces las dimensiones de $W^s(\gamma)$ y $W^u(\gamma)$ son cada una mayores que las respectivas dimensiones de la aplicación P .

En el ejemplo (3.3.1) consideramos como sección transversal

$$\Sigma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y = 0 \right\},$$

que en coordenadas polares reescribimos como:

$$\Sigma = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1 / r > 0, \theta = 0 \right\},$$

y como ya vimos la solución al sistema era:

$$\phi(r_0, \theta_0) = \left(\left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right)^{-1/2}, t + \theta_0 \right).$$

El tiempo τ para un punto $p \in \Sigma$ es $\tau = 2\pi$, entonces la aplicación de Poincaré será:

$$P(r_0) = \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2(2\pi)} \right)^{-1/2},$$

claramente P tiene un punto fijo en $r_0 = 1$, lo que refleja que la órbita cerrada es el círculo unidad. Consideremos ahora la parte lineal de P i.e.

$$DP(1) = -\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2(2\pi)} \right)^{-3/2} \left(\frac{-2e^{-4\pi}}{r_0^3} \right)_{r_0=1} = e^{-4\pi} < 1,$$

entonces p es un punto fijo estable y por lo tanto γ es una órbita estable u órbita atractiva.

Un **conjunto invariante** S para ϕ_t es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\phi_t(x) \in S \forall x \in S$ y $\forall t \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, las variedades estables e inestables de un punto fijo u órbita periódica proporcionan ejemplos de conjuntos invariantes.

Decimos que p es un “**nonwandering point**” para el flujo ϕ_t si para $U \in \text{Ent}(p)$, $\exists t$ (arbitrariamente grande) / $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$. Ω es el conjunto de todos estos puntos. Por lo tanto, un punto nonwandering yace o está cerca de órbitas que regresan (por ejemplo espirales) dentro de una distancia específica de ellas mismas. Puntos fijos y órbitas periódicas son claramente nonwandering. Como el conjunto de puntos wandering es abierto entonces Ω es cerrado y debe contener la clausura del conjunto de puntos fijos y órbitas cerradas. Los puntos wandering corresponden a comportamientos transitorios mientras que comportamientos asintóticos o a largo plazo corresponden a órbitas de puntos nonwandering.

Un punto p es un ω – **límite** de x , si existen puntos $\{\phi_{t_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ sobre la órbita x tales que $\lim_{t_i \rightarrow \infty} \phi_{t_i}(x) \rightarrow p$.

Un punto q es un α – **límite** de x , si existen puntos $\{\phi_{t_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ sobre la órbita x tales que $\lim_{t_i \rightarrow -\infty} \phi_{t_i}(x) \rightarrow q$.

Los conjuntos α (resp. ω) – **límite** denotados por: $\alpha(x)$, $\omega(x)$ son los conjuntos de puntos de α y ω límite de x .

Un conjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ se denomina un **conjunto “atractivo”** si existe una vecindad $U \subset A$ tal que $\phi_t(x) \in U$, $\forall t \geq 0$ y $\phi_t(x) \rightarrow A$ cuando $t \rightarrow \infty$, $\forall x \in U$. El conjunto $\cup_{t \leq 0} \phi_t(U)$ es el dominio de atracción de A (la variedad estable de A). Un conjunto “atractivo” captura todas las órbitas que empiezan en su dominio de atracción. Un **conjunto “repulsivo”** se define de forma análoga cambiando t por $-t$.

Con toda esta nueva batería de definiciones reformularemos el teorema de Poincaré-Bendixson (PB).

Teorema 3.3.5 (Poincaré-Bendixson.) *Un conjunto no vacío y compacto (α ó ω límite) para un flujo en \mathbb{R}^2 que no contenga puntos fijos es una órbita cerrada.*

3.4. Índice de un punto singular.

Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (3.23)$$

consideramos la curva Γ cerrada formada por los puntos de (3.23) y consideramos un punto p de Γ . Sabemos por los teoremas de existencia y unicidad que sólo pasa por p una única curva integral del campo que define el sistema (3.23). Las curvas vienen descritas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \quad (3.24)$$

por lo tanto $\gamma_* = X(\gamma)$ es el vector tangente a γ tal que γ es la curva integral del campo $X = (f, g)$. La idea es considerar la variación de $\gamma_*(p)$; $p \in \Gamma$, i.e. mientras que p recorre Γ , el vector tangente γ_* irá variando continuamente de tal forma que cuando regrese a su punto de partida después de haber recorrido toda la curva Γ , γ_* regresará a su posición inicial. En dicho recorrido el vector γ_* ha podido hacer una o varias vueltas en uno u otro sentido. Al número de vueltas del vector del campo X se denomina índice de la curva.

Formalizaremos esta idea intuitiva de la siguiente forma.

Consideramos la aplicación $f : U \rightarrow S^1$, tal que

$$f : x \mapsto \frac{X(p)}{\|X(p)\|} \quad (3.25)$$

donde U es el dominio donde está definido el campo X (en dicho dominio no hay singularidades) y S^1 es la circunferencia unidad. La función f es diferenciable ya que hemos eliminado de U las singularidades. Sea $p \in U$, en el entorno de $f(x) \in S^1$ se puede introducir la coordenada angular φ de tal forma que en el entorno del punto p obtenemos una función real diferenciable $\varphi(x, y)$ donde su diferencial total es:

$$d\varphi = \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2} \quad (3.26)$$

donde la función φ mide la inclinación γ_* en sentido antihorario.

Así pues, aunque la función φ esté definida sólo localmente y sólo con exactitud de hasta un múltiplo de 2π , su diferencial $d\varphi$ es una forma diferenciable completamente definida en un entorno de todo U .

Definición 3.4.1 Llámese índice de una curva cerrada orientada $\Gamma : S^1 \rightarrow U$, a la integral de la forma $d\varphi$ tomada a lo largo de Γ dividida por 2π , i.e.

$$\text{ind}(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}. \quad (3.27)$$

Si se quiere generalizar a más dimensiones el concepto de número de vueltas se denomina grado de una aplicación.

Podemos enunciar los siguientes resultados:

Teorema 3.4.1 Si el índice de Γ es distinto de cero, entonces en el interior de U hay al menos un punto singular.

Definición 3.4.2 El índice de cierta curva cerrada Γ , tal que en su interior hay un punto singular del campo X se denomina índice del punto singular.

Teorema 3.4.2 Sea curva cerrada Γ y Γ' otra curva cerrada tal que $\Gamma' \subset \Gamma$ entonces $\text{ind}(\Gamma) = \text{ind}(\Gamma')$.

Teorema 3.4.3 El índice de la curva Γ es igual a la suma de los índices de los puntos singulares del campo que se encuentran en \mathring{U} , i.e.

$$\text{ind}(\Gamma) = \sum_i I_i. \quad (3.28)$$

Lema 3.4.1 El índice de las curvas $\Gamma_1 + \Gamma_2$ es igual a la suma de los índices de las curvas Γ_1 y Γ_2 .

La forma más sencilla de calcular el índice es utilizar el siguiente resultado:

Teorema 3.4.4 Sea p el número de veces que $\frac{g}{f}$ cambia desde $+\infty$ a $-\infty$ y sea q el número de veces que cambia desde $-\infty$ a $+\infty$ sobre Γ , entonces:

$$\text{ind}(\Gamma) = \frac{1}{2}(p - q). \quad (3.29)$$

Ejemplo 3.4.1 Calcular el índice del punto $x = (0, 0)$, singularidad del sistema:

$$\begin{cases} x' = y^3 \\ y' = x^3 \end{cases}. \quad (3.30)$$

Solución. Tomamos como Γ el cuadrado de lados $(x = \pm 1, y = \pm 1)$.

Empezamos a recorrer en sentido antihorario dicho cuadrado en el punto $(1, 1)$ y vemos que en $y = 1$ $\tan \varphi = x^3$, recordar que $\tan \varphi = \frac{g}{f}$, son infinitos, de igual forma sobre $y = -1$. Sobre $x = -1$, $\tan \varphi = -y^{-3}$ cambia desde $-\infty$ a $+\infty$ y $x = 1$, $\tan \varphi = y^{-3}$ cambia desde $-\infty$ a $+\infty$. Por lo tanto $p = 0$ y $q = 2$ entonces $I_x = -1$. ■

Ejemplo 3.4.2 Estudiar el índice del punto singular $(0, 0)$ para el sistema:

$$\begin{cases} x' = y - \frac{1}{2}xy - 3x^2 \\ y' = -xy - \frac{3}{2}y^2 \end{cases}. \quad (3.31)$$

Solución. En primer lugar debemos observar que existe otra singularidad $S_2 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ por lo que deberemos tener cuidado a la hora de elegir nuestra curva cerrada Γ . Tomaremos por lo tanto $\Gamma = \left(x = \pm \frac{1}{8}, y = \pm \frac{1}{8}\right)$. Sea

$$\tan \varphi = \frac{-xy - \frac{3}{2}y^2}{y - \frac{1}{2}xy - 3x^2},$$

consideremos los ceros de $\tan \varphi$. Sobre las rectas $y = \pm \frac{1}{8}$, $\tan \varphi \neq 0$. Sobre la recta $x = -\frac{1}{8}$, $\tan \varphi = 0$ si $y = \frac{1}{12}$ pasando de negativo a positivo. Sobre la recta $x = \frac{1}{8}$, $\tan \varphi = 0$ si $y = -\frac{1}{12}$ pasando de positivo a negativo y sobre $y = 0$ pasando de negativo a positivo. Por lo tanto $p = 3$ y $q = 1$ entonces $\text{ind} = 1$.

Resaltamos que por ejemplo el teorema de Hartman no aporta información alguna sobre la singularidad $S_1 = (0,0)$. Sabemos que las únicas singularidades del sistema son: $S_1 = (0,0)$ y $S_2 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$. La parte lineal del sistema es:

$$DX = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y - 6x & 1 - \frac{1}{2}x \\ -y & -x - 3y \end{pmatrix},$$

$$DX(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad DX(S_2) = \begin{pmatrix} \frac{17}{12} & \frac{9}{8} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

los autovalores de $DX(S_1)$ son: $\sigma(\lambda) = (0, 0)$, mientras que los de $DX(S_2)$ son $\sigma(\lambda) = (\frac{7}{12} + \frac{1}{12}\sqrt{73}, \frac{7}{12} - \frac{1}{12}\sqrt{73})$, de esta forma podemos asegurar que S_2 es un punto de silla mientras que de S_1 no podemos decir nada (habría que utilizar otras tácticas como la de la variedad centro etc...). En la figura adjunta (fig. (3.15)) vemos el espacio de fases del sistema (3.31).

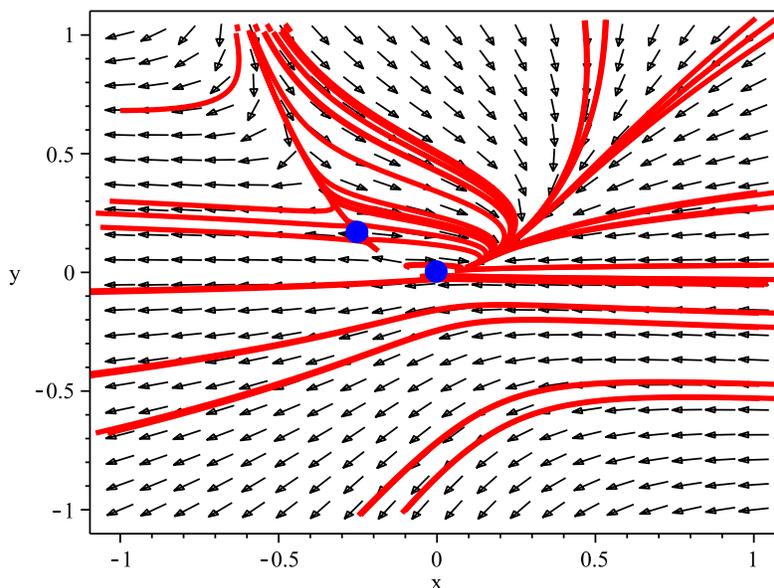


Figura 3.15: Espacio de fases del sistema (3.31)

Vemos que el punto S_1 es una singularidad ligeramente atractiva. ■

Proposición 3.4.1 El índice de un centro (independientemente de la dirección de las trayectorias), una espiral (estable o inestable), de un nodo (estable o inestable) es $+1$.

El índice de un punto de silla hiperbólico es -1 .

El índice de una órbita cerrada es $+1$.

Si nuestro campo X está definido sobre una variedad compacta M , entonces un resultado muy conocido y relacionado con el teorema de Gauss-Bonnet es el siguiente:

Teorema 3.4.5 (Poincaré). La suma de los índices de un campo vectorial X con puntos singulares sobre una superficie compacta M es igual a la característica de Euler-Poincaré de M . en particular:

$$\sum I_i = \frac{1}{2\pi} \int \int_M K d\Omega = \chi(M), \quad (3.32)$$

$\int \int_M K d\Omega$ representa la curvatura total de M , K es la curvatura de Gauss y $\chi(M)$ es la característica de Euler-Poincaré.

Este resultado es notable ya que implica que $\sum I_i$ no depende de X , sino de la topología de M . Por ejemplo, en cualquier superficie homeomorfa a la esfera, todos los campos vectoriales con singularidades aisladas deben cumplir que la suma de sus índices es igual a 2. En particular, ninguna de tales superficies puede exhibir campos sin singularidades.

3.5. Integrales de Melnikov

Las funciones de Melnikov se utilizan para determinar la localización aproximada y el número de ciclos límite que un sistema posee cuando el parámetro del que depende el sistema es pequeño.

Consideremos el sistema perturbado

$$x' = f(x) + \epsilon g(x, \epsilon, \mu), \quad (3.33)$$

y asumimos que el sistema no perturbado

$$x' = f(x), \quad (3.34)$$

posee una familia uniparamétrica de soluciones periódicas dadas por

$$\Gamma_r := x = \gamma_r(t), \quad (3.35)$$

donde las funciones $\gamma_r(t)$ tienen un periodo mínimo T_r .

Definición 3.5.1 Las funciones de Melnikov para el sistema (3.33) a lo largo largo del ciclo Γ_r se definen de la siguiente manera

$$M(r, \mu) = \int_0^{T_r} \exp\left(-\int_0^t \nabla f(\gamma_r(s)) ds\right) f \wedge g(\gamma_r(t), 0, \mu) dt. \quad (3.36)$$

Teorema 3.5.1 Supongamos que

$$M(r_0, \mu_0) = 0, \quad y \quad \frac{\partial M}{\partial r} \Big|_{(r_0, \mu_0)} \neq 0,$$

where $r_0 \in I$. Entonces, para $0 < \epsilon \ll 1$, el sistema (3.33) tiene un único ciclo límite hiperbólico cercano a Γ_{r_0} . Si $M(r_0, \mu_0) \neq 0$ entonces el sistema no posee ciclos límite (ϵ suficientemente pequeño).

Para intentar aclarar estos conceptos veamos un ejemplo. Para evitar complejidades con las integrales resultantes, consideramos sólo casos sencillos como los expuestos al final del capítulo 4.

Ejemplo 3.5.1 Consideramos el oscilador de van der Pol

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x - \epsilon(1 - x^2)y, \end{aligned} \quad (3.37)$$

demostrar que existe un ciclo límite asintótico al círculo de radio 2 cuando el parámetro ϵ es suficientemente pequeño.

Solución. Vemos que en este ejemplo la aplicación f se escribe como

$$f = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \quad \implies \quad \nabla f = 0,$$

mientras que

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon(1 - x^2)y \end{pmatrix},$$

y que el periodo mínimo es $T_r = 2\pi$. Utilizando la parametrización

$$\gamma_r(t) = (x(t), y(t)) = (r \cos t, r \sin t),$$

por lo tanto la función de Melnikov es:

$$M(r, \mu) = \int_0^{T_r} \exp\left(-\int_0^t \nabla f(\gamma_r(s)) ds\right) f \wedge g(\gamma_r(t), 0, \mu) dt,$$

i.e.

$$M(r, \mu) = \int_0^{2\pi} f \wedge g(\gamma_r(t), 0, \mu) dt = \int_0^{2\pi} -r^2 (\sin^2 t (1 - r^2 \cos^2 t)) dt = \frac{1}{4} \pi r^2 (r^2 - 4),$$

observando que: $f \wedge g = f_1 g_2 - f_2 g_1$, entonces: $f \wedge g(\gamma_r(t), 0, \mu) = y(- (1 - x^2) y)$, por lo tanto

$$M(r_0, \mu) = 0 \iff r_0 = 2,$$

y verificándose que

$$\frac{\partial M}{\partial r} |_{(r_0, \mu_0)} = \pi r_0 (r_0^2 - 2) \neq 0,$$

de esta forma, el teorema nos garantiza que existe un único ciclo límite hiperbólico asintótico al círculo de radio 2 cuando el parámetro ϵ es suficientemente pequeño.

En las figuras adjuntas podemos ver (ver Fig. (3.16)) cómo cambia el espacio de fases al cambiar el valor del parámetro ϵ , y en particular como aparece el ciclo límite tal y como predice el teorema enunciado. En la primera de las figuras (la de la izquierda) hemos representado precisamente estos espacios de fases cuando $\epsilon = 0,09$ (figura de la izquierda) y cuando $\epsilon = 0,5$ (figura de la derecha). De esta vemos la validez del teorema (ϵ debe ser suficientemente pequeño).

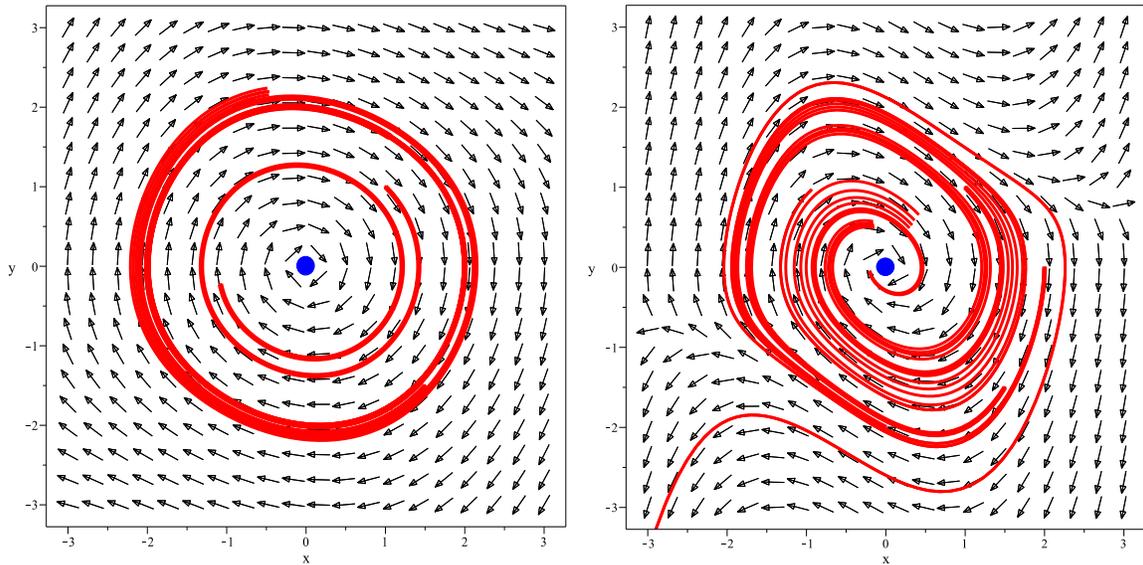


Figura 3.16: Espacio de fases del sistema (3.37) cuando $\epsilon = 0,09$ (figura de la izquierda) y cuando $\epsilon = 0,5$ (figura de la derecha). De esta vemos la validez del teorema (ϵ suficientemente pequeño).

■

Enunciamos a continuación un teorema análogo para múltiples ciclos límite hiperbólicos.

Teorema 3.5.2 *Supongamos que $M(r, \mu_0) = 0$, tiene k soluciones $(r_i)_{i=1}^k$, tales que*

$$\frac{\partial M}{\partial r} |_{(r_i, \mu_0)} \neq 0.$$

Entonces, para $0 < \epsilon \ll 1$, k familias uniparamétricas de ciclos límite bifurcan de la solución periódica de el sistema (3.34) en los puntos $(r_i)_{i=1}^k$. Si $M(r_0, \mu_0) \neq 0$ entonces el sistema no posee ciclos límite (ϵ suficientemente pequeño).

Para intentar aclarar estos conceptos veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.5.2 Consideramos el sistema de Lienard

$$\begin{aligned}x' &= -y + \epsilon (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5), \\y' &= x,\end{aligned}\tag{3.38}$$

determinar el número máximo y localización de ciclos límite cuando el parámetro ϵ es suficientemente pequeño.

Solución. Vemos que en este ejemplo la aplicación f se escribe como

$$f = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad \implies \quad \nabla f = 0,$$

mientras que

$$g = \begin{pmatrix} \epsilon (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5) \\ 0 \end{pmatrix},$$

y que el periodo mínimo es $T_r = 2\pi$. Utilizando la parametrización

$$\gamma_r(t) = (x(t), y(t)) = (r \cos t, r \sin t),$$

por lo tanto la función de Melnikov es:

$$M(r, \mu) = \int_0^{T_r} \exp\left(-\int_0^t \nabla f(\gamma_r(s)) ds\right) f \wedge g(\gamma_r(t), 0, \mu) dt,$$

i.e.

$$M(r, \mu) = \int_0^{2\pi} f \wedge g(\gamma_r(t), 0, \mu) dt = \int_0^{2\pi} (-a_1 r^2 \cos^2 t - a_3 r^4 \cos^4 t - a_5 r^6 \cos^6 t) dt,$$

donde $f \wedge g(\gamma_r(t), 0, \mu) = -x(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5)$, por lo tanto

$$M(r, \mu) = -\pi r^2 \left(a_1 + \frac{3}{4} a_3 r^2 + \frac{5}{8} a_5 r^4 \right),$$

de esta forma el polinomio

$$m(r) = a_1 + \frac{3}{4} a_3 r^2 + \frac{5}{8} a_5 r^4,$$

tiene por lo menos dos raíces positivas, éstas son:

$$r_j = \pm \frac{\sqrt{5}}{5a_5} \left(\sqrt{a_5 \left(-3a_3 \pm \sqrt{9a_3^2 - 40a_1 a_5} \right)} \right),$$

una adecuada elección de las constantes (a_i) nos da tales raíces. El teorema enunciado nos asegura por lo tanto que el sistema (3.38) tiene como mucho dos ciclos límite hiperbólicos asintóticos a los círculos de radios $(r_i)_{i=1}^2$, siendo r_i raíces positivas del polinomio $m(r)$.

En las figuras adjuntas podemos ver (ver Fig. (3.17)) cómo cambia el espacio de fases al cambiar el valor del parámetro ϵ , y en particular como aparece lo ciclos límite tal y como predice el teorema enunciado. En la primera de las figuras (la de la izquierda) hemos representado precisamente estos espacios de fases cuando $\epsilon = 0,1$ (figura de la izquierda) y cuando $\epsilon = 0,5$ (figura de la derecha). Hemos tomado los siguientes valores de las constantes (a_i): $a_1 = -1$, $a_3 = 1/2$ y $a_5 = 1/40$, para garantizar que por lo menos dos de las raíces sean reales y positivas.

■

3.6. Estabilidad Estructural. El Teorema de Peixoto.

La idea de que un sistema es estructuralmente estable significa que éste no pierde sus propiedades cualitativas bajo pequeñas perturbaciones o cambios en las funciones involucradas en su definición. Es ésta una cuestión esencial en sistemas físicos pues éstos deben ser estructuralmente estables.

Empezaremos dando unas definiciones básicas para terminar enunciando el teorema de Peixoto.

Dada una aplicación $F \in C^r(\mathbb{R}^n)$ vamos a precisar lo que entendemos por una perturbación G de F .

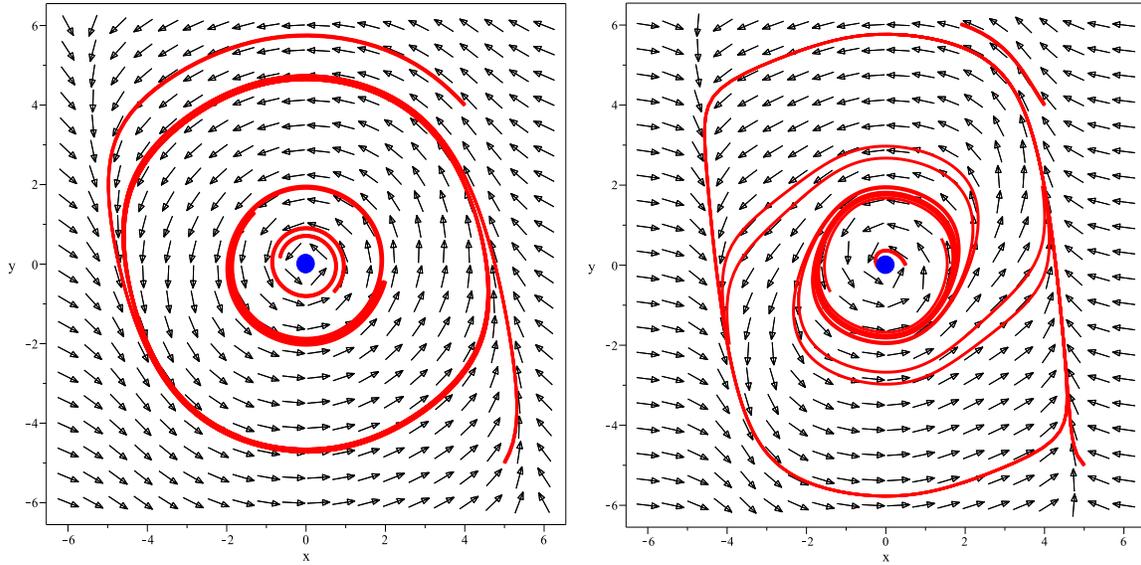


Figura 3.17: Espacio de fases del sistema (3.38) cuando $\epsilon = 0,1$ (figura de la izquierda) y cuando $\epsilon = 0,5$ (figura de la derecha). Las figuras han sido generadas con $a_1 = -1$, $a_3 = 1/2$ y $a_5 = 1/40$.

Definición 3.6.1 Si $F \in C^r(\mathbb{R}^n)$, $r, k \in \mathbb{Z}^+$; $k \leq r$ y $\epsilon > 0 \implies G$ es una C^r ϵ -perturbación si existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $F = G|_{\mathbb{R}^n - K}$ y $\forall (i_1, \dots, i_n)$ tal que $\sum_j i_j = i \leq k$ tenemos que

$$\left| \frac{\partial^i}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} (F - G) \right| < \epsilon.$$

Observación 3.6.1 En esta definición F y G pueden ser tanto campos como funciones.

Recordemos ahora el concepto de topológicamente (diferenciablemente) equivalentes, conceptos éstos introducidos en el primer capítulo.

Definición 3.6.2 Dos campos F y G son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo h tal que $h \cdot F = G \cdot h$.

Definición 3.6.3 Dos campos F y G son diferenciablemente equivalentes si existe un difeomorfismo h que lleva órbitas de $\phi_t^F \rightarrow \phi_t^G$ (órbitas del flujo de F en órbitas del flujo de G) preservando orientación pero no necesariamente las parametrizaciones por t .

Por último introducimos la definición de estabilidad estructural.

Definición 3.6.4 $f \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es estructuralmente estable si existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall \epsilon$ -perturbación C^1 de f es topológicamente equivalente a f .

Observación 3.6.2 i.e. el campo f y su perturbado son topológicamente equivalentes.

Se observa que campos con singularidades no hiperbólicas no pueden ser estructuralmente estables. La misma consideración se puede hacer para órbitas periódicas. por lo tanto se puede esperar que un sistema será estructuralmente estable sii todas sus singularidades y órbitas cerradas son hiperbólicas.

Teorema 3.6.1 (Peixoto). Un campo C^r sobre una variedad compacta M ($\dim M = 2$) es estructuralmente estable sii

1. El número de puntos fijos y órbitas cerradas es finito y cada una de ellas es hiperbólica.
2. No existen órbitas conectando puntos de sillas.

3. El conjunto *nonwandering* sólo contiene puntos fijos y órbitas periódicas.

Más aún. Si M es orientable, entonces el conjunto de campos vectoriales estructuralmente estable es abierto y denso en $\mathfrak{X}(M)$.

Observación 3.6.3 (1) y (2) \implies (3) ya que no puede haber otros conjuntos límite que puntos fijos, órbitas cerradas y ciclos homoclínicos, pero estos últimos están excluidos por (2).

Este teorema implica que un campo típico contendrá sólo fuentes sumideros, puntos de silla y órbitas cerradas y repulsivas en un conjunto invariante.

En el importante caso de los sistemas dinámicos gradientes existe un teorema para $\dim M \geq 2$.

Teorema 3.6.2 El conjunto de sistemas gradientes con singularidades hiperbólicas es estructuralmente estable.

Capítulo 4

Los Ejemplos Típicos.

4.1. Especies en competencia.

Dada la ecuación

$$A := x' = x(a - bx - cy)$$

$$B := y' = y(d - ex - fy)$$

donde a, b, c, d, e, f son constantes positivas, vemos que sus singularidades son:

$$S_1 = (0, 0), \quad S_2 = \left(0, \frac{d}{f}\right), \quad S_3 = \left(\frac{a}{b}, 0\right), \quad S_4 = \left(\frac{fa - dc}{bf - ec}, \frac{db - ea}{bf - ec}\right)$$

debemos distinguir dos casos:

1. C_1, C_2 y C_3 son negativas,
2. C_1, C_2 y C_3 son positivas,

donde

$$C_1 = fa - dc, \quad C_2 = bf - ec \quad y \quad C_3 = db - ea$$

Por el teorema de Hartmann no es difícil saber si el punto es estable o no:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2bx - cy & -cx \\ -ey & d - ex - 2fy \end{pmatrix}$$

estudiaremos los casos.

1. En el caso en el que las constantes C_1, C_2 y C_3 son negativos vemos que las singularidades $(S_i)_{i=1}^4$ tienen el siguiente caracter:

$$S_1 = (0, 0),$$

$$\mathcal{L}(S_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

es un punto inestable ya que a y d son positivas.

$$S_2 = \left(0, \frac{d}{f}\right),$$

$$\mathcal{L}(S_2) = \begin{pmatrix} a - c\frac{d}{f} & 0 \\ -\frac{d}{f}e & -d \end{pmatrix}$$

donde sus autovalores son: $\sigma(\lambda) = \left\{-d, \frac{fa-dc}{f}\right\}$, con $C_1 = fa - dc < 0$ por lo tanto ambos autovalores son negativos y por lo tanto S_2 es un punto asintóticamente estable.

$$S_3 = \left(\frac{a}{b}, 0 \right),$$

$$\mathcal{L}(S_3) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{a}{b}c \\ 0 & d - e\frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

donde sus autovalores son: $\sigma(\lambda) = \left\{ -a, \frac{db-ea}{b} \right\}$, con $C_3 = db - ea < 0$ por lo tanto ambos autovalores son negativos y por lo tanto S_3 es un punto asintóticamente estable.

$$S_4 = \left(\frac{fa-dc}{bf-ec}, \frac{db-ea}{bf-ec} \right),$$

$$\mathcal{L}(S_4) = \begin{pmatrix} b\frac{fa-dc}{-bf+ec} & -\frac{fa-dc}{bf-ec}c \\ -e\frac{-db+ea}{-bf+ec} & -f\frac{-db+ea}{-bf+ec} \end{pmatrix} = -\frac{1}{C_2} \begin{pmatrix} bC_1 & cC_1 \\ eC_3 & fC_3 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son:

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{1}{2}bC_1 - \frac{1}{2}fC_3 + \frac{1}{2}\sqrt{(b^2C_1^2 - 2bC_1fC_3 + f^2C_3^2 + 4eC_3cC_1)}}{C_2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{1}{2}bC_1 - \frac{1}{2}fC_3 - \frac{1}{2}\sqrt{(b^2C_1^2 - 2bC_1fC_3 + f^2C_3^2 + 4eC_3cC_1)}}{C_2}$$

por lo tanto es un punto de silla.

En este caso vemos que una de las dos especies se extingue. Para este caso se verifica la relación: $ce > bf$.

2. En este caso las constantes C_1, C_2 y C_3 son positivas, por lo tanto si realizamos el mismo análisis que para el caso anterior obtenemos que:

$$S_1 = (0, 0),$$

$$\mathcal{L}(S_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

es un punto inestable ya que a y d son positivas.

$$S_2 = \left(0, \frac{d}{f} \right),$$

$$\mathcal{L}(S_2) = \begin{pmatrix} a - c\frac{d}{f} & 0 \\ -\frac{d}{f}e & -d \end{pmatrix}$$

donde sus autovalores son: $\sigma(\lambda) = \left\{ -d, \frac{fa-dc}{f} \right\}$, con $C_1 = fa - dc > 0$ por lo tanto uno de los autovalores es positivo mientras que el otro es negativo, de esta forma S_2 es un punto de silla. El autovector asociado a $\lambda = -d$ es: $V_\lambda = \{(0, 1)\}$ que genera la subvariedad estable, mientras que el autovector asociado al autovalor positivo: $\lambda = \frac{fa-dc}{f}$ es: $V_\lambda = \left\{ \left(-\frac{1}{de}(df + af - cd), 1 \right) \right\}$ que genera la subvariedad inestable.

$$S_3 = \left(\frac{a}{b}, 0 \right),$$

$$\mathcal{L}(S_3) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{a}{b}c \\ 0 & d - e\frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

donde sus autovalores son: $\sigma(\lambda) = \left\{ -a, \frac{db-ea}{b} \right\}$, con $C_3 = db - ea > 0$ por lo tanto uno de los autovalores es positivo mientras que el otro es negativo, de esta forma S_3 es un punto de silla. El autovector asociado a $\lambda = -a$ es: $V_\lambda = \{(1, 0)\}$ que genera la subvariedad estable, mientras que el autovector asociado al autovalor positivo: $\lambda = \frac{db-ea}{b}$ es: $V_\lambda = \left\{ \left(1, -\frac{1}{ac}(db - ea + ab) \right) \right\}$ que genera la subvariedad inestable.

$$S_4 = \left(\frac{fa-dc}{bf-ec}, \frac{db-ea}{bf-ec} \right),$$

$$\mathcal{L}(S_4) = \begin{pmatrix} b\frac{fa-dc}{-bf+ec} & -\frac{fa-dc}{bf-ec}c \\ -e\frac{-db+ea}{-bf+ec} & -f\frac{-db+ea}{-bf+ec} \end{pmatrix} = -\frac{1}{C_2} \begin{pmatrix} bC_1 & cC_1 \\ eC_3 & fC_3 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son:

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{1}{2}bC_1 - \frac{1}{2}fC_3 + \frac{1}{2}\sqrt{(b^2C_1^2 - 2bC_1fC_3 + f^2C_3^2 + 4eC_3cC_1)}}{C_2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{1}{2}bC_1 - \frac{1}{2}fC_3 - \frac{1}{2}\sqrt{(b^2C_1^2 - 2bC_1fC_3 + f^2C_3^2 + 4eC_3cC_1)}}{C_2}$$

por lo tanto es un punto asintóticamente estable..

En este caso vemos que una de las dos especies coexisten. Para este caso se verifica la relación: $ce < bf$.

Este modelo general de competencia entre especies queda resumido de la siguiente manera: Cuando $ce > bf$, no es posible la coexistencia de las dos especies y por lo tanto una de ellas debe desaparecer, mientras que si se verifica la relación $ce < bf$, vemos que ambas especies pueden coexistir. Las constantes b, f son una medida del efecto inhibitor que el desarrollo de cada especie tiene sobre su propia tasa de crecimiento mientras que las constantes c, e son una medida del efecto inhibitor que el desarrollo de cada especie tiene sobre la otra especie i.e. es una medida de la competencia.

Ejemplo 4.1.1 Estudiar el sistema:

$$\begin{cases} x' = x(60 - 3x - 4y) \\ y' = y(42 - 2x - 3y) \end{cases}$$

Solución. Las singularidades son:

$$S_1 = \{0, 0\}, S_2 = \{20, 0\}, S_3 = \{0, 14\}, S_4 = \{12, 6\}$$

linealizamos el sistema

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 60 - 6x - 4y & -4x \\ -2y & 42 - 2x - 6y \end{pmatrix}$$

por lo tanto:

$$S_1 = \{0, 0\}$$

$$\mathcal{L}(S_0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$$

es un punto inestable,

$$S_2 = \{20, 0\}$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es un punto de silla siendo los autovectores:

$$V_{-60} = \{(1, 0)\}, V_2 = \{(-\frac{40}{31}, 1)\}$$

V_{-60} genera la subvariedad estable.

$$S_3 = \{0, 14\}$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$$

es un punto de silla siendo los autovectores:

$$V_{-42} = \{(0, 1)\}, V_4 = \{(-\frac{23}{14}, 1)\}$$

V_{-42} genera la subvariedad estable.

$$S_4 = \{12, 6\}$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -27 + 3\sqrt{73} & 0 \\ 0 & -27 - 3\sqrt{73} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,368 & 0 \\ 0 & -52,632 \end{pmatrix}$$

por lo tanto se trata de un punto asintóticamente estable.

Vemos que en este ejemplo las dos especies coexisten de forma estable. ■

Ejemplo 4.1.2 Estudiar el sistema:

$$\begin{cases} x' = x(60 - 4x - 3y) \\ y' = y(42 - 2y - 3x) \end{cases} \quad (4.1)$$

Solución. En primer lugar calculamos sus singularidades siendo éstas:

$$P_1 = (0,0), P_2 = (0,21), P_3 = (15,0), P_4 = (6,12) \quad (4.2)$$

vemos que el punto $P_4 = (6,12) = (60 - 4x - 3y) \cap (42 - 2y - 3x)$.

Linealizamos (Hartmann):

$$L = \begin{pmatrix} 60 - 8x - 3y & -3x \\ -3y & 42 - 4y - 3x \end{pmatrix}$$

1. $P_1 = (0,0)$

$$L(P_1 = (0,0)) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$$

es inestable.

2. $P_2 = (0,21)$

$$L = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -63 & -42 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -63 & -42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{21}{13} & \frac{21}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{13}{21} \end{pmatrix}$$

asintóticamente estable.

3. $P_3 = (15,0)$

$$L = \begin{pmatrix} -60 & -45 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -60 & -45 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{19} & \frac{15}{19} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{19}{15} & 1 \end{pmatrix}$$

asintóticamente estable

4. $P_4 = (6,12)$

$$L = \begin{pmatrix} -24 & -18 \\ -36 & -24 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,4558 & 0 \\ 0 & -49,456 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -24 + 18\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -24 - 18\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

un punto de silla.

Veamos como es el campo (ver Fig.-4.1)

■

Ejemplo 4.1.3 Vamos a estudiar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = x(2 - 2x + y) \\ y' = y(1 - y + x) \end{cases} \quad (4.3)$$

Solución. En primer lugar calculamos sus singularidades siendo éstas:

$$P_1 = (0,0), P_2 = (0,1), P_3 = (1,0), P_4 = (3,4) \quad (4.4)$$

vemos que el punto $P_4 = (3,4) = (2 - 2x + y) \cap (1 - y + x)$.

Linealizamos (Hartmann):

$$L = \begin{pmatrix} 2 - 4x + y & x \\ y & 1 - 2y + x \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Vamos a estudiar cada uno de estos puntos:

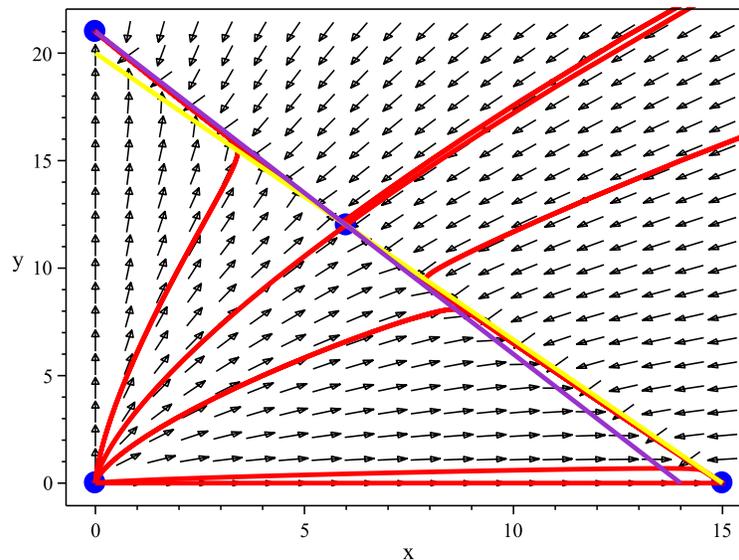


Figura 4.1: Espacio de fases del sistema (4.1)

1. $P_1 = (0,0)$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vemos que se trata de un punto inestable (fuente o un repellor).

2. $P_2 = (1,0)$

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto es un punto de silla.

3. $P_3 = (0,1)$

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tratándose de otro punto de silla.

4. $P_4 = (3,4)$

$$L = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -5 + \sqrt{13} & 0 \\ 0 & -5 - \sqrt{13} \end{pmatrix}$$

donde los autovectores son

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{13} \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -5 + \sqrt{13}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{13} \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -5 - \sqrt{13}$$

como podemos comprobar este punto es un atractor o punto estable.

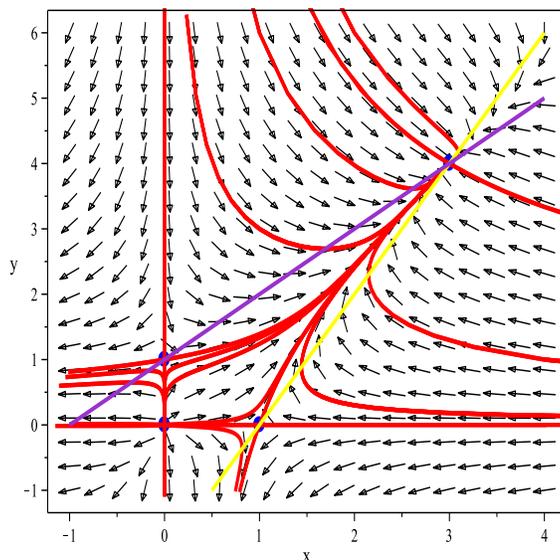


Figura 4.2: Campo de direcciones y espacio de fases

El gráfico del campo es el siguiente (ver Fig.-4.2)

■

Ejemplo 4.1.4 Vamos a estudiar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = x(6 - 3x - 2y) \\ y' = y(5 - x - y) \end{cases} \quad (4.6)$$

Solución. En primer lugar calculamos sus singularidades siendo éstas:

$$P_1 = (0,0), P_2 = (2,0), P_3 = (0,5), P_4 = (-4,9) \quad (4.7)$$

vemos que el punto $P_4 = (-4,9) = (6 - 3x - 2y) \cap (5 - x - y)$.

Linealizamos (Hartmann):

$$L = \begin{pmatrix} 6 - 6x - 2y & -2x \\ -y & 5 - x - 2y \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Vamos a estudiar cada uno de estos puntos:

1. $P_1 = (0,0)$

$$L = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

vemos que se trata de un punto inestable (fuente o un repellor).

2. $P_2 = (2,0)$

$$L = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto es un punto de silla.

3. $P_3 = (0,5)$

$$L = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

tratándose de otro punto estable.

4. $P_4 = (-4, 9)$

$$L = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -9 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{17} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{17} \end{pmatrix}$$

donde los autovectores son:

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{17} \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{17}, \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{17} \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{17}$$

como podemos comprobar este punto es un punto de silla.

El gráfico del campo es el siguiente (ver Fig.-4.3)

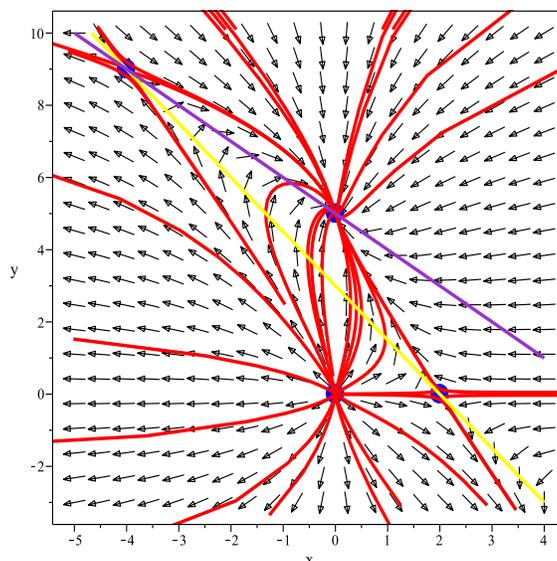


Figura 4.3: Campo de direcciones y espacio de fases

■

4.1.1. Modelo presa-depredador. Lotka-Volterra.

Consideremos el caso en el que una especie es depredadora y que la otra es una presa de ésta, por ejemplo $x(t)$ representa la presa mientras que $y(t)$ el depredador. El modelo que rige este comportamiento viene descrito por las siguientes ecuaciones:

$$x'(t) = x(a - by)$$

$$y'(t) = y(-c + dx)$$

donde las constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, a y c miden la tasa de crecimiento de la presa y la mortalidad del depredador respectivamente y b y d son medidas del efecto de la interacción entre las dos especies.

Si efectuamos el análisis correspondiente de este sistema vemos que sus puntos críticos son:

$$S_1 = \{x = 0, y = 0\}, \quad S_2 = \left\{x = \frac{c}{d}, y = \frac{a}{b}\right\}$$

linealizando el sistema, obtenemos:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

por lo tanto el caracter del punto S_1 es:

$$S_1 = \{x = 0, y = 0\}$$

$$\mathcal{L}(S_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

es un punto de silla. Las subvariedad estable esta generada por el autovector asociado al autovalor $-c$ siendo éste: $V_{-c} = \{(0, 1)\}$, mientras que la subvariedad inestable está generada por el autovector a ; $V_a = \{(1, 0)\}$.

Con respecto al punto $S_2 = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ vemos que

$$\mathcal{L}(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & -b\frac{c}{d} \\ d\frac{a}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son: $\sigma(\lambda) = \{\sqrt{-ca}, -\sqrt{-ca}\}$, por lo tanto nuestro teorema de linealización no se puede aplicar en este caso ya que los autovalores son imaginarios puros.

Sin embargo, para conocer el caracter del punto singular S_2 podemos proceder de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}$$

separamos variables

$$\left(\frac{a - by}{y}\right) dy = \left(\frac{-c + dx}{x}\right) dx$$

integrando obtenemos:

$$a \ln y - by + c \ln x - dx = K$$

que como se observa es la gráfica de una curva cerrada, por lo tanto el punto S_2 es un nodo estable (ver 4.4).

Intentaremos encontrar la función de Lyapunov L . Esta vez seguiremos una táctica algo distinta alimitar el artificio de separación de variables. Estamos buscando una función de la forma:

$$L(x, y) = F(x) + G(y) \quad / \quad L' \leq 0,$$

donde

$$L'(x, y) = \frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) = \partial_x F x' + \partial_y G y'$$

y por lo tanto:

$$L'(x, y) = x\partial_x F(a - by) + y\partial_y G(-c + dx).$$

Obtenemos $L' = 0$ supuesto que

$$\frac{x\partial_x F}{(-c + dx)} = \frac{y\partial_y G}{(by - a)}$$

puesto que x e y son variables independientes, eso es posible sii

$$\frac{x\partial_x F}{(-c + dx)} = \frac{y\partial_y G}{(by - a)} = const.$$

haciendo que la constante sea igual a 1 resulta:

$$\begin{cases} \partial_x F = d - \frac{c}{x} \implies F(x) = dx - c \ln x \\ \partial_y G = b - \frac{a}{y} \implies G(y) = by - a \ln y \end{cases}$$

por lo tanto

$$L(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y$$

de esta forma vemos que la función $L(x, y)$ está definida para todo $x, y > 0$ y es constante sobre las curvas solución del sistema de Lotka-Volterra. Vemos por lo tanto que la singularidad $S_2 = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ es un mínimo absoluto para nuestra función de Lyapunov L i.e.

$$\partial_x L = d - \frac{c}{x}, \quad \partial_y L = b - \frac{a}{y},$$

$$H(L) = \begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix} \implies H(L_{S_2}) = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{c} & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

en consecuencia es un punto singular estable.

Obsérvese que no hay ciclos límite ya que L no es constante en ningún conjunto abierto, tenemos por lo tanto el siguiente resultado.

Teorema 4.1.1 *Toda trayectoria de la ecuación de Lotka-Volterra es una órbita cerrada, excepto el punto de equilibrio S_2 y los ejes coordenados.*

Los depredadores y las presas tienen una variación cíclica al rededor del punto crítico. Mediante perturbaciones podemos llegar a la siguiente solución:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c}{d} + \frac{c}{d}K \cos(\sqrt{ac}t + \phi) \\ y(t) &= \frac{a}{b} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{c}{a}}K \sin(\sqrt{ac}t + \phi) \end{aligned}$$

estas ecuaciones son válidas para las trayectorias cercanas a S_2 , de ellas sacamos las siguientes conclusiones:

- El tamaño de las poblaciones tienen un periodo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$$

este periodo de oscilaciones es independiente de las condiciones iniciales,

- las poblaciones se desfasan en un cuarto de ciclo,
- las amplitudes de las oscilaciones son:

$$\begin{aligned} \text{Presa:} & \quad A_x = \frac{Kc}{d} \\ \text{Depredador:} & \quad A_y = \frac{a\sqrt{c}K}{b\sqrt{a}} \end{aligned}$$

que dependen de las condiciones iniciales.

En general vemos que si $x_0, y_0 > 0$ entonces $x(t), y(t) > 0 \forall t$, por lo tanto ambas poblaciones sobreviven en mutua coexistencia. Excepción: si las fluctuaciones son tan amplias que $x(t)$ llegue a estar cerca de cero existe la posibilidad de que las últimas presas lleguen a ser devoradas lo que conduciría a la desaparición de ambas especies.

Este tipo de sistemas son estructuralmente inestables ya que la más mínima perturbación introducida en el sistema hace que cambie el comportamiento cualitativo del sistema.

4.2. El Péndulo.

4.2.1. El péndulo sin rozamiento.

La ecuación del péndulo sin rozamiento viene dada por la siguiente expresión:

$$x'' = -\sin x(t), \tag{4.9}$$

que podemos reescribir como el sistema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \end{cases} \tag{4.10}$$

viendo de forma inmediata que se trata de un sistema Hamiltoniano.

Las singularidades del sistema (4.10) son:

$$S_i = (i\pi, 0), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{4.11}$$

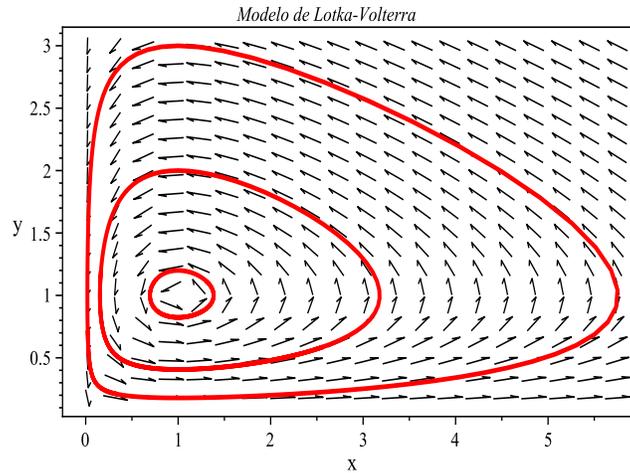


Figura 4.4: Modelo presa-depredador

Linealizamos el sistema para, a través de Hartman intentar clasificar las singularidades del sistema, de esta forma obtenemos que:

$$DX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

observándose de forma trivial que:

$$DX(S_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad i = 0, 2, 4, \dots \implies \sigma(\lambda) = \pm i \quad \text{un centro}, \quad (4.13)$$

$$DX(S_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 3, 5, \dots \implies \sigma(\lambda) = \pm 1 \quad \text{un punto de silla}. \quad (4.14)$$

Para poder clasificar (clarificar) el comportamiento de los puntos S_i con $i = 0, 2, 4, \dots$ vamos a calcular la función de Lyapunov, que en este caso será el propio Hamiltoniano del sistema, i.e.

$$H = \frac{1}{2}y^2 + \int \sin x dx = \frac{1}{2}y^2 - \cos x \quad (4.15)$$

comprobando que

$$x' = \partial_y H = y, \quad y' = -\partial_x H = -\sin x$$

así como que también se verifica el principio de conservación:

$$DH = \sum_i \partial_{x_i} H(x'_i) = \sin x(y) + y(-\sin x) = 0$$

por lo tanto deberemos, ahora, calcular el Hessiano de H (4.15), para ello:

$$\nabla H = (\sin x, y) = 0 \iff (x = i\pi, y = 0), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

como ya sabíamos, aunque sólo nos interesen los $i = 0, 2, 4, \dots$, mientras que el Hessiano viene dado por:

$$\text{Hess}(H) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \implies \text{Hess}(H)_{S_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } i = 0, 2, 4, \dots,$$

de esta forma vemos que se trata de una serie de puntos estables (asintóticamente estables) pues el Hessiano de H en estos puntos alcanza un mínimo estricto.

En la figura adjunta (4.5) encontramos el espacio de fases asociado al sistema (4.10).

Podemos también calcular la ecuación de la separatriz, órbita heteroclínica que conecta los puntos de silla, como $H(\pi, 0) = -\cos \pi = 1$, entonces la ecuación de la separatriz será:

$$\frac{1}{2}y^2 - \cos x = 1, \quad \implies y = \pm \sqrt{2(1 + \cos x)} \quad (4.16)$$

desgraciadamente la gráfica de esta ecuación no ha salido en la figura (4.5).

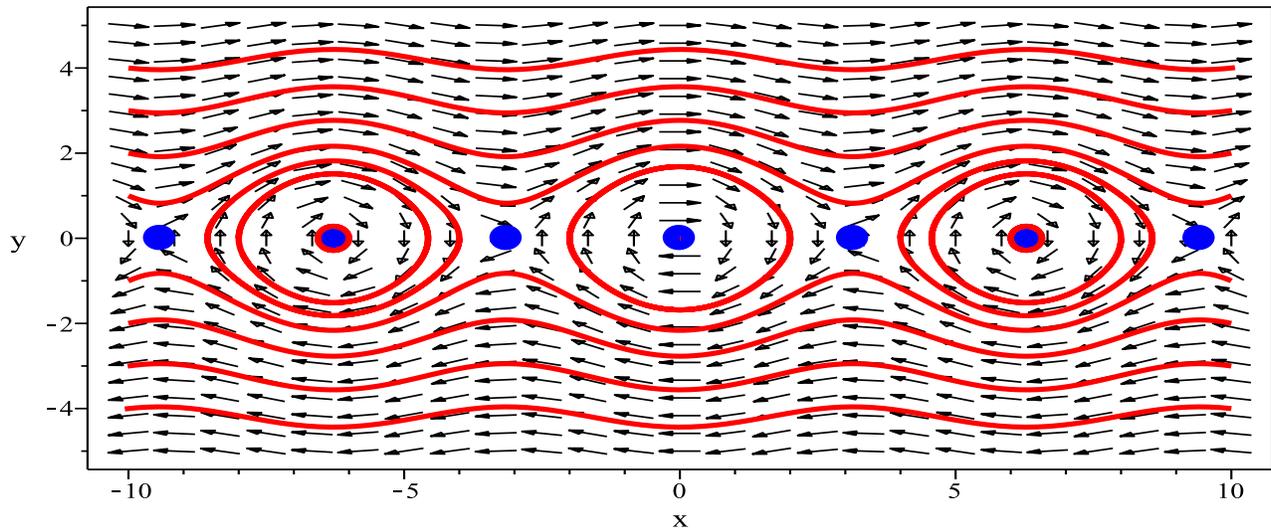


Figura 4.5: Espacio de fases del sistema (4.10)

4.2.2. Péndulo linealizado con rozamiento.

En este caso la ecuación que gobierna el fenómeno es la siguiente:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - ky \end{cases} \quad (4.17)$$

donde $k \in \mathbb{R}^+$. De forma mecánica aplicamos el procedimiento standard obteniendo que la única singularidad del sistema (4.17) es: $S_1 = (0, 0)$.

Linealizando, encontramos que el caracter topológico de S_1 depende del valor de la constante k , i.e.

$$DX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = -\frac{1}{2}k \pm \frac{1}{2}\sqrt{(k^2 - 4)} \quad (4.18)$$

por lo que deberemos distinguir los siguientes casos:

1. $k < 2$ entonces los dos autovalores son complejos i.e. $\sigma(\lambda) \in \mathbb{C}$, pero con la parte real distinta de 0, por lo tanto las trayectorias serán espirales que se aproximan al origen.
2. $k = 2$; entonces $\lambda = -1$, doble i.e. la singularidad es asintóticamente estable,
3. $k > 2$; entonces los autovalores son negativos, por lo que la singularidad será asintóticamente estable.

En la figura adjunta (4.6) vemos el espacio de fases para cada uno de los valores del parámetro k . Vemos que este ejemplo es sencillísimo, pero nos sirve para introducir la idea de bifurcación, como ecuación que depende de cierto parámetro y que en función de éste tendrá un caracter distinto.

4.2.3. Péndulo sin linealizar y con rozamiento.

En este caso la ecuación que gobierna el fenómeno es la siguiente:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x - ky \end{cases} \quad (4.19)$$

donde $k \in \mathbb{R}^+$.

Las singularidades del sistema (4.19) son:

$$S_i = (i\pi, 0), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (4.20)$$

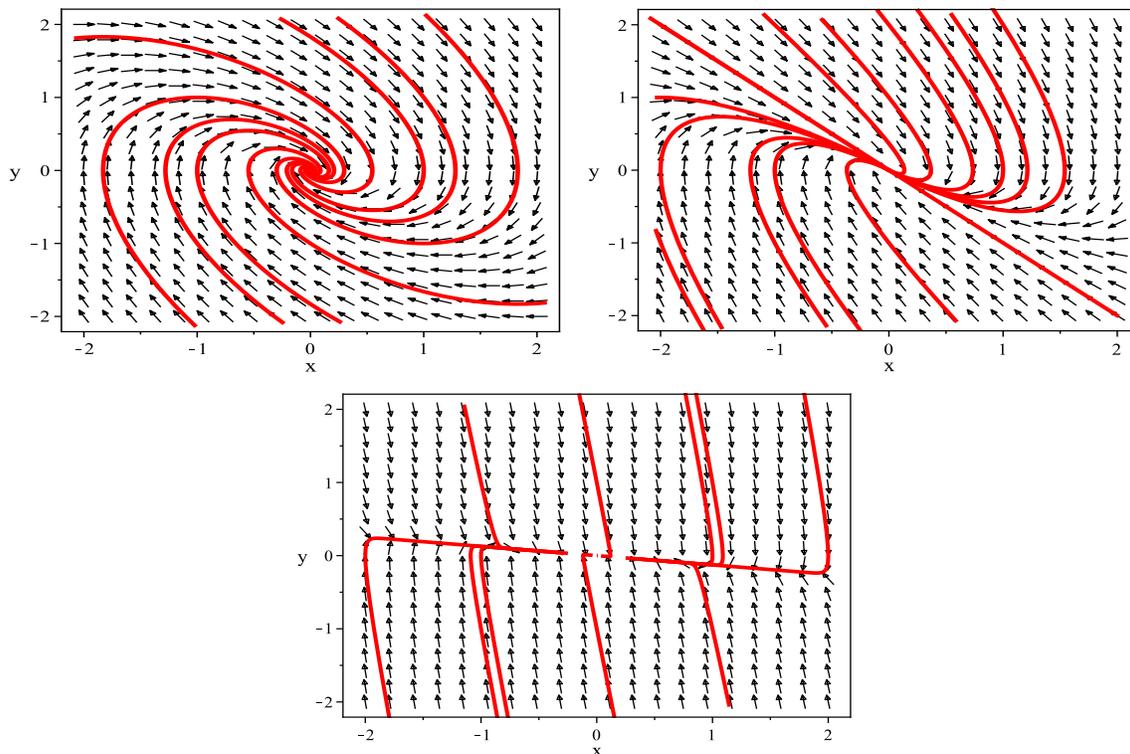


Figura 4.6: Espacio de fases del sistema (4.17) para los distintos valores de k

Linealizamos el sistema para, a través de Hartman intentar clasificar las singularidades del sistema, de esta forma obtenemos que:

$$DX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -k \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

observándose de forma trivial que:

$$DX(S_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} \quad i = 0, 2, 4, \dots \implies \sigma(\lambda) = \left(\frac{-k \pm \sqrt{(k^2 - 4)}}{2} \right), \quad (4.22)$$

como podemos observar, este es el caso estudiado en la anterior sección i.e. el péndulo linealizado con rozamiento.

Para los $i = 1, 3, 5, \dots$ (impares) tenemos que:

$$DX(S_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \quad i = 1, 3, 5, \dots \implies \sigma(\lambda) = \left(\frac{-k \pm \sqrt{(k^2 + 4)}}{2} \right). \quad (4.23)$$

donde

$$V_{\lambda_+} = \left\{ \left(\frac{k + \sqrt{(k^2 + 4)}}{2}, 1 \right) \right\}, \quad y \quad V_{\lambda_-} = \left\{ \left(\frac{k - \sqrt{(k^2 + 4)}}{2}, 1 \right) \right\}. \quad (4.24)$$

En la figura adjunta representamos el espacio de fases del sistema (4.19) con $k = 1$.

4.3. El Oscilador de Van der Pol.

Teorema 4.3.1 *La ecuación diferencial*

$$x'' + f(x', x)x' + g(x) = 0 \quad (4.25)$$

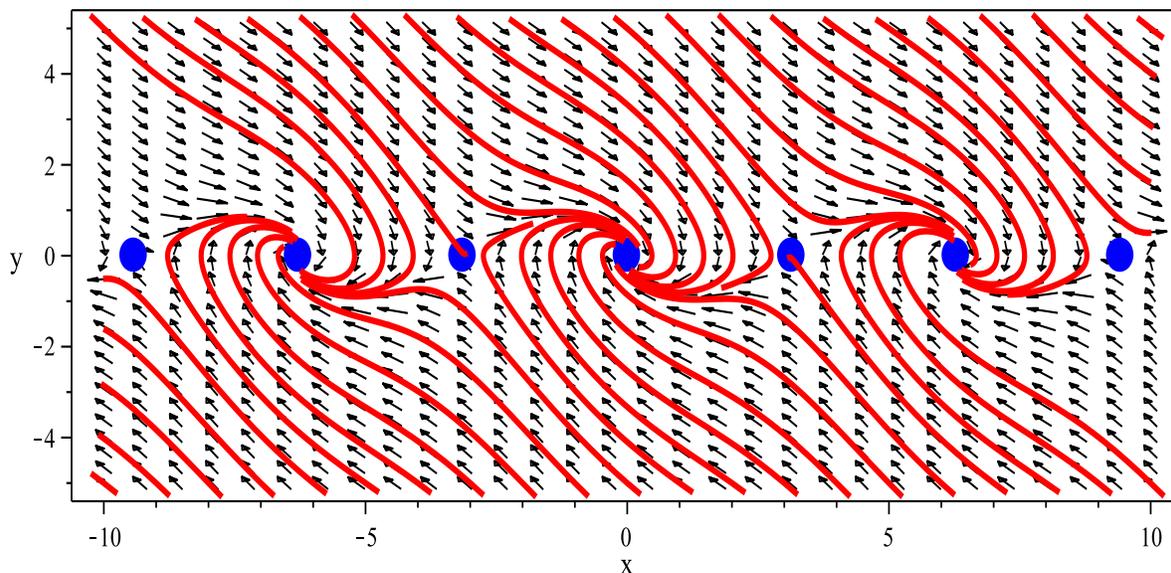


Figura 4.7: Espacio de fases del sistema (4.19)

(la ecuación de Lienard) o el sistema equivalente

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -f(x,y)y - g(x)\end{aligned}$$

con $f, g \in C$, tiene al menos una solución periódica bajo las siguientes condiciones:

1. $\exists a > 0$; $f(x,y) > 0$ cuando $\sqrt{x^2 + y^2} > a$,
2. $f(0,0) < 0$,
3. $g(0) = 0$, con $g(x) > 0$ cuando $x > 0$ y $g(x) < 0$ cuando $x < 0$,
4. $G(x) = \int_0^x g(u)du \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

El teorema nos dice que cerca del origen, el coeficiente de amortiguamiento f es negativo esperando entonces que las órbitas, espirales, se alejan del origen debido a la entrada de la energía. Mientras que cuando $f > 0$, haya pérdida de energía de tal forma que las órbitas espirale se acerquen al origen. Entre ambas familias se espera encontrar un ciclo límite.

Ejemplo 4.3.1 Demostrar que la ecuación:

$$x'' + (x^2 + x'^2 - 1)x' + x^3 = 0 \tag{4.26}$$

tiene un ciclo límite.

Solución. Aplicando al pie de la letra el teorema anteriormente expuesto vemos que:

$$f(x) = x^2 + y^2 - 1, \quad g(x) = x^3 \implies G(x) = \frac{1}{4}x^4,$$

el sistema equivalente a la ecuación (4.26) es:

$$\begin{cases}x' = y \\y' = -x^3 - (x^2 + y^2 - 1)y\end{cases}$$

cuya única singularidad real es: $S_1 = (0,75488, 0)$, las otras dos singularidades son imaginarias. Linealizando vemos que:

$$DX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3x^2 - 2x & -2y \end{pmatrix} \implies DX_{S_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3,2193 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(\lambda) = (1,7i, -1,7i)$$

i.e. autovalores imaginarios puros.

Por la tercera y cuarta condición del teorema tenemos que:

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 = c,$$

esta función representa la energía total del sistema. Esta familia de curvas ($c > 0$) encierran el origen. Cuando $c \rightarrow 0$ entonces $E(x, y) \rightarrow 0$ y cuando $c \rightarrow \infty$ entonces $E \rightarrow \infty$. La solución periódica estará localizada, por el teorema, entre las curvas c_1 y c_2 tal que la curva c_1 es interior y c_2 exterior a $x^2 + y^2 - 1 = 0$, pero tales curvas deben estar sujetas a la restricción $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 = c$. el cálculo por medio de los multiplicadores de Lagrange da: $c = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$ respectivamente. ■

Ha sido desarrollado un criterio más práctico que garantiza la existencia de trayectorias cerradas para toda ecuación de la forma

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0, \quad (4.27)$$

caso particular de la ecuación de Lienard.

Al hablar de una trayectoria cerrada para tal ecuación queremos decir una trayectoria cerrada del sistema equivalente

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -f(x)y - g(x), \end{aligned} \quad (4.28)$$

tenemos el siguiente teorema que nos garantiza la existencia de un centro.

Teorema 4.3.2 El sistema (4.28) tiene un centro en el origen cuando para $U \in \text{Ent}(0)$, $f, g \in \mathcal{C}$ y

1. $f(x)$ es impar y no cambia de signo en el semiplano $x > 0$,
2. $g(x)$ impar tal que $g(x) > 0, x > 0$ lo que implica $g(0) = 0$,
3. $g(x) > \alpha f(x)F(x), \forall x > 0$ donde $F(x) = \int_0^x f(u)du$ y $\alpha > 1$.

Ejemplo 4.3.2 Demostrar que la ecuación:

$$x'' + xx' + x^3 = 0 \quad (4.29)$$

tiene un centro en el origen.

Solución. Aplicando al pie de la letra el teorema anteriormente expuesto vemos que:

$$f(x) = x, \implies F(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad g(x) = x^3$$

por lo que

$$x^3 > \alpha x \frac{1}{2}x^2 = \alpha \frac{1}{2}x^3 \implies g(x) - \alpha f(x)F(x) = \frac{1}{2}x^3(2 - \alpha)$$

por lo tanto si $\alpha \in (1, 2)$ entonces el origen es un centro. ■

Un teorema sobre la existencia de un ciclo límite.

Consideramos la ecuación $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$, con $f > 0$ cuando $|x|$ es grande y $f < 0$ cuando $|x|$ es pequeño y g es de tal forma que en ausencia del término de amortiguamiento f entonces esperamos soluciones periódicas para valores pequeños de x .

La ecuación de Van der Pol es un ejemplo típico de este tipo de ecuaciones

$$x'' + \beta(x^2 - 1)x' + x = 0 \quad \text{con } \beta > 0, \quad (4.30)$$

el teorema que enunciamos a continuación nos dice que nos vamos a encontrar espirales que se enrollan en torno a un ciclo límite.

En esta ocasión el plano de fases está dado por el sistema (el plano de Lienard):

$$\begin{cases} x' = y - F(x) \\ y' = -g(x) \end{cases} \quad \text{con } F = \int_0^x f(u)du \quad (4.31)$$

donde con esta transformación hemos conseguido que el origen sea un foco o un centro no degenerado.

Teorema 4.3.3 La ecuación $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$ tiene una única solución periódica si $f, g \in C$ tales que

1. $g(x)$ impar tal que $g(x) > 0, x > 0$,
2. $F(x) = \int_0^x f(u)du$ es impar y tiene exactamente un cero positivo en $x = a$, esto implica que $f(x)$ es función par, $f(0) < 0$ y $f > 0$ para todo $x > a$.

Ejemplo 4.3.3 Demostrar que la ecuación de Van der Pol:

$$x'' + \beta(x^2 - 1)x' + x = 0, \quad \beta > 0, \quad (4.32)$$

tiene un ciclo límite.

Solución. Aplicando al pie de la letra el teorema anteriormente expuesto vemos que:

$$f(x) = \beta(x^2 - 1), \implies F(x) = \beta x \left(\frac{1}{3}x^2 - 1 \right),$$

y $g(x) = x$, es impar tal que $g(x) > 0, x > 0$, por lo que las condiciones del teorema son satisfechas con $a = \sqrt{3}$. Por lo tanto el sistema

$$\begin{cases} x' = y - \beta x \left(\frac{1}{3}x^2 - 1 \right) \\ y' = -x \end{cases}$$

tiene un ciclo límite. ■

Consideremos el sistema polinomial general

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (4.33)$$

donde P, Q son polinomios en (x, y) . Sea $X = (P, Q) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ el campo asociado. Sea Γ un ciclo límite del sistema con periodo T .

Definición 4.3.1 La magnitud

$$\int_{\Gamma} \text{div} X dt$$

se denomina el exponente característico.

Teorema 4.3.4 Supongamos que

$$\int_{\Gamma} \text{div} X dt = \int_0^T (\partial_x P + \partial_y Q)(x(t), y(t)) dt$$

entonces:

1. Γ es un ciclo límite hiperbólico atractivo si $\int_{\Gamma} \text{div} X dt < 0$,
2. Γ es un ciclo límite hiperbólico repulsivo si $\int_{\Gamma} \text{div} X dt > 0$.

Teorema 4.3.5 Consideramos el sistema de Lienard

$$\begin{cases} x' = y - (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \\ y' = -x \end{cases}$$

tiene un ciclo límite hiperbólico si $a_1 a_3 < 0$.

Capítulo 5

Introducción a la teoría de la bifurcación

Índice del capítulo

5.1. Bifurcación saddle-node	96
5.2. Bifurcación transcítica	98
5.3. Bifurcación de pitchfork (encajonada)	101
5.4. Bifurcación de Hopf	104
5.5. Bifurcación hamiltoniana	110
5.6. Bifurcaciones con lazos homoclínicos	112

En el último capítulo y a lo largo de estos apuntes nos hemos encontrado con numerosos ejemplos en los que los sistemas dinámicos (SD) dependen de cierto parámetro como por ejemplo:

1. el crecimiento de la renta per cápita

$$x' = ax, \quad a \in \mathbb{R},$$

2. la frecuencia natural del oscilador armónico

$$x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = 0,$$

3. el oscilador de Van der Pol

$$x'' + \varepsilon (x^2 - 1) x' + x = 0.$$

En todos los casos el comportamiento del SD depende del parámetro de tal forma que para un valor dado, la solución puede ser estable y con el cambio del parámetro perder dicha estabilidad, en tales situaciones se dice que estamos ante una *bifurcación*. En situaciones algo más complejas se puede dar la situación en la que el SD posea dos soluciones estables, por ejemplo, diferentes condiciones iniciales pueden conducir a soluciones estables, a tales sistemas se les denomina *multiestables*. A continuación revisaremos muy brevemente algunos de los tipos de bifurcaciones para puntos críticos no hiperbólicos para ilustrar como el comportamiento cualitativo de sistemas no estructuralmente estables (recordar el teorema de Peixoto expuesto en el capítulo 3) cambia al hacer variar el parámetro.

Antes de pasar a revisar los diferentes tipos de bifurcaciones estudiaremos dos ejemplillos.

Ejemplo 5.0.4 Estudiar el sistema

$$x' = \mu x, \quad y' = -y. \tag{5.1}$$

Solución. En primer lugar calculamos las singularidades del sistema (5.1) viendo que sólo tiene una única singularidad $S = (0, 0)$, de tal forma que la parte lineal del sistema es

$$L = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto el carácter de S depende del signo de μ . De forma inmediata vemos que

1. Si $\mu < 0$ entonces S es un punto estable,
2. si $\mu = 0$ entonces S es un punto no clasificable mediante Hartman, mientras que
3. si $\mu > 0$ entonces S es un punto de silla.

De esta forma vemos que el caracter de la singularidad depende el signo del parámetro μ . ■

Ejemplo 5.0.5 Estudiar el sistema

$$x' = -\mu x + y, \quad y' = -\mu x - 3y. \quad (5.2)$$

Solución. Vemos que el sistema se puede escribir de la forma $x' = Ax$, i.e.

$$x' = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -\mu & -3 \end{pmatrix} x,$$

de tal forma que el caracter de la singularidad $S = (0,0)$ depende el signo del parámetro μ . De forma inmediata vemos que

1. Si $\mu < 0$ entonces

$$L = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \mu & -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\mu \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\mu+9)(\mu+1)} - \frac{3}{2} < 0, \quad \forall \mu \in [-1,0),$$

por lo tanto S es un punto estable,

2. si $\mu = 0$ entonces

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

por lo que S es un punto no clasificable mediante Hartman, mientras que

3. si $\mu > 0$ entonces

$$L = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -\mu & -3 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\mu \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\mu+9)(\mu+1)} - \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 < 0, \lambda_1 > 0, \quad \forall \mu \in (0, \infty),$$

S es un punto de silla.

Por lo tanto el caracter de la singularidad depende el signo del parámetro μ . ■

A continuación estudiaremos los distintos tipos de bifurcaciones.

5.1. Bifurcación saddle-node

Consideremos el siguiente SD

$$x' = \mu - x^2, \quad y' = -y, \quad (5.3)$$

encontrando que (5.3) tiene una singularidad en $S = (\pm\sqrt{\mu}, 0)$, por lo tanto encontramos las siguientes posibilidades:

1. Si $\mu < 0$ entonces el sistema (5.3) no tiene singularidades,
2. si $\mu = 0$ entonces $S = (0,0)$ es un punto no clasificable mediante Hartman (singularidad no hiperbólica), ya que

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mientras que

3. si $\mu > 0$ entonces $S_i = (\pm\sqrt{\mu}, 0)$, i.e. aparecen dos singularidades, entonceses

$$L(S_1) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L(S_2) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

viendo así que S_1 es un punto crítico estable mientras que S_2 es un punto de silla, de ahí el nombre (saddle-node), del paso de un punto estable a uno de silla.

De esta forma podemos ver (ver Fig. (5.1)) cómo cambia el espacio de fases al cambiar el signo del parámetro μ . En las siguientes figuras hemos representado precisamente estos espacios de fases cuando $\mu > 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

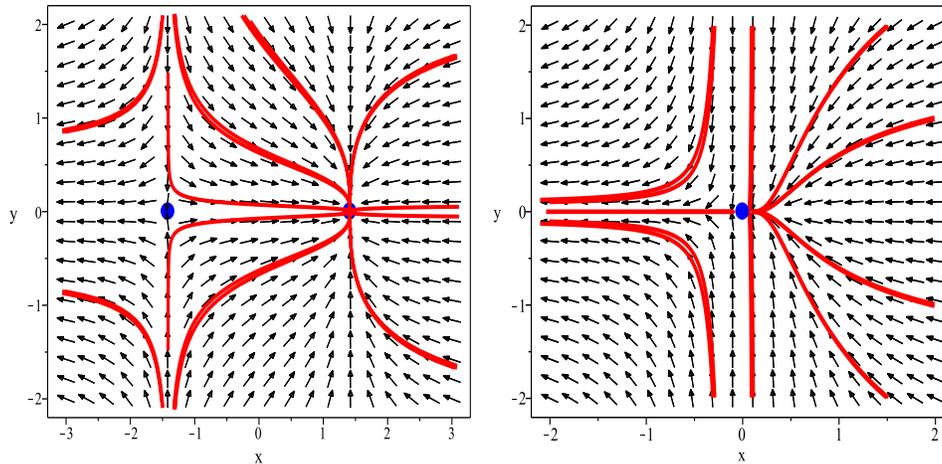


Figura 5.1: Espacio de fases del sistema (5.3) cuando $\mu > 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

En la figura adjunta (ver Fig. (5.2)) esquematizamos el caracter de este tipo de bifurcaciones en función del signo del parámetro μ .

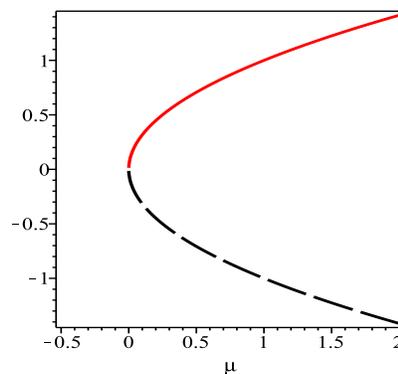


Figura 5.2: Esquema de la bifurcación saddle-node en función del signo del parámetro μ . En color rojo hemos representado los valores de μ para los cuales la solución es estable, mientras que en color negro hemos representado los valores de μ que hacen que la solución sea inestable.

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 5.1.1 Estudiar el sistema

$$x' = y, \quad y' = x^2 - y - \mu. \quad (5.4)$$

Solución. Vemos que el sistema tiene una singularidad en $S = (\pm\sqrt{\mu}, 0)$, por lo tanto encontramos las siguientes posibilidades:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x & -y \end{pmatrix},$$

1. si $\mu > 0$, entonces la parte lineal del sistema adquiere los siguientes valores

$$L(S_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\sqrt{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt[4]{4\mu},$$

$$L(S_-) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt[4]{4\mu}i,$$

donde $S_{\pm} = (\pm\sqrt{\mu}, 0)$, por lo que la singularidad S_+ es un punto de silla y S_- un nodo estable.

2. Si $\mu = 0$, entonces la parte lineal del sistema adquiere los siguientes valores

$$L(S_-) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo una singularidad no hiperbólica y no se puede clasificar mediante Hartman, por último

3. si $\mu < 0$, entonces no hay puntos de equilibrio.

De esta forma vemos que cuando $\mu = 0$ existe una bifurcación de tipo saddle-node. De esta forma podemos ver (ver Fig. (5.3)) cómo cambia el espacio de fases al cambiar el signo del parámetro μ . En las siguientes figuras hemos representado precisamente estos espacios de fases cuando $\mu < 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

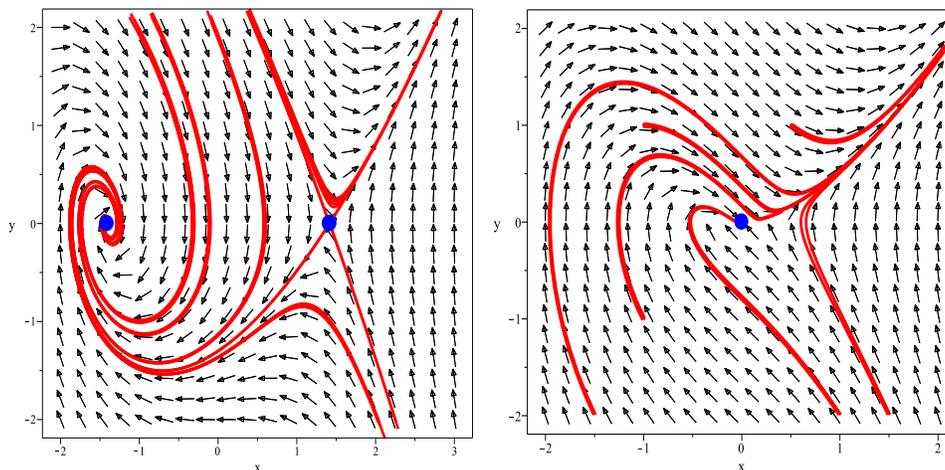


Figura 5.3: Espacio de fases del sistema (5.4) cuando $\mu < 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

■

5.2. Bifurcación transcítica

En este caso estudiaremos el siguiente sistema

$$x' = (\mu - x)x, \quad y' = -y, \quad (5.5)$$

viendo de forma inmediata que existen dos singularidades para el sistema dependiendo del valor del parámetro μ ; $S_\mu = (\mu, 0)$ y $S_0 = (0, 0)$. Si linealizamos,

$$L = \begin{pmatrix} \mu - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces podemos comprobar que:

1. si $\mu < 0$, S_- , entonces los autovalores de $L(S_-)$ son: $\lambda_1 = \mu, \lambda_2 = -1$, lo que implica que el punto en cuestión es un punto de silla mientras que el punto $S_0 = (0, 0)$ es estable
2. si $\mu > 0$, S_+ , entonces los autovalores de $L(S_+)$ son: $\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -1$, lo que implica que el punto en cuestión es estable, mientras que el punto $S_0 = (0, 0)$ pasa a ser un punto de silla
3. si $\mu = 0$, S_0 , entonces los autovalores de $L(S_0)$ son: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$, no teniendo un criterio para clasificarlo mediante Hartman, se trata del valor donde se produce la bifurcación.

En la figura adjunta (ver Fig. (5.4)) hemos representado el espacio de fases del sistema (5.5) cuando $\mu > 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu < 0$ (figura de central). Por último, la figura de la derecha representa el espacio de fases del sistema cuando $\mu = 0$.

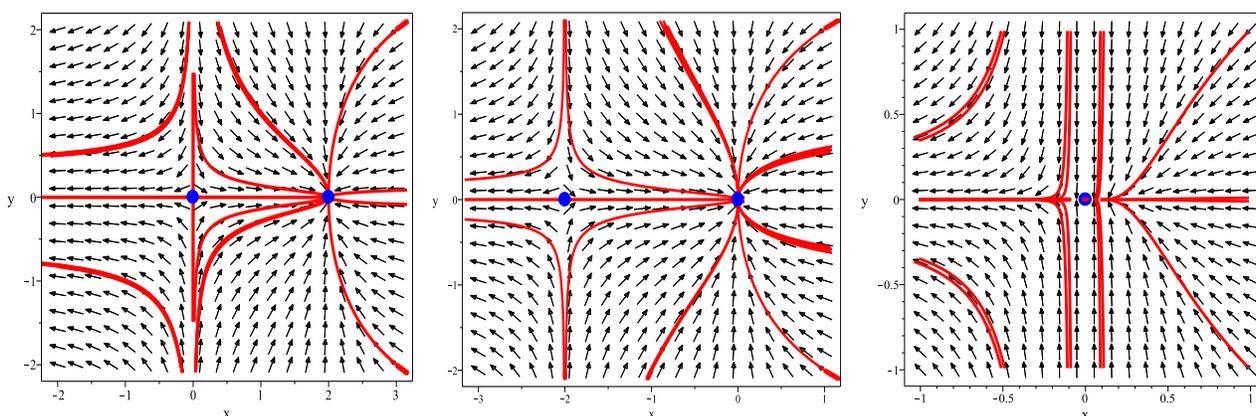


Figura 5.4: Espacio de fases del sistema (5.5) cuando $\mu > 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu < 0$ (figura de central). Por último, la figura de la derecha representa el espacio de fases del sistema cuando $\mu = 0$.

En la figura adjunta (ver Fig. (5.5)) esquematizamos el caracter de este tipo de bifurcaciones en función del signo del parámetro μ .

Ejemplo 5.2.1 Estudiar el sistema

$$x' = y, \quad y' = (\mu - x)x - y. \quad (5.6)$$

Solución. Vemos que el sistema tiene una singularidad en $S = (\mu, 0)$, y otra en el punto $S_0 = (0, 0)$, por lo tanto encontramos las siguientes posibilidades:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu - 2x & -1 \end{pmatrix},$$

1. si $\mu < 0$, digamos $\mu = -a$ con $a \in \mathbb{R}^+$, entonces la parte lineal del sistema adquiere los siguientes valores

$$L(S_-) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{a+1} \right),$$

$$L(S_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1-4a} \right),$$

por lo que la singularidad $S = (-a, 0)$, es un punto de silla mientras que el otro es estable.

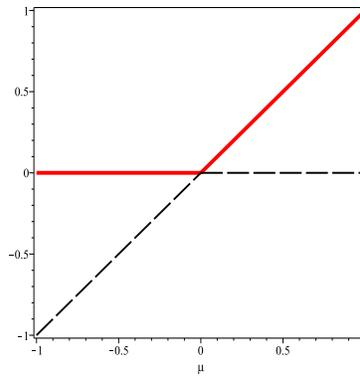


Figura 5.5: Esquema de la bifurcación transcritical en función del signo del parámetro μ . En color rojo se muestran los valores del parámetro μ donde la solución es estable mientras que color negro representamos los valores donde la solución es inestable.

2. Si $\mu = 0$, entonces la parte lineal del sistema adquiere los siguientes valores

$$L(S_-) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

siendo una singularidad no hiperbólica y no se puede clasificar mediante Hartman, por último

3. si $\mu > 0$, digamos $\mu = a$ con $a \in \mathbb{R}^+$, entonces la parte lineal del sistema adquiere los siguientes valores

$$L(S_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4a} \right),$$

$$L(S_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{a + 1} \right),$$

encontrando así la situación inversa a la del caso $\mu < 0$.

En la figura adjunta (ver Fig. (5.6)) hemos representado el espacio de fases del sistema (5.6) cuando $\mu > 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu < 0$ (figura de central). Por último, la figura de la derecha representa el espacio de fases del sistema cuando $\mu = 0$.

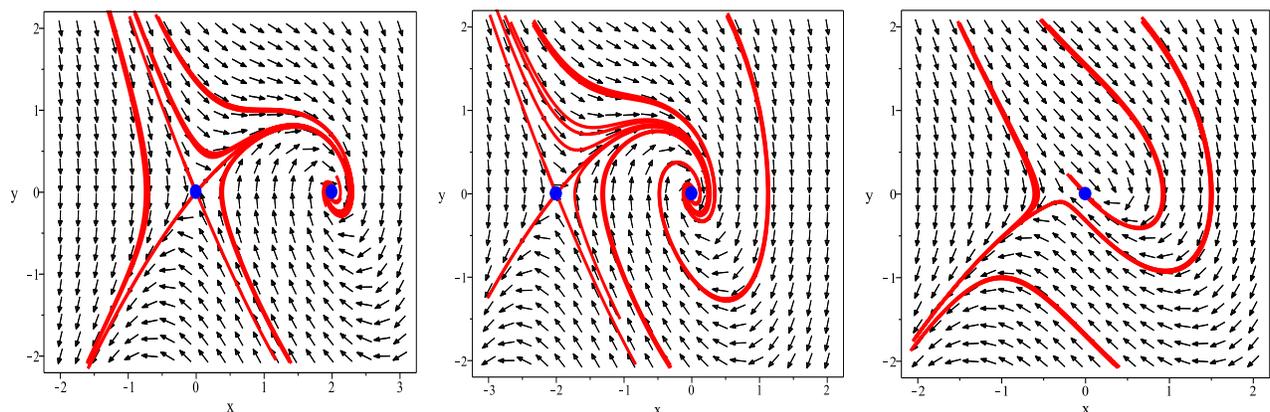


Figura 5.6: Espacio de fases del sistema (5.6) cuando $\mu > 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu < 0$ (figura de central). Por último, la figura de la derecha representa el espacio de fases del sistema cuando $\mu = 0$.

■

5.3. Bifurcación de pitchfork (encajonada)

En este caso estudiaremos el siguiente sistema

$$x' = (\mu - x^2)x, \quad y' = -y, \quad (5.7)$$

discutimos en función del signo de μ

1. si $\mu < 0$, entonces solo encontramos una única singularidad, $S_0 = (0, 0)$

$$L(S_0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que es estable

2. Si $\mu = 0$, entonces solo encontramos una única singularidad, $S_0 = (0, 0)$

$$L(S_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que no podemos clasificar, sin embargo, al tratarse de un sistema sencillo, vemos que que las curvas solución satisfacen la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^3}, \quad \implies \quad |y| = Ke^{-(2x^2)^{-1}}.$$

3. Si $\mu > 0$, entonces solo encontramos tres singularidades, $S_{\pm} = (\pm\sqrt{\mu}, 0)$, y $S_0 = (0, 0)$ tal que

$$L(S_{\pm}) = \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L(S_0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de esta forma $S_{\pm} = (\pm\sqrt{\mu}, 0)$ son estables, mientras que $S_0 = (0, 0)$ es un punto de silla.

De esta forma vemos que cuando $\mu = 0$ existe una bifurcación de tipo saddle-node. De esta forma podemos ver (ver Fig. (5.7)) cómo cambia el espacio de fases al cambiar el signo del parámetro μ . En las siguientes figuras hemos representado precisamente estos espacios de fases cuando $\mu < 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

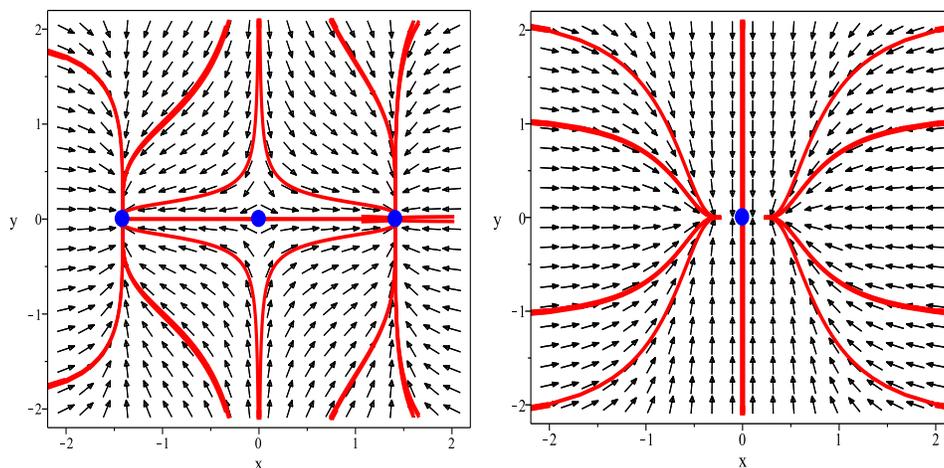


Figura 5.7: Espacio de fases del sistema (5.7) cuando $\mu < 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

En la figura adjunta (ver Fig. (5.8)) esquematizamos el caracter de este tipo de bifurcaciones en función del signo del parámetro μ .

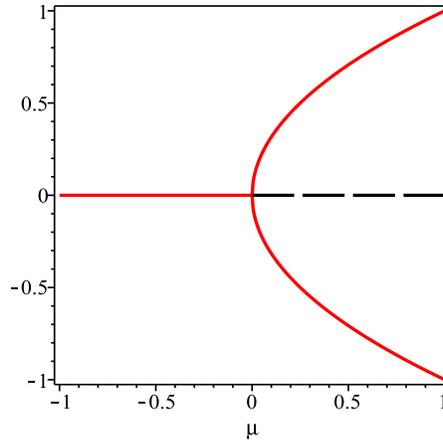


Figura 5.8: Esquema de la bifurcación pitchfork en función del signo del parámetro μ .

Ejemplo 5.3.1 Estudiar el sistema

$$x' = y, \quad y' = -\mu x - x^3 - y. \quad (5.8)$$

Solución. Vemos que el sistema tiene las siguientes singularidades:

$$S_1 = (0, 0), \quad S_{2,3} = (\pm\sqrt{-\mu}, 0),$$

por lo que $\mu \leq 0$. La parte lineal viene dada por

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu - 3x^2 & -1 \end{pmatrix},$$

de esta forma

$$L(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\mu} \right),$$

$$L(S_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\mu & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{8\mu + 1} \right),$$

por lo que si $\mu < 0$, entonces S_1 es un punto de silla mientras que $S_{2,3}$ son puntos estables al tener la parte real negativa. Habría que discutir los rangos de validez del parámetro μ de tal forma que $8\mu + 1 \geq 0$, con $\mu \leq 0$, encontrando que si $\mu \in \left[-\frac{1}{8}, 0\right]$ entonces $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{8\mu + 1} \right) \in \mathbb{R}$, en cuyo caso $\lambda_{1,2} \leq 0$.

Si $\mu = 0$, entonces aparece una única singularidad $S_1 = (0, 0)$ tal que

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \{-1, 0\},$$

a pesar de ser un punto degenerado, inclasificable mediante Hartman, vemos que se trata de un centro estable (atractivo).

En las figuras adjuntas hemos representado el espacio de fases cuando $\mu = -2$ y $\mu = 0$. De esta forma vemos que cuando $\mu = 0$ existe una bifurcación de tipo saddle-node. De esta forma podemos ver (ver Fig. (5.9)) cómo cambia el espacio de fases al cambiar el signo del parámetro μ . En las siguientes figuras hemos representado precisamente estos espacios de fases cuando $\mu < 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

■

Ejemplo 5.3.2 Estudiar el punto de bifurcación del sistema

$$x' = 2x(\mu - x) - (x + 1)y^2, \quad y' = y(x - 1). \quad (5.9)$$

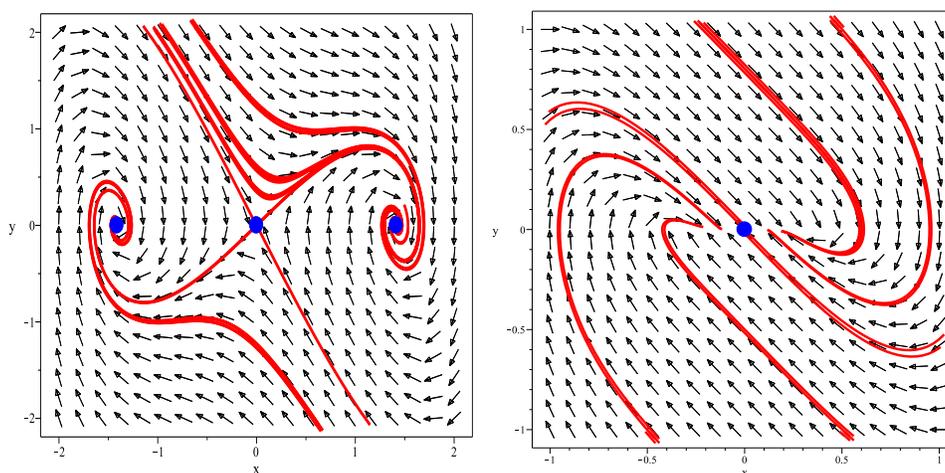


Figura 5.9: Espacio de fases del sistema (5.8) cuando $\mu < 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

Solución. Como en todos los ejemplos, el primer paso consiste en calcular las singularidades del sistema, siendo en este caso:

$$S_1 = (0,0), \quad S_2 = (\mu,0) \quad S_{3,4} = \left(1, \pm\sqrt{\mu-1}\right),$$

de tal forma que $S_{3,4} \in \mathbb{R}$ sii $\mu > 1$. La parte lineal del sistema es:

$$L = \begin{pmatrix} 2(\mu-2x) - y^2 & -2(x+1)y \\ y & (x-1) \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{aligned} L(S_1) &= \begin{pmatrix} 2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \lambda_{1,2} &= \{2\mu, -1\}, \\ L(S_2) &= \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & \mu-1 \end{pmatrix}, & \lambda_{1,2} &= \{-2\mu, \mu-1\}, \\ L(S_{3,4}) &= \begin{pmatrix} \mu-3 & \mp 4\sqrt{\mu-1} \\ \pm\sqrt{\mu-1} & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(\mu-3 \pm \sqrt{(\mu-11)^2 - 96} \right), \end{aligned}$$

por lo que podemos concluir que (dependiendo del signo de μ):

1. El punto $S_1 = (0,0)$ es estable si $\mu < 0$, un centro estable si $\mu = 0$ y un punto de silla si $\mu > 0$,
2. El punto $S_2 = (\mu,0)$ es estable si $\mu < 1$, un centro estable si $\mu = 0$ y un punto de silla si $\mu > 1$,
3. Los puntos $S_{3,4} = (1, \pm\sqrt{\mu-1})$ necesitan un análisis un poco más minucioso,
 - i si $1 < \mu < 11 - 4\sqrt{6}$, entonces $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$ por lo que se trata de un punto estable
 - ii si $11 - 4\sqrt{6} < \mu < 3$, entonces $\lambda_{1,2}$ son complejos pero con la parte real negativa, espirales estables,
 - iii si $3 < \mu < 11 + 4\sqrt{6}$, entonces $\lambda_{1,2}$ son complejos pero con la parte real positiva, espirales inestables, por último
 - iv si $11 + 4\sqrt{6} < \mu$, entonces $\lambda_{1,2}$ son reales y positivos, por lo que se trata de unos puntos inestables

En resumen. En este ejemplo tenemos tres puntos de bifurcación: una bifurcación transcítica si $\mu = 0$, una bifurcación tipo pitchfork si $\mu = 1$ y por último una bifurcación de Hopf (ver siguiente sección) si $\mu = 3$.

De esta forma podemos ver (ver Fig. (5.10)) cómo cambia el espacio de fases al cambiar el signo del parámetro μ . En las siguientes figuras hemos representado precisamente estos espacios de fases cuando $\mu = 2,8$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 1,5$ (figura de la derecha).

■

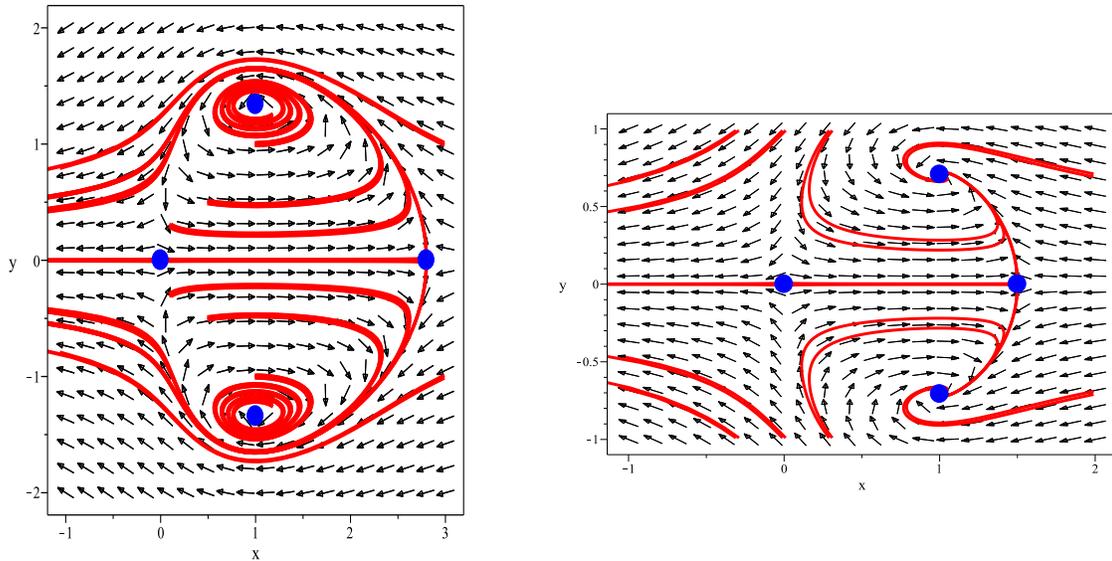


Figura 5.10: Espacio de fases del sistema (5.9) cuando $\mu = 2,8$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 1,5$ (figura de la derecha).

5.4. Bifurcación de Hopf

Consideremos el siguiente sistema

$$x' = \mu x + y - x(x^2 + y^2), \quad y' = -x + \mu y - y(x^2 + y^2), \quad (5.10)$$

que reescribimos en coordenadas polares como

$$r' = r(\mu - r^2), \quad \theta' = -1,$$

entonces el origen es un punto crítico ya que $\theta' \neq 0$. Distinguiremos los siguientes casos

1. Si $\mu \leq 0$, entonces no hay ciclo límite, y el origen es una singularidad estable
2. Si $\mu > 0$, entonces el origen es un foco inestable y aparece un ciclo límite cuando $r = \sqrt{\mu}$.

Podemos observar que, si tomamos la parte lineal del sistema (en este caso nos referimos a los términos no cuadráticos o de orden superior) y calculamos su jacobiano, entonces obtenemos la siguiente matriz

$$L = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \mu \pm i,$$

por lo que si $\mu > 0$ entonces las trayectorias son espirales que se alejan del origen, inestable, si $\mu = 0$ entonces los autovalores son puramente imaginarios y por lo tanto obtenemos un foco estable y por último si $\mu < 0$ las trayectorias describen órbitas que se dirigen hacia el origen, por lo que dicho punto es un foco estable.

De esta forma podemos ver (ver Fig. (5.11)) cómo cambia el espacio de fases al cambiar el signo del parámetro μ . En las siguientes figuras hemos representado precisamente estos espacios de fases cuando $\mu > 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

En la figura adjunta (ver Fig. (5.12)) esquematizamos el carácter de este tipo de bifurcaciones en función del signo del parámetro μ .

Teorema 5.4.1 Dado el sistema

$$x' = \mu x + y - xf(r), \quad y' = -x + \mu y - yf(r),$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(r)$ and $f'(r)$ son continuas para $r \geq 0$, $f(0) = 0$ y $f'(r) > 0$ para $r > 0$. El origen es el único punto de equilibrio, entonces:

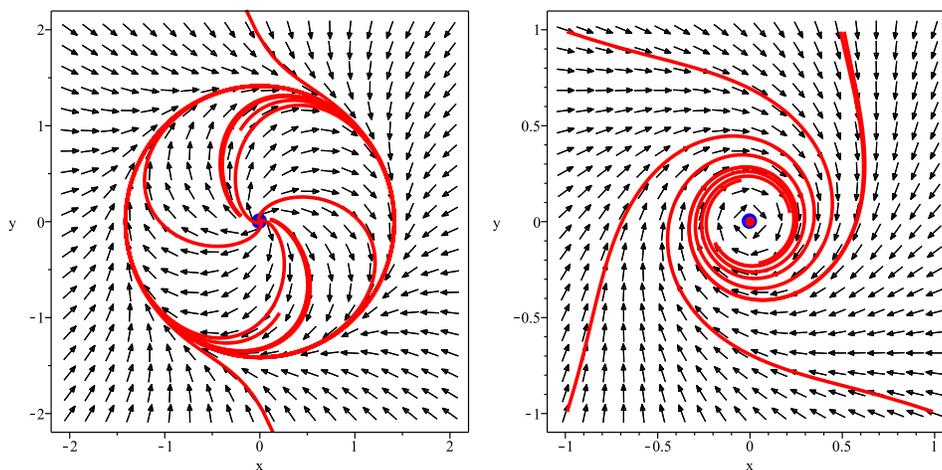


Figura 5.11: Espacio de fases del sistema (5.10) cuando $\mu > 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

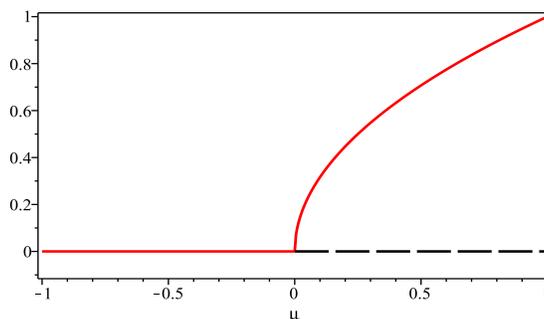


Figura 5.12: Esquema de la bifurcación de Hopf en función del signo del parámetro μ .

1. para $\mu \leq 0$, entonces no hay ciclo límite, y el origen es una singularidad estable,
2. si $\mu > 0$, entonces el origen es un foco inestable y aparece un ciclo límite cuando $r = \sqrt{\mu}$.

Podemos enunciar teoremas semejantes como el siguiente

Teorema 5.4.2 Supongamos un sistema parametrizado de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad \dot{y} = g(x, y, \mu),$$

tal que posee una singularidad en el origen, además supongamos que los autovalores del sistema linealizado son puramente imaginarios cuando $\mu = \mu_0$. Si la parte real de los autovalores $[\text{Re}(\lambda_i(\mu))]$ satisfacen: $\frac{d}{d\mu} [\text{Re}(\lambda_i(\mu))]_{\mu=\mu_0} > 0$, y el origen es un punto asintóticamente estable cuando $\mu = \mu_0$ entonces:

1. $\mu = \mu_0$ es un punto de bifurcación para el sistema,
2. para $\mu \leq \mu_0$, entonces no hay ciclo límite, y el origen es una singularidad estable,
3. si $\mu > \mu_0$, entonces el origen es un foco inestable y aparece un ciclo límite cuando $r = \sqrt{\mu - \mu_0}$.

La bifurcación de Hopf está caracterizada por el cambio de estabilidad de un punto singular acompañado de la creación de un ciclo límite.

Ejemplo 5.4.1 *Estudiar si el sistema*

$$x'' + (x^2 + x'^2 - \mu)x' + x = 0, \quad (5.11)$$

posee una bifurcación de Hopf.

Solución. Vemos que el sistema se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -(x^2 + y^2 - \mu)y - x, \end{aligned}$$

entonces, si consideramos el criterio de Dulac,

$$\operatorname{div} X = \partial_x(x') + \partial_y(y') = -x^2 - 3y^2 + \mu < 0, \quad \forall (x, y) \quad \forall \mu < 0,$$

por lo tanto no puede haber ciclos límite. Si $\mu = 0$, podemos considerar la siguiente función de Lyapunov: $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, tal que

$$V' = \partial_x V(x') + \partial_y V(y') = -(x^2 + y^2)y^2 < 0,$$

mostrando así que el origen es asintóticamente estable. Por últimos podemos ver que si $\mu > 0$, entonces aparece un ciclo límite ($x^2 + y^2 = \mu$). ■

Ejemplo 5.4.2 *Estudiar si el sistema*

$$x' = \mu x - 2y - 2x(x^2 + y^2)^2, \quad y' = 2x - \mu y - y(x^2 + y^2)^2, \quad (5.12)$$

posee una bifurcación de Hopf.

Solución. Veamos si este sistema verifica cada una de las condiciones del teorema (5.4.2). En primer lugar observamos que el origen es una singularidad $\forall \mu \in \mathbb{R}$, y en segundo lugar comprobamos que los autovalores de la parte lineal son de la forma

$$L = \begin{pmatrix} \mu & -2 \\ 2 & -\mu \end{pmatrix} \implies \lambda_i(\mu) = \mu \pm 2i,$$

por lo que si $\mu = 0$, entonces los λ_i son imaginarios puros y por lo tanto el origen es estable. Además podemos comprobar que se verifica la relación

$$\frac{d}{d\mu} [\operatorname{Re}(\lambda_i(\mu))]_{\mu=\mu_0} = 1 > 0,$$

de esta forma, al verificarse todas y cada una de las condiciones del teorema (5.4.2) podemos asegurar que el sistema tiene una bifurcación de tipo Hopf.

Antes de terminar con este ejemplo comprobamos que el origen es asintóticamente estable, para ello utilizaremos, como en el ejemplo anterior, la función de Lyapunov: $V = (x^2 + y^2)$, tal que

$$V' = \partial_x V(x') + \partial_y V(y') = -2(2x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^2 < 0,$$

por lo que el origen es asintóticamente estable. ■

En muchas ocasiones no es posible encontrar la función de Lyapunov, resultando así muy difícil comprobar si el origen es o no asintóticamente estable. El teorema de Lyapunov, el de la primera aproximación, no puede en ningún caso determinar la naturaleza de estos puntos singulares no lineales ya que la linealización se sitúa siempre entorno al origen. Esto es por tanto un índice con el cual podemos todavía determinar la estabilidad en $\mu = \mu_0$.

La receta es la siguiente:

1. Encontramos la linealización del sistema $X' = AX$, en el origen para $\mu = \mu_0$,
2. Encontramos una matriz no singular semejante tal que

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & |\omega_0| \\ -|\omega_0| & 0 \end{pmatrix},$$

donde los autovalores de A son precisamente $\lambda_i = \pm \omega_0 i$,

3. Transformamos el sistema original

$$x' = (x, y, \mu), \quad y' = (x, y, \mu),$$

mediante la transformación $x = My$ en un nuevo sistema $Y' = Y(y_i)$, y

4. por último calcularemos el índice I

$$I = |\omega_0| \left(Y_{111}^1 + Y_{122}^1 + Y_{112}^2 + Y_{222}^2 \right) + \left(Y_{11}^1 Y_{11}^2 - Y_{11}^1 Y_{12}^1 + Y_{11}^2 Y_{12}^2 + Y_{22}^2 Y_{12}^2 - Y_{22}^1 Y_{12}^1 - Y_{22}^1 Y_{22}^2 \right),$$

donde

$$Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k} (0, 0), \quad Y_{jkl}^i = \frac{\partial^3 Y_i}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l} (0, 0),$$

de tal forma que si el índice I es negativo, entonces el origen asintóticamente estable.

Para aclarar esta receta, veamos un ejemplillo.

Ejemplo 5.4.3 Estudiar si el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -(x^2 - \mu)y - 2x - x^3, \end{aligned} \quad (5.13)$$

posee una bifurcación de Hopf.

Solución. Comprobamos que el sistema verifica las hipótesis del teorema (5.4.2). En primer lugar vemos que el origen es una singularidad y que los autovalores de la parte lineal son de la forma

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 8} \right),$$

de tal forma que cuando $\mu = 0$, entonces $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\pm \sqrt{8}i)$. Por otro lado, vemos que

$$\frac{d}{d\mu} [\operatorname{Re}(\lambda_i(\mu))]_{\mu=\mu_0} = \frac{1}{2} > 0,$$

por lo que se verifican todas las condiciones.

Aplicamos ahora la receta y buscamos una transformación tal que

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ya que

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} (2m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22}) & \frac{1}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} (2m_{12}^2 + m_{22}^2) \\ -\frac{1}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} (2m_{11}^2 + m_{21}^2) & -\frac{1}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} (2m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22}) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \frac{2m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} &= 0, & \frac{2m_{12}^2 + m_{22}^2}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} &= \sqrt{2}, \\ \frac{2m_{11}^2 + m_{21}^2}{2m_{12}^2 + m_{22}^2} &= -\sqrt{2}, & \frac{2m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22}}{2m_{12}^2 + m_{22}^2} &= 0, \end{aligned}$$

encontrando que el sistema en el nuevo sistema se escribe de la forma $(x = My)$, por lo tanto

$$x = u, \quad x' = u', \quad y = \sqrt{2}v, \quad y' = \sqrt{2}v',$$

llegando así a

$$u' = \sqrt{2}v, \quad v' = -\sqrt{2}u - u^2v - \frac{\sqrt{2}}{2}u^3,$$

ya que

$$\sqrt{2}v' = -u^2\sqrt{2}v - 2u - u^3, \quad \implies \quad v' = -u^2v - \frac{2}{\sqrt{2}}u - \frac{1}{\sqrt{2}}u^3.$$

Por último calculamos el índice I , encontrando que

$$I = -2\sqrt{2} < 0,$$

por lo que concluimos que el origen es asintóticamente estable y por lo tanto el sistema posee una bifurcación de Hopf.

De esta forma podemos ver (ver Fig. (5.13)) cómo cambia el espacio de fases al cambiar el signo del parámetro μ . En las siguientes figuras hemos representado precisamente estos espacios de fases cuando $\mu > 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

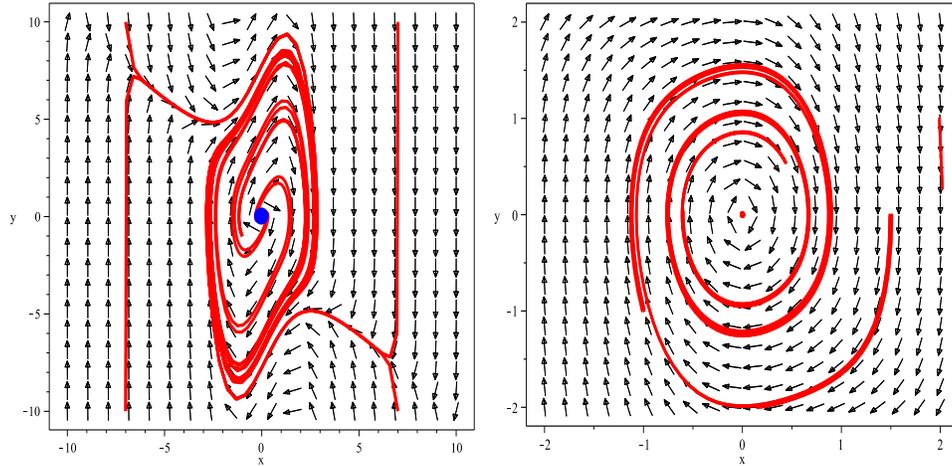


Figura 5.13: Espacio de fases del sistema (5.13) cuando $\mu > 0$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = 0$ (figura de la derecha).

Veamos con algo de detalle el cálculo de I

$$I = |\omega_0| \left(Y_{111}^1 + Y_{122}^1 + Y_{112}^2 + Y_{222}^2 \right) + \left(Y_{11}^1 Y_{11}^2 - Y_{11}^1 Y_{12}^2 + Y_{11}^2 Y_{12}^2 + Y_{22}^2 Y_{12}^2 - Y_{22}^1 Y_{12}^1 - Y_{22}^1 Y_{22}^2 \right),$$

donde

$$Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k} (0,0), \quad Y_{jkl}^i = \frac{\partial^3 Y_i}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l} (0,0),$$

$$Y^1 = \sqrt{2}v, \quad Y^2 = -\sqrt{2}u - u^2v - \frac{\sqrt{2}}{2}u^3,$$

vemos que todas las componentes de $Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k} (0,0)$ son nulas

$$Y_{11}^1 = 0, \quad Y_{22}^1 = 0, \quad Y_{12}^1 = 0,$$

$$Y_{11}^2 = \left(-2v - 3\sqrt{2}u \right)_{(0,0)} = 0, \quad Y_{12}^2 = (-2u)_{(0,0)} = 0, \quad Y_{22}^2 = 0,$$

mientras que la única componente no nula de $Y_{jkl}^i = \frac{\partial^3 Y_i}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l} (0,0)$ es (Y_{112}^2) :

$$Y_{111}^1 = 0, \quad Y_{122}^1 = 0, \quad Y_{112}^2 = -2 \quad Y_{222}^2 = 0,$$

de esta forma $I = |\omega_0| (Y_{112}^2) = -2\sqrt{2}$. ■

Vemos ahora una aplicación del teorema para un sistema químico.

Ejemplo 5.4.4 Las ecuaciones cinemáticas de un determinado sistema químico están descritas por las siguientes ecuaciones:

$$X' = a - (b + 1)X + X^2Y, \quad Y' = bX - X^2Y, \quad (5.14)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Mostrar que el sistema posee una bifurcación de Hopf.

Solución. En primer lugar vemos que la única singularidad aparece en el punto $S = (a, b/a)$. Al linealizar en S vemos que

$$L = \begin{pmatrix} -(b+1) + 2XY & X^2 \\ b - 2XY & -X^2 \end{pmatrix}, \quad L(S) = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix},$$

encontrando que sus autovalores son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(b - a^2 - 1 \pm \sqrt{(-b + (a+1)^2)(-b + (a-1)^2)} \right),$$

además observamos que el determinante de $L(S)$ es: $\det(L(S)) = a^2$, por lo que la estabilidad de S estará determinada por su traza, de tal forma que S es estable si $a^2 + 1 > b$ e inestable si $a^2 + 1 < b$.

Para aplicar el teorema (5.4.2) introduciremos el siguiente cambio de variable

$$x = X - a, \quad y = Y - \frac{b}{a},$$

de esta forma el sistema original resulta ahora

$$\begin{aligned} x' &= (b-1)x + ay(a+2x) + \left(\frac{b}{a} + y\right)x^2, \\ y' &= -bx - ay(a+2x) - \left(\frac{b}{a} + y\right)x^2, \end{aligned}$$

e interpretamos el sistema como si estuviera parametrizado por b , dejando fijo a . La parte real de los autovalores es:

$$\operatorname{Re}[\lambda_{1,2}] = \frac{1}{2} (b - a^2 - 1), \quad (a-1)^2 < b < (a+1)^2,$$

de esta forma vemos que

$$\frac{d}{db} \left[\frac{1}{2} (b - a^2 - 1) \right] = \frac{1}{2},$$

el parámetro en el punto de bifurcación es: $b = a^2 + 1$. Sólo tenemos que comprobar la estabilidad del sistema (x, y) cuando $b = a^2 + 1$. Para ello buscamos una transformación lineal que satisfaga la relación

$$M^{-1} \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

observamos que $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(b - a^2 - 1 \pm \sqrt{(-b + (a+1)^2)(-b + (a-1)^2)} \right)$, cuando $b = a^2 + 1$, resulta $\lambda_{1,2} = \pm ia$, encontrando que

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ -a^2 & a \end{pmatrix},$$

por lo tanto el sistema lo reescribiremos como

$$u' = av + (1 - a^2)au^2 + 2a^2uv - a^4u^3 + a^3u^2v, \quad v' = -au,$$

pasando a calcular el índice de estabilidad, $I = -2a^5 - 4a^3$. Se sigue que el sistema se bifurca hacia un ciclo límite atractivo que contiene el punto singular S cuando b es mayor que $a^2 + 1$. Ejemplo ($a = 1, b = 3$). ■

Este tipo de bifurcaciones de Hopf en las que el ciclo límite encierra un punto de equilibrio inestable se llaman "bifurcaciones de Hopf supercríticas" para distinguirlas de las "subcríticas" en las que el ciclo límite se crea entorno a un punto crítico estable.

La teoría se extiende hacia el estudio de **sistemas multiestables**, que son aquellos en los que para diferentes valores del parámetro μ el sistema posee diferentes puntos de equilibrio.

5.5. Bifurcación hamiltoniana

Consideremos el sistema

$$x' = (x - \mu)y, \quad y' = \mu x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad (5.15)$$

viendo que si $\mu \neq 0$ entonces tenemos las siguientes singularidades

$$S_1 = (-2\mu, 0), \quad S_{2,3} = (\mu, \pm\sqrt{3}\mu), \quad S_4 = (0, 0),$$

donde la parte lineal viene dada por la matriz

$$L = \begin{pmatrix} y & (x - \mu) \\ \mu + x & -y \end{pmatrix},$$

y por lo tanto el caracter de los puntos los determinamos calculando los autovalores

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -3\mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{3}\mu, \\ L_{2,3} &= \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3}\mu & 0 \\ 2\mu & \mp\sqrt{3}\mu \end{pmatrix} & \begin{matrix} \sqrt{3}\mu & \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}\mu, \\ -\sqrt{3}\mu & \lambda_{1,2} = \mp\sqrt{3}\mu, \end{matrix} \\ L_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} & \lambda_{1,2} &= \pm i\mu, \end{aligned}$$

de esta forma observamos que S_1 es un punto de silla independientemente del signo de μ . Los puntos $S_{2,3}$ son también puntos de silla. Por último, el punto S_4 es otro punto estable independientemente del signo de μ . Podemos calcular el hessiano, tal y como hicimos en el segundo capítulo, para determinar de forma analítica el caracter de los puntos, pero no es necesario.

Si $\mu = 0$ entonces sólo tenemos una única singularidad $S_0 = (0, 0)$ que se trata de un punto degenerado.

El sistema (5.15) es Hamiltoniano ya que

$$V = -\frac{\mu}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}\left(xy^2 - \frac{x^3}{3}\right),$$

por lo que podemos escribir

$$x' = \partial_y V(x, y, \mu), \quad y' = -\partial_x V(x, y, \mu),$$

de esta forma las órbitas del sistema son las curvas de nivel del Hamiltoniano V . Las singularidades corresponden a los puntos críticos del sistema $\nabla V = 0$, cambiando su naturaleza sólo en el punto de bifurcación $\mu = 0$.

En la figura adjunta Fig. (5.14) podemos observar que la bifurcación hamiltoniana se caracteriza por la aparición de una separatriz que encierra un punto crítico estable.

Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.5.1 Consideremos el siguiente Hamiltoniano

$$V = y - \mu e^{-r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (5.16)$$

mostrar que el sistema posee una bifurcación.

Solución. El correspondiente sistema viene determinado por las ecuaciones

$$x' = 1 + 2\mu y e^{-r^2}, \quad y' = -2\mu x e^{-r^2},$$

que posee la singularidad $S = (0, A)$ donde A es la solución de la ecuación

$$1 + 2\mu y e^{-y^2} = 0,$$

encontrando que,

$$y = \exp\left(\ln\left(-\frac{1}{2\mu}\right) - \frac{1}{2}\text{LambertW}\left(k, -\frac{1}{2\mu^2}\right)\right) \mid k \in \mathbb{Z},$$

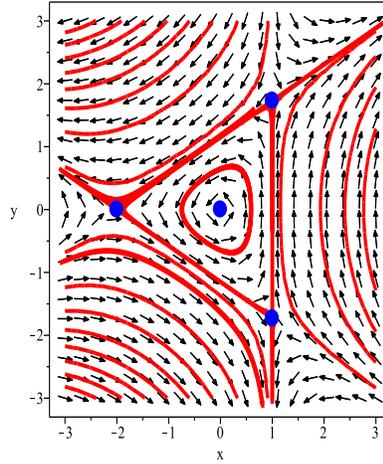


Figura 5.14: Espacio de fases del sistema 5.15 que muestra una bifurcación hamiltoniana en función del signo del parámetro μ .

si $\mu \neq 0$. Por lo tanto las singularidades son

$$S_1 = \left(0, -\frac{1}{2\mu}e^A\right), \quad S_2 = \left(0, -\frac{1}{2\mu}e^B\right),$$

donde

$$A = -\frac{1}{2} \text{LambertW}\left(-\frac{1}{2\mu^2}\right), \quad B = -\frac{1}{2} \text{LambertW}\left(-1, -\frac{1}{2\mu^2}\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

al ser muy pesado trabajar con esta notación fijaremos en lo que sigue $\mu = 2$, de esta forma encontramos que las singularidades del sistema hamiltoniano son

$$S_1 = \left(0, -\frac{1}{4}e^A\right), \quad S_2 = \left(0, -\frac{1}{4}e^B\right),$$

con

$$A = -\frac{1}{2} \text{LambertW}\left(-\frac{1}{8}\right) \approx 7,22 \times 10^{-2}, \quad B = -\frac{1}{2} \text{LambertW}\left(-1, -\frac{1}{8}\right) \approx 1,630,$$

por lo que

$$S_1 = (0, -0,268), \quad S_2 = (0, -1,277).$$

Calculamos a continuación la parte lineal asociada al sistema, resultando

$$L = \begin{pmatrix} -4\mu x y e^{-r^2} & 2\mu e^{-r^2} (1 - 2y^2) \\ -2\mu e^{-r^2} (1 - 2x^2) & 4\mu x y e^{-r^2} \end{pmatrix},$$

por lo que

$$L(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 4e^{-r^2} (1 - 2y^2) \\ -4e^{-r^2} & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 3,188 \\ -3,722 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm 3,445 i,$$

observando que $r^2 = y^2 = (-0,268)^2 \approx 0,071824$. De esta forma vemos que el punto en cuestión es estable.

Mientras que con el segundo punto tenemos (operando de forma similar)

$$L(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1,771 \\ -0,783 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm 1,177,$$

tratándose por lo tanto de un punto de silla.

En la figura adjunta (ver Fig. (5.15)) detallamos el espacio de fases del sistema, viendo que aparece una separatriz. Este tipo de bifurcaciones son distintas a las de Hopf, pues la órbita cerrada, la separatriz, no es un ciclo límite estable.

■

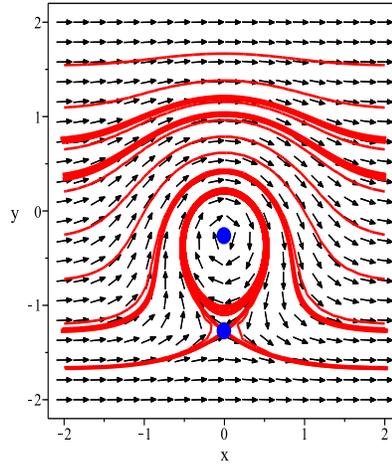


Figura 5.15: Esquema de la bifurcación saddle-node en función del signo del parámetro μ .

5.6. Bifurcaciones con lazos homoclínicos

Consideramos de nuevo el oscilador de van der Pol descrito por el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y + 10x(0,1 - y^2), \\ y &= -x + C, \end{aligned} \quad (5.17)$$

siendo $C = \text{const.} \in \mathbb{R}$. Si dicha constante es distinta de cero, entonces (5.17) tiene dos singularidades

$$S = \left(C, \pm \frac{1}{20C} \left(\sqrt{400AC^2 + 1} + 1 \right) \right), \quad A = 0,1,$$

que es un punto de silla, ya que

$$L = \begin{pmatrix} 10(0,1 - y^2) & 1 - 20xy \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de tal forma que

$$L(S) = \begin{pmatrix} -\frac{0,05}{C^2} \left(20AC^2 + \sqrt{40C^2 + 1} - 20C^2 + 1 \right) & -\sqrt{40C^2 + 1} \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

obteniendo los siguientes autovalores

$$\lambda_{1,2} = -\frac{0,025}{C^2} \left(2C^2(1 - 10) + 1 + \sqrt{40C^2 + 1} \pm \Delta \right),$$

donde

$$\Delta = 20\sqrt{(4C^4 - 0,09C^2 + 0,005) \sqrt{40C^2 + 1} + 0,01C^2 + (0,81)C^4 + 0,005}.$$

Mientras que si $C = (0,0)$ entonces aparece una única singularidad, en el origen y un ciclo límite estable alrededor de dicho punto. Como podemos observar resulta bastante complicado seguir los cálculos analíticos por lo que es aconsejable realizar experimentos numéricos. Dichos análisis nos muestran que si $C < -0,18$, entonces aparece un lazo homoclínico, pero cuando, $C \rightarrow -0,18$, dicho lazo se transforma en un ciclo límite de tal forma que existe el ciclo $\forall C \in (-0,18, 0,18)$ y por último cuando $C \rightarrow 0,18$ vuelve a aparecer el lazo homoclínico.

En las figuras adjuntas (ver Fig. (5.16)) representamos el espacio de fases asociado al sistema (5.17) para los diferentes valores de C .

Veamos un último ejemplo con el que terminaremos este capítulo.

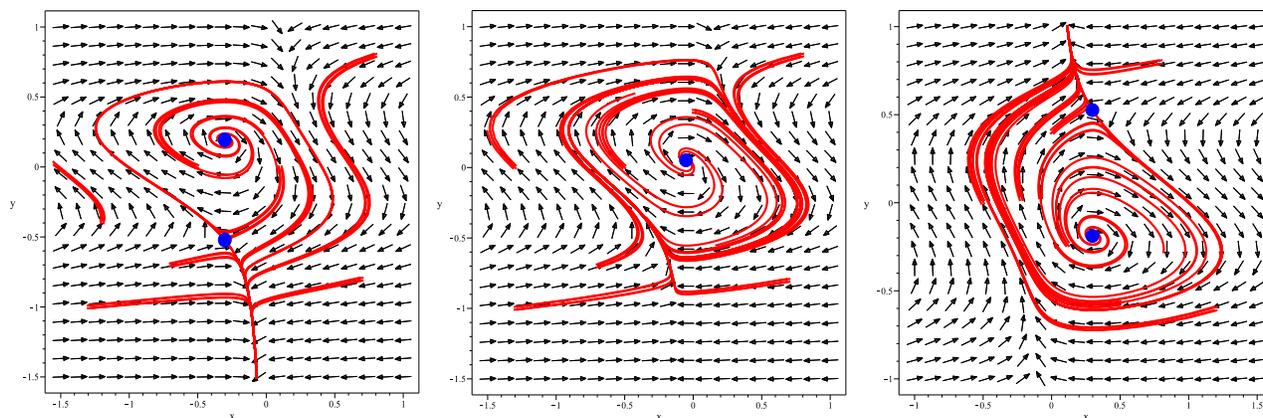


Figura 5.16: Espacio de fases del sistema (5.17) cuando $C = -0,3$ (figura de la izquierda) y cuando $C = -0,05$ (figura de central). Por último, la figura de la derecha representa el espacio de fases del sistema cuando $C = 0,3$.

Ejemplo 5.6.1 Consideramos el sistema descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= x + x^2 + (\mu - x)y, \end{aligned} \quad (5.18)$$

determinar la aparición de ciclos límite en función del parámetro μ .

Solución. Vemos que el sistema posee dos singularidades

$$S_1 = (0, 0), \quad S_2 = (-1, 0),$$

siendo

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + 2x - y & \mu - x \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} L(S_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}, & \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4} \right), \\ L(S_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu + 1 \end{pmatrix}, & \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu - 1)(\mu + 3)} \right), \end{aligned}$$

de esta forma podemos concluir que $S_1 = (0, 0)$ es un punto de silla mientras que para determinados valores de μ el punto singular $S_2 = (-1, 0)$ es un punto estable, observar que la traza de $L(S_2)$, $\text{tra}(L(S_2)) = \mu + 1$, por lo que el punto será estable si $\mu < -1$ e inestable si $\mu > -1$. El análisis numérico llevado a cabo muestra que si $-1 < \mu < \mu_0$, donde $\mu_0 \approx -0,85$ entonces aparece un ciclo límite. Precisamente este tipo de **bifurcaciones** se conoce con el nombre de **homoclínicas**.

En las figuras adjuntas (ver Fig. (5.17)) detallamos el espacio de fases para distintos valores de μ .

■

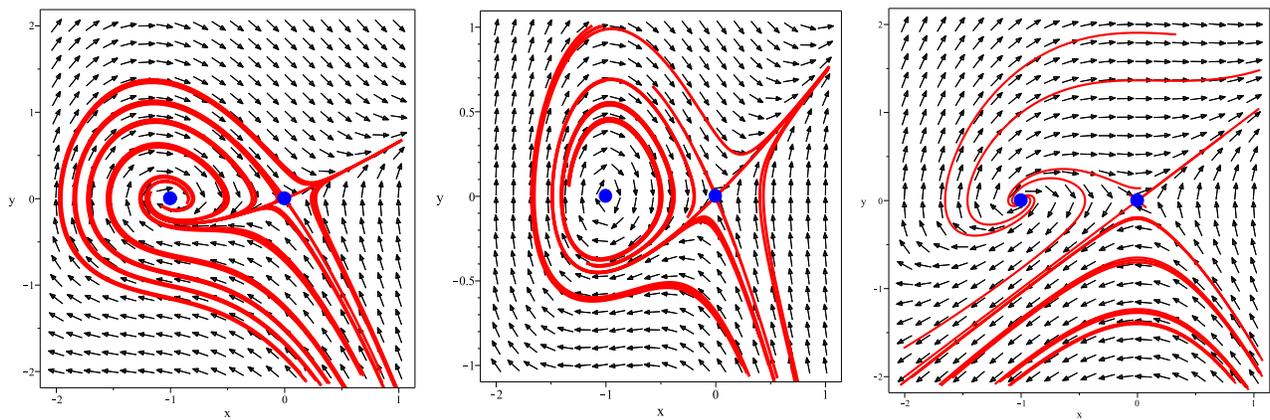


Figura 5.17: Espacio de fases del sistema (5.18) cuando $\mu = -1,3$ (figura de la izquierda) y cuando $\mu = -0,9$ (figura de central). Por último, la figura de la derecha representa el espacio de fases del sistema cuando $\mu = 0$.

Capítulo 6

Dinámica Caótica

Índice del capítulo

6.1. Sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad	115
6.2. Caos	118
6.2.1. El atractor de Lorenz	120
6.3. Sistemas no-autónomos	121
6.3.1. El oscilador de Duffing	121
6.4. Melnikov y los exponentes de Lyapunov	121

6.1. Sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad

En general, los sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad no son completamente integrables y aquellos que lo son muy restrictivos. Las trayectorias de estos sistemas yacen en un espacio 4D, sin embargo toda la estructura del sistema puede ser determinada simplemente representando la aplicación de Poincaré. Se sabe que los sistemas completamente integrables muestran un comportamiento muy regular en todo el espacio de fases, mientras que los sistemas no integrables muestran un comportamiento bastante irregular, incluyendo comportamientos caóticos. Daremos los ingredientes mínimos para introducir esta teoría.

Definición 6.1.1 Un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad está definido por:

$$p_1' = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad q_1' = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad p_2' = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad q_2' = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad (6.1)$$

donde H es el Hamiltoniano mientras que (q_i) representan las coordenadas generalizadas y (p_i) los momentos generalizados. El Hamiltoniano se puede escribir de la siguiente manera:

$$H(p, q) = K_E(p, q) + P_E(q),$$

siendo K_E y P_E respectivamente las energías cinética y potencial.

Definición 6.1.2 El sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad dado por las ecuaciones (6.1) es integrable si el sistema tienen dos integrales, F_1, F_2 , las cuales verifican

$$\{F_1, H\} = 0, \quad \{F_2, H\} = 0, \quad \{F_1, F_2\} = 0,$$

donde el corchete de Poisson está definido por:

$$\{F_1, F_2\} = \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial F_2}{\partial q}.$$

Consideramos a continuación unos ejemplos.

Ejemplo 6.1.1 Consideramos el sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad definido por:

$$H(p, q) = \frac{\omega_1}{2} (p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2} (p_2^2 + q_2^2), \tag{6.2}$$

queremos representar la aplicación de Poincaré en 3 y 2 dimensiones.

Solución. El Hamiltoniano (6.2) puede ser usado para modelar el oscilador armónico con dos grados de libertad. Dicho sistema posee las siguientes integrales

$$F_1 = p_1^2 + q_1^2, \quad F_2 = p_2^2 + q_2^2,$$

por lo que el sistema es completamente integrable.

Para generar los gráficos, impondremos las siguientes condiciones iniciales:

1. $\omega_1 = \omega_2 = 2, t = 0, p_1 = 0,5, p_2 = 1,5, q_1 = 0,5, q_2 = 0$. Ver figuras adjuntas (6.1)

$H = 2.750000000;$

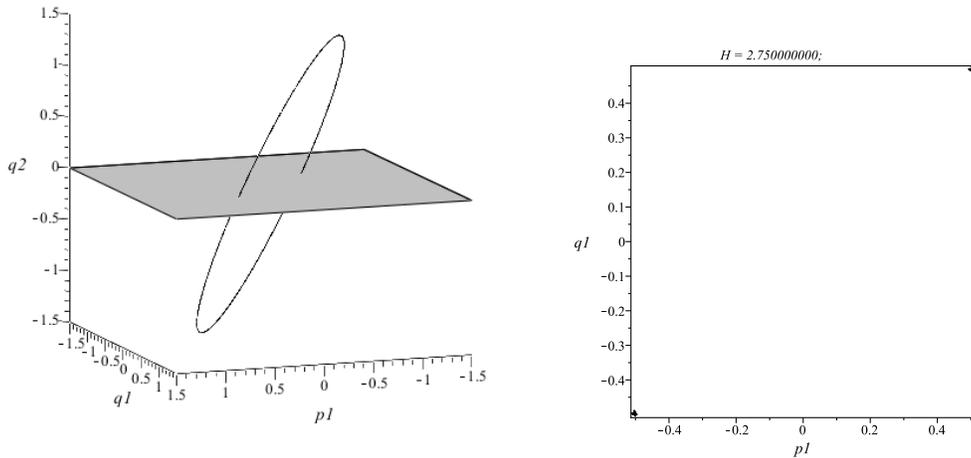


Figura 6.1: Aplicación de Poincaré del sistema (6.2) con condiciones iniciales: $\omega_1 = \omega_2 = 2, t = 0, p_1 = 0,5, p_2 = 1,5, q_1 = 0,5, q_2 = 0$.

En este caso vemos que las soluciones son periódicas

2. $\omega_1 = \sqrt{2}, \omega_2 = 1, t = 0, p_1 = 0,5, p_2 = 1,5, q_1 = 0,3, q_2 = 0$. Ver figuras adjuntas (6.2)

En este caso vemos que las soluciones son cuasi-periódicas, una curva cerrada se forma en el plano $q_1 p_1$ cuando el número de interacciones tiende a infinito. Sin embargo el movimiento no es caótico, las trayectorias están confinadas en un toro invariante, tal y como refleja las figuras.

■

Ejemplo 6.1.2 Consideramos el sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad definido por:

$$H(p, q) = \frac{1}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{q_3^2}{3}, \tag{6.3}$$

queremos representar la aplicación de Poincaré en 3 y 2 dimensiones.

Solución. El Hamiltoniano (6.3) es precisamente el sistema de Hénon-Heiles el cual se utiliza para modelizar el movimiento de las estrellas dentro de las galaxias. No es integrable.

Para generar los gráficos, impondremos las siguientes condiciones iniciales:

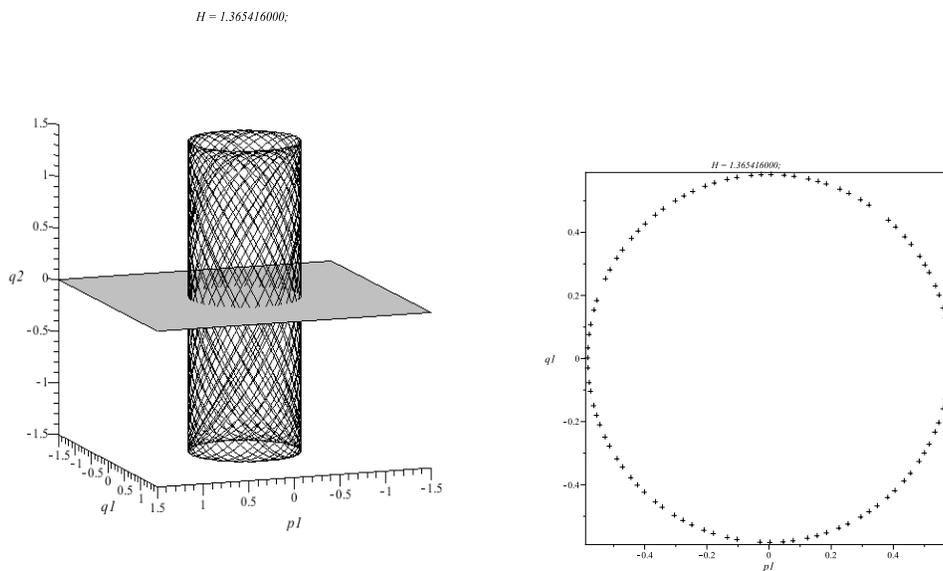


Figura 6.2: Aplicación de Poincaré del sistema (6.2) con condiciones iniciales: $\omega_1 = \sqrt{2}$, $\omega_2 = 1$, $t = 0$, $p_1 = 0,5$, $p_2 = 1,5$, $q_1 = 0,3$, $q_2 = 0$.

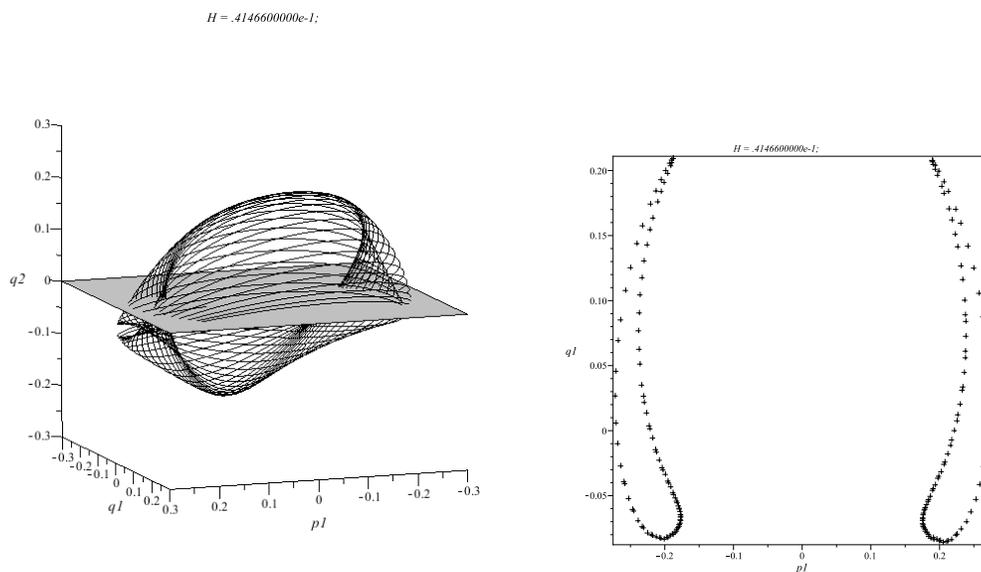


Figura 6.3: Aplicación de Poincaré del sistema (6.3) con condiciones iniciales: $t = 0$, $p_1 = 0,06$, $p_2 = 0,1$, $q_1 = -0,2 = q_2$.

1. $t = 0$, $p_1 = 0,06$, $p_2 = 0,1$, $q_1 = -0,2 = q_2$. Ver figuras adjuntas

Ver figuras adjuntas (6.3) y (6.4)

Vemos que la sección de Poincaré nos muestra una rica variedad de comportamientos a medida que el nivel de energía se incrementa, de tal forma que las órbitas cuasi-periódicas son reemplazadas por comportamientos muy irregulares que eventualmente parecen ser caóticos.

■

Este ejemplo nos sirve para introducir el famoso teorema de KAM

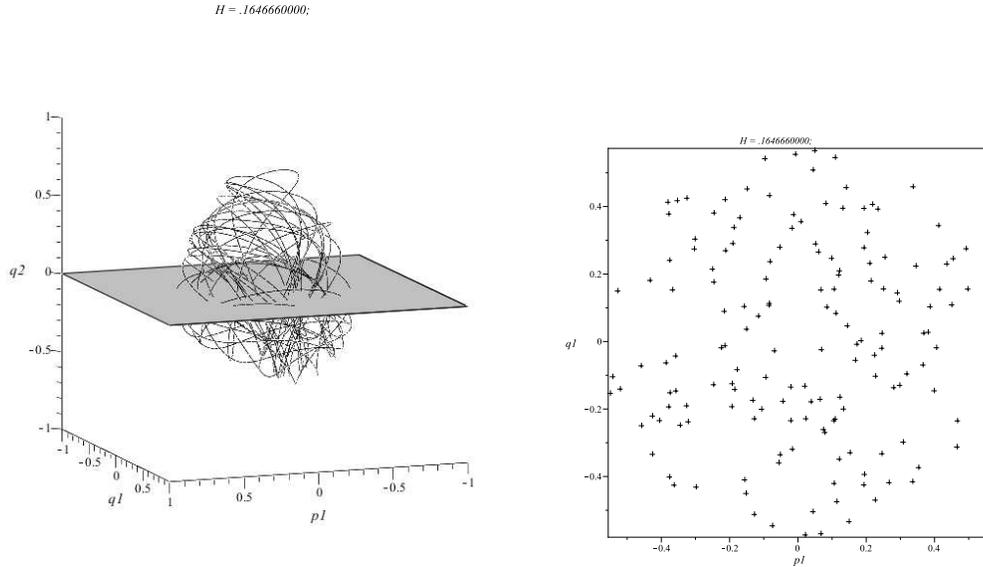


Figura 6.4: Aplicación de Poincaré del sistema (6.3) con condiciones iniciales: $t = 0, p_1 = 0,5, p_2 = 0,1, q_1 = -0,2 = q_2$.

Teorema 6.1.1 (KAM) *Sopongamos que un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad está definido por $H = H_0 + \epsilon H_1$, donde ϵ es un parámetro pequeño, H_0 es integrable y H_1 hace que H no sea integrable. Los ciclos cuasi-periódicos (toro de KAM) los cuales existen para $\epsilon = 0$, también existirán si $0 < \epsilon \ll 1$, pero se producirá cierta perturbación. A medida que ϵ aumenta, el toro de KAM se disipará.*

6.2. Caos

En esta sección introduciremos algunas nociones relacionadas con el concepto de **caos**. Al igual que en otras ocasiones empezaremos considerando un ejemplo, en este caso, el archiconocido sistema de Rössler, definido por las siguientes ecuaciones (existen varias versiones)

$$\begin{aligned} x' &= -(y + z), & \text{ó} & & x' &= -(y + z), \\ y' &= x + ay, & & & y' &= x + ay, \\ z' &= b + (x - c)z, & & & z' &= bx + xz - cz, \end{aligned} \tag{6.4}$$

donde, en cualquier caso, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Vemos que el sistema es casi lineal, mostrando un único término no lineal en la ecuación correspondiente a z' . Si por ejemplo fijamos el valor de dos de las constantes, $a = b = 0,2$, y hacemos variar la tercera, c , nos encontramos con una rica gama de comportamientos. Veremos unos casos concretos que hemos realizado mediante métodos numéricos. En todos los casos hemos fijado las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = y(0) = z(0) = 1$, mientras que $a = b = 0,2$.

- Si $c = 2,3$, entonces en este caso particular existe un **ciclo límite**, ver Fig. (6.5)
- Si $c = 3,3$, aparece un órbita cerrada con doble periodo, ver Fig. (6.6)
- Si $c = 5,3$, entonces aparece un órbita cerrada con triple periodo ver Fig. (6.7)
- Si $c = 6,3$ vemos que el comportamiento parece aleatorio, este tipo de comportamientos se denomina **caos determinista**. Un sistema se dice determinista si su comportamiento está determinado única y exclusivamente por las ecuaciones del sistema y las condiciones iniciales que fijemos. El caos no es determinista cuando, o bien no están fijadas con precisión las ecuaciones o las condiciones iniciales son aleatorias, ver Fig. (6.8)

Observamos que en gráfico Fig. (6.8b) (el de la derecha) hemos representado dos curvas, la roja tiene condiciones iniciales $x(0) = y(0) = z(0) = 1$, mientras que la representada en color azul tiene unas condiciones iniciales $x(0) = 1,03, y(0) = z(0) = 1$, lo que demuestra lo sensible que es el sistema a las condiciones iniciales.

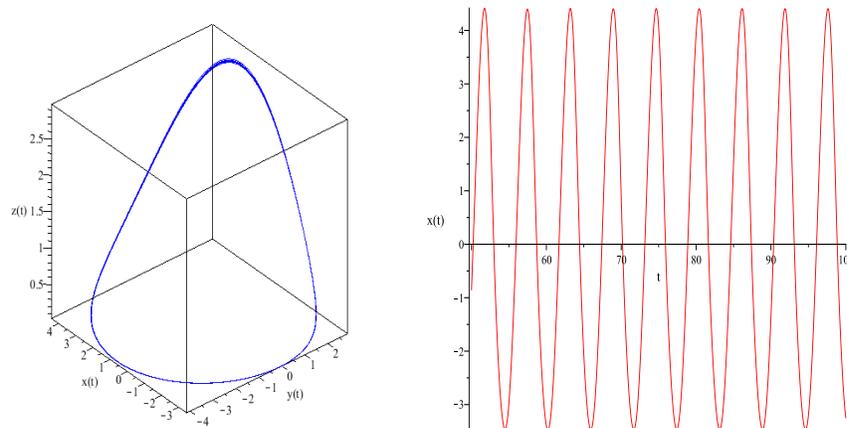


Figura 6.5: Ciclo límite cuando $c = 2,3$ (figura de la izquierda). En la figura de la derecha hemos el periodo para la variable $x(t)$.

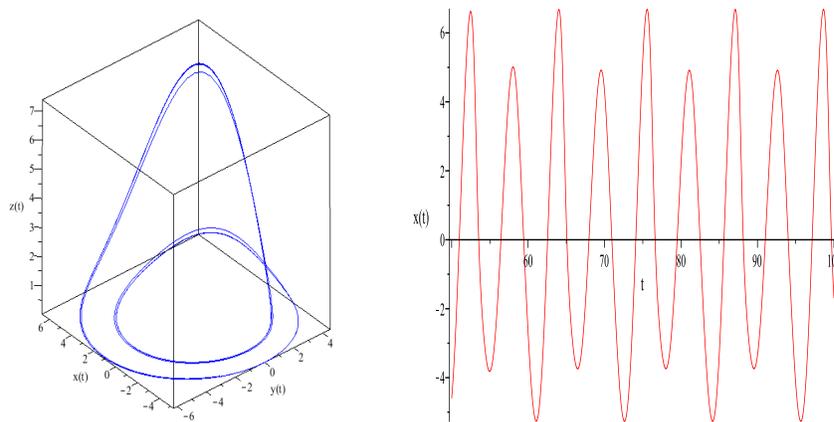


Figura 6.6: Ciclo límite cuando $c = 3,3$ (figura de la izquierda). En la figura de la derecha hemos el periodo para la variable $x(t)$.

Hemos visto que la última situación planteada corresponde a un solución que hemos denominado como caótica, pero ¿cómo podemos definir o caracterizar este concepto? A continuación daremos tres criterios para caracterizarlo ya que no está universalmente aceptada una definición al respecto. Los criterios son los siguientes:

1. Comportamiento a largo plazo del sistema sin que aparezcan soluciones periódicas (comportamiento aperiódico)
2. extrema sensibilidad a las condiciones iniciales (dos muy próximas dan lugar a soluciones muy diferentes)
3. estructura fractal.

El más útil y eficaz es el segundo de los criterios, es decir, el formalizar y desarrollar herramientas que nos permitan ver cuando dos trayectorias que parten de posiciones muy próximas se alejan a medida que avanza el tiempo. Ya hemos visto un ejemplo, en el cuarto caso del atractor de Rössler (ver Fig (6.8b)). Una herramienta muy útil para determinar cuando dos trayectorias se separan son los **exponentes de Lyapunov**, que definiremos con precisión en otra sección. Decimos que un sistema es caótico si al menos uno de los exponentes de Lyapunov es positivo. Esto implica que dos trayectorias que parten muy próximas la una de la otra, en un **atractor extraño** divergirán a medida que pasa el tiempo. Decimos que un conjunto es un atractor extraño si es un atractor que exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales. A su vez, entendemos por **atractor**, un conjunto cerrado e invariante

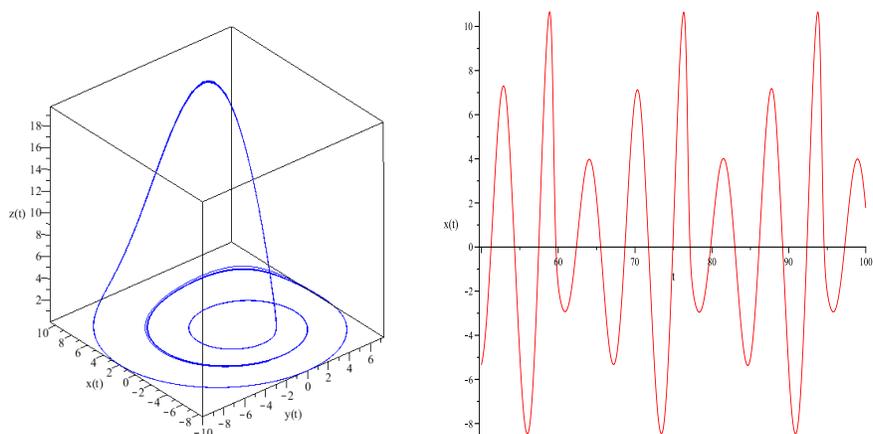


Figura 6.7: Ciclo límite cuando $c = 5,3$ (figura de la izquierda). En la figura de la derecha hemos el periodo para la variable $x(t)$.

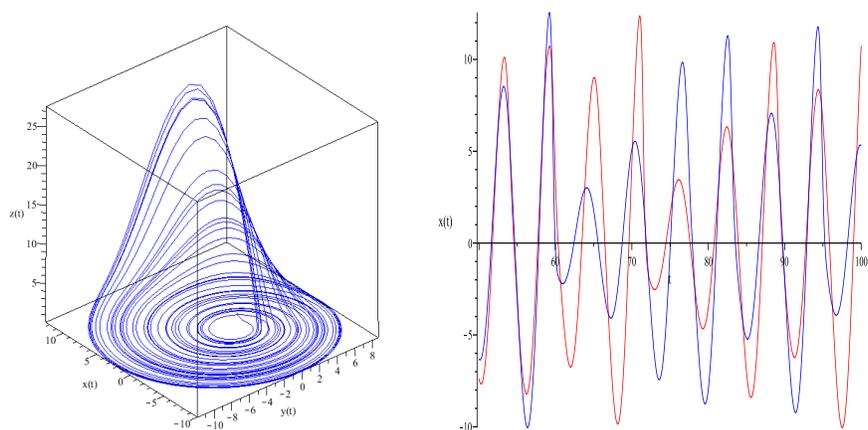


Figura 6.8: Ciclo límite cuando $c = 6,3$ (figura de la izquierda). En la figura de la derecha hemos el periodo para la variable $x(t)$, con dos condiciones iniciales diferentes.

que atrae trayectorias cercanas que yacen en el dominio de estabilidad. Por último resaltar que, asociado a la dinámicas caótica está la estructura fractal pero no trataremos este punto en estas notas.

6.2.1. El atractor de Lorenz

Estudiaremos a continuación el conocido ejemplo de la ecuación de Lorenz. El sistema está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x), \\ y' &= (r - z)x - y, \\ z' &= xy - bz, \end{aligned} \tag{6.5}$$

donde las magnitudes x, y, z son termodinámicas y las constantes que aparecen en las ecuaciones son: σ el número de Prandtl relacionado con la viscosidad del fluido, r el número de Rayleigh relacionado con la diferencia de temperaturas y por último, b un factor de escala. Lorenz estudió el sistema con $\sigma = 10$ y $b = 8/3$.

Sin entrar en muchos detalles y sin destripar las ecuaciones podemos resaltar las siguientes propiedades del sistema (6.5):

1. El sistema (6.5) posee una simetría $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$, por lo que el eje z es invariante
2. El flujo del campo se contrae, i.e. $\text{div } X = -(\sigma + 1 + b) < 0$

3. Si $r \in (0, 1)$, entonces el sistema posee una única singularidad, el origen, que es un atractor global
4. Sin embargo, si $r = 1$, entonces existe una bifurcación y hay dos singularidades:

$$S_{1,2} = \left(\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right),$$

5. Cuando $r \approx 13,93$, entonces aparece una bifurcación homoclínica y el sistema entra en una fase caótica
6. Si $r \approx 24,06$, entonces aparece un atractor extraño
7. Si $r \in (1, 24,74)$, el origen es inestable y las singularidades $S_{1,2}$ estables, pero si $r > 24,74$ las singularidades $S_{1,2}$ dejan de ser estables y aparece una bifurcación de Hopf.

En la figura (6.9a) hemos representado el atractor extraño de Lorenz con $\sigma = 10, b = 8/3$ y $r = 28$. Vemos que las trayectorias parecen fluir de forma aleatoria e impredecible, de esta forma podemos decir que el atractor extraño posee las siguientes propiedades (características de las situaciones caóticas):

- i Las trayectorias son aperiódicas y permanecen en el atractor (conjunto invariante)
- ii La forma del atractor depende, de forma muy sensible, de las condiciones iniciales y por ende las trayectorias del flujo
- iii muestra estructura fractal

Existe una variación de las ecuaciones de Lorenz descubiertas por G. Chen y T. Ueta. En la figura (6.9b) hemos representado el atractor extraño de Chen-Ueta con $\sigma = 35, b = 3$ y $r = 28$

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x), \\ y' &= (r - \sigma - z)x + ry, \\ z' &= xy - bz, \end{aligned} \tag{6.6}$$

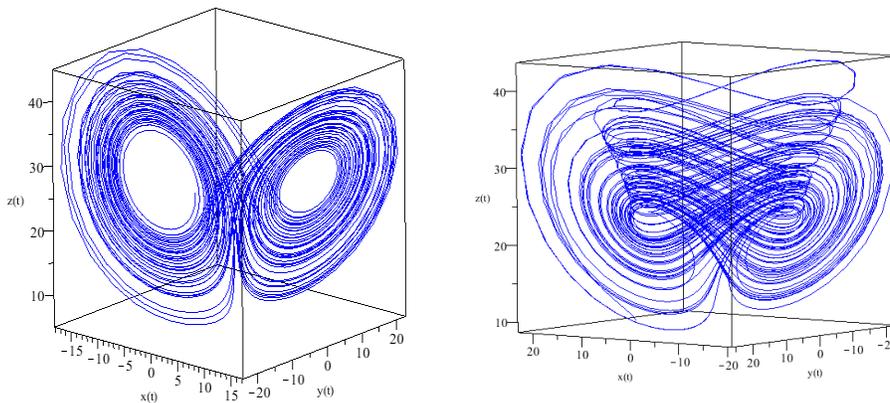


Figura 6.9: En la figura de la izquierda hemos representado el atractor extraño de Lorenz (Eq. (6.5)) con $\sigma = 10, b = 8/3$ y $r = 28$. En la figura de la derecha hemos representado atractor extraño de Chen-Ueta (Eq. (6.6)) con $\sigma = 35, b = 3$ y $r = 28$.

6.3. Sistemas no-autónomos

6.3.1. El oscilador de Duffing

6.4. Melnikov y los exponentes de Lyapunov

Bibliografía

- [1] V.I. Arnold. Equations Differentielles Ordinaires. MIR 1974
- [2] V.I. Arnold. Chaperter Suplementaires de la Theorie des Equationes Differentielles Ordinaires. MIR 1980
- [3] V.I. Arnold. Geometrical Methods of Ordinary Differential Equations. Springer-Verlang 1983
- [4] V.I. Arnold. Teoría de Catástrofes. Alianza 1987.
- [5] V.I. Arnold. Mecánica Clásica. Paraninfo. 1983.
- [6] Butenin et al. Introducción a la Teoría de Oscilaciones no Lineales. MIR 1990.
- [7] Arrowsmith and Place. An Introduction to Dinamical System. CUP 1990.
- [8] Elsgot. Ecuaciones Diferenciales MIR 1983
- [9] Krasnov, Makarenko et al. Ecuaciones diferenciales. MIR 1990.
- [10] Lynch. Dinamical Systems with Applications Using Maple. Birkhäuser 2002.
- [11] J.Guckenheimer and P. Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlang 1983.
- [12] Jordan and Smith. Nonlinear Ordinary Differential Eqautions. Oxford UP 1999.
- [13] A. Katot and B. Hasselbaltt. Introduction to Modern Theory of Dynamical Systems. CUP 1997.
- [14] S Smale. Mathematical theory of Time. Springer-Verlang 1980.
- [15] Hirsch and Smale. Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. AP 1974.
- [16] J. Sotomayor. Lecciones de Ecuaciones Diferenciales. IMPA. 1979.
- [17] R. Thom. Estabilidad Estructural y Morfogénesis. Pirámide. 1977.
- [18] J. Fortea. Introducción a los procesos Diferenciales. Pirámide 1983.
- [19] D. Richads. Advanced Mathematical methods with Maple. CUP 2002.
- [20] J. Marsden and McCracken. The Hoph Bifurcation and its Applications. Springer-Verlang 1976.
- [21] Poston and Steward. Chaos Theory. Dover 1983.
- [22] Wiggins. Introduction to Dynamical Systems. Springer. 1990.
- [23] Glendining. Stability, Instability and Chaos. CUP 1994.
- [24] I. Steward. ¿Juega Dios a los Dados? Modadori. 1990.
- [25] Andronov, Vitt and Khaikin. Theory of Oscillations. Dover 1987.
- [26] D. Ruelle. Azar y Caos. Alianza 1993.