Una Reformulación de la Mecánica Clásica

Alejandro A. Torassa

(2014) Buenos Aires, Argentina
atorassa@gmail.com

Resumen

Este trabajo presenta una reformulación de la mecánica clásica que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia (rotante o no rotante) (inercial o no inercial) sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Introducción

La reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo se desarrolla a partir de una ecuación general de movimiento. Este trabajo considera que todo observador S utiliza un sistema de referencia S y un sistema de referencia dinámico Š. La ecuación general de movimiento es una ecuación de transformación entre el sistema de referencia S y el sistema de referencia dinámico Š.

La posición dinámica $\breve{\mathbf{r}}_a$, la velocidad dinámica $\breve{\mathbf{v}}_a$ y la aceleración dinámica $\breve{\mathbf{a}}_a$ de una partícula A de masa m_a respecto al sistema de referencia dinámico Š están dadas por:

$$\breve{\mathbf{r}}_a = \int\int (\mathbf{F}_a/m_a)\, dt\, dt$$

$$\breve{\mathbf{v}}_a = \int (\mathbf{F}_a/m_a)\, dt$$

$$\breve{\mathbf{a}}_a = (\mathbf{F}_a/m_a)$$

donde $\mathbf{F}_a$ es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula A.

La velocidad angular dinámica $\breve{\omega}_S$ y la aceleración angular dinámica $\breve{\alpha}_S$ del sistema de referencia S fijo a una partícula S respecto al sistema de referencia dinámico Š están dadas por:

$$\breve{\omega}_S = \pm\left|(\mathbf{F}_1/m_s - \mathbf{F}_0/m_s)\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)/(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)^2\right|^{1/2}$$

$$\breve{\alpha}_S = d(\breve{\omega}_S)/dt$$

donde $\mathbf{F}_0$ y $\mathbf{F}_1$ son las fuerzas resultantes que actúan sobre el sistema de referencia S en los puntos 0 y 1, $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}_1$ son las posiciones de los puntos 0 y 1 respecto al sistema de referencia S y m_s es la masa de la partícula S (el punto 0 es el origen del sistema de referencia S y el centro de masa de la partícula S) (el punto 0 pertenece al eje de rotación dinámica y el segmento 01 es perpendicular al eje de rotación dinámica) (el vector $\breve{\omega}_S$ es colineal con el eje de rotación dinámica)

Ecuación General de Movimiento

La ecuación general de movimiento para dos partículas A y B respecto a un observador S es:

$$m_a\, m_b \left[\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b\right] - m_a\, m_b \left[\breve{\mathbf{r}}_a - \breve{\mathbf{r}}_b\right] = 0$$

donde m_a y m_b son las masas de las partículas A y B, $\mathbf{r}_a$ y $\mathbf{r}_b$ son las posiciones de las partículas A y B, $\breve{\mathbf{r}}_a$ y $\breve{\mathbf{r}}_b$ son las posiciones dinámicas de las partículas A y B.

Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo, se obtiene:

$$m_a\, m_b \left[(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) + \breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)\right] - m_a\, m_b \left[\breve{\mathbf{v}}_a - \breve{\mathbf{v}}_b\right] = 0$$

Derivando nuevamente con respecto al tiempo, se obtiene:

$$m_a\, m_b \left[(\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_b) + 2\,\breve{\omega}_S \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)) + \breve{\alpha}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)\right] - m_a\, m_b \left[\breve{\mathbf{a}}_a - \breve{\mathbf{a}}_b\right] = 0$$

Sistemas de Referencia

Aplicando la ecuación anterior a dos partículas A y S, se tiene:

$$m_a\, m_s \left[(\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_s) + 2\,\breve{\omega}_S \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_s) + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s)) + \breve{\alpha}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s)\right] - m_a\, m_s \left[\breve{\mathbf{a}}_a - \breve{\mathbf{a}}_s\right] = 0$$

Si dividimos por m_s y si el sistema de referencia S fijo a la partícula S ($\mathbf{r}_s = 0, \mathbf{v}_s = 0$ y $\mathbf{a}_s = 0$) es rotante respecto al sistema de referencia dinámico Š ($\breve{\omega}_S \neq 0$) entonces se obtiene:

$$m_a \left[\mathbf{a}_a + 2\,\breve{\omega}_S \times \mathbf{v}_a + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_a) + \breve{\alpha}_S \times \mathbf{r}_a\right] - m_a \left[\breve{\mathbf{a}}_a - \breve{\mathbf{a}}_s\right] = 0$$

Si el sistema de referencia S es no rotante respecto al sistema de referencia dinámico Š ($\breve{\omega}_S = 0$) entonces se obtiene:

$$m_a\, \mathbf{a}_a - m_a \left[\breve{\mathbf{a}}_a - \breve{\mathbf{a}}_s\right] = 0$$

Si el sistema de referencia S es inercial respecto al sistema de referencia dinámico Š ($\breve{\omega}_S = 0$ y $\breve{\mathbf{a}}_s = 0$) entonces se obtiene:

$$m_a\, \mathbf{a}_a - m_a\, \breve{\mathbf{a}}_a = 0$$

o sea:

$$m_a\, \mathbf{a}_a - \mathbf{F}_a = 0$$

o bien:

$$\mathbf{F}_a = m_a\, \mathbf{a}_a$$

donde esta ecuación es la segunda ley de Newton.

Ecuación de Movimiento

Desde la ecuación general de movimiento se deduce que la aceleración $\mathbf{a}_a$ de una partícula A de masa m_a respecto a un sistema de referencia S fijo a una partícula S de masa m_s está dada por:

$$\mathbf{a}_a = \frac{\mathbf{F}_a}{m_a} - 2\,\breve{\omega}_S \times \mathbf{v}_a - \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_a) - \breve{\alpha}_S \times \mathbf{r}_a - \frac{\mathbf{F}_s}{m_s}$$

donde $\mathbf{F}_a$ es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula A, $\breve{\omega}_S$ es la velocidad angular dinámica del sistema de referencia S, $\mathbf{v}_a$ es la velocidad de la partícula A, $\mathbf{r}_a$ es la posición de la partícula A, $\breve{\alpha}_S$ es la aceleración angular dinámica del sistema de referencia S y $\mathbf{F}_s$ es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula S.

En contradicción con la primera y segunda ley de Newton, desde la ecuación anterior se deduce que la partícula A puede estar acelerada incluso si sobre la partícula A no actúa fuerza alguna y también que la partícula A puede no estar acelerada (estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme) incluso si sobre la partícula A actúa una fuerza no equilibrada.

Por lo tanto, para poder aplicar la primera y segunda ley de Newton en un sistema de referencia no inercial es necesario introducir fuerzas ficticias.

Sin embargo, este trabajo considera que la primera y segunda ley de Newton son falsas. Por lo tanto, en este trabajo no hay ninguna necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Sistema de Ecuaciones

Si consideramos un sistema de N partículas (de masa total M y centro de masa CM) y una sola partícula J respecto a un sistema de referencia S (fijo a una partícula S) entonces desde la ecuación general de movimiento se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{[1]} \arrow[r, "\int d\breve{\mathbf{r}}_{ij}"] \arrow[d, "dt"] & \boxed{[6]} \arrow[r, "\frac{1}{2}\,dt"] & \boxed{[8]} \arrow[d, "dt"] \\
\boxed{[4]} \arrow[d, "dt"] & \boxed{[2]} \arrow[l, "\times\breve{\mathbf{r}}_{ij}"'] \arrow[r, "\int d\breve{\mathbf{v}}_{ij}"] \arrow[d, "dt"] & \boxed{[7]} & \boxed{[9]} \\
\boxed{[5]} & \boxed{[3]} \arrow[l, "\times\breve{\mathbf{r}}_{ij}"] \arrow[ur, "\int d\breve{\mathbf{r}}_{ij}"] & &
\end{tikzcd}$$

Las ecuaciones [1, 2, 3, 4 y 5] son ecuaciones vectoriales y las ecuaciones [6, 7, 8 y 9] son ecuaciones escalares. Los principios de conservación se obtienen desde las ecuaciones [2, 4, 7 y 9]

Ecuación [1]

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\mathbf{r}_{ij}) - (\breve{\mathbf{r}}_{ij})\right] = 0$$

Ecuación [2]

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij}) - (\breve{\mathbf{v}}_{ij})\right] = 0$$

Ecuación [3]

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\mathbf{a}_{ij} + 2\,\breve{\omega}_S \times \mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij}) + \breve{\alpha}_S \times \mathbf{r}_{ij}) - (\breve{\mathbf{a}}_{ij})\right] = 0$$

Ecuación [4]

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij}) \times \mathbf{r}_{ij} - (\breve{\mathbf{v}}_{ij}) \times \breve{\mathbf{r}}_{ij}\right] = 0$$

Ecuación [5]

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\mathbf{a}_{ij} + 2\,\breve{\omega}_S \times \mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij}) + \breve{\alpha}_S \times \mathbf{r}_{ij}) \times \mathbf{r}_{ij} - (\breve{\mathbf{a}}_{ij}) \times \breve{\mathbf{r}}_{ij}\right] = 0$$

Ecuación [6]

$$\sum_{i=1}^{N} {}^1\!/_2\, m_i \left[(\mathbf{r}_{ij})^2 - (\breve{\mathbf{r}}_{ij})^2\right] = 0$$

Ecuación [7]

$$\sum_{i=1}^{N} {}^1\!/_2\, m_i \left[(\mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij})^2 - (\breve{\mathbf{v}}_{ij})^2\right] = 0$$

Ecuación [8]

$$\sum_{i=1}^{N} {}^1\!/_2\, m_i \left[(\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}) - (\breve{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \breve{\mathbf{v}}_{ij})\right] = 0$$

Ecuación [9]

$$\sum_{i=1}^{N} {}^1\!/_2\, m_i \left[(\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} + \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}) - (\breve{\mathbf{v}}_{ij} \cdot \breve{\mathbf{v}}_{ij} + \breve{\mathbf{a}}_{ij} \cdot \breve{\mathbf{r}}_{ij})\right] = 0$$

La partícula i-ésima (de masa m_i) respecto a la partícula J, a la partícula S y al centro de masa CM

$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ $\breve{\mathbf{r}}_{ij} = \breve{\mathbf{r}}_i - \breve{\mathbf{r}}_j$ $\mathbf{r}_{is} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s$ $\breve{\mathbf{r}}_{is} = \breve{\mathbf{r}}_i - \breve{\mathbf{r}}_s$ $\mathbf{r}_{icm} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}$ $\breve{\mathbf{r}}_{icm} = \breve{\mathbf{r}}_i - \breve{\mathbf{r}}_{cm}$

$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ $\breve{\mathbf{v}}_{ij} = \breve{\mathbf{v}}_i - \breve{\mathbf{v}}_j$ $\mathbf{v}_{is} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_s$ $\breve{\mathbf{v}}_{is} = \breve{\mathbf{v}}_i - \breve{\mathbf{v}}_s$ $\mathbf{v}_{icm} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{cm}$ $\breve{\mathbf{v}}_{icm} = \breve{\mathbf{v}}_i - \breve{\mathbf{v}}_{cm}$

$\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j$ $\breve{\mathbf{a}}_{ij} = \breve{\mathbf{a}}_i - \breve{\mathbf{a}}_j$ $\mathbf{a}_{is} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_s$ $\breve{\mathbf{a}}_{is} = \breve{\mathbf{a}}_i - \breve{\mathbf{a}}_s$ $\mathbf{a}_{icm} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{cm}$ $\breve{\mathbf{a}}_{icm} = \breve{\mathbf{a}}_i - \breve{\mathbf{a}}_{cm}$

Δ Ecuación [2]

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta\, m_i \left[(\mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij}) - (\breve{\mathbf{v}}_{ij}) \right] = 0$$

Ahora, reemplazando la partícula J por la partícula S y distribuyendo $(\Delta\, m_i)$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta\, m_i\, (\mathbf{v}_{is} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{is}) - \Delta\, m_i\, (\breve{\mathbf{v}}_{is}) \right] = 0$$

Si el sistema de referencia S $(\mathbf{v}_s = 0)$ es inercial $(\breve{\omega}_S = 0$ y $\breve{\mathbf{v}}_s =$ constante$)$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta\, m_i\, \mathbf{v}_i - \Delta\, m_i\, \breve{\mathbf{v}}_i \right] = 0$$

Como $\left[\Delta\, m_i\, \breve{\mathbf{v}}_i = \int_1^2 m_i\, \breve{\mathbf{a}}_i\, dt = \int_1^2 \mathbf{F}_i\, dt \right]$ se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta\, m_i\, \mathbf{v}_i - \int_1^2 \mathbf{F}_i\, dt \right] = 0$$

Si el sistema de partículas es aislado y si las fuerzas internas cumplen con la tercera ley de Newton en su forma débil $(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = 0)$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{v}_i = \mathbf{P} = \text{constante}$$

Por lo tanto, si el sistema de partículas es aislado y si las fuerzas internas cumplen con la tercera ley de Newton en su forma débil entonces la cantidad de movimiento total **P** del sistema de partículas permanece constante respecto a un sistema de referencia inercial.

Δ Ecuación [4]

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta\, m_i \left[(\mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij}) \times \mathbf{r}_{ij} - (\breve{\mathbf{v}}_{ij}) \times \breve{\mathbf{r}}_{ij} \right] = 0$$

Ahora, reemplazando la partícula J por el centro de masa CM y distribuyendo $(\Delta\, m_i)$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta\, m_i\, (\mathbf{v}_{icm} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{icm}) \times \mathbf{r}_{icm} - \Delta\, m_i\, (\breve{\mathbf{v}}_{icm}) \times \breve{\mathbf{r}}_{icm} \right] = 0$$

Como $\left[\Delta\, m_i\, (\breve{\mathbf{v}}_{icm}) \times \breve{\mathbf{r}}_{icm} = \Delta\, m_i\, \breve{\mathbf{v}}_{icm} \times \breve{\mathbf{r}}_{icm} = \int_1^2 (m_i\, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \times \breve{\mathbf{r}}_{icm})\, dt = \int_1^2 (m_i\, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \times \mathbf{r}_{icm})\, dt \right]$ se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta\, m_i\, (\mathbf{v}_{icm} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{icm}) \times \mathbf{r}_{icm} - \int_1^2 (m_i\, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \times \mathbf{r}_{icm})\, dt \right] = 0$$

Puesto que $\left[\sum_{i=1}^{N} \int_1^2 (m_i\, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \times \mathbf{r}_{icm})\, dt = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 (m_i\, \breve{\mathbf{a}}_i \times \mathbf{r}_{icm})\, dt = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 (\mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_{icm})\, dt \right]$ se logra:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta\, m_i\, (\mathbf{v}_{icm} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{icm}) \times \mathbf{r}_{icm} - \int_1^2 (\mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_{icm})\, dt \right] = 0$$

Si el sistema de partículas es aislado y si las fuerzas internas cumplen con la tercera ley de Newton en su forma fuerte $(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_{icm} = 0)$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, (\mathbf{v}_{icm} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{icm}) \times \mathbf{r}_{icm} = \mathbf{L} = \text{constante}$$

Por lo tanto, si el sistema de partículas es aislado y si las fuerzas internas cumplen con la tercera ley de Newton en su forma fuerte entonces el momento angular total **L** del sistema de partículas permanece constante.

Δ Ecuación [7]

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta \, 1\!/\!_2 \, m_i \left[(\mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij})^2 - (\breve{\mathbf{v}}_{ij})^2 \right] = 0$$

Ahora, reemplazando la partícula J por el centro de masa CM y distribuyendo $(\Delta \, 1\!/\!_2 \, m_i)$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta \, 1\!/\!_2 \, m_i \, (\mathbf{v}_{icm} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{icm})^2 - \Delta \, 1\!/\!_2 \, m_i \, (\breve{\mathbf{v}}_{icm})^2 \right] = 0$$

Como $\left[\Delta \, 1\!/\!_2 \, m_i \, (\breve{\mathbf{v}}_{icm})^2 = \Delta \, 1\!/\!_2 \, m_i \, \breve{\mathbf{v}}_{icm} \cdot \breve{\mathbf{v}}_{icm} = \int_1^2 m_i \, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \cdot d\breve{\mathbf{r}}_{icm} = \int_1^2 m_i \, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \cdot d\mathbf{r}_{icm} \right]$ [Ec. A] se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta \, 1\!/\!_2 \, m_i \, (\mathbf{v}_{icm} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{icm})^2 - \int_1^2 m_i \, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \cdot d\mathbf{r}_{icm} \right] = 0$$

Puesto que $\left[\sum_{i=1}^{N} \int_1^2 m_i \, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \cdot d\mathbf{r}_{icm} = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 m_i \, \breve{\mathbf{a}}_i \cdot d\mathbf{r}_{icm} = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_{icm} \right]$ [Ec. B] se logra:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta \, 1\!/\!_2 \, m_i \, (\mathbf{v}_{icm} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{icm})^2 - \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_{icm} \right] = 0$$

Por lo tanto, se puede considerar que el trabajo total W realizado por las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas, la energía cinética total K del sistema de partículas y la energía potencial total U del sistema de partículas son como sigue:

$$W = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_{icm}$$

$$\Delta K = \sum_{i=1}^{N} \Delta \, 1\!/\!_2 \, m_i \, (\mathbf{v}_{icm} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{icm})^2$$

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{N} - \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_{icm}$$

Si el sistema de partículas es aislado y si las fuerzas internas cumplen con la tercera ley de Newton en su forma débil $(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = 0)$ entonces:

$$W = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$$

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{N} - \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$$

El trabajo total W realizado por las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas es igual al cambio en la energía cinética total K del sistema de partículas.

$$W = \Delta K$$

El trabajo total W realizado por las fuerzas conservativas que actúan sobre el sistema de partículas es igual y de signo opuesto al cambio en la energía potencial total U del sistema de partículas.

$$W = -\Delta U$$

Por lo tanto, si el sistema de partículas está sujeto solamente a fuerzas conservativas entonces la energía mecánica total E del sistema de partículas permanece constante.

$$E = K + U = \text{constante}$$

Δ Ecuación [9]

$\sum_{i=1}^{N} \Delta\, ^1\!/_2\, m_i \left[(\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} + \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}) - (\check{\mathbf{v}}_{ij} \cdot \check{\mathbf{v}}_{ij} + \breve{\mathbf{a}}_{ij} \cdot \check{\mathbf{r}}_{ij}) \right] = 0$

Ahora, reemplazando la partícula J por el centro de masa CM y distribuyendo $(\Delta\, ^1\!/_2\, m_i)$ se tiene:

$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta\, ^1\!/_2\, m_i\, (\mathbf{v}_{icm} \cdot \mathbf{v}_{icm} + \mathbf{a}_{icm} \cdot \mathbf{r}_{icm}) - (\Delta\, ^1\!/_2\, m_i\, \check{\mathbf{v}}_{icm} \cdot \check{\mathbf{v}}_{icm} + \Delta\, ^1\!/_2\, m_i\, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \cdot \check{\mathbf{r}}_{icm}) \right] = 0$

Como $\left[\text{Ec. A}\right]$ y $\left[\Delta\, ^1\!/_2\, m_i\, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \cdot \check{\mathbf{r}}_{icm} = \Delta\, ^1\!/_2\, m_i\, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \cdot \mathbf{r}_{icm}\right]$ se obtiene:

$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta\, ^1\!/_2\, m_i\, (\mathbf{v}_{icm} \cdot \mathbf{v}_{icm} + \mathbf{a}_{icm} \cdot \mathbf{r}_{icm}) - (\int_1^2 m_i\, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \cdot d\mathbf{r}_{icm} + \Delta\, ^1\!/_2\, m_i\, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \cdot \mathbf{r}_{icm}) \right] = 0$

Puesto que $\left[\text{Ec. B}\right]$ y $\left[\sum_{i=1}^{N} \Delta\, ^1\!/_2\, m_i\, \breve{\mathbf{a}}_{icm} \cdot \mathbf{r}_{icm} = \sum_{i=1}^{N} \Delta\, ^1\!/_2\, m_i\, \breve{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{r}_{icm} = \sum_{i=1}^{N} \Delta\, ^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_{icm} \right]$ se logra:

$\sum_{i=1}^{N} \left[\Delta\, ^1\!/_2\, m_i\, (\mathbf{v}_{icm} \cdot \mathbf{v}_{icm} + \mathbf{a}_{icm} \cdot \mathbf{r}_{icm}) - (\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_{icm} + \Delta\, ^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_{icm}) \right] = 0$

Por lo tanto, se puede considerar que el trabajo total W' realizado por las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas, la energía cinética total K' del sistema de partículas y la energía potencial total U' del sistema de partículas son como sigue:

$W' = \sum_{i=1}^{N} (\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_{icm} + \Delta\, ^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_{icm})$

$\Delta K' = \sum_{i=1}^{N} \Delta\, ^1\!/_2\, m_i\, (\mathbf{v}_{icm} \cdot \mathbf{v}_{icm} + \mathbf{a}_{icm} \cdot \mathbf{r}_{icm})$

$\Delta U' = \sum_{i=1}^{N} - (\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_{icm} + \Delta\, ^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_{icm})$

Si el sistema de partículas es aislado y si las fuerzas internas cumplen con la tercera ley de Newton en su forma débil $(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = 0)$ entonces:

$W' = \sum_{i=1}^{N} (\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \Delta\, ^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i)$

$\Delta U' = \sum_{i=1}^{N} - (\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \Delta\, ^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i)$

El trabajo total W' realizado por las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas es igual al cambio en la energía cinética total K' del sistema de partículas.

$W' = \Delta K'$

El trabajo total W' realizado por las fuerzas conservativas que actúan sobre el sistema de partículas es igual y de signo opuesto al cambio en la energía potencial total U' del sistema de partículas.

$W' = -\Delta U'$

Por lo tanto, si el sistema de partículas está sujeto solamente a fuerzas conservativas entonces la energía mecánica total E' del sistema de partículas permanece constante.

$E' = K' + U' = \text{constante}$

Observaciones Generales

Las magnitudes $\breve{\mathbf{r}}$, $\breve{\mathbf{v}}$, $\breve{\mathbf{a}}$, $\breve{\omega}$ y $\breve{\alpha}$ son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

En todo sistema de referencia $\mathbf{r}_{ij} = \breve{\mathbf{r}}_{ij}$. Por lo tanto, $\mathbf{r}_{ij}$ es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

En todo sistema de referencia no rotante $\mathbf{v}_{ij} = \breve{\mathbf{v}}_{ij}$ y $\mathbf{a}_{ij} = \breve{\mathbf{a}}_{ij}$. Por lo tanto, $\mathbf{v}_{ij}$ y $\mathbf{a}_{ij}$ son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia no rotantes.

En todo sistema de referencia inercial $\mathbf{a}_i = \breve{\mathbf{a}}_i$. Por lo tanto, $\mathbf{a}_i$ es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales. Todo sistema de referencia inercial es un sistema de referencia no rotante.

En el sistema de referencia universal $\mathbf{r}_i = \breve{\mathbf{r}}_i$, $\mathbf{v}_i = \breve{\mathbf{v}}_i$ y $\mathbf{a}_i = \breve{\mathbf{a}}_i$. Por lo tanto, el sistema de referencia universal es un sistema de referencia inercial.

El momento angular total $\mathbf{L}$ de un sistema de partículas es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

La energía cinética total K y la energía potencial total U de un sistema de partículas son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia. Por lo tanto, la energía mecánica total E de un sistema de partículas es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

La energía cinética total K' y la energía potencial total U' de un sistema de partículas son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia. Por lo tanto, la energía mecánica total E' de un sistema de partículas es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

La energía mecánica total E de un sistema de partículas es igual a la energía mecánica total E' del sistema de partículas $(E = E')$

Bibliografía

A. Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

E. Mach, La Ciencia de la Mecánica.

R. Resnick y D. Halliday, Física.

J. Kane y M. Sternheim, Física.

H. Goldstein, Mecánica Clásica.

L. Landau y E. Lifshitz, Mecánica.

Apéndice

Definiciones y Relaciones

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i$	$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$
$\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$	$\mathbf{v}_{ij} = d\mathbf{r}_{ij}/dt$
$\mathbf{a}_i = d\mathbf{v}_i/dt$	$\mathbf{a}_{ij} = d\mathbf{v}_{ij}/dt$
$\mathbf{v}_i = \int \mathbf{a}_i \, dt$	$\mathbf{v}_{ij} = \int \mathbf{a}_{ij} \, dt$
$\Delta \mathbf{v}_i = \int_1^2 \mathbf{a}_i \, dt$	$\Delta \mathbf{v}_{ij} = \int_1^2 \mathbf{a}_{ij} \, dt$
$1/2 \, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \int \mathbf{a}_i \cdot d\mathbf{r}_i$	$1/2 \, \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} = \int \mathbf{a}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$
$\Delta 1/2 \, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \int_1^2 \mathbf{a}_i \cdot d\mathbf{r}_i$	$\Delta 1/2 \, \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} = \int_1^2 \mathbf{a}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$
$\mathbf{v}_i \times \mathbf{r}_i = \int (\mathbf{a}_i \times \mathbf{r}_i) \, dt$	$\mathbf{v}_{ij} \times \mathbf{r}_{ij} = \int (\mathbf{a}_{ij} \times \mathbf{r}_{ij}) \, dt$
$\Delta \mathbf{v}_i \times \mathbf{r}_i = \int_1^2 (\mathbf{a}_i \times \mathbf{r}_i) \, dt$	$\Delta \mathbf{v}_{ij} \times \mathbf{r}_{ij} = \int_1^2 (\mathbf{a}_{ij} \times \mathbf{r}_{ij}) \, dt$

Ecuaciones Invariantes

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} = \acute{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \acute{\mathbf{r}}_{ij}$$

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} = \acute{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \acute{\mathbf{v}}_{ij}$$

$$\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} + \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} = \acute{\mathbf{v}}_{ij} \cdot \acute{\mathbf{v}}_{ij} + \acute{\mathbf{a}}_{ij} \cdot \acute{\mathbf{r}}_{ij}$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \acute{\mathbf{r}}_{ij}$$

$$\mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij} = \acute{\mathbf{v}}_{ij} + \breve{\omega}_{\acute{S}} \times \acute{\mathbf{r}}_{ij}$$

$$\mathbf{a}_{ij} + 2\,\breve{\omega}_S \times \mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij}) + \breve{\alpha}_S \times \mathbf{r}_{ij} = \acute{\mathbf{a}}_{ij} + 2\,\breve{\omega}_{\acute{S}} \times \acute{\mathbf{v}}_{ij} + \breve{\omega}_{\acute{S}} \times (\breve{\omega}_{\acute{S}} \times \acute{\mathbf{r}}_{ij}) + \breve{\alpha}_{\acute{S}} \times \acute{\mathbf{r}}_{ij}$$

Ecuaciones Alternativas

$$\mathbf{L} = \textstyle\sum_{i=1}^{N} m_i \, (\mathbf{v}_i + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_i) \times \mathbf{r}_i - \mathrm{M} \, (\mathbf{v}_{cm} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{cm}) \times \mathbf{r}_{cm}$$

$$\mathbf{L} = \textstyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} (\mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij}) \times \mathbf{r}_{ij}$$

$$K = \textstyle\sum_{i=1}^{N} 1/2 \; m_i \, (\mathbf{v}_i + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_i)^2 - 1/2 \; \mathrm{M} \, (\mathbf{v}_{cm} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{cm})^2$$

$$K = \textstyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} 1/2 \; m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} (\mathbf{v}_{ij} + \breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_{ij})^2$$

$$K' = \textstyle\sum_{i=1}^{N} 1/2 \; m_i \, (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i) - 1/2 \; \mathrm{M} \, (\mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{a}_{cm} \cdot \mathbf{r}_{cm})$$

$$K' = \textstyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} 1/2 \; m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} + \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})$$