<u>“Determinación de la densidad de un cuerpo, y su expresión con sentido físico”</u>

Agustín Binora

agusbinora@yahoo.com.ar

Introducción teórica

En este trabajo práctico, nuestra tarea será medir la densidad de un cuerpo dado, teniendo en cuenta los errores de medición. Nos encargaremos de medir ciertas magnitudes de forma directa, para calcular luego, indirectamente, otras magnitudes. Medir es comparar magnitudes físicas con patrones previamente establecidos, con la finalidad de cuantificar lo deseado.

Una medición directa es aquella en la cual el observador interactúa directamente con el objeto de estudio, mediante un instrumento. Cada uno de estos vínculos (observador-instrumento, instrumento-objeto) presentan errores, incertezas, que debemos tener en cuanta para que nuestra medición final sea más exacta. La medición quedará correctamente expresada cuando conste de su valor representativo, su intervalo de incerteza, y la unidad correspondiente.

Las incertezas se pueden clasificar en sistemáticas y casuales o accidentales. Las primeras son en general iguales, como es el caso de suposiciones teóricas erróneas, utilización de un instrumento inadecuado o mal calibrado, etc. Las incertezass casuales son aquellas en las que nuestro valor se ve alterado en valores indeterminados, de forma accidental, pero de manera tal que podemos estimar su valor en un determinado intervalo. Entre estas se encuentran por ejemplo, errores de lectura, variaciones en las condiciones de experimentación, etc.

En el caso de un instrumento ideal midiendo un objeto ideal, el único vínculo que trae error es el de observador-instrumento. Este conjunto de errores se denomina incerteza de lectura. Es el caso, por ejemplo, de una mala coincidencia del cero en el origen, y de la subjetividad al leer el instrumento. El caso de un instrumento real midiendo un objeto ideal suma ahora el error intrínseco del instrumento (incerteza de clase), dada por la calidad del mismo. Por ahora, el error sería el de lectura, más el de clase: $\varepsilon L+\varepsilon C$. Si además, el objeto a medir es real, sumamos la indeterminación causada por las variaciones del objeto durante la experimentación (V_f), por ejemplo, las influencias térmicas del medio ambiente, etc. Cabe aclarar que éstas sólo se pondrán en evidencia si $(\varepsilon L+\varepsilon C) << V_f$. Cuando se dan estos casos tendremos que realizar muchas mediciones para poder analizar qué valores (con sus errores) tomamos como correctos. De no ser así, adoptamos como incerteza absoluta de la medición el valor de $\varepsilon L+\varepsilon C$, y la tomaremos como la mínima división de cada instrumento.

Para elegir el valor representativo, deberemos discernir entre varios criterios operativos, dependiendo del caso particular. Aquellos criterios que utilizamos, fueron el de “moda” y el de “valor medio”. Si hay alguna medida que se repita en la mayoría de los casos, se la adopta, y se la conoce como “moda”. Como “valor medio” entendemos la semisuma entre el valor máximo medido más la mínima división del instrumento y el valor mínimo menos la mínima división del instrumento.

Para elegir la incerteza absoluta utilizamos el criterio de mínima división del instrumento para un caso, y el del la semidiferencia el valor máximo medido más la mínima división del instrumento y el valor mínimo menos la mínima división del instrumento.

Hay dos tipos de indeterminación: el error absoluto (ΔL), que es el que acompaña al valor representativo (L), y define un intervalo dentro del cual se encuentra la medida, y el error relativo (εr), definido como el cociente $\Delta L/L$. De este último, podemos calcular el error porcentual $\varepsilon r*100$, y la precisión, como la inversa de εr. La precisión es la relación entre la amplitud del intervalo y el valor representativo, sin importar cuan fiel a la realidad sea el resultado. En cambia, la exactitud se vincula a la mayor coincidencia de la medición con los estándares, sin importar la precisión.

Una medición indirecta es aquella que no podemos medir, y por lo tanto, la obtenemos a partir de cálculos en base a mediciones directas. Como cada una de éstas tiene una incerteza, deberemos propagar el error para obtener la incerteza final de nuestra medición indirecta.

Propagación de incertezas:

- $C = A \pm B \rightarrow \Delta C = \Delta A + \Delta B$
- $C = A * B \rightarrow \Delta C = C * (\Delta A/A + \Delta B/B)$
- $C = A/B \rightarrow \Delta C = C * (\Delta A/A + \Delta B/B)$

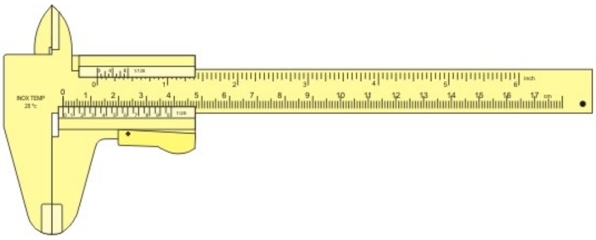
Decimos que dos o más mediciones son comparables si sus intervalos de indeterminación coinciden en al menos un punto. Por último, convenimos que adoptaremos una sola cifra significativa para nuestras mediciones e incertezas

Materiales

Mediremos la altura y el diámetro de un cilindro metálico utilizando distintos métodos:

1) Calibre marca Vernier, y mínima división de 0,02 mm.
2) Regla de 20 cm. y mínima división 0,1 cm.
3) Probeta graduada de 250 cm^3, y mínima división de 2 cm^3.

Y la masa de cuerpo con balanza electrónica de 0,5 g de incerteza.



[1]

Desarrollo y resultados

En primer lugar, queremos calcular el volumen y la densidad del cilindro (mediciones indirectas) a través de ciertas mediciones directas. Medimos el objeto, altura y diámetro, varias veces con cada uno de los instrumentos, para luego calcular el volumen, y de esta forma, poder obtener su densidad. En primer lugar con calibre, y luego con regla, cada integrante del grupo se encargó de realizar una medición de esas dos magnitudes, con la finalidad de tener más de un valor y de esta forma, obtener mediciones más exactas, y conseguir un intervalo de indeterminación en el que podemos arriesgar que se encuentra la medida exacta. Finalmente, se llenó de agua la probeta hasta un volumen conocido, se introdujo el cilindro y se midió de manera directa el volumen del mismo, como la diferencia de volumen que sufre el agua.

Por último, pesamos el cilindro en la balanza electrónica, medición directa que fue de (189,0 ± 0,5)g.

1) Calibre.

Nº de medición	**d (mm)**	**Δd (mm)**	**h (mm)**	**Δh (mm)**
1	26,00	0,02	43,66	0,02
2	25,96	0,02	43,90	0,02
3	26,00	0,02	43,66	0,02
4	26,00	0,02	43,70	0,02
5	25,98	0,02	43,70	0,02

Como valor representativo del diámetro tomamos la moda, y de esta forma, su expresión nos queda:

$d \pm \Delta d = (26,00 \pm 0,04)$ mm.

Para calcular el Δd hicimos la semidiferencia entre el valor máximo medido más la mínima división del instrumento y el valor mínimo menos la mínima división del instrumento (ver apéndice).

Para el valor representativo de la altura decidimos despreciar una de las mediciones (43,90 mm) por parecernos alejadas de las otras, y entre las restantes, buscamos el valor medio, que en este caso, coincidió con el promedio. Para la incerteza, el criterio fue el mismo que en el caso del diámetro. Lo obtenido:

$h \pm \Delta h = (43,68 \pm 0,04)$ mm.

La ecuación para el cálculo del volumen es: $V = \pi * r^2 * h = \pi * d^2 * h / 4$

Tomando la segunda ecuación de volumen, la propagación de errores nos queda $\varepsilon V = \varepsilon\pi + 2\ \varepsilon_d + \varepsilon_h + \varepsilon_4$.

ε_4 es igual a cero, y, como luego será explicado en el apéndice, $\varepsilon\pi$ también.

El volumen finalmente queda: **V = (23,2 ± 0,1) cm³.**

Definida la densidad como $\delta = m/V$, la $\varepsilon\delta = \varepsilon m + \varepsilon V$. Por lo tanto, la densidad queda:

δ = (8,15 ± 0,06) g/cm³. → Error porcentual 0,74%

2) Regla

Nº de medición	d (cm)	Δd (cm)	h (cm)	Δh (cm)
1	2,6	0,1	4,3	0,1
2	2,6	0,1	4,3	0,1
3	2,6	0,1	4,3	0,1
4	2,6	0,1	4,3	0,1
5	2,6	0,1	4,3	0,1

Tanto para el diámetro como para la altura, los valores medidos se repitieron, así que fueron los adoptados como representativos. La incerteza absoluta de dicho valor es la misma que la de cada uno de dichos valores. De esta forma:

d ± Δd = (2,6 ± 0,1) cm

h ± Δh = (4,3 ± 0,1) cm

Utilizando los mismos elementos que para la parte 1:

V = (22,8 ± 2,3) cm³

δ = (8,3 ± 0,9) g/cm³. → Error porcentual 10,8%

3) Probeta:

Nº de medición	Volumen inicial (cm³)	ΔVolumen inicial (cm³)	Volumen final (cm³)	ΔVolumen final (cm³)	Volumen del cuerpo (cm³)	ΔVolumen del cuerpo (cm³)
1	172	2	194	2	22	4

$V_{cilindro} = (|V_i - V_f| \pm \Delta V) = (22 \pm 4)\ cm^3$

δ= (8,6 ± 1,6) g/cm³ → error porcentual 18,6 %

Conclusiones

Al medir con regla, todos los integrantes medimos lo mismo, porque el error de clase de la regla es mucho mayor que la deformación del cilindro. Al medir con calibre en cambio, las mediciones fueron más diversas, ya que su error de clase es menor. Sin embargo, al realizar una medición hay que tener en cuenta también los costos y la utilidad práctica de ella, y es por esto que dependiendo del fin podrá convenirnos o no el uso del calibre en vez de la regla o la probeta.

En cuanto a las incertezas, podemos citar varias que seguro nos afectaron. Entre ellas, las variaciones medioambientales durante las mediciones y por lo tanto la deformación del cilindro, las imperfecciones que ya de por sí tenía el mismo, error de clase de los instrumentos, errores visuales al leer los instrumentos y/o al colocarlos inadecuadamente.

Mediante el análisis de los gráficos adjuntados, podemos comparar los resultados de cada medición indirecta (densidad, volumen) vemos que los intervalos coinciden en algunos puntos, y por esta razón podemos decir que son mediciones comparables. Por lo tanto cualquiera de los tres procedimientos es válido. A la hora de buscar precisión, analizando los intervalos de medición, el método del calibre es el que posee un intervalo de incerteza más chico, y por lo tanto éste es el método más preciso de los tres. Por ejemplo, para la medición de la densidad, se puede apreciar las diferencias entre los métodos mediante el error porcentual: el resultado con el calibre arroja un error de 0,74%, el de la regla, 10,8 %, y el de la probeta, 18,6 %.

Según datos de tabla, el metal que tiene densidad más parecida a la que obtuvimos es el latón, cuya densidad es de aproximadamente 8,45 g/cm3. [2]

Apéndice

1) Calibre:

Δd = [(26,00 + 0,02) mm – (25,96 – 0,02) mm] /2 = 0,04 mm
Δh = [(43,70 + 0,02) mm – (43,66 – 0,02) mm] /2 = 0,04 mm
$V = \pi * 43,68 \text{ mm} / 4 * (26,00 \text{ mm})^2 = 23191 \text{ mm}^3 = 23,2 \text{ cm}^3$
ΔV = 23,2 cm3 * [(0,04 / 43,68) + 2 * (0,04 / 26,00)] = 0,1 cm^3

Hay que aclarar acá por qué podemos despreciar la incerteza de π. Consideramos que podemos despreciarla si el error relativo de π es menor que la décima parte del error relativo de lo demás.
$\varepsilon_\pi * 10 < 2 * \varepsilon d + \varepsilon h$
$10 * (\Delta\pi / \pi) < 2 * (0,04 / 26,00) + (0,04 / 43,68)$
$(\Delta\pi / \pi) < 3,99 \times 10^{-4}$

Y ahora probamos cuántas cifras decimales hay que tomar de π para que esa desigualdad se cumpla: si tomamos π = 3,141 entonces $\Delta\pi$=0,001, y por lo tanto $(\Delta\pi / \pi) = 3,18 \times 10^{-4}$ y la desigualdad no se cumple. Si tomamos π = 3,1415, $\Delta\pi$=0,0001 y entonces $\Delta\pi / \pi = 3,18 \times 10^{-5} < 3,99 \times 10^{-4}$. Con lo cual con tomar a π con al menos 4 cifras decimales ya podemos despreciar su incerteza, y es justamente lo que hicimos al momento de realizar los cálculos.

$\delta = 189,0 \text{ g} / 23,2 \text{ cm}^3 = 8,15 \text{ g/cm}^3$
$\Delta\delta = 8,15 \text{ g/cm}^3 * [(0,5 / 189,0) + (0,1 / 23,2)] = 0,06 \text{ g/cm}^3$

2) Regla:

$V = \pi * 4,3 \text{ cm} / 4 * (2,6 \text{ cm})^2 = 22,8 \text{ cm}^3$
$\Delta V = 22,8 \text{ cm}^3 * [2 * (0,1 / 2,6) + (0,1 / 4,3)] = 2,3 \text{ cm}^3$
$\delta = (189,0 \text{ g} / 22,8 \text{cm}^3) = 8,3 \text{ g/cm}^3$
$\Delta\delta = 8,3 \text{ g/cm}^3 * [(0,5 / 189,0) + (2,3 / 22,8)] = 0,9 \text{ g/cm}^3$

3) Probeta:

$\Delta V = \Delta V_i + \Delta V_f = 4 \text{ cm}^3$
$\delta = 189,0 \text{ g} / 22 \text{ cm}^3 = 8,6$ g/cm3
$\Delta\delta = 8,6 \text{ g/cm}^3 * [(0,5 / 189,0) + (4 / 22)] = 1,6 \text{ g/cm}^3$

Bibliografía

[1] Imagen obtenida de: http://es.wikipedia.org/wiki/Calibre_%28instrumento%29
[2] Información obtenida de: http://www.goodfellow.com/csp/active/static/S/Laton.HTML

Trabajo práctico I "Parte B"
"Estudio de un movimiento"

Introducción teórica

Velocidad media: ¨Se define velocidad media de la partícula *vm,* como el cociente entre el desplazamiento ΔX y el intervalo de tiempo $\Delta T = Tf - Ti$¨ [1]:

Expresión matemática:

$$V_m = \frac{X_f - X_i}{T_f - T_i} = \frac{\Delta X}{\Delta T}$$

Velocidad instantánea: ¨A primera vista puede parecer imposible definir la velocidad de la partícula en un solo instante, es decir, en un tiempo específico. En un instante t1, la partícula está en un solo punto x1. Si está en un solo punto ¿cómo puede estar moviéndose? Por otra parte, si no se está moviendo, ¿no debería permanecer en el mismo punto? Esto constituye una antigua paradoja que puede resolverse cuando nos damos cuenta que para observar el movimiento y así definirlo, debemos observar la posición del objeto en más de un instante. Entonces resulta posible definir la velocidad en un instante mediante un proceso de paso al límite. La velocidad instantánea es el límite del cociente $\frac{\Delta X}{\Delta T}$ cuando ΔT tiende a cero¨. [2]

Expresión matemática:

$$\lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta T}$$

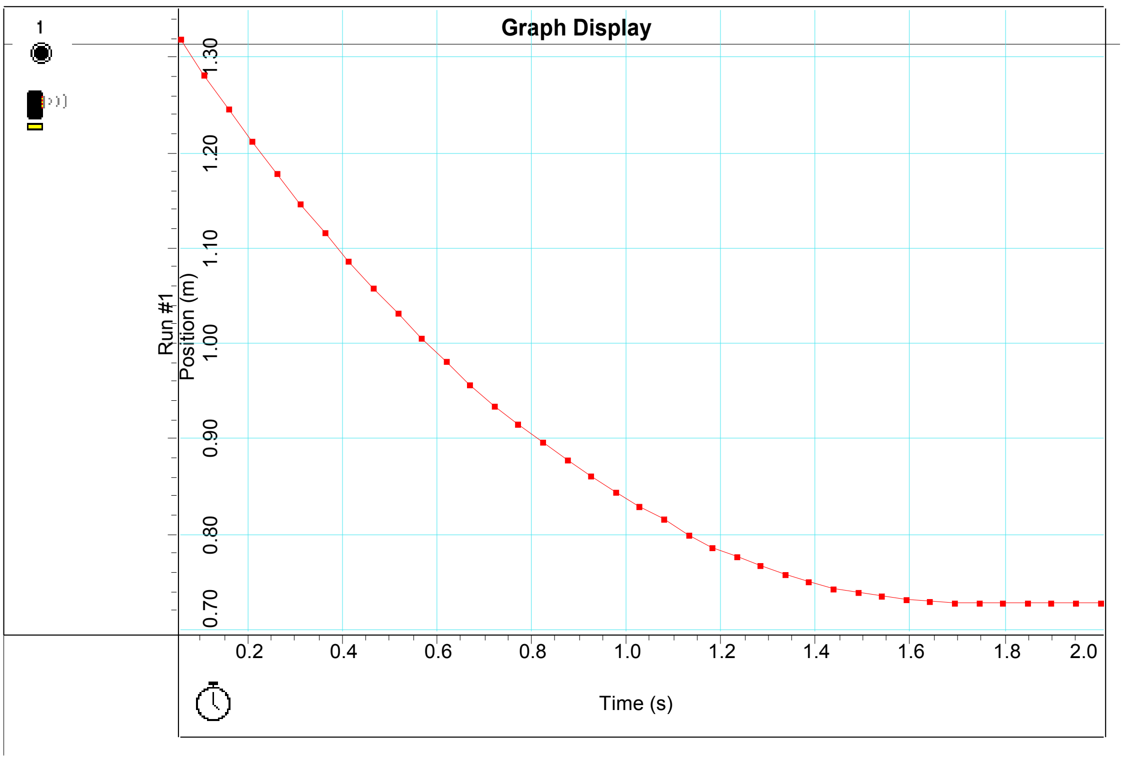
Trayectoria: lugar del espacio en el que se encuentra el móvil a cada instante.

Materiales

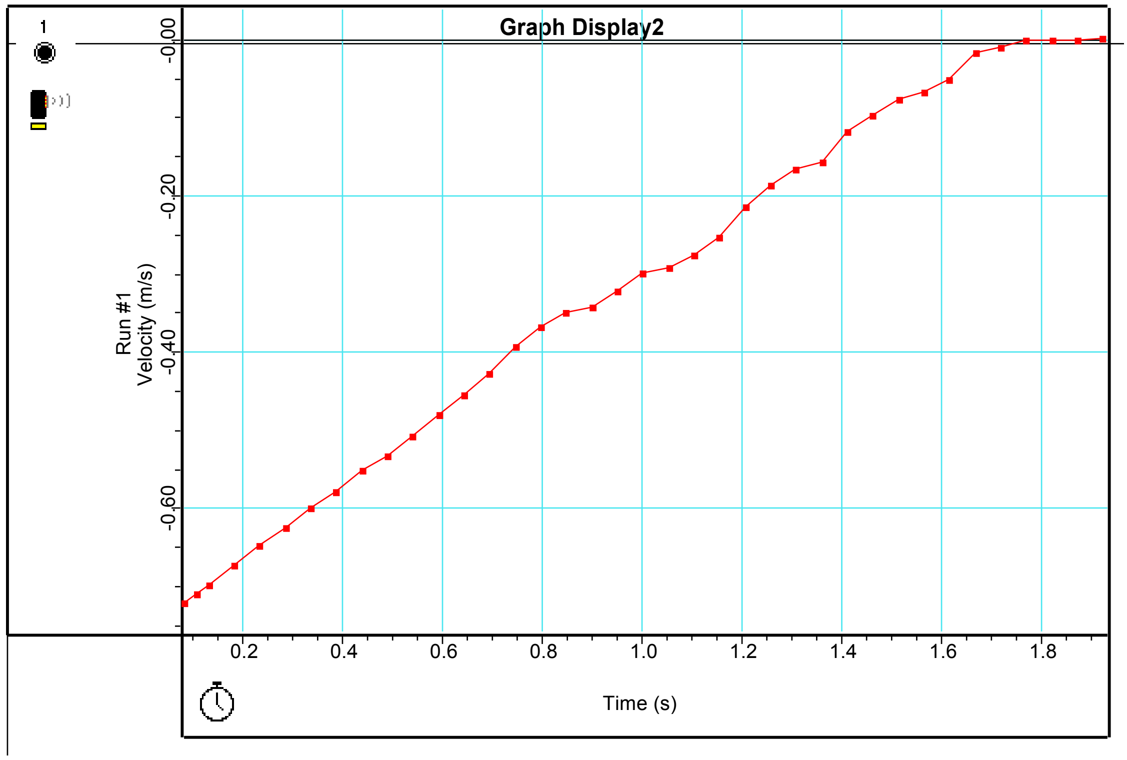
- Carril
- Móvil con rozamiento
- Sensor de posición Pasco modelo CI-6742
- Interfaz de adquisición de datos ScienceWorkshop 500
- PC

Desarrollo y resultados

La segunda parte de este trabajo práctico consiste en intentar estimar la velocidad de un móvil a partir de mediciones hechas con un sensor de posición. La experiencia consiste en lanzar un móvil, existiendo rozamiento con el carril y el sensor mide 20 veces por segundo la posición del móvil.



Gráficos



Punto	x (m)	Δx (m)	t (s)	Δt (s)
A	1,21	0,02	0,20	0,05
B1	1,08	0,02	0,40	0,05
B2	0,90	0,02	0,80	0,05
B3	0,78	0,02	1,20	0,05
B4	0,72	0,02	1,60	0,05

Velocidad media:

$$Vm = \frac{Xf - Xi}{Tf - Ti}$$

Cálculo de incerteza absoluta por derivadas parciales:

$$\Delta V = \frac{\Delta xf + \Delta xi}{Tf - Ti} + \frac{(\Delta tf + \Delta ti)(xf - xi)}{(Tf - Ti)^2}$$

V (A,B1) = -0,65 m/s — ΔV = 0,53 m/s

V (A,B2) = -0,52 m/s — ΔV = 0,16 m/s

V (A,B3) = -0,43 m/s — ΔV = 0,08 m/s

V (A,B4) = -0,35 m/s — ΔV = 0,06 m/s

Conclusiones

Luego de analizar los valores obtenidos, se llega a la conclusión de que no son comparables las velocidades obtenidas ya que mediante la observación del intervalo no son comparables los resultados. Gráficamente se puede observar mediante la representación en la recta real y ver que los intervalos no coinciden. Físicamente, no tendría sentido que den valores similares de velocidad ya que el móvil lanzado va cambiando su velocidad a medida que se acerca al final de su recorrido: la va disminuyendo.

Observando los resultados vemos que a medida que desminuye la velocidad el error de medición es cada vez menor: notar la diferencia entre las incertezas absolutas de la velocidad medida entre el tiempo 0,2 segundos y 0,4 segundos y la velocidad medida entre el intervalo de tiempo 0,2 y 1,6 segundos.

De todas las velocidades calculadas la mejor medida de la velocidad instantánea en t = 2 segundos es la primera: -0.65m/s ya que al aplicar la definición de velocidad instantánea (que es el límite del cociente entre $\Delta X/\Delta T$ cuando ΔT tiende a cero) se observa que es la que mejor se ajusta, aunque de con mayor error absoluto.

Los gráficos muestran (tendiendo en cuenta los ejes coordenados): el primero la posición respecto del tiempo y el segundo la velocidad respecto del tiempo. En el segundo podemos observar como varia la velocidad y su relación con los datos obtenidos con los cálculos de velocidades medias. A medida que aumenta el tiempo vemos que la velocidad se va acercando a cero: parte de aproximadamente -0.65 m/s cuando el tiempo es cero y cuando se acerca a 2 segundos la velocidad también se acerca a 0 m/s. Hay aceleración de distinto signo de la velocidad, es decir aceleración positiva, por lo tanto va frenando. Observamos que mediante el calculo de velocidades medias también se observa que a medida que aumenta el tiempo la velocidad se acerca a 0 m/s.

Apéndice

Cálculo de velocidades medias:

$$Vm = \frac{Xf - Xi}{Tf - Ti} \qquad \Delta V = \frac{\Delta xf + \Delta xi}{Tf - Ti} + \frac{(\Delta tf + \Delta ti)(xf - xi)}{(Tf - Ti)^2}$$

V (A, B1): $\frac{(1{,}08 - 1{,}21)\ m}{(0.40 - 0.20)\ s} = -0{,}65\ m/s$

ΔV (A, B1): $\frac{0{,}04m}{0{,}20\ s} + \frac{(0{,}10)\ s\ (0{,}13)\ m}{(0{,}2\ s)^2} = 0{,}53\ m/s$

$V \pm \Delta V = (-0{,}65 \pm 0.53)\ m/s$

V (A, B2): $\frac{(0{,}90 - 1{,}21)\ m}{(0{,}80 - 0{,}20)\ s} = -0{,}52\ m/s$

ΔV (A, B2): $\frac{0{,}04\ m}{0{,}60\ s} + \frac{(0{,}10)\ s\ (0{,}31)\ m}{(0{,}6\ s)^2} = 0{,}16\ m/s$

$V \pm \Delta V = (-0{,}52 \pm 0{,}16)\ m/s$

V (A, B3): $\frac{(0{,}78 - 1{,}21)\ m}{(1{,}20 - 0{,}20)\ s} = -0{,}43\ m/s$

ΔV (A, B3): $\frac{0{,}04\ m}{1{,}00\ s} + \frac{(0{,}10)\ s\ (0{,}43)\ m}{(1{,}00\ s)^2} = 0{,}08\ m/s$

$V \pm \Delta V = (-0{,}43 \pm 0{,}08)\ m/s$

V (A, B4): $\frac{(0{,}72 - 1{,}21)\ m}{(1{,}60 - 0{,}20)\ s} = -0{,}35\ m/s$

ΔV (A, B4): $\frac{0{,}04\ m}{1{,}40\ s} + \frac{(0{,}10)\ s\ (0{,}49)\ m}{(1{,}40\ s)^2} = 0{,}06\ m/s$

$V \pm \Delta V = (-0{,}35 \pm 0{,}06)\ m/s$

Bibliografía

[1] ¨Fisica. Paul A. Tipler¨ Editorial Reverté

[2] ¨Fisica. Paul A. Tipler¨ Editorial Reverté