Sobre la utilización del Algebra de Clifford para el esclarecimiento de la Ecuación de Schrödinger[1]

Rafael Aparicio Sánchez

R. Aparicio es Ingeniero recibió una Beca de Investigación por parte de la Generalitat de Valencia para estudiar las superficies complejas splines, Bezier-Casteljou, Nurbs y posteriormente se dedicó a la metrología, en el centro tecnológico Metalmecánica de Valencia.

Extracto

Este es un extracto de un libro del autor el cual ha realizado una revisión desde los presocráticos hasta la actualidad, en busca de aquellas cuestiones que pudieran ser esclarecedoras del supuesto "error" que impide la unificación de las ciencias físicas (ciencias de la naturaleza en según los filósofos presocráticos).

Keywords: Unificación de la física, historia de la física, "de lo visible y lo invisible", ecuación de Schrödinger, mecánica cuántica.

[1] El presente es un extracto del libro del autor, "De la naturaleza de lo visible y lo invisible".

En la mecánica cuántica nos encontramos con gran cantidad de formulaciones que rompen con la forma de trabajar de la física clásica. Como hijo de mecánico y nieto de relojero, no he podido evitar ser mecanicista, y ello me ha hecho repensar la mecánica cuántica de forma "visual y metafórica", obteniendo con ello interesantes conclusiones respecto a cuestiones tan ambiguas como el fotón, el spin y otros tantos. El resultado de muchos años de especulación filosófica, me ha llevado a algunos acercamientos interesantes hacia la unificación. Evidentemente, este artículo tiene el mismo propósito que el cuento aquel en el que la mamá oveja les decía a sus hijitos que pidieran a quien fuera que enseñara la patita, para ver si era la madre, es decir, por si hay algún esponsor entre los leyentes.

En este caso me voy a centrar en la ecuación de Schrödinger, y su vínculo con el concepto de spin, por medio de las herramientas del Algebra Geométrica de Clifford.

La ecuación de Schrödinger suele ser representada del siguiente modo:

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi + V_0\Psi$$

o en las 3+1 dimensiones:

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V_0\Psi$$

Con:

$$\vec{F} = -\nabla\vec{v} \qquad \text{y} \qquad \nabla\vec{v} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0$$

Aplicando a esta el complejo conjugado y haciendo la suma, se obtiene la ecuación de continuidad de probabilidad en mecánica cuántica:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi\Psi^*\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right)$$

Y definiendo la corriente de probabilidad del siguiente modo:

$$J(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$$

Tenemos que:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

Es decir: partiendo de la ecuación de Schrödinger se obtiene la densidad de corriente de probabilidad. La ecuación de Scrödinger es de vital importancia para la mecánica cuantica, en tanto en cuanto se utiliza para resolver todas las ecuaciones con el uso de hamiltonianos.

Pero ¿se puede proceder al revés? ¿Sería posible demostrar que la ecuación de Scrödinger se puede derivar de la ecuación de continuidad? Si esto fuera posible y además dicha ecuación de continuidad fuera más general, tendríamos muchas posibilidades de estar cerca de la "veta" donde se encuentra la Verdad.

Para ello necesitamos de herramientas más potentes, como lo son el Algebra de Clifford y un operador nabla "generalizado".

ÁLGEBRA DE CLIFFORD

No voy a extenderme más de lo necesario en aquellos aspectos del Algebra Geométrica de Clifford que voy a utilizar, que son muy básicas. Para quien precise información adicional le remito a la interesantísima página de David Hestenes[2], al libro de Perti Lounesto[3] o como introducción al interesante libro Lectures On Clifford (Geometric) Álgebras and applications, editado por Ablamowicz y Sobczyk.

El álgebra geométrica o de Clifford está dotada de multivectores y productos geométricos, permite un subespacio aritmético muy poderoso y además unifica gran cantidad de "constructos" y "herramientas" utilizadas comúnmente en las matemáticas y la física.

Por ejemplo, en esta algebra, los vectores son subespacios 1-dimensionales. Pero con los vectores en el espacio 2D hay problemas

[2] http://modelingnts.la.asu.edu/
[3] Clifford Algebras and Spinors, Pertti Lounesto, Cambridge University Press.

puesto que existe una ambigüedad al respecto de la multiplicación. De este modo, cuando multiplicamos “escalarmente” dos vectores, nos da una magnitud escalar que se obtiene de la proyección de un vector sobre otro. Y en el caso de un producto vectorial, obtenemos otro vector perpendicular a los dos que se están multiplicando. Pero en 2D, el problema está en que este vector no puede ser representado.

En el álgebra de clifford, los escalares son subespacios 0-dimensionales, como se ha dicho, los vectores son subespacios 1-dimensionales, y tenemos además otra entidad matemática que son los bivectores, 2-dimensionales.

Si combinamos el producto escalar con el producto exterior, tenemos el producto geométrico.

Se define el producto escalar o producto interno como:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a} = \alpha_1\cdot e_1 + \alpha_2\cdot e_2$$

$$\vec{b} = \beta_1\cdot e_1 + \beta_2\cdot e_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \alpha_1\cdot e_1 + \beta_1\cdot e_1 + \alpha_2\cdot e_2 + \beta_2\cdot e_2 = (\alpha_1\cdot\beta_1) + (\alpha_2\cdot\beta_2)$$

Y el producto escalar externo de 2 vectores (o bivector) como:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \wedge (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = (\alpha_1 \beta_2 e_1 \wedge e_2) + (\alpha_2 \beta_1 e_2 \wedge e_1)$$

Hay que tener en cuenta que se cumplen los siguientes:

$e_i \wedge e_i = 0$ producto externo consigo mismo es cero.

$e_i \wedge e_j = e_{ij}$ producto externo de vectores base es igual a un bivector base

$e_j \wedge e_i = -e_{ij}$ anticonmutativo.

Se puede seguir con el producto externo de 3 vectores o trivector, y así siguiendo se pueden construir los “k-blades”, que son cualquier multivector.

Cada dimensión tiene una serie de k-blades de base. Así, en 2D hay un 0-blade (escalar), dos 1-blades (vectores) y un 2-blades o bivector.

Todos los espacios $\Re^n$ generan un sistema de blades base que hacen un álgebra geométrica de subespacios. Se pueden calcular el número de blades base de un álgebra elevando dos al número de dimensiones. Así, en 3D son necesarios 8 blades (1 escalar, 3 vectores, 3 bivectores y un trivector).

Para dos vectores *a* y *b*, el producto geométrico se define del siguiente modo:

$$ab = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}$$

Del producto geométrico se obtiene un escalar y un bivector. ¿Cómo es posible y como se maneja? Igual que los números imaginarios, cada parte "por separado". Entonces es cuando tenemos que comenzar a repasar en el concepto de multivector. Un multivector es una combinación lineal de diferentes k-blades. (escalares, vectores, bivectores, trivectores, 4-blades… k-blades...).

El producto geométrico es asociativo, conmutativo en la multiplicación escalar, y distributivo sobre la suma. En general es además, no conmutativo.

Partiendo de la definición, podemos además constatar importantes relaciones.

$$ab = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}$$
$$ab + ba = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{b}\vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{a} = 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} - \vec{a} \wedge \vec{b} = 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) \quad \text{y}$$
$$ab - ba = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} - \vec{b}\vec{a} - \vec{b} \wedge \vec{a} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} = 2(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Luego:

$$ab = \frac{1}{2}(ab + ba) + \frac{1}{2}(ab - ba)$$

Siendo la primera parte un escalar, y la segunda un bivector. En conjunto, el producto geométrico *ab* representa un **spinor,** es más, también representa un **quaternion**, concepto (el de espinor) que será muy importante a la hora de interpretar los fenómenos físicos y unirlos con el álgebra geométrica.

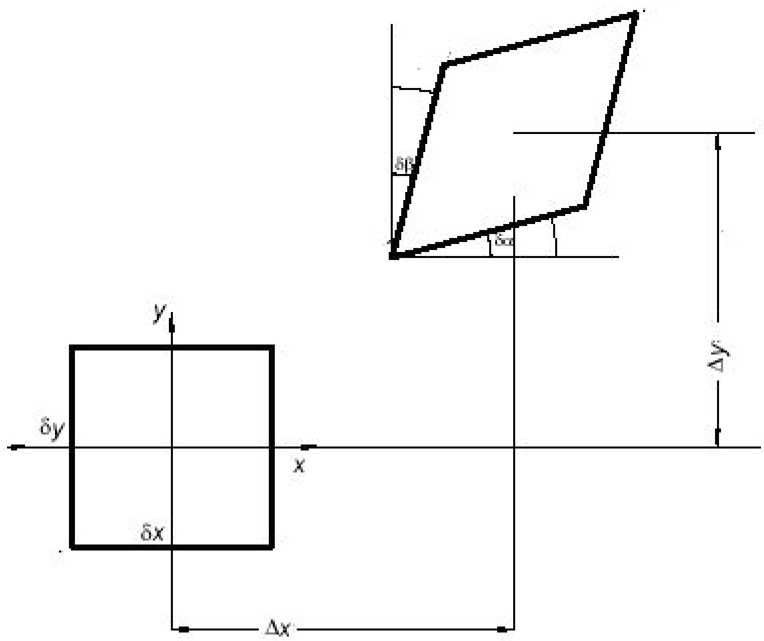
ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Con estos elementos, necesitamos repensar el concepto de la "ecuación de continuidad". Para ello lo que haremos será imaginar un objeto cualquiera, un paquete de materia o fluido, y estudiar los diferentes cambios posibles en él, verificando los posibles tipos de movimiento y/o deformación que puede sufrir. Así, tenemos que el paquete de fluido puede sufrir traslación, rotación, dilatación de volumen o deformación angular.

Los dos primeros ejemplos son ejemplos de movimiento lineal en donde la forma original del paquete no cambia aunque cambie su posición y orientación. Las dos segundas representan cambios que sufre la forma original. Se puede vincular estos cambios geométricos vinculando los campos de velocidad con los movimientos y deformaciones resultantes. Evidentemente, todos estos cambios pueden estar ocurriendo simultáneamente, pero para mayor simplificación y comprensión se considerarán de forma aislada y en dos dimensiones, realizando la generalización a tres dimensiones cuando sea preciso.

La *traslación* consiste simplemente en tomar el paquete de fluido y moverlo una ditancia durante un periodo de tiempo corto *dt.* En este caso no existe ni rotación ni ninguna deformación del paquete de fluido. La deformación será medida en función del grado a que el ángulo entre cualquier par de líneas que originalmente eran ortogonales entre sí se hayan deformado durante el tiempo *dt.* En la traslación, cualquier par de líneas ortogonales mantienen constante su ortogonalidad.

La *dilatación* se refiere al estiramiento o al encogimiento del paquete de fluido, inducido por un gradiente espacial en el campo de velocidad. No existe deformación, existiendo solo una extensión o compresión lineal de los ejes ortogonales que definen el plano. El campo de velocidad se restringe únicamente en la dirección de los ejes.



La *rotación* se define como la velocidad angular promedio de dos elementos que originalmente se encontraban ortogonales. Debe haber gradientes de campo de velocidad o esfuerzos cortantes para sostener la rotación durante el periodo *dt*. Teniendo en cuenta el elemento *dx*, y para ángulos pequeños, tenemos:

$$\tan d\theta_1 \cong d\theta_1 \cong \left(\frac{\partial v}{\partial x} dxdt \right) / dx$$

y por tanto:

$$\dot{\theta}_1 \cong \frac{d\theta_1}{dt} \cong \frac{dv}{dx}$$

Para el elemento vertical *dy*

$$\tan d\theta_2 \cong d\theta_2 \cong -\frac{\partial u}{\partial y} dydt$$

Y por lo tanto

$$\dot{\theta}_2 \cong \frac{d\theta_2}{dt} \cong -\frac{du}{dy}$$

El promedio de estos dos es la velocidad angular del paquete alrededor del eje z:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, definimos la rotación angular de los otros dos ejes como:

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Que representan la rapidez de rotación o velocidad angular.

La velocidad angular se puede expresar en forma vectorial como:

$$\Omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

El flujo irrotacional ocurre cuando los gradientes cruzados de la velocidad o también denominado esfuerzo cortante son nulos o el improbable caso de que se cancelen entre sí.

La *deformación angular* es el promedio de la diferencia en las velocidades angulares de dos elementos originalmente ortogonales, lo que afecta de nuevo a gradientes o esfuerzos cortantes deben estar presentes. Los signos se toman en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Por lo tanto tendremos que:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Estas representan la rapidez de esfuerzo cortante.

Tanto la rapidez de rotación como la rapidez de cortante se pueden representar por tensores de rango 2. Se deberá observar que el tensor de rapidez de rotación es antisimétrico, por tanto sólo tiene tres componentes independientes mientras que el tensor rapidez de cortante es simétrico y así que tiene seis componentes independientes.

Estas dos cantidades son realmente la parte simétrica y antisimétrica del tensor de rapidez de deformación. Definiendo el tensor de deformación como:

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Tenemos la parte antisimétrica del tensor de rapidez de deformación que representa la rapidez de rotación alrededor de sus propios ejes, mientras que la parte simétrica del tensor de rapidez de deformación representa la rapidez del cortante actuando sobre el elemento de fluido.

Si recordamos el producto geométrico:

$$ab = \frac{1}{2}(ab + ba) + \frac{1}{2}(ab - ba)$$

Vemos que estamos tratando con un “espinor” en dos dimensiones.

El producto triple se puede expresar de este modo:

$$abc = \frac{1}{2}(abc + cba) + \frac{1}{2}(abc - cba)$$

En cuyo caso nos encontramos con un vector y un trivector.

Teniendo en cuenta la fórmula de continuidad (hipercompleja):

$$\square\left(\vec{v}\Psi\Psi^*\right)=0$$

Aplicamos el operador "nabla hipercomplejo" (que tiene una componente para el tiempo y tres para las 3 direcciones *x,y* y *z*), obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi\Psi^*\right)+\nabla\left(\vec{v}\Psi\Psi^*\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi\Psi^*\right)+\nabla\left[\left(\Psi^*\vec{v}\Psi\right)+\left(\Psi\vec{v}\Psi^*\right)\right]=0$$

El segundo término puede dividirse en una parte simétrica y una parte antisimétrica:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi\Psi^*\right)+\nabla\left[\left(\Psi^*\vec{v}\Psi\right)+\left(\Psi\vec{v}\Psi^*\right)\right]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi\Psi^*\right)+\nabla\left[\frac{1}{2}\left(\left(\Psi^*\vec{v}\Psi\right)+\left(\Psi\vec{v}\Psi^*\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\Psi^*\vec{v}\Psi\right)-\left(\Psi\vec{v}\Psi^*\right)\right)\right]=0$$

Definiendo a partir del operador cantidad de movimiento, el operador velocidad, tenemos:

$\vec{v}=\dfrac{ih\nabla}{m}$ y sustituyendo, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi\Psi^*\right)+\frac{ih}{m}\nabla\left[\frac{1}{2}\left(\left(\Psi^*\nabla\Psi\right)+\left(\Psi\nabla\Psi^*\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\Psi^*\nabla\Psi\right)-\left(\Psi\nabla\Psi^*\right)\right)\right]=0$$

Ahora detengámonos un poco en el término en el interior de los corchetes:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\Psi^{*}\nabla\Psi\right)+\left(\Psi\nabla\Psi^{*}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\Psi^{*}\nabla\Psi\right)-\left(\Psi\nabla\Psi^{*}\right)\right)$$

¿Qué representa, o a qué es análogo?

Es la parte simétrica y antisimétrica de un producto triple *abc*.

$$abc=\frac{1}{2}(abc+cba)+\frac{1}{2}(abc-cba)$$

De estas, la primera se refiere a la rapidez de cortante y la segunda, la rapidez de rotación. Si aplicamos como hipótesis que NO hay esfuerzos cortantes, la ecuación quedaría del siguiente modo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi\Psi^{*}\right)=\frac{ih}{m}\nabla\left[\frac{1}{2}\left(\left(\Psi^{*}\nabla\Psi\right)-\left(\Psi\nabla\Psi^{*}\right)\right)\right]$$

Haciendo $\Psi^{*}=1$ tenemos:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{ih}{2m}\nabla\left(\nabla\Psi\right)$$

Muttiplicando ambos términos por $i\hbar$ tenemos:

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{h^{2}}{2m}\Delta\Psi$$

... que es la ecuación de Schrödinger para una partícula libre. Se puede entender que el término que falta es resultado de las integraciones que se realizan para verificarla por otros medios, o que es parte del resto “amputado” de esta.

En resumen: teniendo en cuenta el concepto de espinor, utilizando el álgebra de Clifford y rehaciendo la fórmula de continuidad, hemos obtenido la ecuación de corriente de probabilidad de la mecánica cuántica... por lo que se desprende que la ecuación de continuidad de corriente de probabilidad estaba “incompleta”.

En ningún momento se ha cuestionado para nada la mecánica cuántica, la teoría de la relatividad, la teoría de cuerdas ni ningún concepto de los existentes actualmente en la física.

Se le ha exigido mucho a las variables matemáticas y muy poco a las fórmulas que las sustentan, como por ejemplo a la ecuación de onda, cuando hay que exigírselo a los conceptos. Alguien dirá "no hay fruta, hay vegetales", y otro dirá "no hay vegetales, hay restos de seres vivos" *ad infinitum*. Estas indicaciones son solo un pequeño paso... un inicio.

Un viaje de mil L[4]i comienza con un paso
Lao-tsé, Tao-te-king

aparicio.rafael@gmail.com

[4] Unidad de medida de la antigua China.