# TERNAS PITAGÓRICAS Y ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

**Ruben Rosas - rubenricardorosas@hotmail.com**

La fórmula $X^n + Y^n = Z^n$ (1)

Corresponde a una terna de números enteros X, Y, Z, y n es un número natural.
Si n = 2 , la terna se llama pitagórica
Por ejemplo 3, 4, 5 es una terna pitagórica, pues $3^2 + 4^2 = 5^2$
Se puede observar que esto se puede escribir también $3^2 + 2^4 = 5^2$
La terna es pitagórica cuando los números X, Y, Z sólo se expresan con exponente dos, es decir 3, 4, 5, es una terna pitagórica, pero no lo es 3, 2, 5
El ejemplo dado corresponde a una terna pitagórica primitiva, pues también existen las que no lo son, por ejemplo 6,8, 10, 9, 12, 15, e t c, es decir los números X, Y, Z son múltiplos de la terna dada en primer lugar. Fácil es ver que dada una terna pitagórica primitiva existen infinitas que no lo son.

Muchas de las cuestiones aquí mencionadas se darán sin demostración para no prolongar lo escrito, siempre que se consideren que no cambian la sustancia de la cuestión

Dadas las fórmulas para obtener una terna pitagórica, también es fácil ver que existen infinitas ternas primitivas.

2) Fórmulas para obtener ternas pitagóricas primitivas
Las fórmulas para obtener ternas pitagóricas seguramente tienen origen remoto, y se remontan seguramente al tiempo del mismo Pitágoras (siglo VI, a c ), pero su escuela se hizo famosa por el descubrimiento de números que no son enteros ni fracciones, es decir de los números irracionales. También por que un cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene un área igual a la suma de los construidos sobre los catetos.

Las fórmulas para obtener ternas pitagóricas se dan digamos en forma vertical, es decir separadamente para obtener X, Y, Z, En foros de matemática he dado una forma digamos horizontal de obtenerlas, es decir surgen simultáneamente al tratar de resolver la igualdad $X^2 = Z^2 - Y^2$
Existen dos grupos de éstas fórmulas que son completamente equivalentes:
Grupo I : Si a, b, son números enteros primos entre sí, uno par y el otro impar entonces

$$X = 2ab, \quad Y = a^2 - b^2, \quad Z = a^2 + b^2$$

Grupo II. Si m, n, son números enteros impares primos entre sí, entonces

$$Y = mn, \quad X = (m^2 - n^2) : 2, \quad Z = (m^2 + n^2) : 2$$

Desde la época de Félix Klein, o quizá antes, un método es obtener éstas fórmulas, dibujando una circunferencia de radio unidad cortada por una secante.l

Ternas pitagóricas y el último teorema de Fermat

Al interceptar la secante a la circunferencia se obtienen las fracciones X/Z, Y/Z, al tratar de resolver

$$(X/Z)^2+(Y/Z)^2=1$$

En las fórmulas del grupo I, o del grupo II, se ve que a, b, m, n son números enteros positivos o negativos, y el signo no interesa pues al estar elevados al cuadrado su resultado es siempre positivo. Lo mismo con X, Y, Z.

Si X, Y, Z corresponden a una terna pitagórica entonces el triángulo que se construye con ésos valores es rectángulo. Recíprocamente si se tiene un triángulo rectángulo y se sabe que sus lados son números naturales, entonces los números corresponden a una terna pitagórica.

Se podría generalizar el significado de terna pitagórica como aquellos números racionales o irracionales que se obtienen de aplicar las fórmulas del grupo I o bien II

En el grupo II por ejemplo si m, n, o ambos son irracionales cuadráticos puros, entonces Y es irracional cuadrático, pero X, Z son racionales. Si m, n son racionales en dónde Corresponden a fracciones que tienen sus numeradores primos entre sí, entonces X, Y, Z, son números racionales.

Si se colocan en una fila los números impares, se verá que son diferencias de dos cuadrados como se indica a continuación:

1 3 5 7 9 11 13……….
1 4 9 16 25 36…………

Esto es fácil demostrarlo recurriendo a las propiedades de las diferencia de cuadrados. Por lo mismo es fácil de obtener ternas por la aplicación de ésas propiedades.
Entre las consecuencias se puede señalar:

c-1)Todos los impares pertenecen a una terna pitagórica primitiva
c-2) Todos los primos pertenecen a una terna pitagórica primitiva original
c-3) Todos los primos pertenecen a una única terna
c-4)Los números compuestos impares X dan lugar a varias ternas a las que ellos pertenecen.
c-5) Los números compuestos impares X formados por el producto de k factores primos dan lugar a $2^{k-1}$ ternas distintas primitivas
c-6)Los números $4u^2$ pertenecen a una terna pitagórica
c-7)Todas las potencias de un impar son diferencia de cuadrados.
c-8) Todas las potencias de un primo de la forma 4k+1 son suma de dos cuadrados
c-9) Los números $m_1=2$, $m_2=10$, $m_3 = 26$,, …… , $m_K+8$ (k -1) son suma de la unidad más un cuadrado
c-10) Del cuadrado de una resta entre dos números se pasa a al cuadrado de la suma agregando cuatro veces el producto de los números de la suma.
c-11) Los números Z de las ternas que no son primos,son productos de zetas de otras ternas

Ternas pitagóricas y último teorema de Fermat

Algunos acostumbran a llamar ternas originales a aquellas en dónde para Y, par, Z impar resultan números enteros consecutivos ( X es impar), es decir Z= Y-1.

Aquí se acepta que Z( el mayor de los números, X, Y, Z, )es impar, pues esto surge de las fórmulas del grupo I y II .Los números X, Y, no pueden ser ambos pares pues sino también sería par Z , entonces la terna no sería primitiva. Tampoco X, Y pueden ser ambos impares pues sus cuadrados serían de la forma 2k+1,y la suma de ambos sería de la forma 2j con j = impar, lo cual es imposible para el cuadrado de Z que debería ser múltiplo de cuatro.
Es decir una terna pitagórica tendría para X, Y, un término par y otro impar, y , Z debería ser impar

Se puede demostrar que X, o bien Y debe ser alguno de ellos múltiplo de tres.
También se puede demostrar que X, o bien Y, o bien Z debe ser múltiplo de cinco.
.

3) Ordenamiento de las ternas pitagóricas

Puesto que los números impares pertenecen todos a una terna pitagórica entonces las ternas se podrían ordenar en forma creciente de los números X impares, sabiendo además que si X es compuesto con k factores primos se obtienen $2^{k-1}$ ternas distintas primitivas.

4) Propiedades de algunas ternas numéricas de números primos entre sí
Lo siguiente tiene la particularidad que no lo he visto señalado en ningún escrito sobre éstas cuestiones.
p-1) Si e es impar entonces por la propiedad siete de la página dos se tiene:
$e = f_1^2 - g_1^2$ , $e^2 = f_2^2 - g_2^2$ , $e^3 = f_3^2 - g_3^2$ ,…….
Se observa que la segunda igualdad que correspondería a una terna pitagórica, es un caso particular de los infinitos casos que se pueden presentar.
p-2) Si el número e es un número par múltiplo de cuatro y mayor que él

p-3) Lo mismo si se aplica la propiedad c-8 a los primos de la forma 4k+1
para la suma de dos cuadrados Se puede observar también que los cuadrados que son suma de dos cuadrados es un caso particular entre los infinitos casos que se pueden presentar
Como éstas propiedades no se pueden pensar que existan para exponentes mayores que dos en la ecuación (1), deben haber originado la idea en muchos que la suma de dos potencias de igual exponente es una potencia del mismo exponente sólo es válida para exponente dos. Es más, la propiedad ocho se obtiene de aplicar otra propiedad que algunos llaman de Diofanto .Justamente se dice que Fermat (1601-1665) matemático francés, se encontraba leyendo el libro de Diofanto escrito por Bachet, cuando súbitamente se le ocurrió escribir en el margen de la hoja de lectura :" se me acaba de ocurrir una demostración maravillosa en dónde se puede probar que una potencia es suma de otras dos potencias de igual exponente en los casos de números enteros para X, Y, Z, sólo cuando el exponente n vale dos "

5) El último teorema de Fermat

Éste escrito que he mencionado dio origen a una carrera histórica por demostrarlo,incluso hubo un premio para el que lo consiguiera , el hecho es que a través de varios siglos nadie pudo hacerlo, hasta que en los últimos años Wiles por medio de un método muy laborioso lo consiguió. Como nadie había podido realizarlo en forma general, se trató de conseguirlo exponente por exponente. Para la cuarta potencia el mismo Fermat al parecer lo había intentado,también se supone para el exponente tres..
Para la ecuación (1,página 1) Rademacher y Toeplitz dicen en su librito Números y Figura s " Ésa ecuación no tiene resultados en números enteros x, y, z, para n mayor que dos. Ésta afirmación que nunca ha sido demostrada en sentido favorable o contrario, es denominada teorema de Fermat o el último teorema de Fermat. No obstante, la afirmación sí ha sido demostrada para ciertos valores de n. Por ejemplo, fue demostrado para todos los valores de de n de 3 a 100 por Kummer(1810-1893) y sus seguidores. Anteriormente , Euler ( 1707- 1783 ) lo había demostrado para el exponente tres y el exponente cuatro "
La anécdota me hace suponer que la solución del problema no puede ser tan complicado, quizás lo que vislumbró Fermat fue que las ternas pitagóricas se obtienen por la aplicación de propiedades especiales y particulares de los cuadrados y que éstas propiedades no se pueden manifestar en otros exponentes. Eso es lo que trato de mostrar en uno de los métodos que se me ocurren de obtener las ternas pitagóricas.

MÉTODO PARA OBTENER TERNAS PITAGÓRICAS ORIGINALES

1) Considerar un número impar, por ejemplo tres. Llamarlo X
Hallar su cuadrado, en éste caso nueve
2 )obtener la mitad del número anterior y llamarlo Y,la mitad del número siguiente y llamarlo Z,en el ejmplo Y=4, Z=5
3) X,Y,Z es una terna pitagórica,en éste caso es 3,4,5
4) Probar que es una terna pitagórica original
Si es original entonces $Y = Z - 1$
5) $X^2 + Y^2 = Z^2$
6) $X^2 + (Z-1)^2 = Z^2$
7) $X^2 + Z^2 - 2Z + 1 = Z^2$
8) $X^2 - 2Z + 1 = 0$ (&)
Aplicando las propiedades c-8, c-9 mencionadas en la página dos es, si Z=5,13,25,..
Con 13= 5 +4.2 , 25 = 13+4.3, 41= 25+ 4.4, etc
Entonces los 2Z son 1+ un cuadrado ,en el ejemplo 2Z=10= 9+1
10)luego en (&) es para X cuadrado = 9 es 0 = 0
Es decir se prueba que X=3, Y=4, Z= 5 es una terna p.p.original
ACLARACIÓN: como la terna surge de aplicar las prop.c-8, c-9 9, que son válidas sólo para los cuadrados, resulta que las ternas sólo son válidas para los exponentes dos.
11) Igualmente se ve que $X^2 + \{( X^2 - 1 ) /2\}^2 = \{4X^2 + X^4 - 2 X^2 + 1\}: 4 = ( X^2 + 1)^2 / 4 = Z^2$, por aplicación de c-11, sólo valido para cuadrados.

Lo anterior se refirió a las llamadas ternas originales, en dónde Z es un número

primo, pero los Z que no lo son se obtienen de aplicar la regla de Diofanto que es indudablemente aplicable sólo a los exponentes dos.
Se me ocurre un método de producir ternas en $X^2$ en dónde es claro que sólo Sirve para las diferencias de cuadrados en los valores compuestos de $X^2$
:

$$X^2 = \quad Z^2 - Y^2 \quad , \quad X^2 = (Z - Y)(Z + Y)$$

$$X_k{}^2 = \{ ( Z + (8 T)/2 \ - ( Y - (8T)/2 \}\{ ( Z + (8T)/2 + ( Z -(8 T)/2 \}$$

Con T = número triángulo =n(n+1)/2 , T = 1, 3, 6, 10, 15, …….

Con el caso por ejemplo $7^2 = 25^2 - 24^2$ se obtienen dos ternas más pues a
24 = 4.6 ( T = 6) sólo se le puede restar 12 =4.3 ( T = 3) y 4= 4.1 ( T = 1)
En las ternas originales Y siempre es de la forma 4T/2, pues Y = ( $Z^2$- 1)/2
Pero los cuadrados impares son de la forma 8T+1, luego Y = 4T

$$X_3{}^2 = \{(25 + 12) - (24 -12 )\}( 25 +12 )+( 24 - 12)\}= (37 - 12)(37 + 12) =35^2$$
$$X_2{}^2 = \{(25 +4) - (24-4)\}\{ ( 25 + 4)+ ( 25-4) \} = ( 29 - 20)( 29 + 20) = 21^2$$

Esto es así pues en la terna original es Z – Y = 1, luego como 1+ 8 T = $C_k^2$ resulta Sumando 8T/2 a Z e Y : ( Z + 8T/2) – ( Y – 8T/2 ) = $C^2$
Siendo en la terna original Z+Y = $C^2$ , ése cuadrado se mantiene constante pues Z + Y = (Z+8T/2) + ( Z – 8T/2 )

Se puede concluir que ésta propiedad es sólo valida para las diferencias de cuadrados en dónde el segundo paréntesis (factor) permanece invariable.

Al variar los $X_{k,}$ también variarán los Z en dónde figurarán los Z que no son Primos, pero como he mencionado ellos se obtienen de aplicar la regla de Diofanto

El primer Z que es compuesto es Z = 25, y luego Z= 65 = 5.13 y con él se obtienen dos ternas.:16, 63, 65, y 33, 56, 65. Si se aplica la regla de Diofanto se observará que los zetas son productos de zetas.

Bibliografía:

1) H. Rademacher y O. Torplitz: "Números y Figuras" Alianza Editorial,Madrid
2) Julio Rey Pastor," La Matemática Superior" Editorial Ibero Americana 1951
3) E. Hofmann: "Historia de la Matemática".Uteha, México, 1961
4) Enzo Gentile, Monografías UNESCO
6) H. Bell, Historia de Matemáticos
7) Felix Klein: "Aritmética y Álgebra". Editorial Ibero- Americana, 1948
8) Nota sobre el último teorema de Fermat y su demostración por Andrew Wiles.
. por Pable kilt, 1999.



Autor de éste escrito: Rubén Ricardo Rosas, profesor de Matemática Física y Cosmografía, egresado del Instituto Superior del Profesorado de Paraná (E.R.)

**Diciembre de 2007. rubenricardorosas@hotmail.com**