

Lógica Proposicional (LP)

Proposición

- Enunciado del que puede afirmarse si es verdadero o falso
- Oración declarativa

¿Cuáles de las siguientes son proposiciones?

- 1) Pedro es alto.
- 2) Juan es estudiante.
- 3) Ayer llovió.
- 4) ¿Quién es?
- 5) Esta mesa es azul.
- 6) 3 es impar.



Lógica Proposicional

Proposición

Simple

- Mi perro es negro.
- Juan es estudiante

Compuesta

- María es arquitecta o Juan es músico.
- Si ayer llovió entonces hoy sale el sol.
- $2 * 3 = 6$ y 7 no es par.



Lógica Proposicional

Definición del Lenguaje de la Lógica Proposicional

➤ **Sintaxis**: cómo definir fórmulas bien formadas
(fórmulas como cadenas de símbolos)

- Alfabeto

- Lenguaje

➤ **Semántica**: cómo interpretar esas fórmulas, es decir cómo asignarles un valor de verdad
(fórmulas como enunciados que pueden ser verdaderos o falsos)

- Valuaciones

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Sintaxis

Alfabeto (A_{PROP}):

$A_{PROP} = Var \dot{\cup} \{ \emptyset, \dot{\cup}, \dot{\cup}, \otimes \} \dot{\cup} \{ (,) \}$

Variables o símbolos
proposicionales

(a, b, c, ..., p, q, ...)

Símbolos auxiliares

Conectivos proposicionales:

\neg negación

\wedge y

\vee o

\rightarrow si ... entonces

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Sintaxis

Lenguaje de la LP – Conjunto de Fórmulas de la LP (F_m):

F_m es el conjunto de cadenas de símbolos de A_{PROP} , $F_m \hat{=} A_{PROP}^*$, que se obtiene aplicando las siguientes reglas:

- ✓ Para toda variable $p \hat{=} Var$, entonces $p \hat{=} F_m$,
es decir $Var \hat{=} F_m$ } Fórmulas atómicas
- ✓ Si $A \hat{=} F_m$, entonces $\neg A \hat{=} F_m$
- ✓ Si $A, B \hat{=} F_m$, entonces $(A \vee B), (A \wedge B), (A \oplus B) \hat{=} F_m$ } Fórmulas no atómicas

↑ $((p \vee q) \wedge r) \quad ((p \oplus q) \vee \neg q)$ SON FORMULAS DE F_m

↓ $p \vee q \vee r \quad ((p \oplus) \vee \neg q)$ NO SON FORMULAS DE F_m

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Sintaxis

Longitud de una Fórmula A (long A):

- ✓ Si $A = p$, $p \hat{=} Var$, entonces $long(p) = 1$
- ✓ Si $A = \neg B$, $B \hat{=} F_m$, entonces $long(A) = long(B) + 1$
- ✓ Si $A = B * C$, con $B, C \hat{=} F_m$, y $*$ es uno de los conectivos \vee, \wedge, \oplus , entonces $long(A) = long(B) + long(C) + 1$

Subfórmulas de una Fórmula A ($S_f(A)$):

- ✓ $S_f(p) = \{ p \}$ si $p \hat{=} Var$
- ✓ $S_f(\neg A) = S_f(A) \dot{\cup} \{ \neg A \}$ si $A \hat{=} F_m$
- ✓ $S_f(A * B) = S_f(A) \dot{\cup} S_f(B) \dot{\cup} \{ A * B \}$ si $A, B \hat{=} F_m$, y $*$ es uno de los conectivos \vee, \wedge, \oplus

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Sintaxis

Otra definición de F_m :

$\langle \text{form_log} \rangle ::= \langle \text{form_log} \rangle \circlearrowleft \langle \text{form_or} \rangle \mid \langle \text{form_or} \rangle$

$\langle \text{form_or} \rangle ::= \langle \text{form_or} \rangle \dot{\cup} \langle \text{form_and} \rangle \mid \langle \text{form_and} \rangle$

$\langle \text{form_and} \rangle ::= \langle \text{form_and} \rangle \dot{\cup} \langle \text{factor_log} \rangle \mid \langle \text{factor_log} \rangle$

$\langle \text{factor_log} \rangle ::= (\langle \text{form_log} \rangle) \mid \emptyset \langle \text{factor_log} \rangle \mid \langle \text{var_prop} \rangle$

$\langle \text{var_prop} \rangle ::= a \mid b \mid c \mid \dots \mid z$

Esta definición tiene en cuenta precedencia de conectivos:

$\emptyset, \dot{\cup}, \dot{\cup}, \circlearrowleft$ (de mayor a menor)

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Semántica

• Interpretación de fórmulas como enunciados a los que se puede asignar sólo uno de dos valores: Verdadero (1, V, T) ó Falso (0, F, ^)

• La interpretación o valuación de una fórmula se obtiene como sigue:

- se asigna un valor de verdad (1 ó 0) a las variables proposicionales
- se interpretan las fórmulas no atómicas teniendo en cuenta el significado de los conectivos que contienen

Interpretación de conectivos

\emptyset	
0	1
1	0

$\dot{\cup}$	0	1
0	0	1
1	1	1

\ll	0	1
0	1	0
1	0	1

$\dot{\cup}$	0	1
0	0	0
1	0	1

\circlearrowleft	0	1
0	1	1
1	0	1

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Semántica

Valuación:

Es una función $v: F_m \rightarrow \{0, 1\}$ que cumple con las siguientes propiedades para todo $A, B \in F_m$

- $v(\neg A) = \neg v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \wedge v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \vee v(B)$
- $v(A \oplus B) = v(A) \oplus v(B)$

Ejemplo:

Dada la fórmula $A = p \wedge q \oplus \neg q$ y la valuación $v(p) = 1$ y $v(q) = 1$

$$\begin{aligned}
 v(A) &= v(p \wedge q \oplus \neg q) \\
 &= v(p \wedge q) \oplus v(\neg q) \\
 &= v(p) \wedge v(q) \oplus \neg v(q) \\
 &= 1 \wedge 1 \oplus \neg 1 = 1 \oplus 0 = 1
 \end{aligned}$$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Semántica

Tablas de Verdad:

Permiten calcular todos los posibles valores de verdad de una fórmula considerando todas las valuaciones posibles.

Fórmula \oplus secuencia finita de variables y conectivos:

- conociendo valor de verdad de las k variables de la fórmula se puede construir la tabla de verdad
- Tamaño de la tabla de verdad = 2^k filas

Ejemplo: Para la fórmula $A = p \wedge q \oplus \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg q$	$p \wedge q \oplus \neg q$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Semántica

Definiciones:

- ✓ Una tautología es una fórmula A que es verdadera bajo toda valuación.

Es decir, A es tautología sí y sólo sí para toda valuación v , $v(A) = 1$

En la tabla de verdad, todos los elementos de la columna correspondiente a la fórmula son 1.

En símbolos $\models A$

- ✓ Una contradicción es una fórmula A que es falsa bajo toda valuación.

Es decir, A es contradicción sí y sólo sí para toda valuación v , $v(A) = 0$

- ✓ Una contingencia es una fórmula A que es no es ni tautología ni contradicción.

- ✓ Una fórmula A es una tautología sí y sólo sí su negación $\neg A$ es una contradicción.

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Semántica

Definiciones:

- ✓ Una valuación v satisface una fórmula A si $v(A) = 1$

✓ Una fórmula A se dice satisfacible si existe alguna valuación v que la satisfaga, es decir para alguna valuación v , $v(A) = 1$. En caso contrario, A es insatisfacible (contradicción).

✓ Una valuación v satisface un conjunto de fórmulas $G \stackrel{\text{def}}{=} \{F_1, \dots, F_m\}$ si v satisface cada fórmula de G , es decir $v(A) = 1$ para toda fórmula $A \in G$

✓ Un conjunto de fórmulas G son mutuamente satisfacibles, o consistentes entre sí, si existe al menos una valuación v que satisfaga cada fórmula de G , es decir $v(A) = 1$ para toda fórmula $A \in G$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Semántica

Equivalencia Lógica:

Dos fórmulas A y B se dicen equivalentes, $A \equiv B$, sí y sólo sí para toda valuación v , $v(A) = v(B)$

\equiv es una relación de equivalencia en el conjunto de las fórmulas F_m , es decir cumple las propiedades:

- Reflexiva: $A \equiv A$
- Simétrica: Si $A \equiv B$ entonces $B \equiv A$
- Transitiva: Si $A \equiv B$ y $B \equiv C$ entonces $A \equiv C$

Ejemplos:

- $A \oplus B \equiv \neg(A \wedge B)$
- $A \wedge \neg A \equiv A \oplus A$
- $A \equiv \neg \neg A$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Semántica

Equivalencia Lógica: Lema

Sean $A, B \in F_m$. Entonces $A \equiv B$ sí y sólo sí $v(A \leftrightarrow B) = 1$ para toda valuación v .

Demostración:

⊃) Si $A \equiv B$ entonces para cualquier valuación v , $v(A) = v(B)$.

Por lo tanto $v(A \oplus B) = v(A) \oplus v(A) = 1$ y $v(B \oplus A) = v(B) \oplus v(B) = 1$

Entonces $v(A \leftrightarrow B) = v(A \oplus B) \wedge v(B \oplus A) = 1$

⊃) Sea $v(A \leftrightarrow B) = 1$. Es decir, $v(A \oplus B) = 1$ y $v(B \oplus A) = 1$

Supongamos que $A \not\equiv B$, es decir existe v tal que $v(A) \neq v(B)$.

Se pueden dar dos casos:

$v(A) = 1$ y $v(B) = 0$ entonces $v(A \oplus B) = 1 \oplus 0 = 1$

$v(A) = 0$ y $v(B) = 1$ entonces $v(B \oplus A) = 1 \oplus 0 = 1$

En cualquier caso, se obtiene una contradicción.

Por lo tanto $v(A) = v(B)$ y entonces $A \equiv B$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Semántica

Sustitución:

Es una función $e: F_m \rightarrow F_m$ que cumple con las siguientes propiedades para todo $A, B \in F_m$

- $e(\neg A) = \neg e(A)$
- $e(A \wedge B) = e(A) \wedge e(B)$
- $e(A \vee B) = e(A) \vee e(B)$
- $e(A \rightarrow B) = e(A) \rightarrow e(B)$

Teorema:

Dadas $A, B \in F_m$ tal que $A \equiv B$, y dada la sustitución e , entonces $e(A) \equiv e(B)$

Ejemplo:

Sea $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ y sea $e(p) = a \wedge b$ y $e(q) = a \vee c$

Aplicando e

$a \wedge b \rightarrow a \vee c \equiv \neg(a \wedge b) \vee a \vee c$

(se reemplaza cada ocurrencia de la variable)

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009



Lógica Proposicional: Semántica

Definición:

Sea $A \equiv B$ y X una fórmula donde A puede aparecer varias veces como subfórmula. Si se reemplaza en X la subfórmula A por B (en todas o alguna de sus ocurrencias) la fórmula Y obtenida es equivalente a X .

Ejemplo:

Sea $X = (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge p)$ y la equivalencia $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Reemplazando en X se obtiene la fórmula $Y = (\neg p \vee q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge p)$

Se puede verificar que $X \equiv Y$

Sustitución vs. Reemplazo

La sustitución preserva la equivalencia entre las dos fórmulas porque se hace en toda ocurrencia de la fórmula sustituida (no requiere que la fórmula sustituida sea equivalente a la sustituyente)

El reemplazo preserva la equivalencia porque la fórmula sustituyente es equivalente a la sustituida (no requiere realizarse en toda ocurrencia de la fórmula sustituida)

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

