1. DESIGUALDADES E INECUACIONES DE PRIMER GRADO

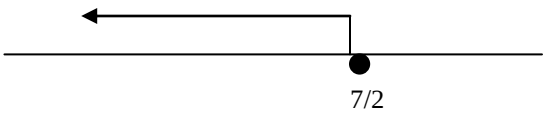
Hemos visto ecuaciones de 1º y 2º grados, en los cuales el número de soluciones era siempre finito, o sea, una solución, dos soluciones. En este tema veremos un concepto nuevo, el de inecuación, el cual consiste en hallar los valores que cumplan una cierta expresión (desigualdad) matemática. En este caso, por regla general el número de soluciones será infinito.

Ecuación: $2x-3=4 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$ como podemos comprobar la solución es única.

Inecuación: $2x-3 \leq 4 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$ en este caso vemos que hay infinitas soluciones, todos los valores de x menores o iguales que 7/2.

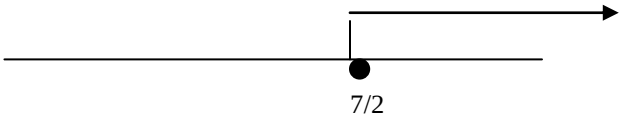
Por otra parte, necesitamos "expresar matemáticamente" todos los valores de x menores o iguales que 7/2. Vamos a recordarlo. Había dos formas mediante intervalos y gráficamente:

$x \leq \frac{7}{2}$ $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$ que significa todos los números comprendidos entre -∞ y el número 7/2, incluyendo el número 7/2. Gráficamente sería una flecha que parte del número 7/2 y señala hacia la izquierda (todos los números que hay a su izquierda).

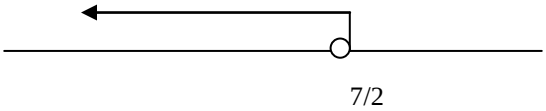


Las demás situaciones posibles las podemos expresar:

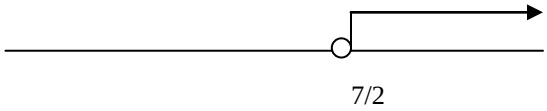
$x \geq \frac{7}{2}$ $\left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$ que significa todos los números comprendidos entre el número 7/2 y el +∞, incluyendo el número 7/2. Gráficamente sería una flecha que parte del número 7/2 y señala hacia la derecha (todos los números que haya a su derecha incluyendo el 7/2).



$x < \frac{7}{2}$ $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ que significa todos los números comprendidos entre -∞ y el número 7/2, sin incluir al número 7/2. Gráficamente sería una flecha que parte del número 7/2 y señala hacia la izquierda (todos los números que hay a su izquierda sin incluirlo).



$x > \frac{7}{2}$ $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ que significa todos los números comprendidos entre 7/2 y +∞, sin incluir al número 7/2. Gráficamente sería una flecha que parte del número 7/2 y señala hacia la derecha (todos los números que hay a su derecha sin incluirlo).



Problema ejemplo.- En un vehículo se cargan tres contenedores de igual peso y un bidón de 230 kg. Si la carga máxima del vehículo es de 1.400 kg. ¿entre qué valores puede oscilar el peso de los contenedores?

Planteamiento: $3x+230 \leq 1400$ Solución: $x \leq 390$

Definición.- Una inecuación es una desigualdad en la que aparecen números y letras, llamadas incógnitas. ¿Para qué valores de x es cierto que **...<... (miembro de la izquierda es menor que el de la derecha**? Las respuestas a esta pregunta son las soluciones de la **inecuación**.

Propiedades de las desigualdades:

1ª) Si se suma un número a los dos miembros de una desigualdad, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la primera (equivalente a la primera).

Ejemplo numérico $4>1$

$4+3>1+3$

Ejemplo. $3x+5\le x-3$

$3x+5-5\le x-3-5$

$3x\le x-8$

2ª) Si se multiplican o dividen los dos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo, la desigualdad que resulta no varía su sentido. En cambio si el número es negativo, cambia el sentido de la desigualdad.

Ejemplo numérico

$4>1$

$4\cdot 3>1\cdot 3$

$12>3$

Ejemplo numérico

$4>1$

$4\cdot -3<1\cdot -3$

$-12<-3$

Ejemplo 1º:

$\frac{2x+1}{3}\ge x+2$

$3\left(\frac{2x+1}{3}\right)\ge 3(x+2)$

$2x+1\ge 3x+6$

Ejemplo 2º:

$\frac{2x+1}{-3}\ge x+2$

$-3\left(\frac{2x+1}{-3}\right)\le -3(x+2)$

$2x+1\le -3x-6$

este **<u>cambio de sentido del símbolo de la desigualdad</u>** puedes quizás entenderlo mejor en el caso numérico. Estarás de acuerdo en que **3 < 6 ,** si multiplicas ambos miembros por un número negativo, ¿qué ocurre?, pues que cambia el signo de la desigualdad: **-3 > -6**.

Ejemplos de resolución de una inecuación, trata de explicar cada paso:

$x-2\le 3x+8$

$x-3x\le 8+2$

$-2x\le 10$

$x\ge \frac{10}{-2}$

$x\ge -5$

$[-5,+\infty)$

$4x-2\le 2x+8$

$4x-2x\le 8+2$

$2x\le 10$

$x\le 5$

$(-\infty,5]$

$3x+5\le 3x-4$

$3x-3x\le -4-5$

$0x\le -9$

no solución

ahora un poco más difíciles:

$2x+4\ge 2(3x-1)$

$2x+4\ge 6x-2$

$2x-6x\ge -2-4$

$-4x\ge -6$

$x\le \frac{-6}{-4}$

$x\le \frac{3}{2}$

$\frac{2x-1}{3}<-2(3x-5)$

$\frac{2x-1}{3}<-6x+10$

$2x-1<-18x+30$

$2x+18x<30+1$

$20x<31$

$x<\frac{31}{20}$

$\left(-\infty,\frac{31}{20}\right)$

$\frac{x+2}{2}-3(x+1)\ge -2-\frac{5x}{2}$

$\frac{x+2}{2}-3x-3\ge -2-\frac{5x}{2}$

$\frac{2(x+2)}{2}-6x-x\ge -4-5x$

$x+2-6x-6\ge -4-5x$

$0x\ge 0 \qquad Sol.\Re=(-\infty,\infty)$

observa si “un número negativo multiplica a la **x**, pasa dividiendo al otro miembro, pero **CAMBIA** el signo de la desigualdad.

Ejercicios.- Resolver las siguientes inecuaciones :

$a)\ 2x+4>0$ $\qquad b)\ 3-5x<8$ $\qquad c)\ 2x+4\le 3x-3$

$d)\ -2x+4\ge x-2$ $\qquad e)\ \frac{2}{3}x+4<\frac{3}{2}$ $\qquad f)\ 2(x+4)-5x\le 2(1-2x)+2$

$g)\ -2x+7\ge \frac{x}{2}-3$ $\qquad h)\ 2(x-2)+3x<5x+6$ $\qquad i)\ 3x-4\le 2(x-1)$

$j)\ 2(x+1)-3(2x-1)<x+2(2-x)$ $\qquad k)\ 3-2(2x-3)\le 5-3(x-3)$

$l)\ \frac{2x-3}{8}-\frac{5x-1}{2}<-\frac{3x}{4}$

$ll)\ \frac{x+1}{10}>\frac{2-3x}{5}+\frac{4x-1}{2}$

$m)\ 5(x-2)-\frac{1}{3}<3(x-1)+2x$

$n)\ 3x+7-5(2x-3)\geq\frac{x-1}{2}-1$

$ñ)\ \frac{3(x-1)}{2}-x>\frac{x-3}{2}$

$o)\ \frac{4x-1}{2}\leq 2x+\frac{9}{2}$

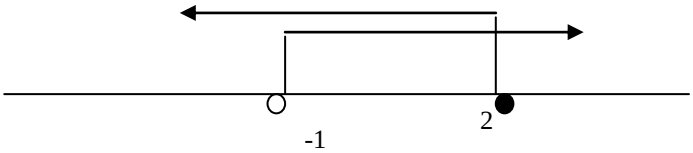
2. Sistemas de dos inecuaciones y una incógnita

Nos encontraremos dos inecuaciones (normalmente) y se trata de encontrar los valores de la incógnita (x) que hacen que se cumplan las dos inecuaciones a la vez.

Ejemplo :

$\left.\begin{array}{l} x+5\leq 7 \\ x+2>1 \end{array}\right\}$ Se resuelven por separado y se representan sobre la misma recta real: Las soluciones de las inecuaciones son x ≤ 2 y x > -1 respectivamente. La solución del sistema será la de aquellos valores de la incógnita que son a la vez menores o iguales que el 2 y mayores que el –1. O sea, números mayores que el –1 (por ejemplo –0,9999, -0,5, etc sin incluir al –1) y a la vez menores o iguales que el 2 (el 2, el 1,5, etc). El intervalo sería $(-1,2]$. Y gráficamente:

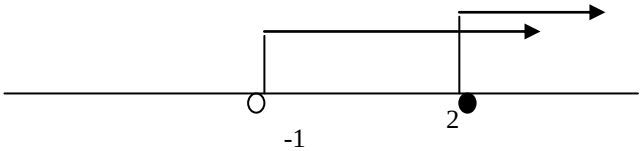
La solución del sistema sería donde coinciden las soluciones de las dos inecuaciones, es decir, en al intervalo **(-1, 2].**



Podemos encontrarnos otros tres tipos de soluciones:

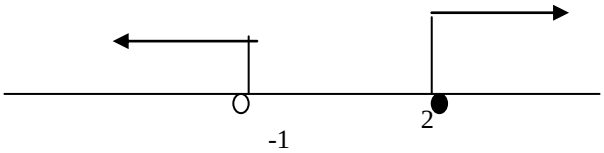
Ejemplo.-

$\left.\begin{array}{l} x+5\geq 7 \\ x+2>1 \end{array}\right\}$ La solución es: $\left.\begin{array}{l} x\geq 2 \\ x>-1 \end{array}\right\}[2,+\infty)$



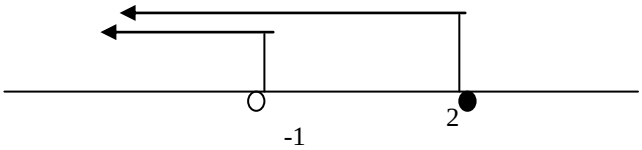
Ejemplo.-

$\left.\begin{array}{l} x+5\geq 7 \\ x+2<1 \end{array}\right\}$ No tiene solución ya que: $\left.\begin{array}{l} x\geq 2 \\ x<-1 \end{array}\right\}$



Ejemplo.-

$\left.\begin{array}{l} x+5\leq 7 \\ x+2<1 \end{array}\right\}$ La solución es: $\left.\begin{array}{l} x\leq 2 \\ x<-1 \end{array}\right\}(-\infty,-1)$



Ejercicio :

Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x-2<x+4 \\ 2x+1\geq 3x+2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x+1\leq 3x+5 \\ 2(x-1)<x+3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} x+5\geq 0 \\ x-3>0 \end{array}\right\}$

$d)\ \begin{array}{l} 2x+4>0 \\ -2x+7\geq\frac{x}{2}-3 \end{array}$

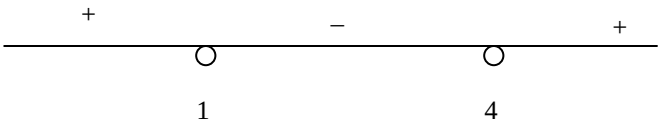
e) $\left.\begin{array}{l} x+5\le 0 \\ x-3<0 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{l} 2x-3\le 1-3x \\ 2x-3<4 \end{array}\right\}$

3.- Inecuaciones de segundo grado y de orden superior.

Consideremos la inecuación de segundo grado: **x^2 – 5x + 4 > 0**. Resolverla es buscar los valores de la x que hacen que el miembro de la izquierda sea **positivo** (**>0**). El procedimiento más sencillo consiste en factorizar el polinomio (encontrar las dos raíces por Ruffini o bien aplicando la fórmula). Las dos raíces (o las dos soluciones) son los dos valores de la x que hacen que **x^2 – 5x + 4 valga 0** los restantes valores de la x harán que **x^2 – 5x + 4 sea distinto de 0** (un número positivo o negativo).

Factorizando $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$, es decir que el valor 1 y el 4 son los dos únicos valores de x que igualan a 0 el polinomio, los restantes valores serán distintos de 0. Observa la recta real:



El 1 y el 4 hacen 0 la ecuación, y los restantes números hacen que el resultado sea positivo o negativo, ¿y como lo sabemos?. Escogemos un número mayor que el 4 y lo sustituimos en la ecuación $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$,o mejor en la ecuación factorizada y sólo debes anotar el signo del resultado. Tomemos el 5 y sustituimos: (5 - 1) · (5 - 4) es >0, luego positivo. Si escoges otro número mayor que 4 el resultado también será positivo. Entre el 1 y el 4 cogemos otro número (el 2) y sustituimos: (2 - 1) · (2 – 4) es <0, luego negativo. Si escoges otro número comprendido entre 1 y 4 el resultado también será negativo. Por último, escogemos un número menor que 1 (el 0) y sustituimos (0 – 1) · (0 - 4) es >0, (menos por menos ,+) luego positivo. Si escoges otro número menor que 1, el resultado también será positivo.

Volvamos a la gráfica y a la inecuación inicial, nos piden **x^2 – 5x + 4 > 0** donde sea positivo y distinto de cero, luego desde el -∞ hasta el 1 (sin incluir al 1) y desde el número 4 (sin incluirlo) hasta el +∞. $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

Ejemplo.- Resolver **x^2 – 5x + 4 < 0.** Nos vale la gráfica del ejercicio anterior $(1,4)$.

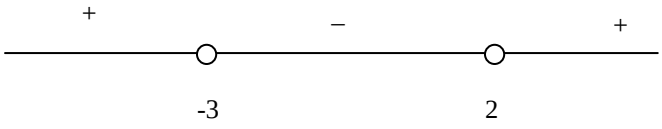
Ejemplo.- Resolver $x \quad -5x+4\ge 0$ Nos vale la gráfica del ejercicio anterior, y hay que tener en cuenta que puede valer 0, luego la solución sería: $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

Ejemplo.- Resolver **x^2 – 5x + 4 < 0.** La solución sería: $[1,4]$.

Ejemplo.- Resolver $x^2+x-6\le 0$**,** aplicando la fórmula para encontrar las dos soluciones: $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}\ sol.\ x_1=2,\quad x_2=-3$. Observa la gráfica:

Los valores negativos son los comprendidos entre –3 y 2 y valen cero en –3 y en 2. Luego la solución tiene la forma: $[-3,2]$

Ejemplo.- Resolver **$9x^2$ + 6x + 1 > 0,** $x=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{18}=\frac{-6+0}{18}=\frac{-6}{18}=\frac{-1}{3}\ solución\ única$

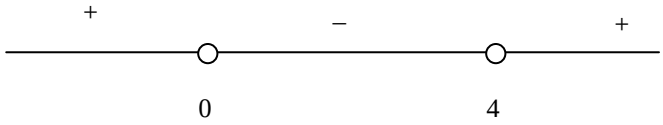


. Esto quiere decir que ese valor de la x es el único que iguala a 0 la inecuación, los restantes valores de x harán que sea distinto de cero (positivo o negativo, ¿cómo averiguarlo?). La solución es $\Re-\left\{\frac{-1}{3}\right\}$, es decir, cualquier número real al sustituirlo dará positivo salvo el –1/3 que lo iguala a cero.

Ejemplo.- Resolver $5x^2 - 7x + 3 \geq 0$ apliquemos la fórmula**,** $x = \frac{7 \pm \sqrt{49-60}}{10} = \frac{7 \pm \sqrt{-11}}{10}$ *No tiene solución* , esto quiere decir, que no hay ningún valor de x que haga que eso valga cero, pero harán que sea distinto de cero (positivo o negativo), y será positivo o negativo, no las dos posibilidades pues NUNCA vale 0. Vamos a resolverla, tomamos un valor de x (siempre el 0 será el mas sencillo) y lo sustituimos en la inecuación. POSITIVO. Me piden que sea positivo o igual a cero (NUNCA) luego la solución es $\Re$.

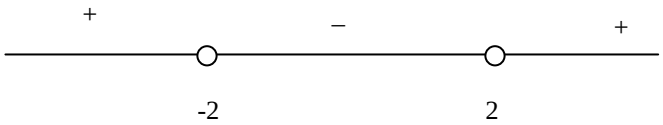
Ejemplo.- Resolver **$3x^2$ - 5x + 1 = 0,** aplicamos la fórmula, $x = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$ *sol.* $x_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$, $x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{6}$ ¿qué crees?.

Ejemplo.- Resolver **x^2 – 4x > 0** como la ecuación es incompleta saquemos factor común x(x - 4) > 0, los dos valores que igualan a 0 son el 0 y el 4:



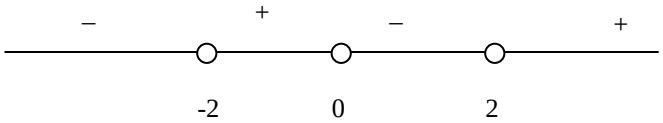
Solución: $(-\infty,0) \cup (4,+\infty)$.

Ejemplo.- Resolver $x^2 - 4 \leq 0$ como la ecuación es incompleta, la resolvemos depejando x^2 y posteriormente la expresamos factorizada: $(x-2)(x+2) \leq 0$, los dos valores de x que igualan a 0 son el 2 y el -2:



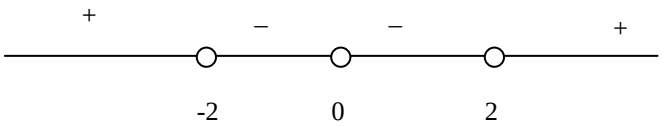
Vamos a resolver las inecuaciones de grado superior a 2:

Ejemplo.- Resolver la inecuación **x^3 - 4x < 0**, resolverla es buscar los valores de la x que hacen que el miembro de la izquierda sea **negativo** (**<0**). El procedimiento más sencillo consiste en factorizar el polinomio (en este caso podemos sacar fator común x), **x(x^2 – 4) < 0**, o lo que es lo mismo **x(x - 2)(x + 2) < 0**. Tenemos tres valores de x (el 0, 2, -2) que hacen que ese producto valga 0, los restantes valores de la x harán que ese producto sea distinto de 0, bien positivo o negativo. El estudio es el mismo que antes, dibujamos y señalamos sobre la recta real los valores que hacen 0 el producto y vamos tomando valores de x y se sustituye en la ecuación inicial para ver el signo de la operación. Observa la gráfica:



Los valores de la x que hacen negativo el producto son: $(-\infty,-2) \cup (0,2)$.

Ejemplo.- Resolver la inecuación $x^3 - 4x \leq 0$, la gráfica del ejercicio anterior nos vale, aunque en la solución tenemos que introducir la posibilidad de que pueda valer 0 el producto: $(-\infty,-2] \cup [0,2]$



Ejemplo.- Resolver la inecuación: $x^4 - 4x^2 \leq 0$, la inecuación es de grado 4 pero solo tiene tres soluciones (el 0 es solución doble). El dibujo cambia: ¡compruébalo!.

En este caso la solución será: $[-2,2]$. Si la inecuación fuera:

Ejemplo.- x^4 - 4x^2 < 0, de la solución anterior tenemos que quitar los tres valores de x que hacen que valga 0: $(-2,2) - \{0\}$.

Ejemplo, resuelve la inecuación **x^4 – 3x^3 – 13 x^2 + 9x +30 > 0**. Por Ruffini queda de la forma siguiente:

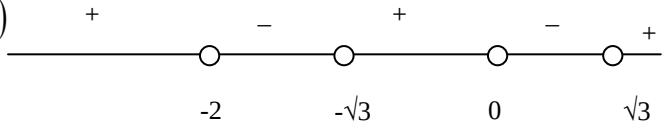
P(x) = (x + 2)(x - 5)(x^2 – 3)

por lo que la ecuación queda:

$$(x+2)(x-5)(x^2-3)=0 \quad \left\{ \begin{array}{c} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x^2-3=0 \Rightarrow \begin{array}{c} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array} \end{array} \right\}$$

representemos las cuatro soluciones:

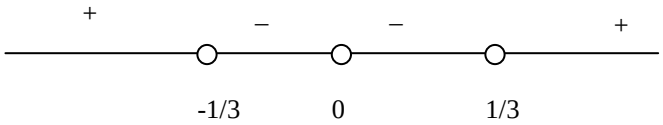
La solución será: $(-\infty,-2)\cup(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$



Ejemplo Encuentra la soluciones de la inecuación **$9x^3 + 6x^2 + x > 0$**. Lo primero que hacemos es sacar factor común **x**, y nos queda x($9x^2$ + 6x + 1) = 0. Ya tenemos la primera solución, **$x_1 = 0$**, para obtener las dos restantes (la ecuación es cúbica) aplicamos la fórmula general:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{18}=\frac{-6+0}{18}=\frac{-6}{18}=\frac{-1}{3} \; \textit{solución única}$$

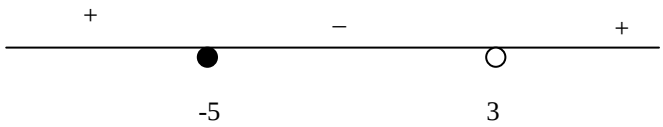
en definitiva, los valores de x que hacen que la inecuación valga 0 son: 0, -1/3 y –1/3, los restantes valores de x harán que sea negativo o positivo:



4.- Inecuaciones con cocientes

Una inecuación con cocientes es una expresión de la siguiente forma: $\frac{x+5}{x-3}\geq 0$. Se resuelve de forma análoga a las ecuaciones facorizadas. El cociente de dos números será positivo si ambos son positivos a la vez o negativos a la vez.

Ejemplo.- Resolver la inecuación $\frac{x+5}{x-3}\geq 0$. Estudiamos numerador y denominador por separado. Vemos donde el numerador y el denominador valen 0 (ya sabes que NUNCA puede valer 0 el denominador) y le damos a x valores entre esos valores y estudiamos su signo. Así, el numerador vale 0 si x vale –5, y el denominador vale 0 cuando x se 3. A continuación señalamos en la recta real esos valores. Tomamos el valor 4 (mayor que 3) y al sustituir en la inecuación inicial el numerador y el denominador salen positivos (y su cociente también, luego +). Tomamos el valor de x=0 (comprendido entre –5 y 3) el numerador es positivo y el denominador negativo (y su cociente negativo, luego -). Por último damos el valor –7 (menor que –5) al sustituirlo en la inecuación, el numerador y el denominador salen negativos (aunque su cociente es positivo, luego +). Observa la gráfica. Hemos rellenado el –5 porque ese valor SI está permintido para la x, en cambio hemos dejado vacio el del 3 porque no podemos dividir por el número 0. Por otra parte, nos piden en la inecuación inicial que $\frac{x+5}{x-3}\geq 0$ sea positivo o igual a 0, luego la solución será: $(-\infty,-5]\cup(3,+\infty)$.

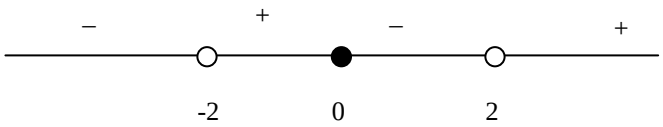


Ejemplo.- Resolver $\frac{x+5}{x-3}<0$, solo donde es negativo, luego la solución será: $(-5,3)$.

Ejemplo.- Resolver $\frac{x+5}{x-3}\leq 0$, donde es negativo o igual a 0, luego la solución será: $[-5,3)$.

Ejemplo.- Resolver $\frac{x+5}{x-3} > 0$, donde solo es positivo, luego la solución será: $(-\infty,-5)\cup(3,+\infty)$.

Ejemplo.- Resolver $\frac{x}{x^2-4} \le 0$. El numerador vale 0 en x = 0, y el denominador vale 0 (ya sabes que NUNCA puede valer 0) en 2 y en –2. Observa la gráfica. La solución estará formada por los valores de x que hacen que ese cociente sea negativo o igual a 0. $(-\infty,-2)\cup[0,2)$.



Ejemplo.- Resolver $\frac{x}{x^2-4} > 0$ .solo donde el cociente es positivo: $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

Ejemplo.- Resolver $\frac{x}{x^2-4} \ge 0$ .positivo o igual a 0: $(-2,0]\cup(2,+\infty)$.

Ejercicio.- Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - 3x > 0$ b) $x^3 - x < 0$ c) $x^4 - 6 < 0$

$d)\ x^3 - 27 \le 0$ $e)\ x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \ge 0$ $f)\ x^3 + 8 \ge 0$

$g)\ \frac{x+1}{x-1} \ge 0$ $h)\ \frac{x+3}{x-2} < 0$ $i)\ \frac{x^2+1}{x} \ge 0$

$j)\ \frac{x^2-1}{x} \ge 0$ $k)\ \frac{x^2-1}{x-1} \ge 0$ $l)\ \frac{x^2-1}{x^2} \ge 0$

$ll)\ \frac{x^2}{x^2-1} \ge 0$ $m)\ \frac{x^2}{x^2+1} \ge 0$ $n)\ \frac{2}{x-1} \ge 0$

$ñ)\ \frac{2}{x^2-1} \ge 0$ $o)\ \frac{2x-3}{x^2-4} \ge 0$ $p)\ \frac{-2}{x-1} \ge 0$

$q)\ \frac{x^2}{x^2-9} \ge 0$ $r)\ \frac{x^2-4}{x^2-9} \ge 0$ $s)\ \frac{x^2-3x}{x^2-9} \ge 0$

$t)\ \frac{x^2-3x}{x^2+9} \ge 0$ $u)\ \frac{x^3-9x}{x^2-9} \ge 0$ $v)\ \frac{x-2}{x^2-4} \ge 0$

Ejercicio.- Resulve las siguientes inecuaciones.:

a) $x^4 + 3x^3 - 4x > 0$
b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 > 0$
c) $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80 < 0$
d) $x^4 - 3x^3 + 2x > 0$
e) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 > 0$
f) $2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x =<0$
g) $x^4 - 3x^3 + 4x >= 0$
h) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 < 0$
i) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 8 <= 0$
j) $2x^3 - 7x^2 + 6x > 0$
k) $5x^4 + 10x^3 - 45x^2 - 10x + 40 <= 0$
l) $2x^3 + 9x^2 - 27x - 54 <= 0$
ll) $3x^3 + 13x^2 - 59x - 21 <= 0$
m) $10x^3 + 19x^2 + 11x + 2 >= 0$
n) $2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 <= 0$
ñ) $3x^3 - 18x^2 + 36x - 24 <= 0$
o) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 < 0$
p) $x^4 + 3x^3 - 4x < 0$
q) $2x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 4x^2 > 0$
r) $3x^6 + 18x^5 + 36x^4 + 24x^3 > 0$