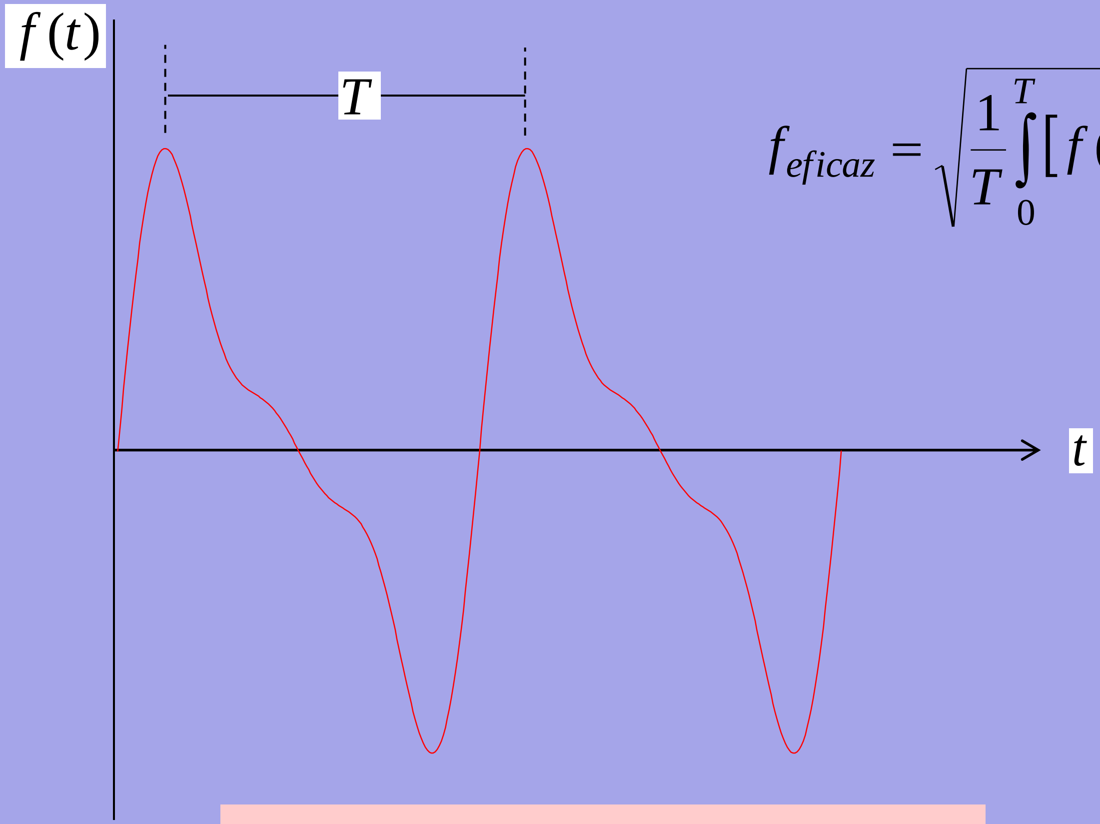
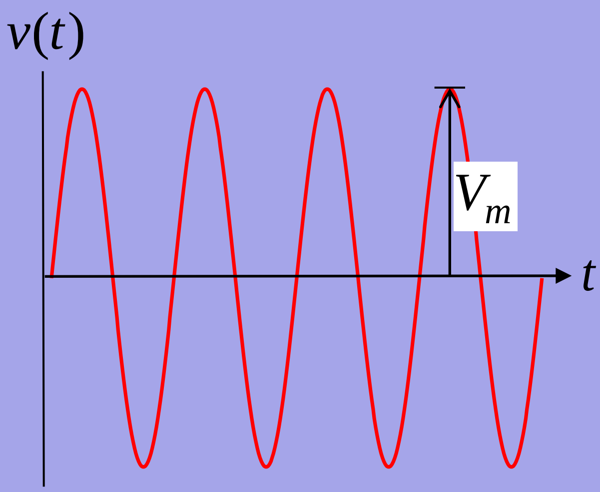
# Introducción a la Corriente Alterna

# VALOR EFICAZ DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA




$$f_{eficaz} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\, dt}$$




VALOR EFICAZ FUNCIÓN SENOIDAL

$$V_{eficaz} = V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t \pm \varphi)$$

También denominado valor RMS

# FASORES

Una función sinusoidal del tiempo de una frecuencia determinada se caracteriza únicamente con dos parámetros, su amplitud y su ángulo de fase.

La representación compleja de dicha función (de una frecuencia determinada) se caracteriza también con esos dos mismos parámetros.

Fórmula de Euler $e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j \cdot \operatorname{sen}\alpha$

La función $\boxed{V_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)}$ se puede representar como $\boxed{\operatorname{Re}\left\{V_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\right\}}$

El fasor es una representación compleja abreviada en la que, una vez establecida la frecuencia, se omite ésta representando la función sinusoidal por el VALOR EFICAZ de la misma y su ÁNGULO DE FASE:

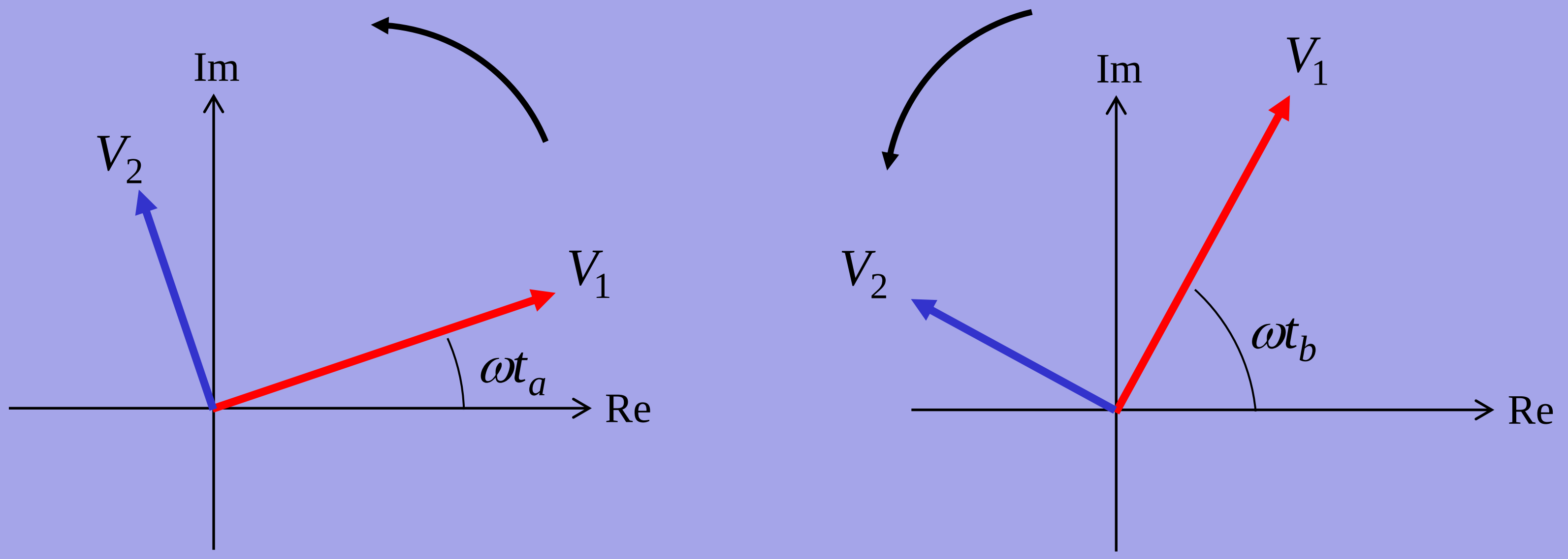
FORMA POLAR $V_{/\varphi}$

FORMA COMPLEJA $V \cdot e^{j\varphi}$

VALOR EFICAZ

# FASORES (II)

Los fasores pueden interpretarse como vectores rotatorios que giran con frecuencia angular $\omega$ en sentido contrario a las agujas del reloj.




La relación de fases entre ellos permanece invariable

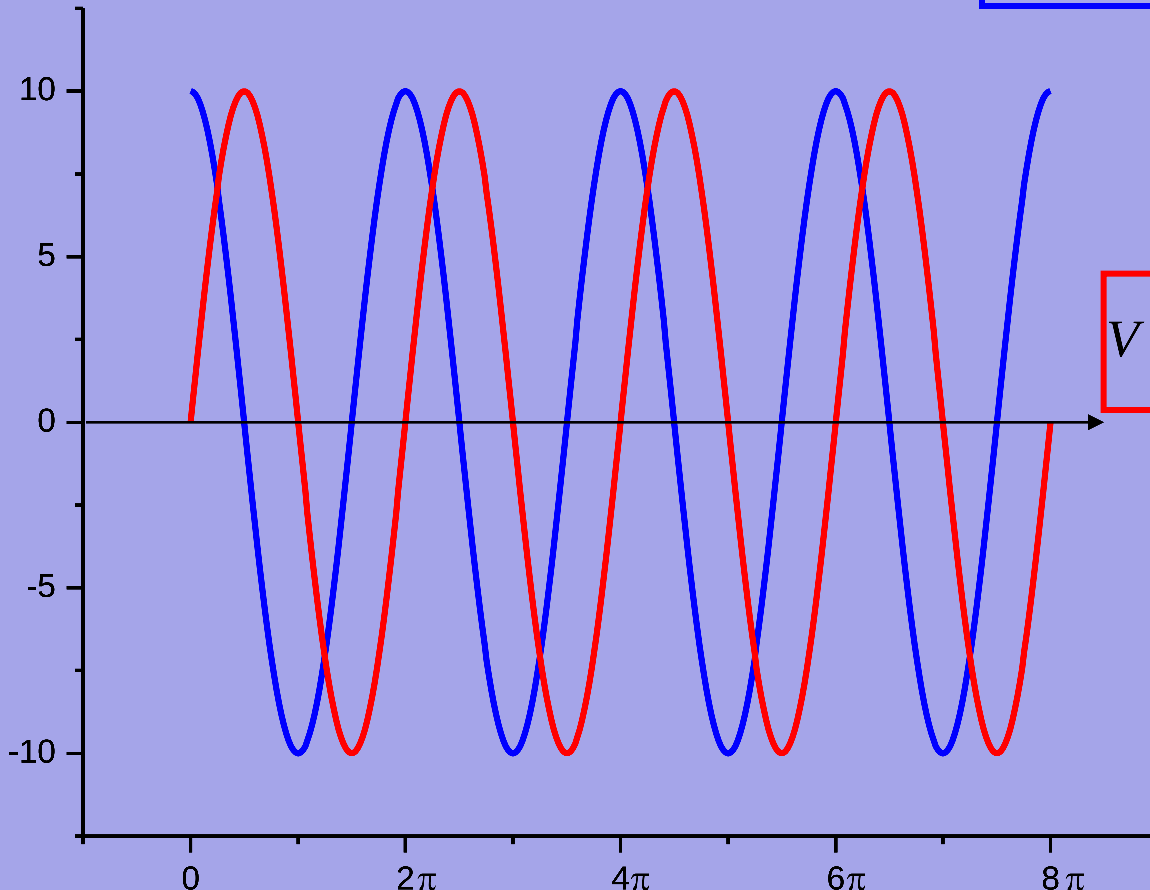
# FASORES (EJEMPLO)

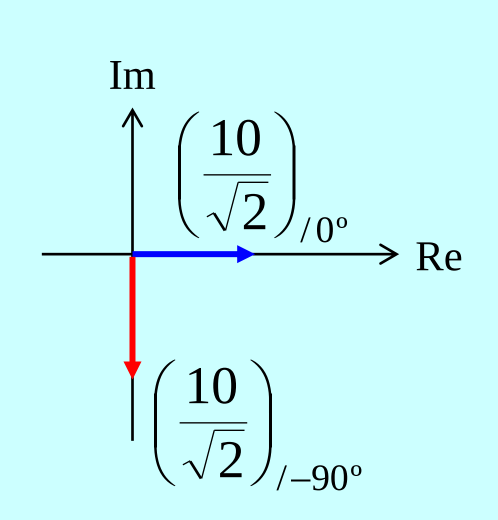
$V_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ $\boxed{V_m = 10 \qquad \varphi = 0}$ $\rightarrow$ $\boxed{V \cdot e^{j\varphi} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0} = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)_{/0^{o}}}$

$$\boxed{V_m = 10 \qquad \varphi = -\pi/2}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{V \cdot e^{j\varphi} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\pi/2} = -\frac{10}{\sqrt{2}}\,j}$$

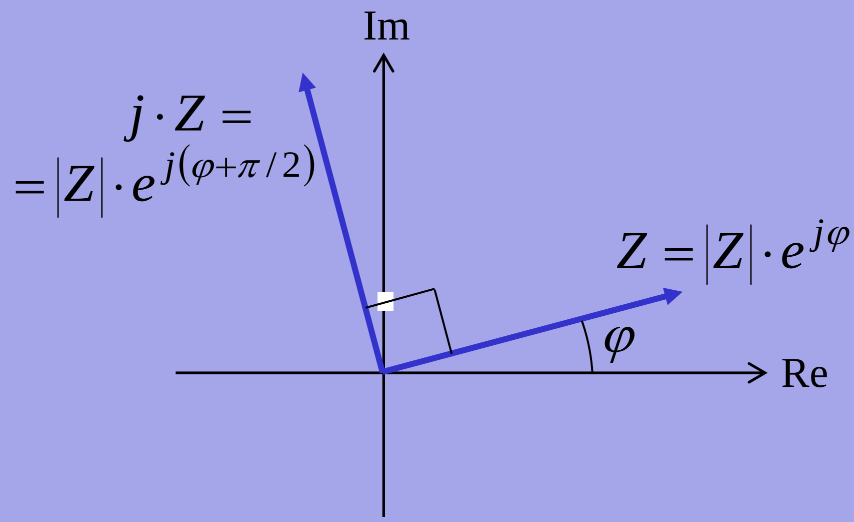



Fasores representados en $t$ = 0

# OPERACIONES CON FASORES

SON VÁLIDAS LAS MISMAS OPERACIONES DEFINIDAS EN EL ÁLGEBRA DE NÚMEROS COMPLEJOS

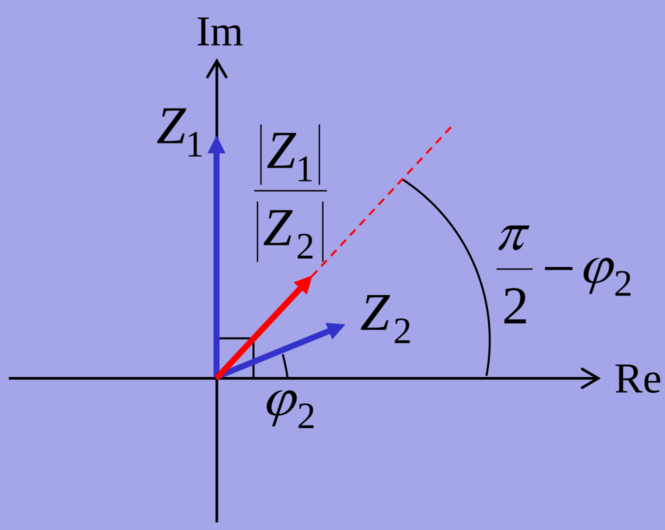



Multiplicar $Z$ por $j$ equivale a ADELANTAR π/2 su fase

Dividir $Z$ entre $j$ equivale a RETRASAR π/2 su fase

Multiplicación: multiplicar módulos, sumar fases

División: dividir módulos, restar fases

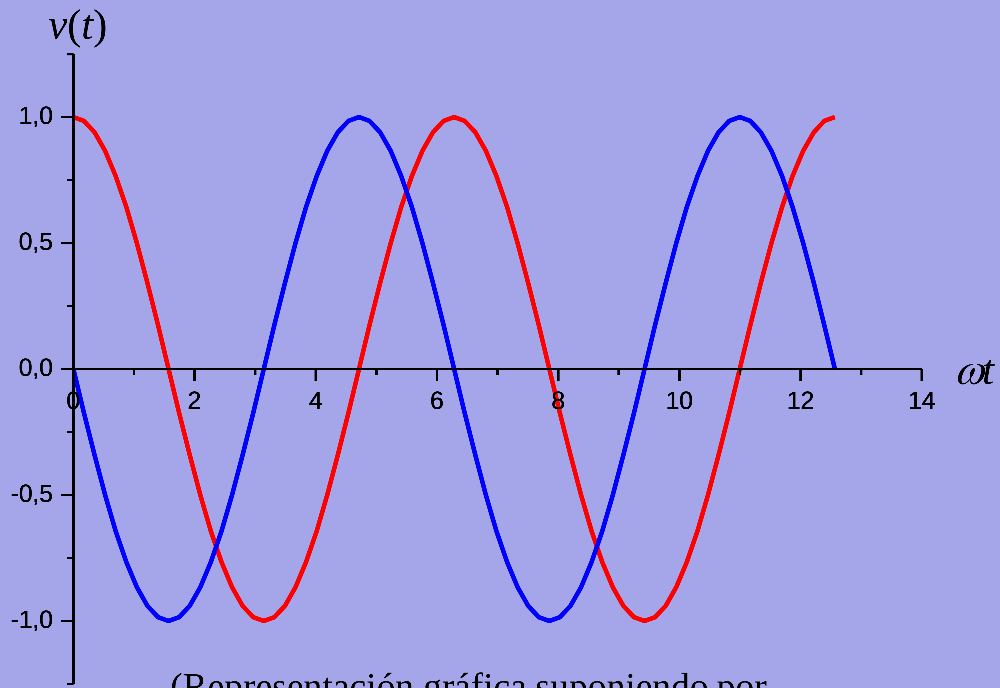


# OPERACIONES CON FASORES

## Derivación de funciones sinusoidales

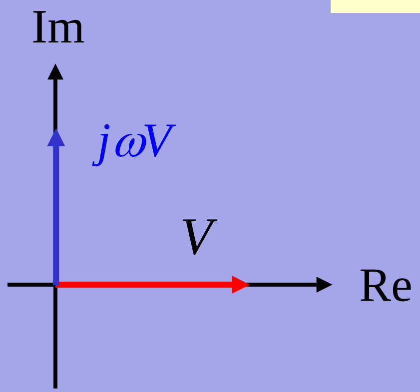
$$\boxed{v(t) = \cos \omega t}$$

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} = -\omega \operatorname{sen} \omega t = \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$




(Representación gráfica suponiendo por simplicidad $\omega$ =1. Unidades arbitrarias)

Derivar $v(t)$ equivale a MULTIPLICAR por $\omega$ el fasor $V$ y ADELANTAR $\pi/2$ su fase

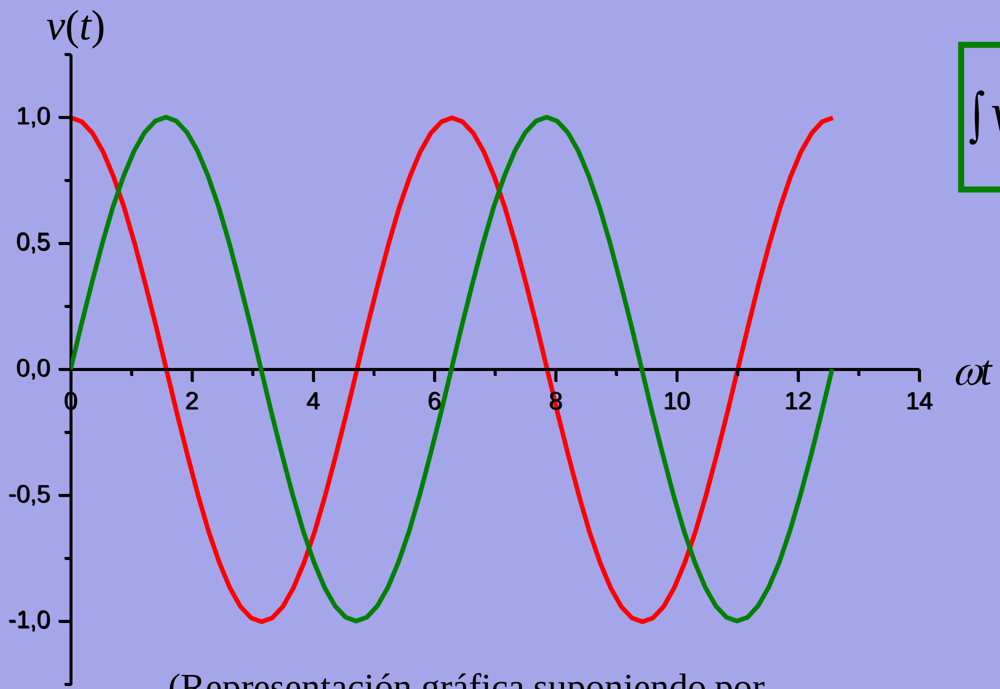


# OPERACIONES CON FASORES

## Integración de funciones sinusoidales

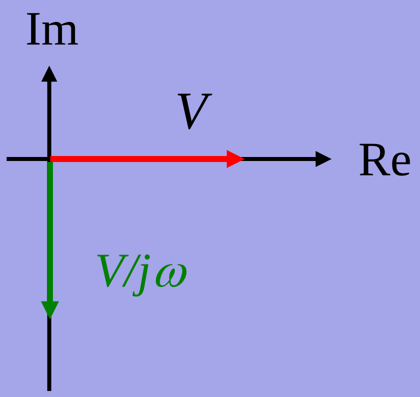
$$\boxed{v(t) = \cos \omega t}$$

$$\boxed{\int v(t)dt = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t = \frac{1}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$



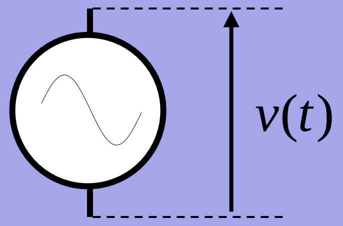

(Representación gráfica suponiendo por simplicidad $\omega$ =1. Unidades arbitrarias)

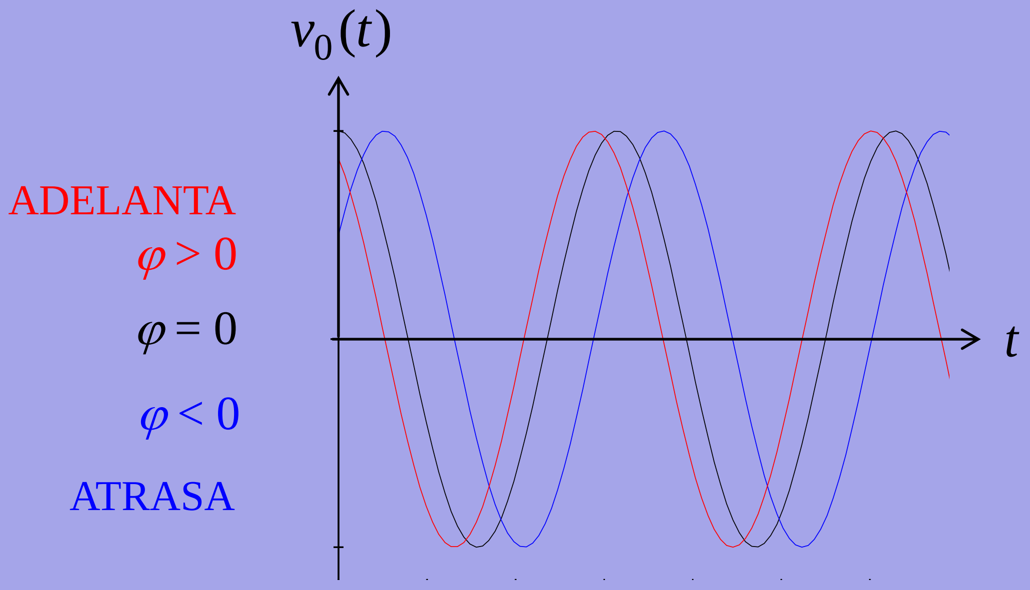
Integrar $v(t)$ equivale a DIVIDIR por $\omega$ el fasor $V$ y ATRASAR π/2 su fase



# FUENTES DE VOLTAJE SINUSOIDALES

$$v(t) = V_m \cos(\omega t \pm \varphi)$$




Representación compleja
(función del tiempo)

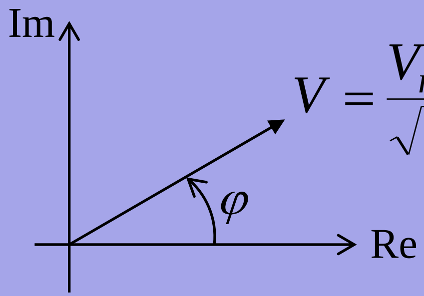
$$v(t) = \mathrm{Re}\left\{ V_m \cdot e^{j(\omega t \pm \varphi)} \right\}$$

Representación fasorial
(función de frecuencia dada)

$$V_{/\pm\varphi} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{\pm j\varphi} \qquad V_{/\pm\varphi} = \left( \frac{V_m}{\sqrt{2}} \right)_{/\pm\varphi}$$

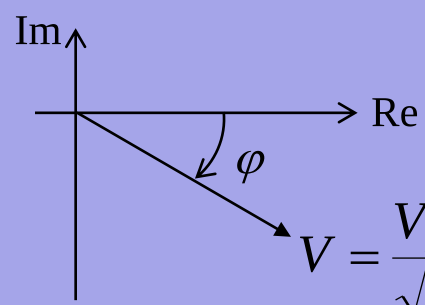
# FUENTES DE VOLTAJE SINUSOIDALES (II)

Si la frecuencia es conocida...



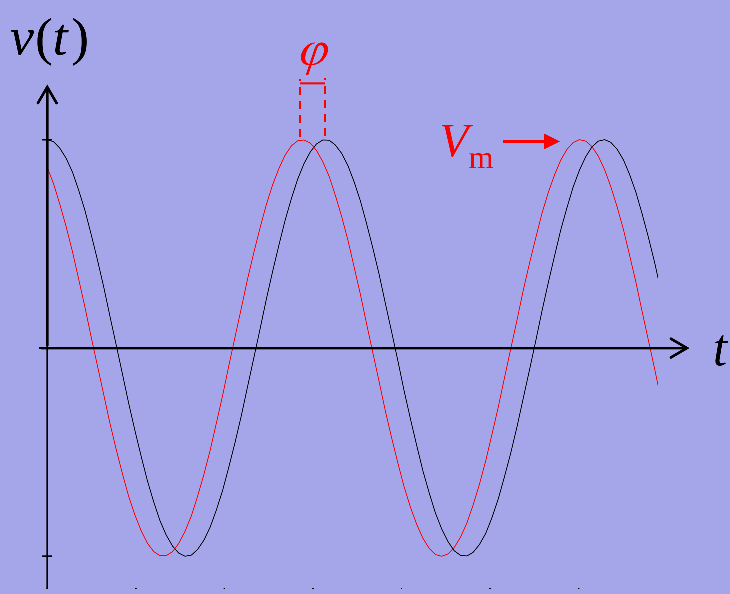

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{+j\varphi}$$

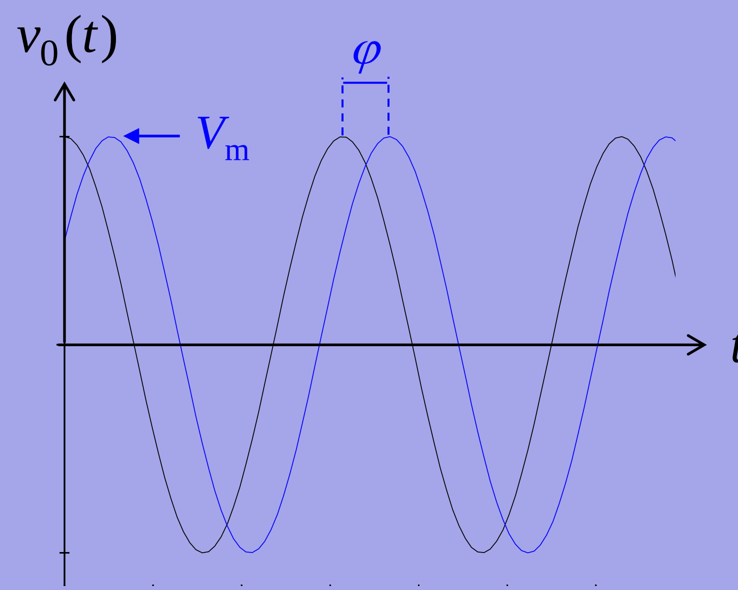
las representaciones...




$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\varphi}$$

...contienen la misma información que

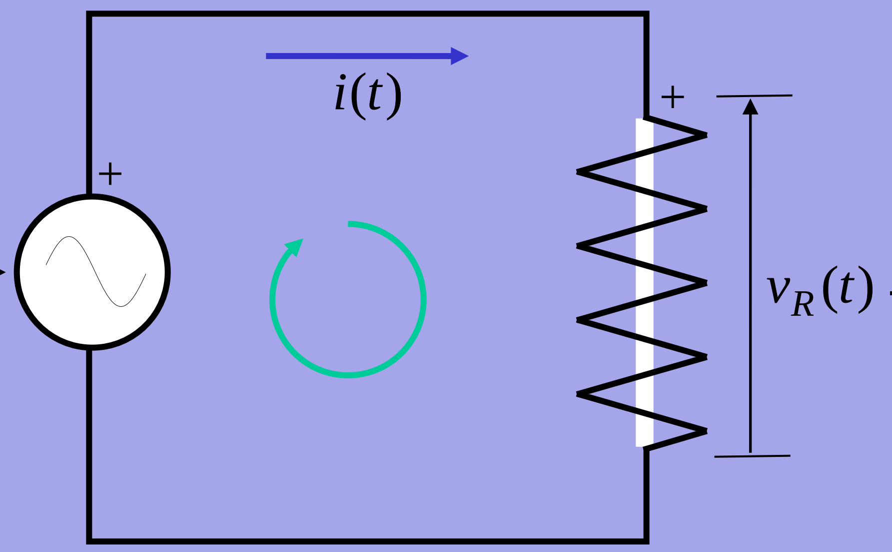


# ELEMENTOS DE CIRCUITO: RESISTENCIA

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

**LKV:** $-v(t) + v_R(t) = 0$




$$v_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$V_m \cos \omega t = R \cdot i(t)$$

$$i(t) = \frac{V_m}{R} \cos \omega t$$

La intensidad ESTÁ EN FASE con el voltaje

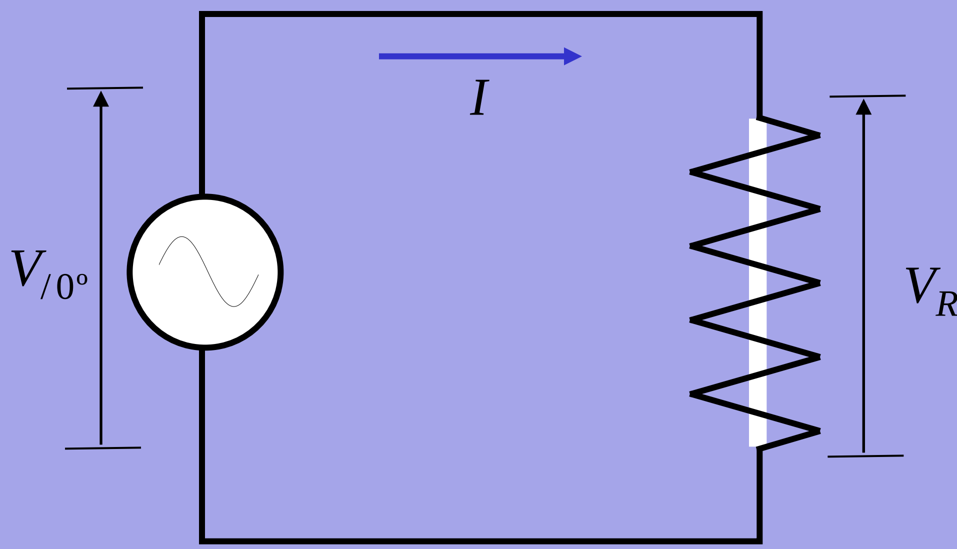
# ELEMENTOS DE CIRCUITO: RESISTENCIA (II)

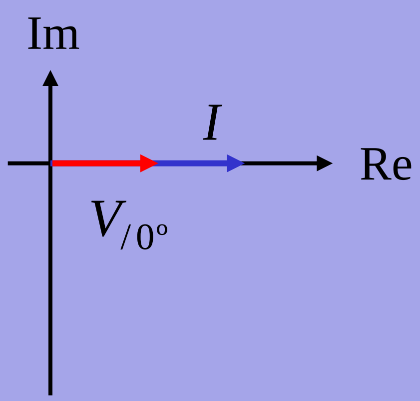
FASORES $\qquad V_{/0^o} = \left(\dfrac{V_m}{\sqrt{2}}\right)_{/0^o}$

$V_{/0^o} = V_R$ $\qquad$ **Ohm c.a.** $\qquad V_R = I \cdot R$

$$I = \frac{V_R}{R} = \frac{V_{/0^o}}{R}$$

$$I = \left(\frac{V}{R}\right)_{/0^o}$$

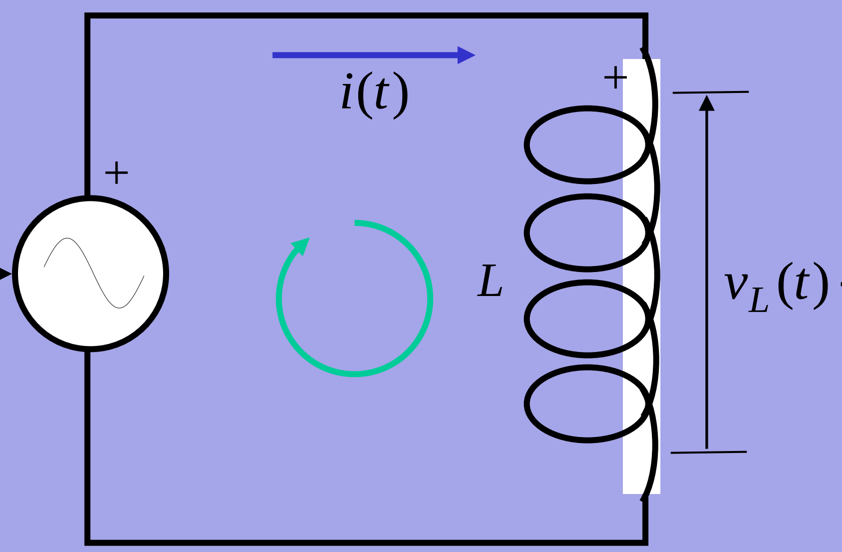


# ELEMENTOS DE CIRCUITO: INDUCTANCIA

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

**LKV:** $-v(t) + v_L(t) = 0$



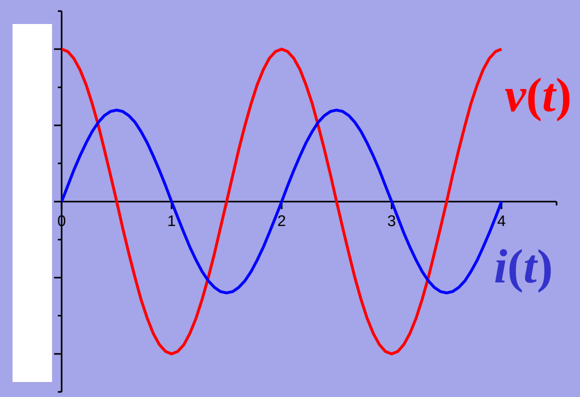

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$V_m \cos\omega t = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$di(t) = \frac{V_m}{L}\cos\omega t \cdot dt$$

$$i(t) = \frac{V_m}{L}\int \cos\omega t \cdot dt$$

$$i(t) = \frac{V_m}{L\omega}\operatorname{sen}\omega t = \frac{V_m}{L\omega}\cos(\omega t - \pi/2)$$

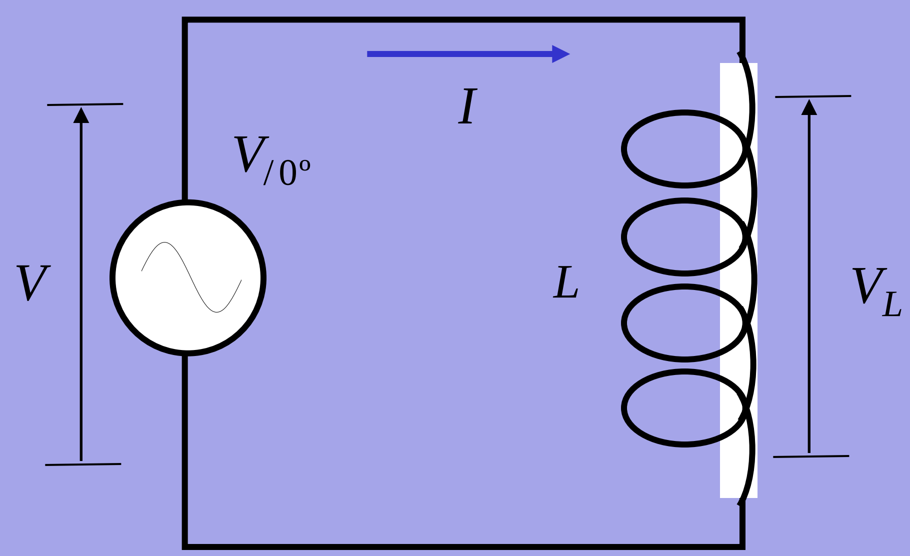



La intensidad ATRASA
$\pi/2$ respecto al voltaje

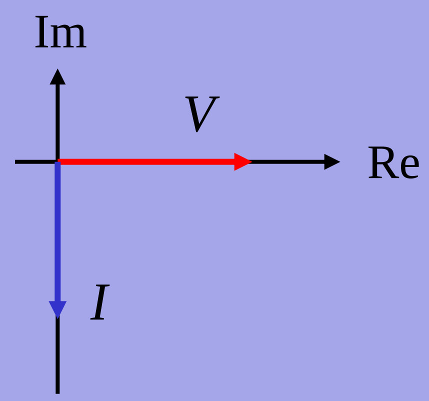
# ELEMENTOS DE CIRCUITO: INDUCTANCIA (II)

FASORES $$V_{/0^o} = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)_{/0^o}$$

$$V = V_L \qquad \textbf{Ohm c.a.} \qquad V = I \cdot Z_L$$




$$I = \frac{V}{Z_L} = \frac{V_{/0^o}}{jL\omega} = \frac{V_{/0^o}}{L\omega_{/\pi/2}} = \left(\frac{V}{L\omega}\right)_{/-\pi/2}$$




Impedancia compleja: $Z_L = jL\omega = L\omega_{/+90^o}$

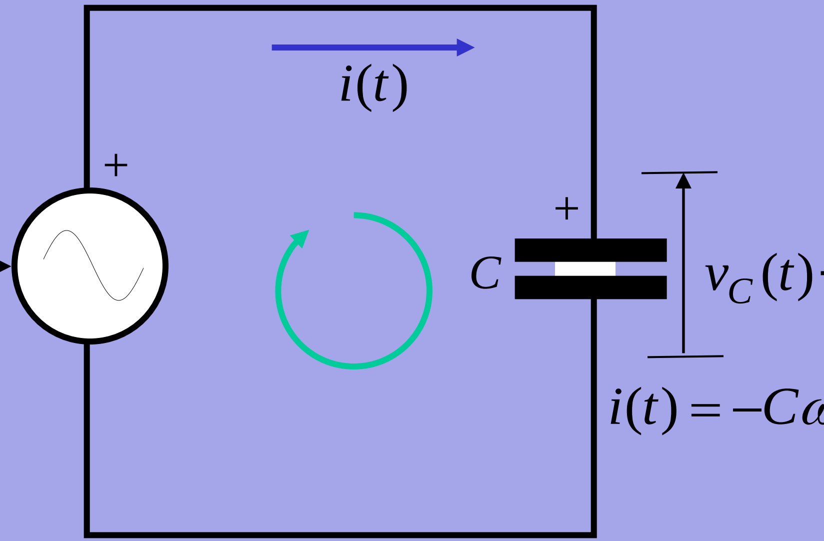
Reactancia (inductiva): $X_L = L\omega$

# ELEMENTOS DE CIRCUITO: CAPACITOR

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

**LKV:** $-v(t) + v_C(t) = 0$

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

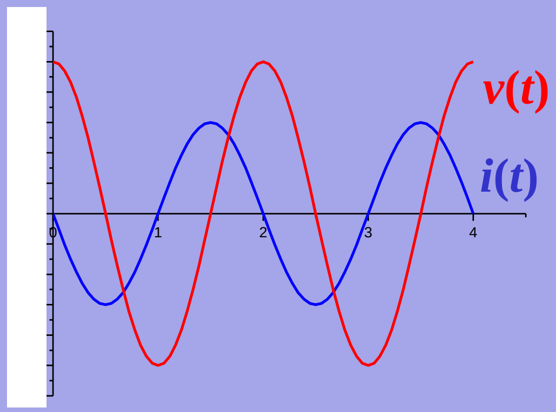



$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$i(t) = C \cdot V_m \frac{d}{dt}(\cos \omega t)$$

$$i(t) = -C\omega \cdot V_m \operatorname{sen} \omega t = C\omega \cdot V_m \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$i(t) = C\omega \cdot V_m \cos(\omega t + \pi/2)$$



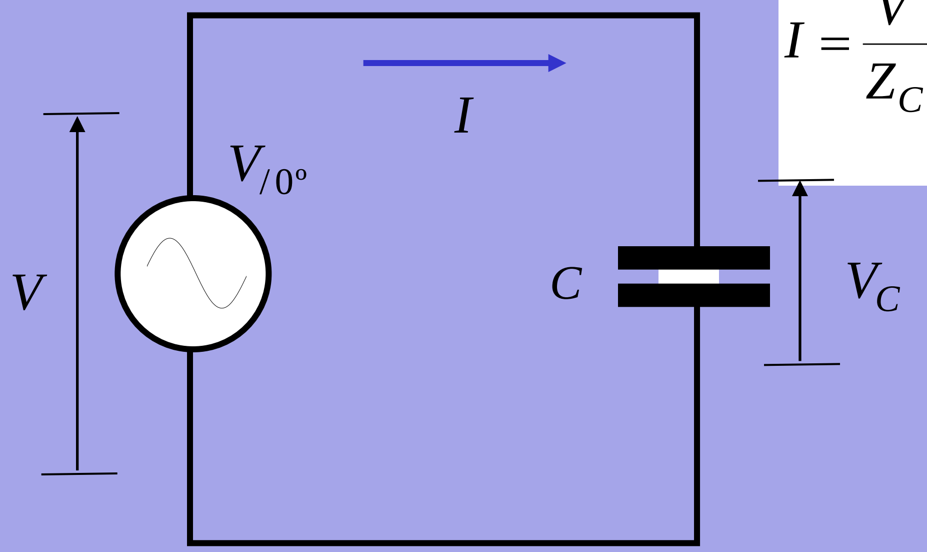

La intensidad ADELANTA
π/2 respecto al voltaje

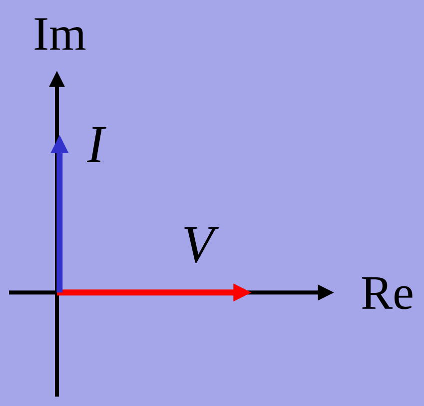
# ELEMENTOS DE CIRCUITO: CAPACITOR (II)

FASORES $$V_{/0^o} = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)_{/0^o}$$

$V = V_C$ **Ohm c.a.** $V = I \cdot Z_C$

$$I = \frac{V}{Z_C} = \frac{V_{/0^o}}{-j\,\dfrac{1}{C\omega}} = \frac{V_{/0^o}}{\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)_{/-\pi/2}} = \left(V \cdot C\omega\right)_{/\pi/2}$$

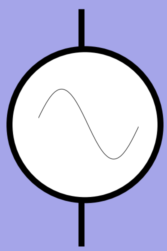



Impedancia compleja: $$Z_C = -j\,\frac{1}{C\omega} = \left(\frac{1}{C\omega}\right)_{/-90^o}$$

Reactancia (capacitiva): $$X_C = \frac{1}{C\omega}$$

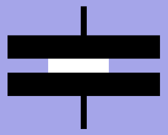
# ELEMENTOS DE CIRCUITO (RESUMEN)



Fuente de tensión alterna ideal.
Representada por el fasor

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi}$$

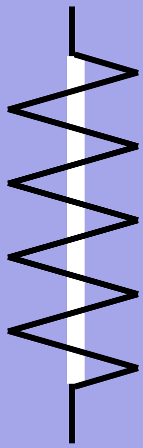
Relación entre frecuencia $f$
y pulsación: $\omega = 2\pi f$



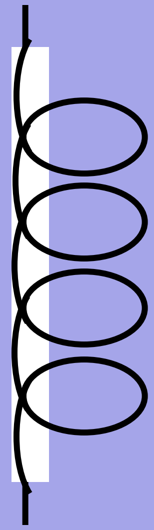
Condensador (capacidad $C$).
Su impedancia compleja es

$$Z_C = -j \cdot X_C = -j\frac{1}{C\omega}$$

Donde $X_C$ es la reactancia
capacitiva, se expresa en Ω



Resistencia óhmica
Número real
(R, medida en Ω)

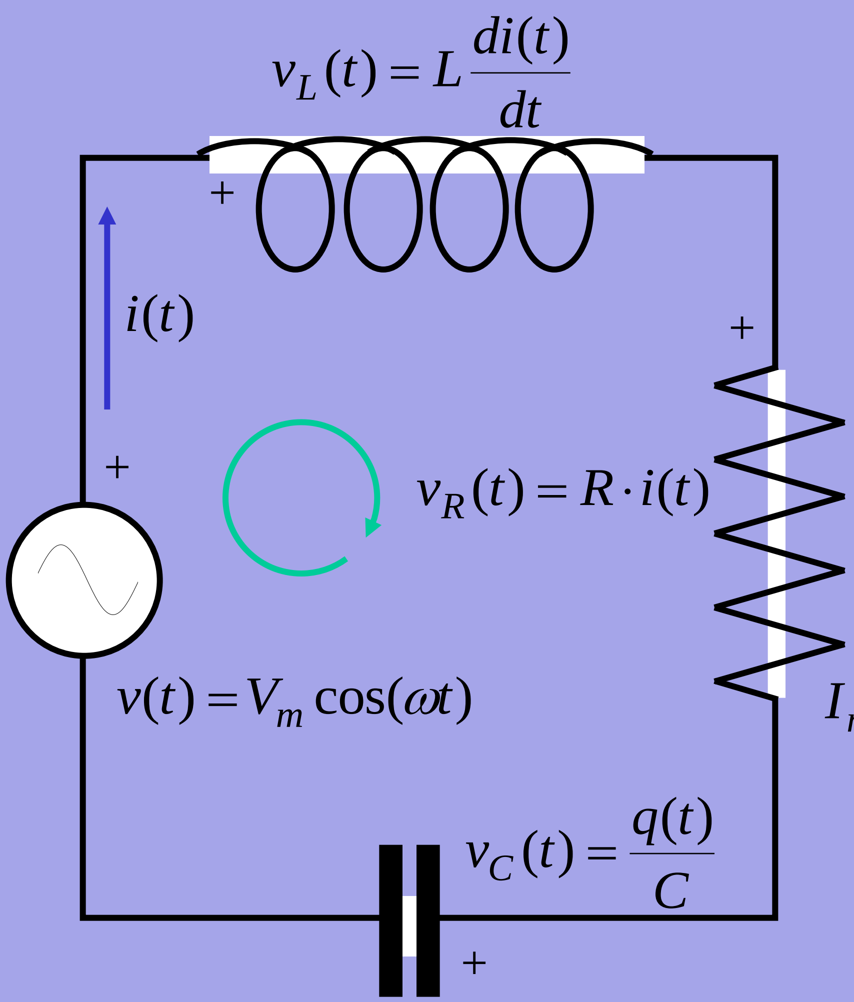


Bobina ideal (inductancia $L$).
Su impedancia compleja es

$$Z_L = j \cdot X_L = jL\omega$$

Donde $X_L$ es la reactancia
inductiva, se expresa en Ω

# CIRCUITO RCL SERIE




**LKV:** $-v(t) + v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = 0$

$$L\frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{q}{C} = V_m \cos(\omega t)$$

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = -V_m \omega \,\mathrm{sen}(\omega t)$$

Solución de la forma:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

# CIRCUITO RCL SERIE (II)

**DEMOSTRACIÓN FORMA DE LA SOLUCIÓN**

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) \qquad \frac{di}{dt} = -I_m \omega \,\mathrm{sen}(\omega t - \varphi) \qquad \frac{d^2 i}{dt^2} = -I_m \omega^2 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$-L \cdot I_m \omega^2 \cos(\omega t - \varphi) - R \cdot I_m \omega \,\mathrm{sen}(\omega t - \varphi) + \frac{1}{C} \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi) = -V_m \omega \,\mathrm{sen}\, \omega t$$

$$-L \cdot I_m \omega^2 [\cos \omega t \cdot \cos \varphi + \mathrm{sen}\, \omega t \cdot \mathrm{sen}\, \varphi] - R \cdot I_m \omega [\mathrm{sen}\, \omega t \cdot \cos \varphi - \cos \omega t \cdot \mathrm{sen}\, \varphi]$$

$$+ \frac{1}{C} \cdot I_m [\cos \omega t \cdot \cos \varphi + \mathrm{sen}\, \omega t \cdot \mathrm{sen}\, \varphi] = -V_m \omega \,\mathrm{sen}\, \omega t$$

# CIRCUITO RCL SERIE (III)

**DEMOSTRACIÓN (CONT.)**

$$\left[-L\cdot I_m\omega^2\cos\varphi+R\cdot I_m\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi+\frac{1}{C}I_m\cos\varphi\right]\cos\omega t$$

$$+\left[-L\cdot I_m\omega^2\,\mathrm{sen}\,\varphi-R\cdot I_m\omega\cos\varphi+\frac{1}{C}I_m\,\mathrm{sen}\,\varphi\right]\mathrm{sen}\,\omega t=-V_m\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Igualando coeficientes (término coseno)

$$-L\cdot I_m\omega^2\cos\varphi+R\cdot I_m\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi+\frac{1}{C}I_m\cos\varphi=0$$

$$-\left[L\omega^2-\frac{1}{C}\right]\cos\varphi+R\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi=0$$

$$R\,\mathrm{sen}\,\varphi=\left[L\omega-\frac{1}{C\omega}\right]\cos\varphi$$

$$X_L=L\omega$$

$$X_C=\frac{1}{C\omega}$$

$$X=X_L-X_C$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\left[L\omega-\frac{1}{C\omega}\right]}{R}=\frac{X_L-X_C}{R}=\frac{X}{R}$$

# CIRCUITO RCL SERIE (IV)

**DEMOSTRACIÓN (CONT 2)**

Igualando coeficientes (término seno)

$$-L\cdot I_m\omega^2\operatorname{sen}\varphi - R\cdot I_m\omega\cos\varphi + \frac{1}{C}I_m\operatorname{sen}\varphi = -V_m\omega$$

$$I_m\left[\left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)\operatorname{sen}\varphi - R\omega\cos\varphi\right] = -V_m\omega$$

$$I_m\left[\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\operatorname{sen}\varphi + R\cos\varphi\right] = V_m$$

$$I_m\left[X\operatorname{sen}\varphi + R\cos\varphi\right] = V_m$$

$$I_m = \frac{V_m}{X\operatorname{sen}\varphi + R\cos\varphi}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{X^2}{R^2}$$

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{X^2}{R^2}\cos^2\varphi = \frac{X^2}{R^2}\left(1-\operatorname{sen}^2\varphi\right)$$

# CIRCUITO RCL SERIE (V)

**DEMOSTRACIÓN (CONT 3)**

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{X^2/R^2}{1+X^2/R^2} = \frac{X^2}{R^2+X^2} \qquad \cos^2\varphi = 1-\frac{X^2}{R^2+X^2} = \frac{R^2}{R^2+X^2}$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{X}{\sqrt{R^2+X^2}} \qquad \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}$$

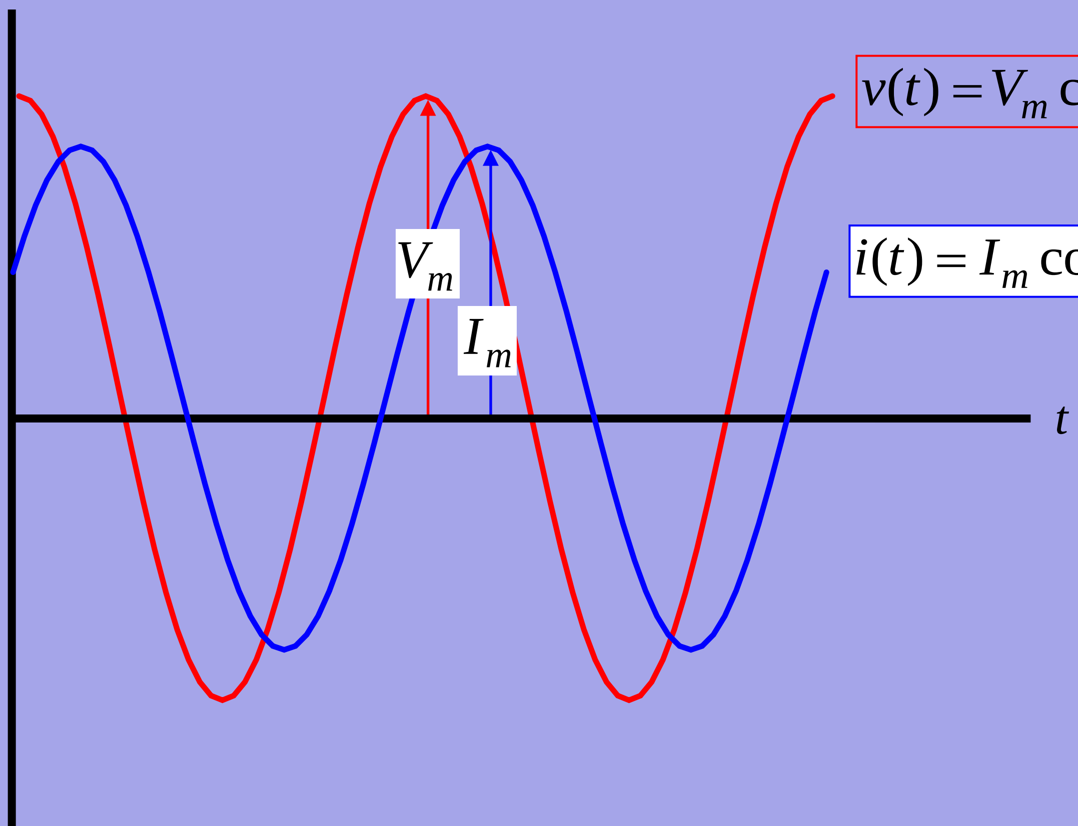
$$I_m = \frac{V_m}{X\operatorname{sen}\varphi + R\cos\varphi} = \frac{V_m}{X\dfrac{X}{\sqrt{R^2+X^2}} + R\dfrac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+X^2}}$$

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+X^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}}$$

Impedancia $\quad Z = |Z|\cdot e^{j\varphi} \qquad \varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \qquad |Z| = \sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$

# CIRCUITO RCL SERIE (VI)

## REPRESENTACIÓN GRÁFICA



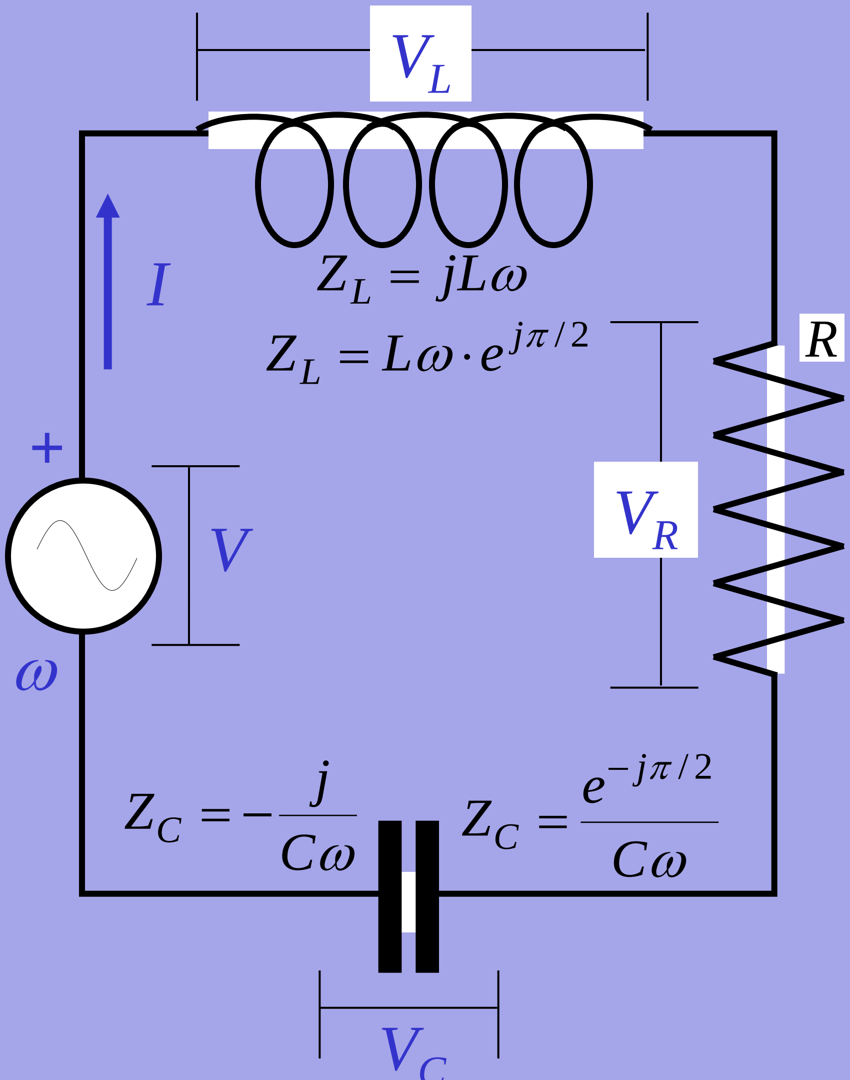

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) \qquad (\varphi > 0)$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\varphi > 0$ | Circuito inductivo | $X_L > X_C$ | La corriente atrasa respecto al voltaje |
| $\varphi < 0$ | Circuito capacitivo | $X_L < X_C$ | La corriente adelanta respecto al voltaje |

# CIRCUITO RCL SERIE (FASORES)

$$\boxed{V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0}}$$

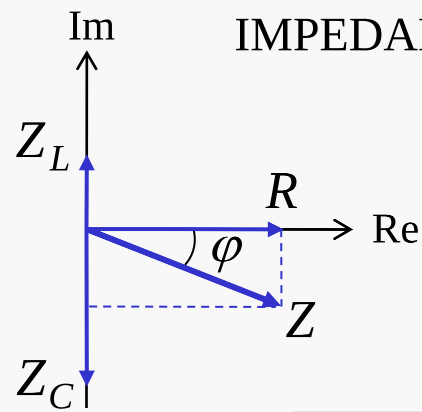



$$Z_L = jL\omega$$

$$Z_L = L\omega \cdot e^{j\pi/2}$$

$$Z_C = -\frac{j}{C\omega} \qquad Z_C = \frac{e^{-j\pi/2}}{C\omega}$$

IMPEDANCIA




$$Z = |Z| \cdot e^{j\varphi}$$

$$Z = |Z|_{/\varphi}$$

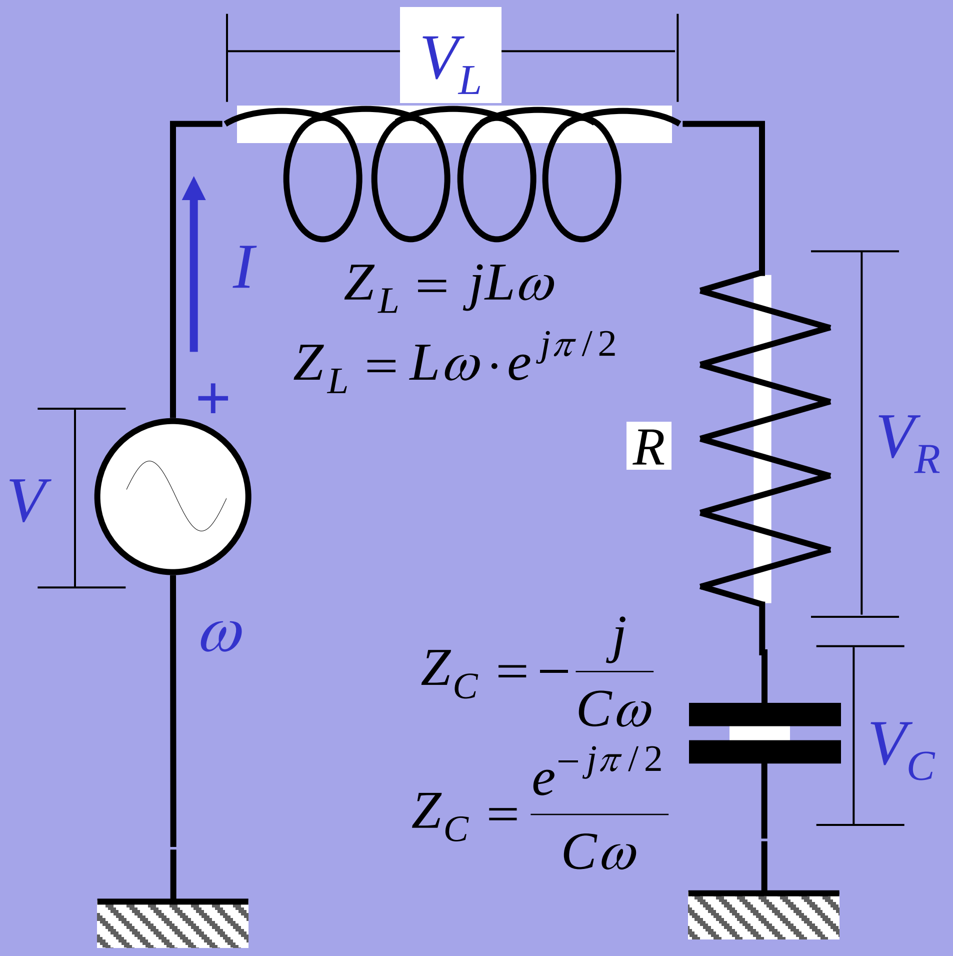
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Ley de Ohm c.a.

$$V = I \cdot Z$$

# CIRCUITO RCL SERIE (CONEXIÓN A TIERRA)




$$\boxed{V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0}}$$

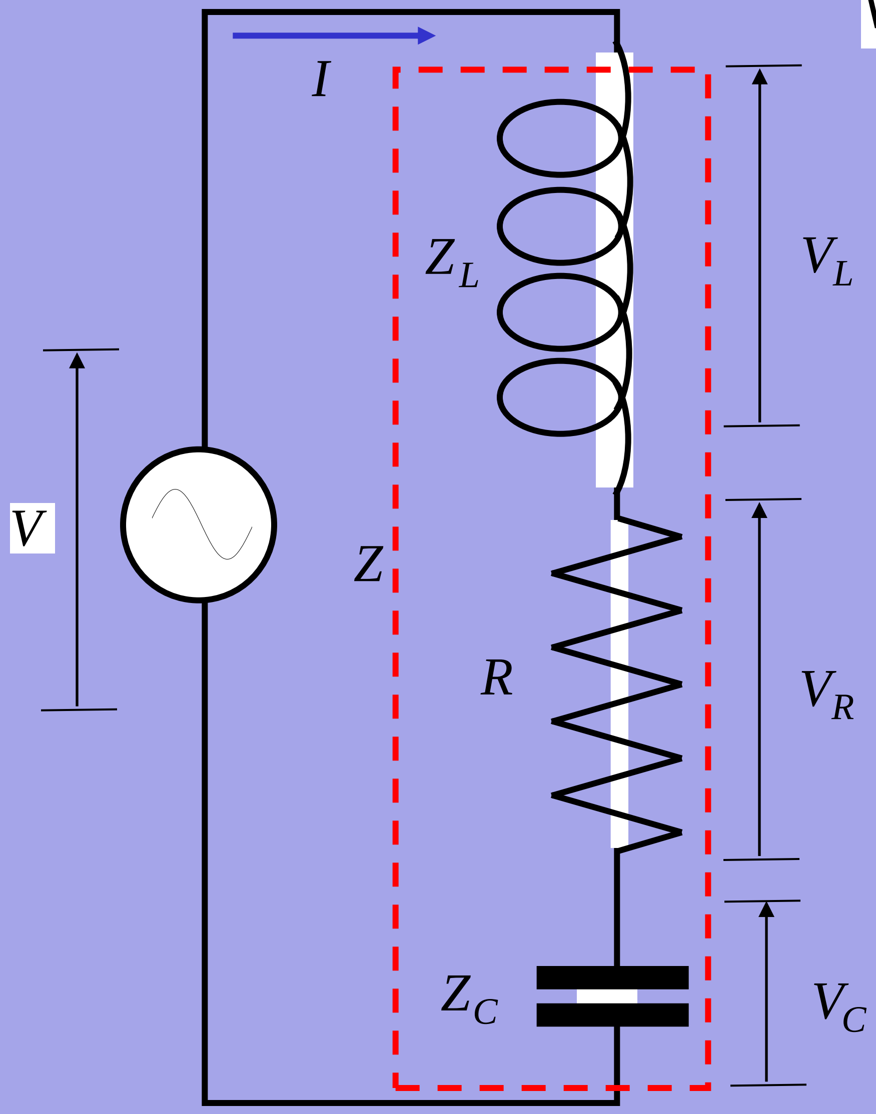
$$V = V_L + V_R + V_C \qquad \text{(Fasores)}$$

$$|V| \neq |V_L| + |V_R| + |V_C| \qquad \text{(Módulos)}$$

DIVISOR DE TENSIÓN

$$\left\{ \begin{aligned} V_L &= \frac{Z_L}{Z} V \\ V_C &= \frac{Z_C}{Z} V \\ V_R &= \frac{R}{Z} V \end{aligned} \right.$$

# DIVISOR DE TENSIÓN

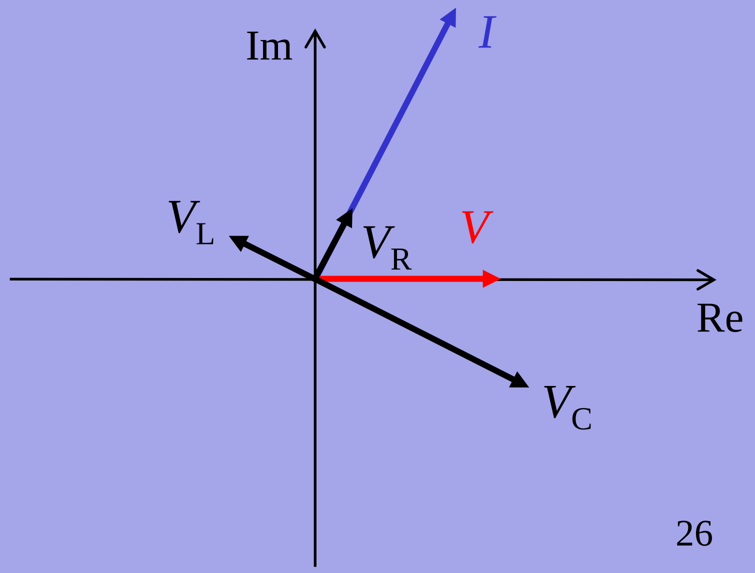



$$V = V_L + V_R + V_C = I \cdot Z \longrightarrow I = \frac{V}{Z}$$

$$V_L = I \cdot Z_L \qquad V_L = \frac{Z_L}{Z} V$$

$$V_R = I \cdot R \qquad V_R = \frac{R}{Z} V$$

$$V_C = I \cdot Z_C \qquad V_C = \frac{Z_C}{Z} V$$



# RESONANCIA CIRCUITO SERIE

A la frecuencia a la que $X_L = X_C$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right)^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \Rightarrow$$

$I_m$ adopta el máximo valor posible

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \varphi = 0$$

Pulsación de resonancia

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

Si $I_m$ adopta el máximo valor cuando $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ... también $I_{eficaz}$ es máxima

# RESONANCIA CIRCUITO SERIE (CONT)

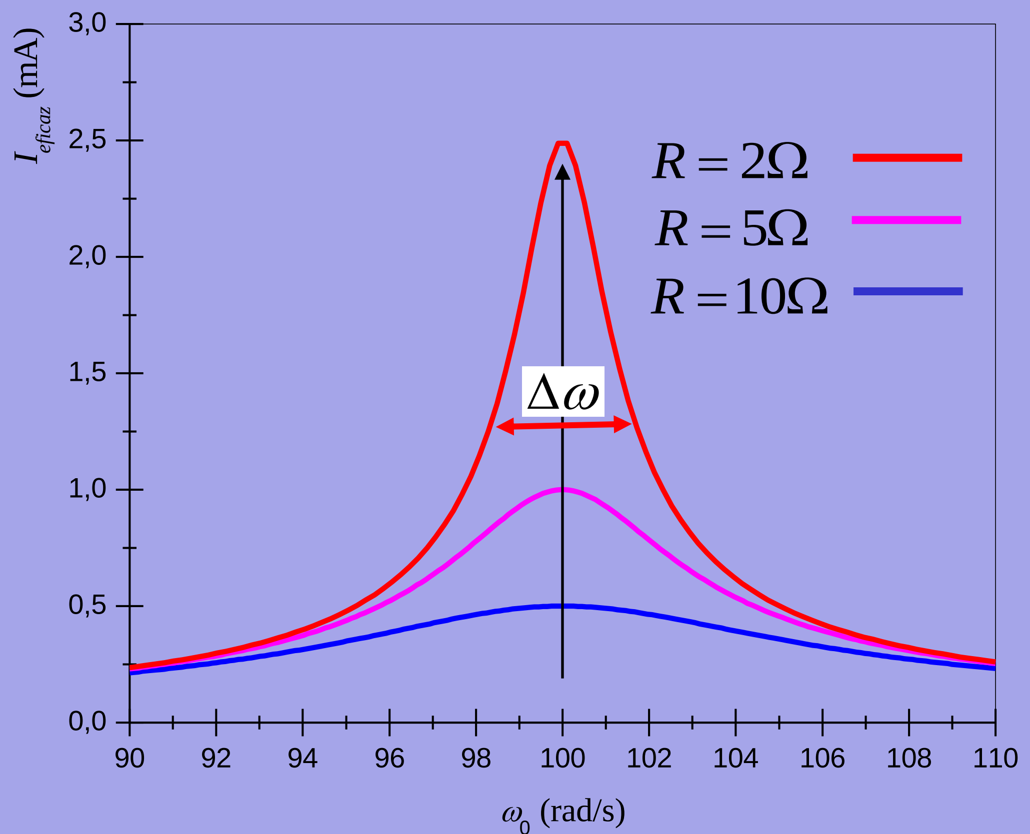
$$I_{eficaz} = \frac{V_{eficaz}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

EJEMPLO:
Circuito RCL serie con $L$ = 1 H,
$C$ = 100 μF y $V_{eficaz}$ = 5 mV.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 10^{-4}}} = 100\ \text{rad/s}$$

Factor de calidad

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

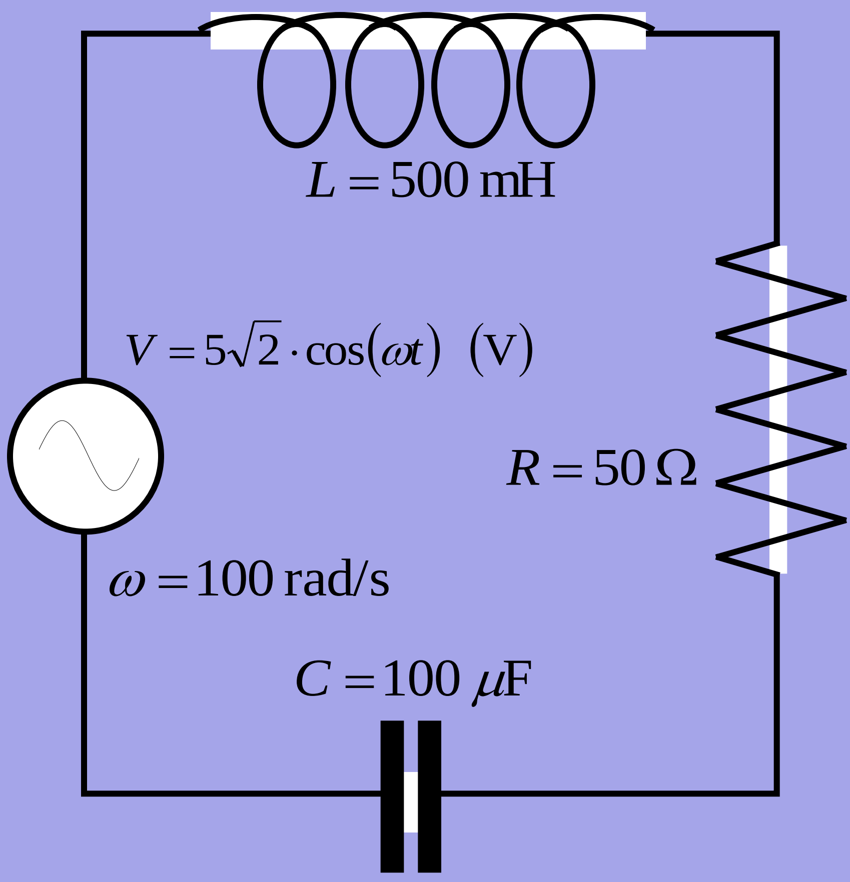



A medida que disminuye el valor de la resistencia el pico de resonancia se hace más agudo

# CIRCUITO RCL SERIE (EJEMPLO 1)

Determinar la corriente que circula por el circuito siguiente y su desfase con el voltaje. Representar gráficamente voltaje e intensidad frente al tiempo.

| ω (rad/s) | 100 | Z (Ω) |
|---|---|---|
| *L* (H) | 0,5 | 50 |
| *C* (F) | 1,0E-04 | 100 |
| R (Ω) | | 50 |




$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{50^2 + (100-50)^2} = \sqrt{2\cdot 50^2} = 50\sqrt{2}\ \Omega$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{50-100}{50} = -1$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}\ \mathrm{rad} = -45^{\mathrm{o}}$$

Impedancia: $\begin{cases} Z = 50\sqrt{2}_{/-45^{\mathrm{o}}}\ \Omega \\ Z = 50\sqrt{2}\cdot e^{-j\pi/4}\ \Omega \end{cases}$

# CIRCUITO RCL SERIE (EJEMPLO 1 CONTINUACIÓN)

$$V = I \cdot Z \qquad I = \frac{V}{Z} = \frac{5 \cdot e^{j0}}{50\sqrt{2} \cdot e^{-j\pi/4}} = \frac{0.1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\pi/4} \text{ A}$$

Desfase entre corriente y voltaje: la corriente ADELANTA 45º al voltaje

Representación gráfica: representamos las partes reales.

$$v(t) = V_m \cdot \cos(\omega t) = 5\sqrt{2} \cdot \cos(100t)$$

Valores eficaces de tensión e intensidad multiplicados por $\sqrt{2}$

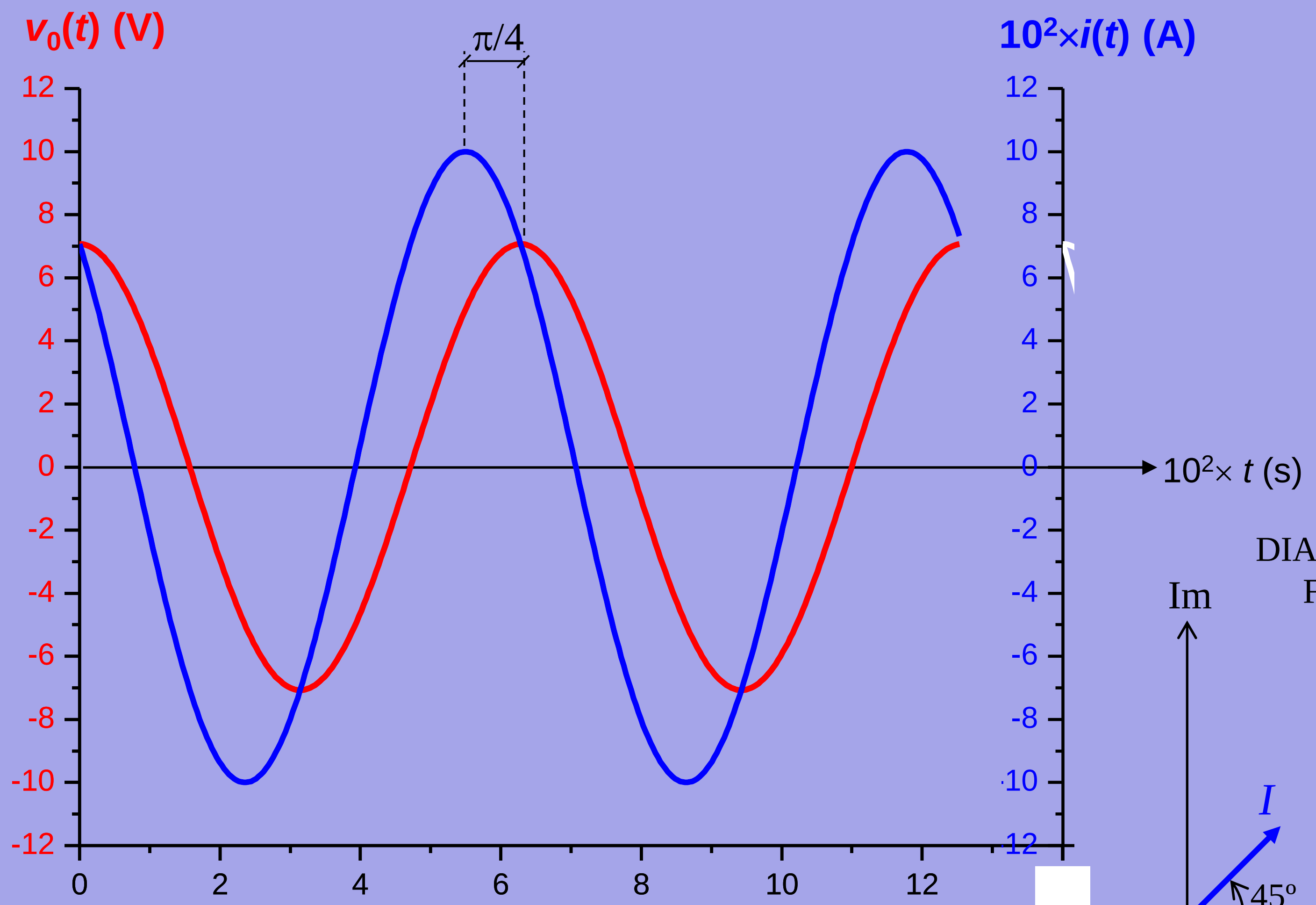
$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + 45^\circ) = 0.1 \cdot \cos(100t + 45^\circ)$$

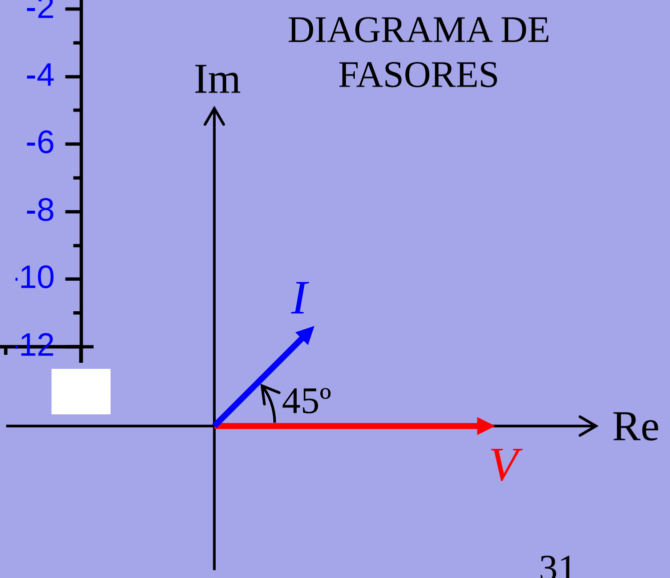
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100} = 0.0628 \text{ s}$$

Ver gráficas

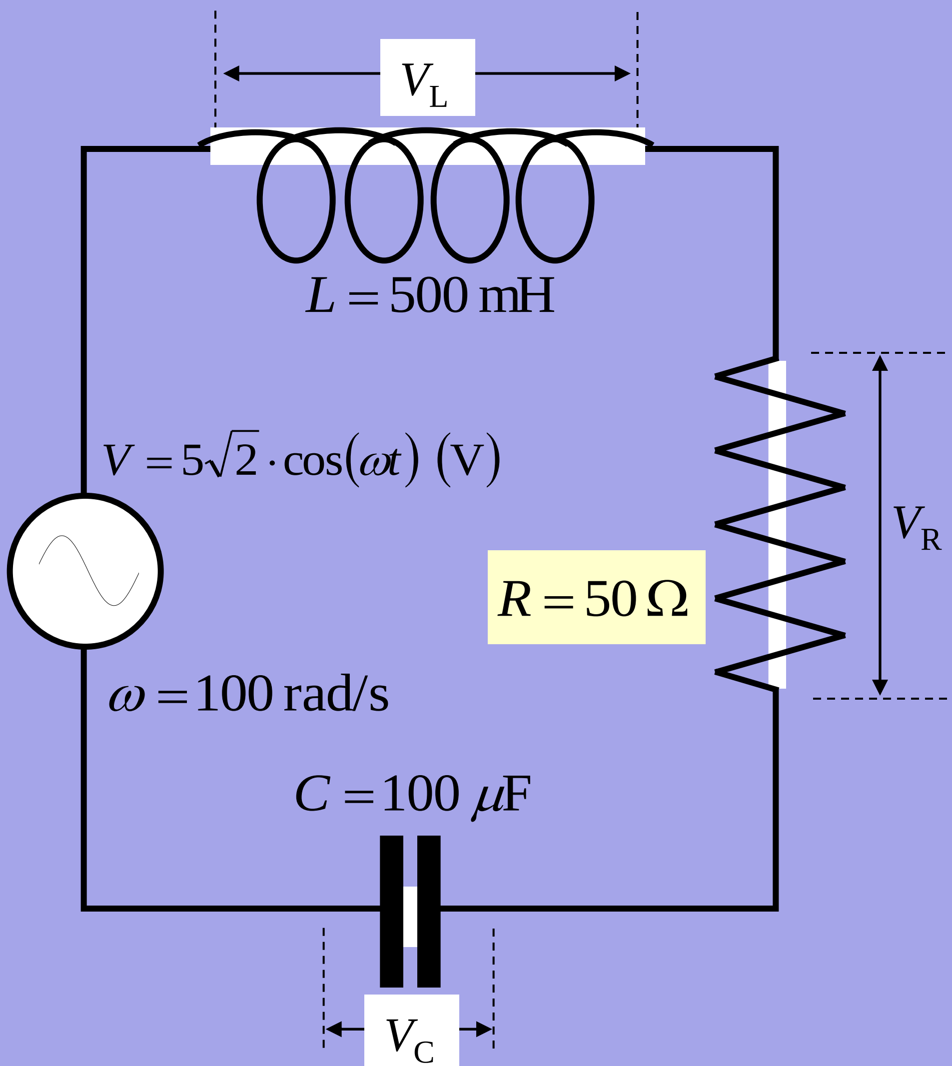
# CIRCUITO RCL SERIE (EJEMPLO 1 GRÁFICAS)



# CIRCUITO RCL SERIE (EJEMPLO 2)

Determinar las diferencias de potencial en cada una de las impedancias del circuito del ejemplo anterior. Hágase una representación fasorial.




De la resolución de EJEMPLO 1:

Impedancia: $\begin{cases} Z = 50\sqrt{2}_{/-45^o}\ \Omega \\ Z = 50\sqrt{2}\cdot e^{-j\pi/4}\ \Omega \end{cases}$

$$Z_L = j50\,\Omega = 50_{/+90^o}\ \Omega$$

$$Z_C = -j100\,\Omega = 100_{/-90^o}\ \Omega$$

Aplicamos a cada impedancia la fórmula del divisor de tensión:

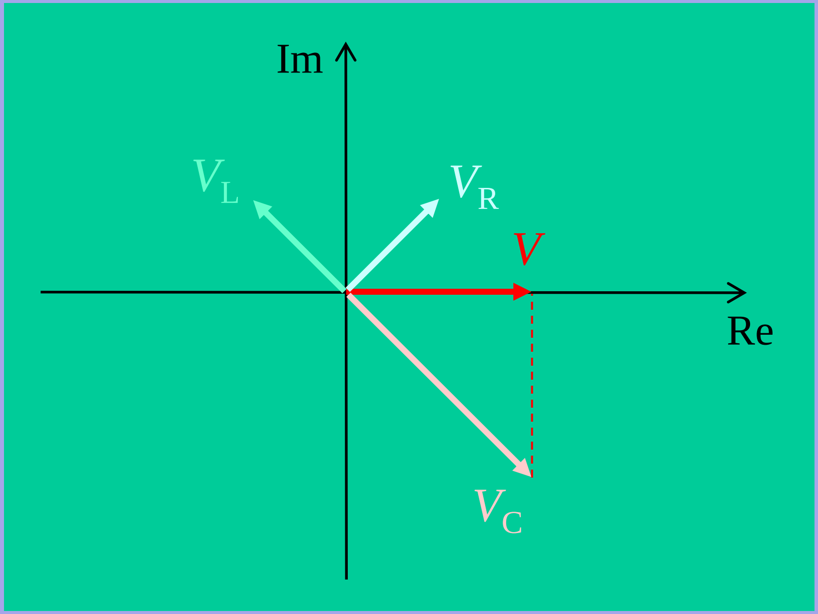
$$V_i = \frac{Z_i}{Z} V$$

# CIRCUITO LCR SERIE (EJEMPLO 2 CONTINUACIÓN)

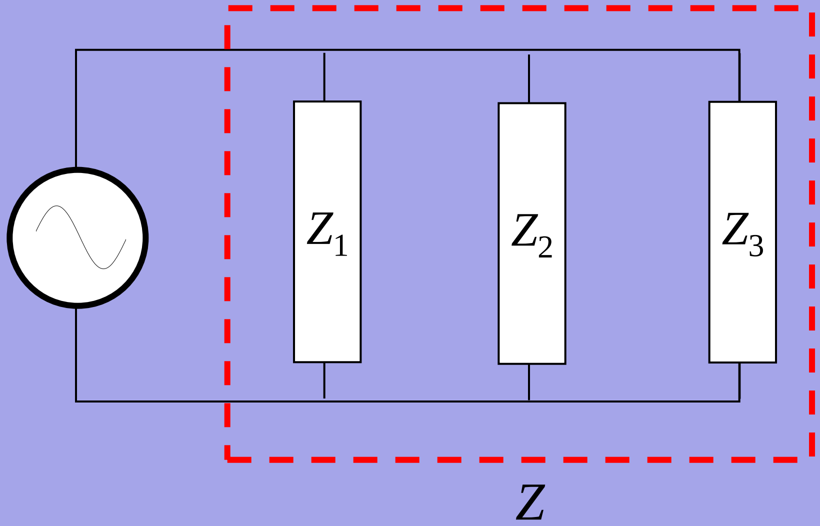
Inductancia: $$V_L = \frac{Z_L}{Z}V = \frac{50_{/+90^o}}{50\sqrt{2}_{/-45^o}}5_{/0^o} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)_{/+135^o} = 2.5\sqrt{2}_{/+135^o}\ \text{V}$$

Resistencia: $$V_R = \frac{R}{Z}V = \frac{50_{/0^o}}{50\sqrt{2}_{/-45^o}}5_{/0^o} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)_{/+45^o} = 2.5\sqrt{2}_{/+45^o}\ \text{V}$$

Condensador: $$V_C = \frac{Z_C}{Z}V = \frac{100_{/-90^o}}{50\sqrt{2}_{/-45^o}}5_{/0^o} = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)_{/+45^o} = 5\sqrt{2}_{/-45^o}\ \text{V}$$



# CIRCUITOS EN PARALELO

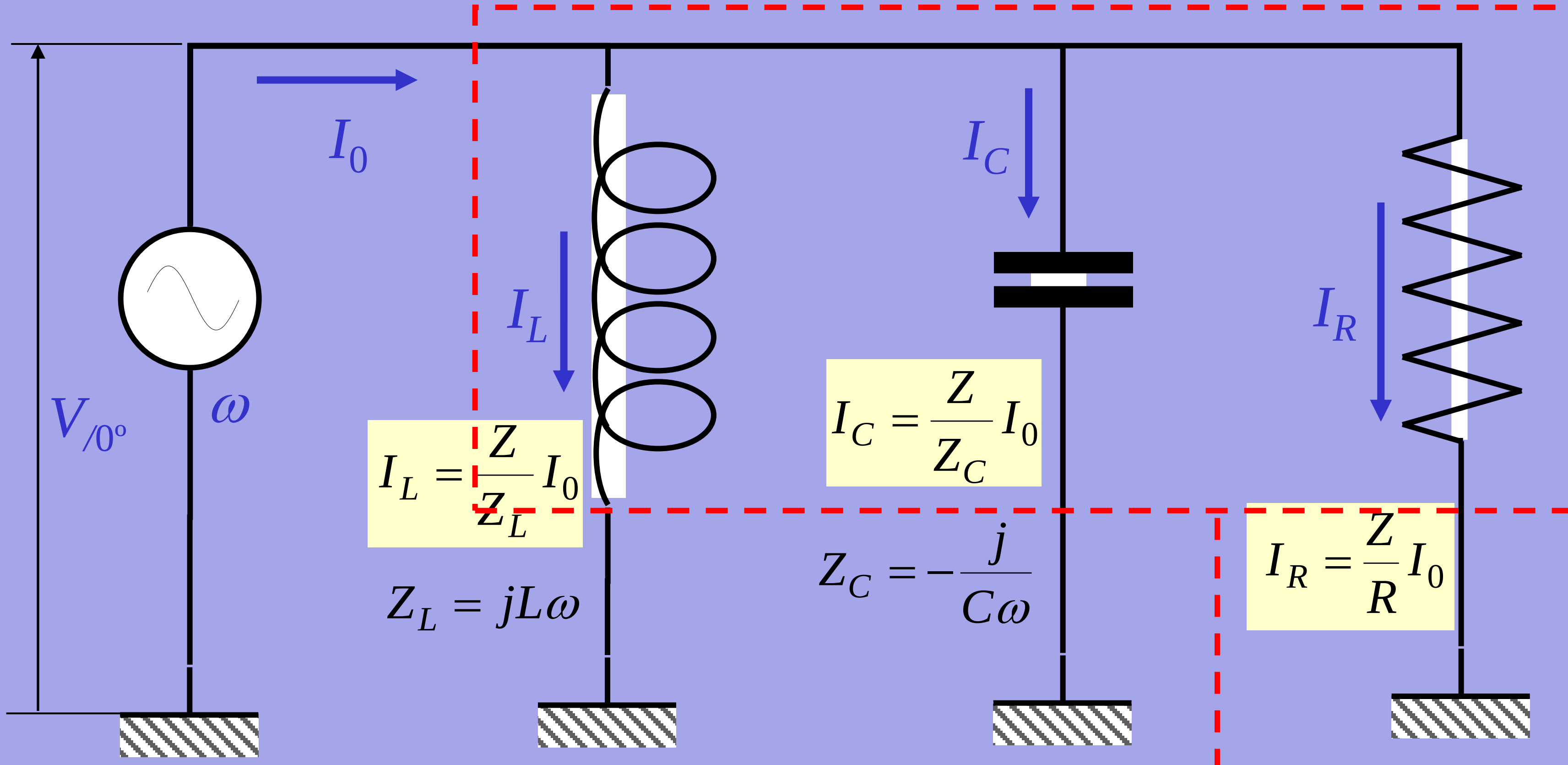



Impedancia equivalente

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

La diferencia de potencial es la misma a través de cualquiera de las ramas. Por cada una de ellas circula una intensidad diferente.

# DIVISOR DE CORRIENTE




$$V_{/0^o} = I_L \cdot Z_L = I_C \cdot Z_C = I_R \cdot R = I_0 \boxed{Z}$$

Las tres impedancias forman un divisor de corriente

# DIVISOR DE CORRIENTE (II)

ADMITANCIA: Razón de la corriente fasorial al voltaje fasorial $Y = \frac{I}{V}$

Conductancia

Unidades SI:

Siemen

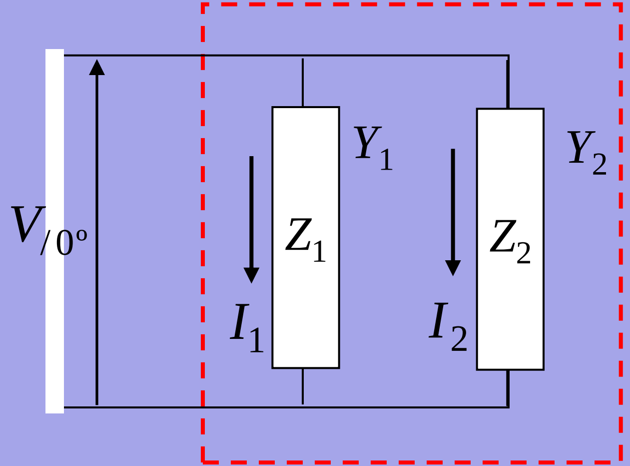
($S = \Omega^{-1}$)

Susceptancia

La admitancia es inversa de la impedancia

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB = \frac{1}{R + jX}$$

ADMITANCIA EQUIVALENTE EN PARALELO




$$I_1 = Y_1 \cdot V_{/0^\circ}$$

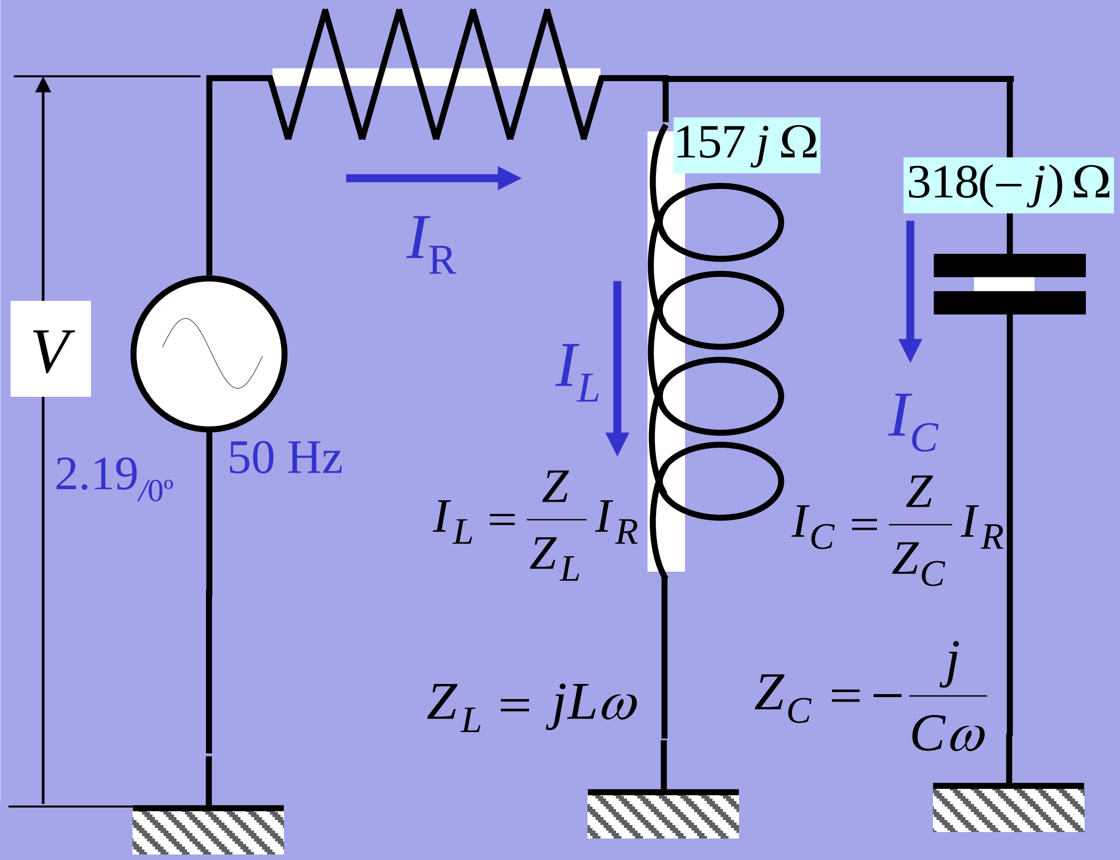
$$I_2 = Y_2 \cdot V_{/0^\circ}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

$$Y = Y_1 + Y_2$$

# CIRCUITO PARALELO (EJEMPLO 3)

Una fuente de tensión que suministra 2.19 V eficaces a 50 Hz alimenta un circuito formado por una resistencia de 310 Ω en serie con un paralelo formado por una bobina de 500 mH y un condensador de 10 μF. Determinar la corriente que circula por cada elemento del circuito y la diferencia de potencial en cada impedancia. Hágase una representación fasorial.




$$I_L = \frac{Z}{Z_L} I_R \qquad I_C = \frac{Z}{Z_C} I_R$$

$$Z_L = jL\omega \qquad Z_C = -\frac{j}{C\omega}$$

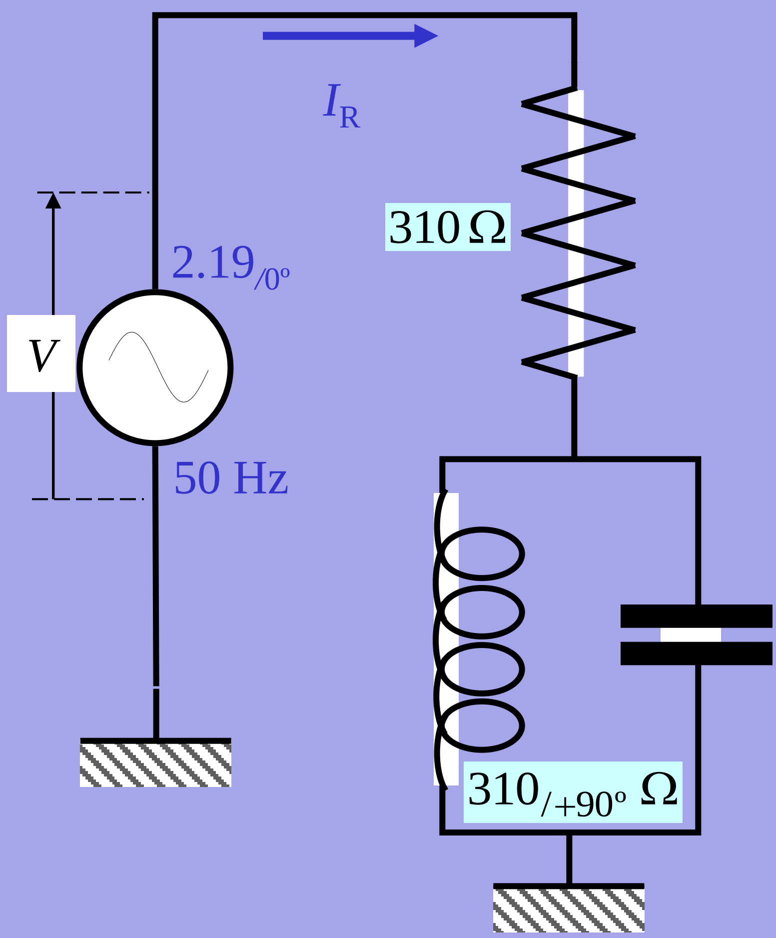
Impedancia del paralelo

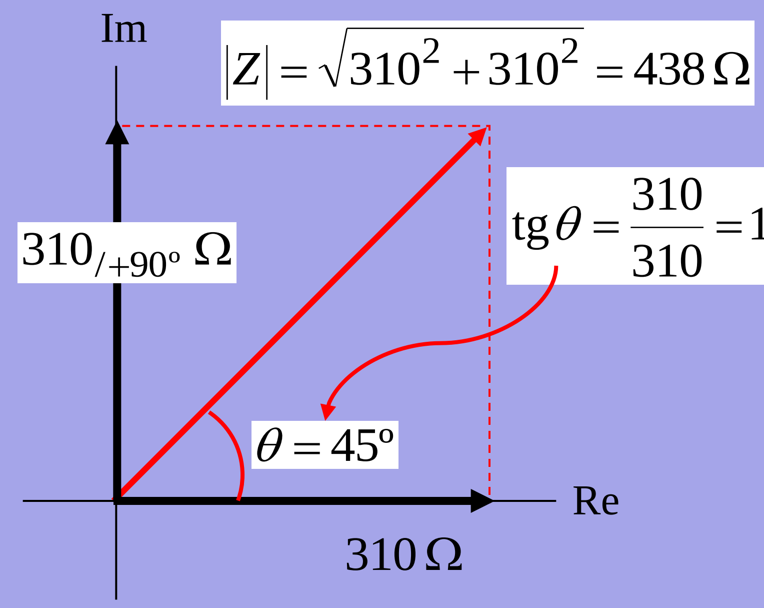
$$Z_P = \frac{Z_L \cdot Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{157\,j \cdot 318(-j)}{157\,j - 318\,j} = 310\,j = 310_{/+90^\circ}\ \Omega$$

# CIRCUITO PARALELO (EJEMPLO 3 CONTINUACIÓN)

Impedancia total en circuito $Z = 438_{/+45^o}\ \Omega$

Circuito equivalente:

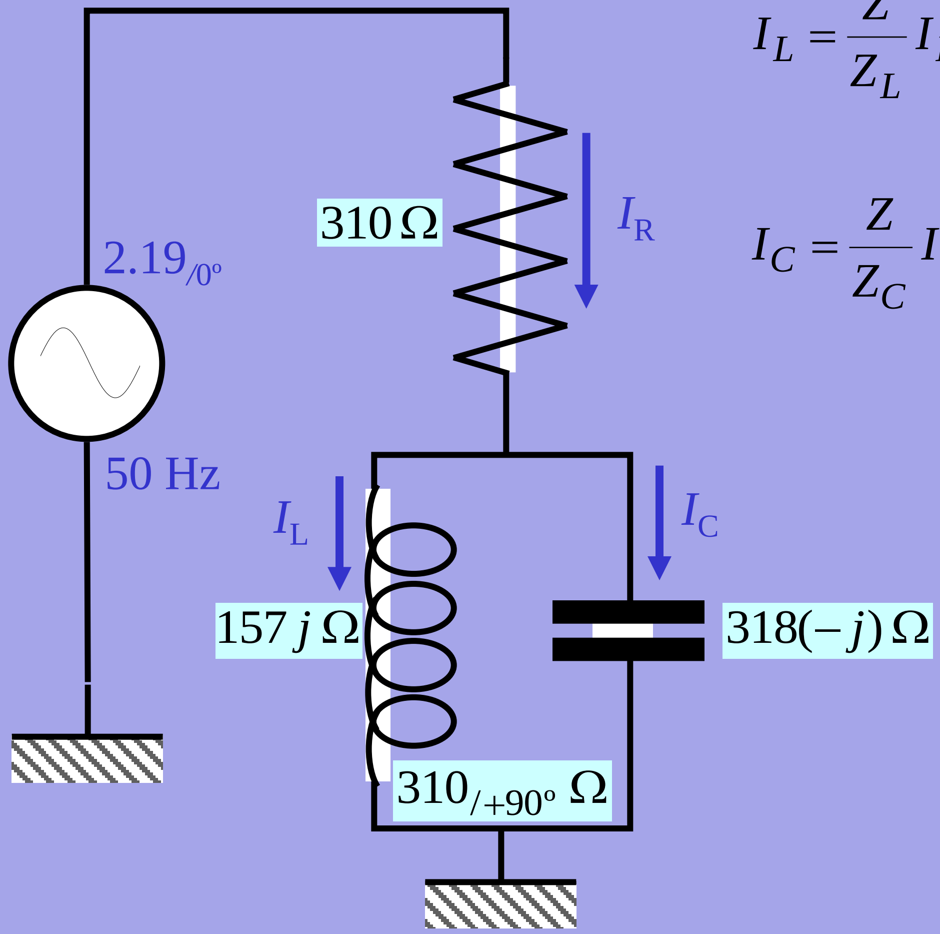



$$I_R = \frac{V}{Z} = \frac{2.19_{/0^o}}{438/_{+45^o}} = 5 \cdot 10^{-3}{}_{/-45^o}\ \mathrm{A} = 5_{/-45^o}\ \mathrm{mA}$$

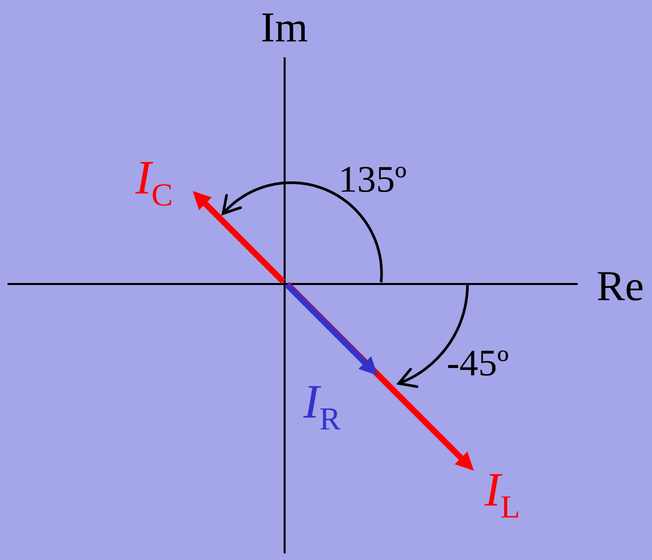
# CIRCUITO PARALELO (EJEMPLO 3 CONTINUACIÓN 2)

Para el cálculo de la corriente en cada una de las impedancias en paralelo aplicamos las fórmulas del divisor de corriente.



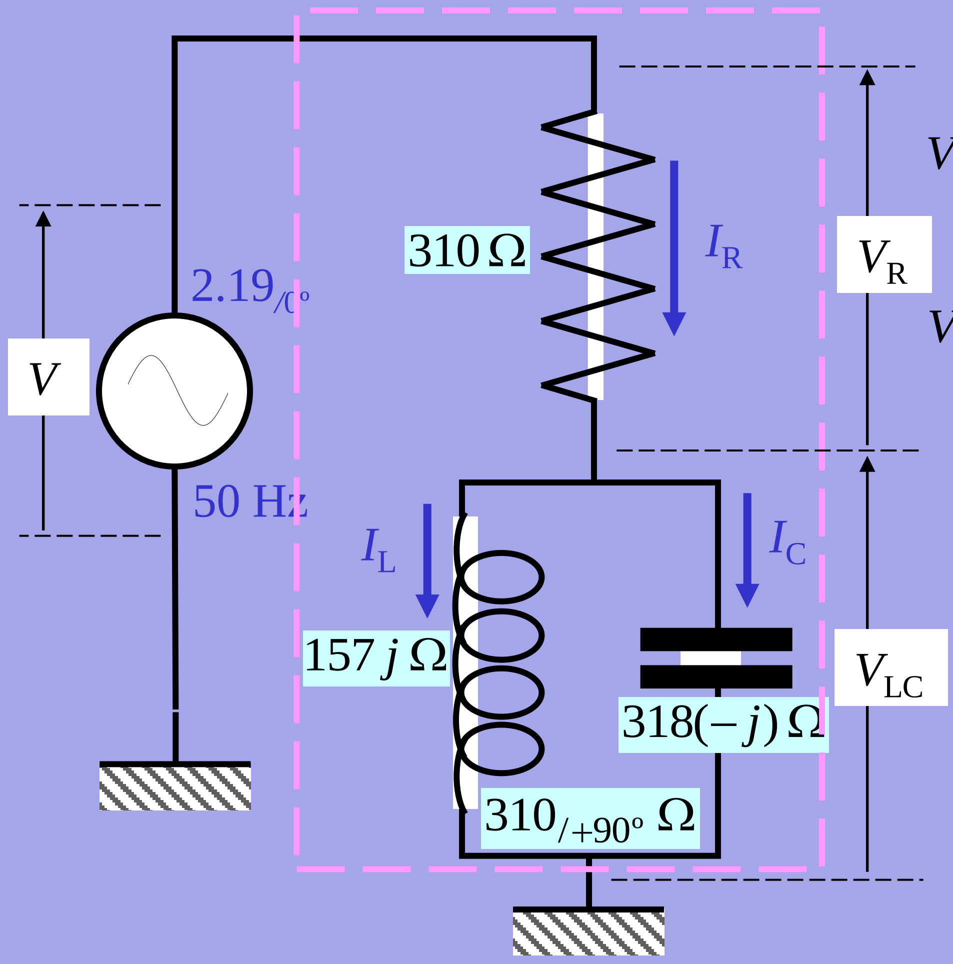

$$I_L = \frac{Z}{Z_L} I_R = \frac{310_{/+90^o}}{157_{/+90^o}} 5_{/-45^o} = 9.87_{/-45^o} \text{ mA}$$

$$I_C = \frac{Z}{Z_C} I_R = \frac{310_{/+90^o}}{318_{/-90^o}} 5_{/-45^o} = 4.87_{/+135^o} \text{ mA}$$



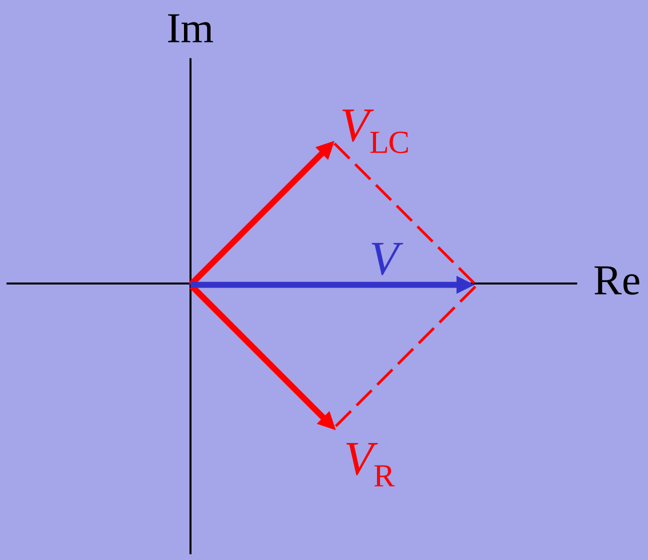
# CIRCUITO PARALELO (EJEMPLO 3 CONTINUACIÓN 3)

Cálculo de la d.d.p. en cada una de las impedancias: divisor de tensión.




$$V_R = \frac{R}{Z} V = \frac{310_{/0^o}}{438_{/+45^o}} 2.19_{/0^o} = 1.55_{/-45^o}\ \text{V}$$

$$V_{LC} = \frac{Z_P}{Z} V = \frac{310_{/+90^o}}{438_{/+45^o}} 2.19_{/0^o} = 1.55_{/+45^o}\ \text{V}$$




$Z = 438_{/+45^o}\ \Omega$

# POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad \begin{cases} v(t) = V_m \cos \omega t \\ i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

$$p(t) = V_m I_m \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} V_m I_m \left[ \cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi) \right]$$

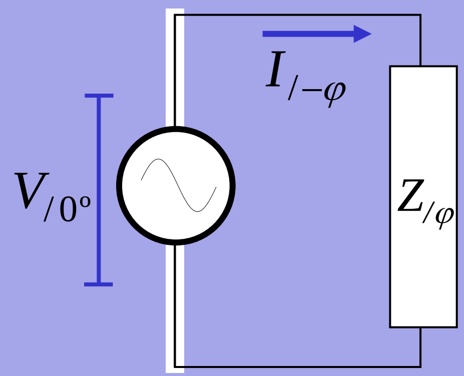
Potencia promedio: El valor promedio de $\cos(2\omega t - \varphi)$ es nulo.

$$P_{promedio} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \varphi = V_{eficaz} I_{eficaz} \boxed{\cos \varphi}$$

*Factor de potencia*

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \qquad V_{eficaz} = I_{eficaz} \cdot Z$$

# POTENCIA COMPLEJA




$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

$$S = V \cdot I^{*} = V_{/0^{\circ}} \cdot \left(I_{/-\varphi}\right)^{*} = V_{/0^{\circ}} \cdot I_{/\varphi}$$

$$S = V_{eficaz} \cdot I_{eficaz}\left(\cos\varphi + j\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)$$

Potencia aparente (V·A)

$$|S| = V_{eficaz} \cdot I_{eficaz} = I_{eficaz}^{2} \cdot Z$$

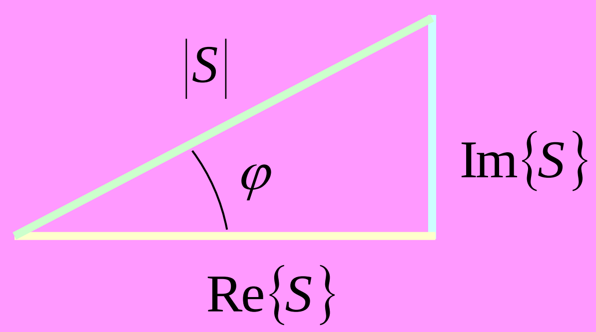
Potencia activa (W)

$$\mathrm{Re}\{S\} = P = V_{eficaz} \cdot I_{eficaz} \cdot \cos\varphi$$

Potencia reactiva (VAR)

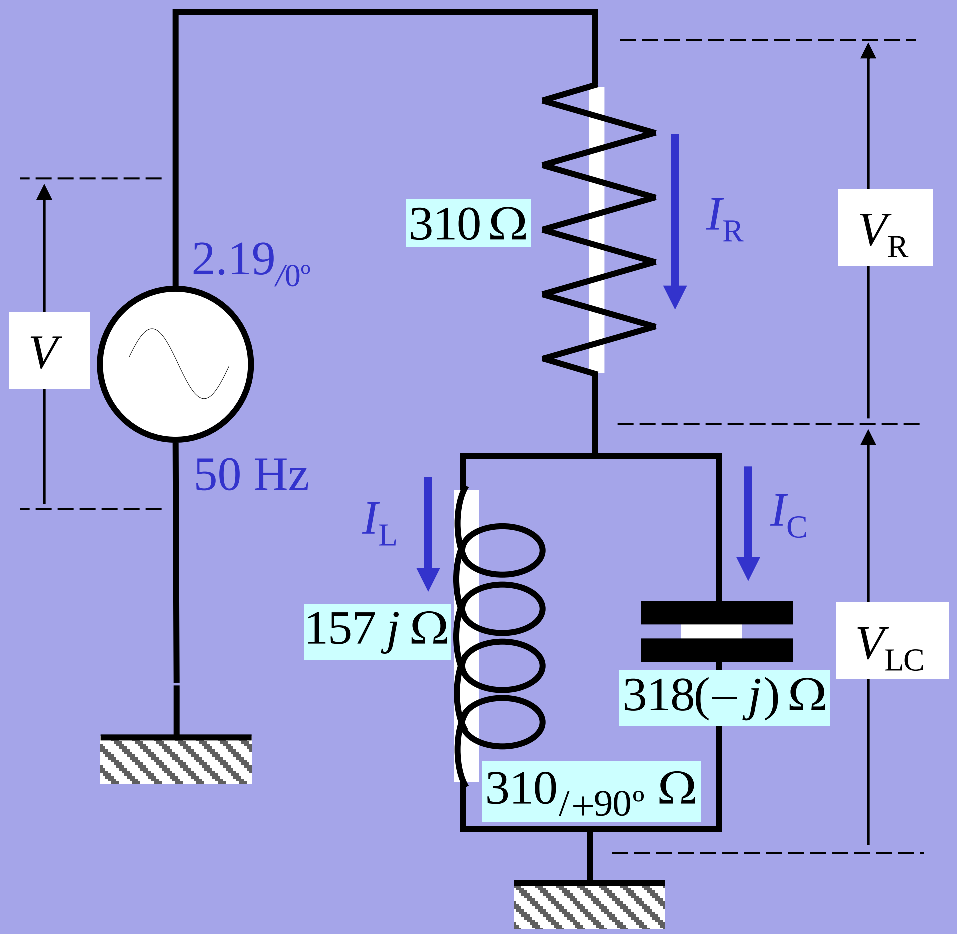
$$\mathrm{Im}\{S\} = Q = V_{eficaz} \cdot I_{eficaz} \cdot \mathrm{sen}\,\varphi$$

TRIÁNGULO DE POTENCIAS



# POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4)

Determínese la potencia compleja, la potencia aparente, y los términos de potencia activa y reactiva en cada una de las impedancias del ejemplo 3.




Resultados ejemplo 3

$$V_R = \frac{R}{Z} V = 1.55_{/-45^\circ} \text{ V}$$

$$V_{LC} = \frac{Z_P}{Z} V = 1.55_{/+45^\circ} \text{ V}$$

$$I_R = \frac{V}{Z} = 5 \cdot 10^{-3}{}_{/-45^\circ} \text{ A}$$

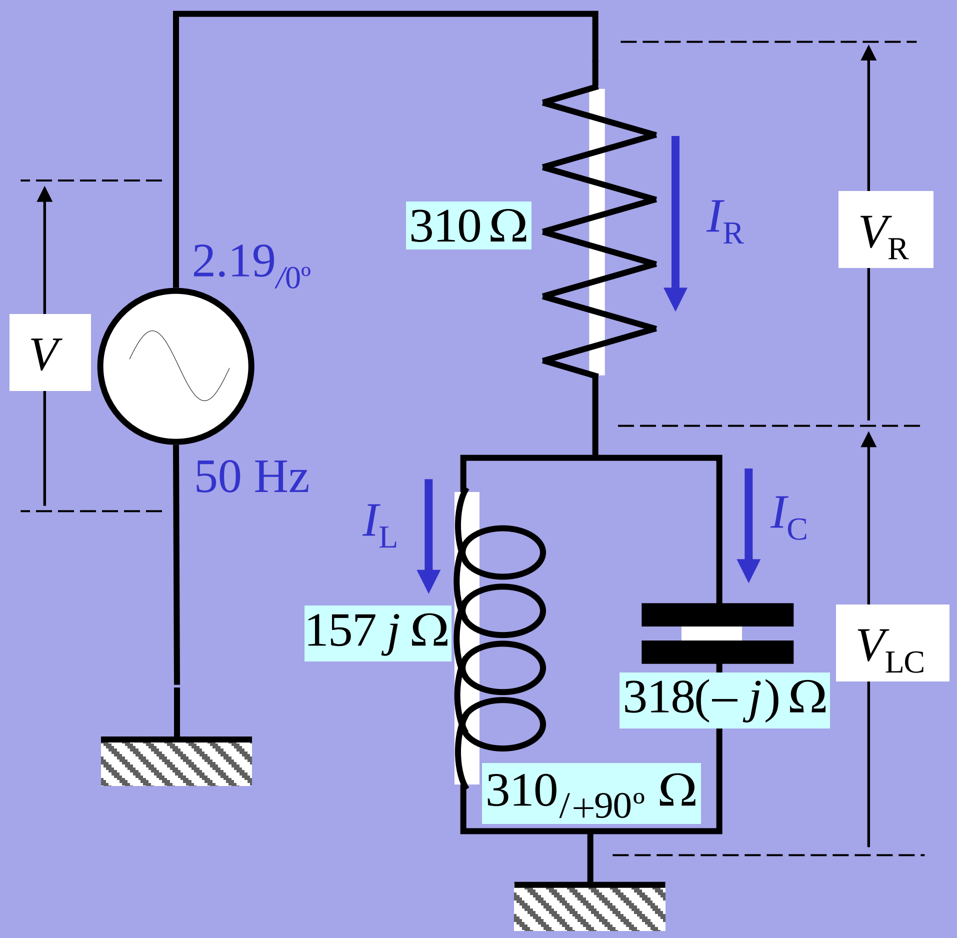
$$I_L = \frac{Z}{Z_L} I_R = 9.87 \cdot 10^{-3}{}_{/-45^\circ} \text{ A}$$

$$I_C = \frac{Z}{Z_C} I_R = 4.87 \cdot 10^{-3}{}_{/+135^\circ} \text{ A}$$

# POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN)

Resistencia: potencia compleja $S_R = V_R \cdot I_R^* = 1.55_{/-45^o} \cdot 5 \cdot 10^{-3}{}_{/+45^o}$

$$S_R = 7.75 \cdot 10^{-3}{}_{/0^o}$$




Potencia aparente:
módulo de la potencia compleja

$$|S_R| = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{A}$$

Potencia activa:
parte real de la potencia compleja

$$P_R = 7.75 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 0^o = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ w}$$

Potencia reactiva:
parte imaginaria de la potencia compleja

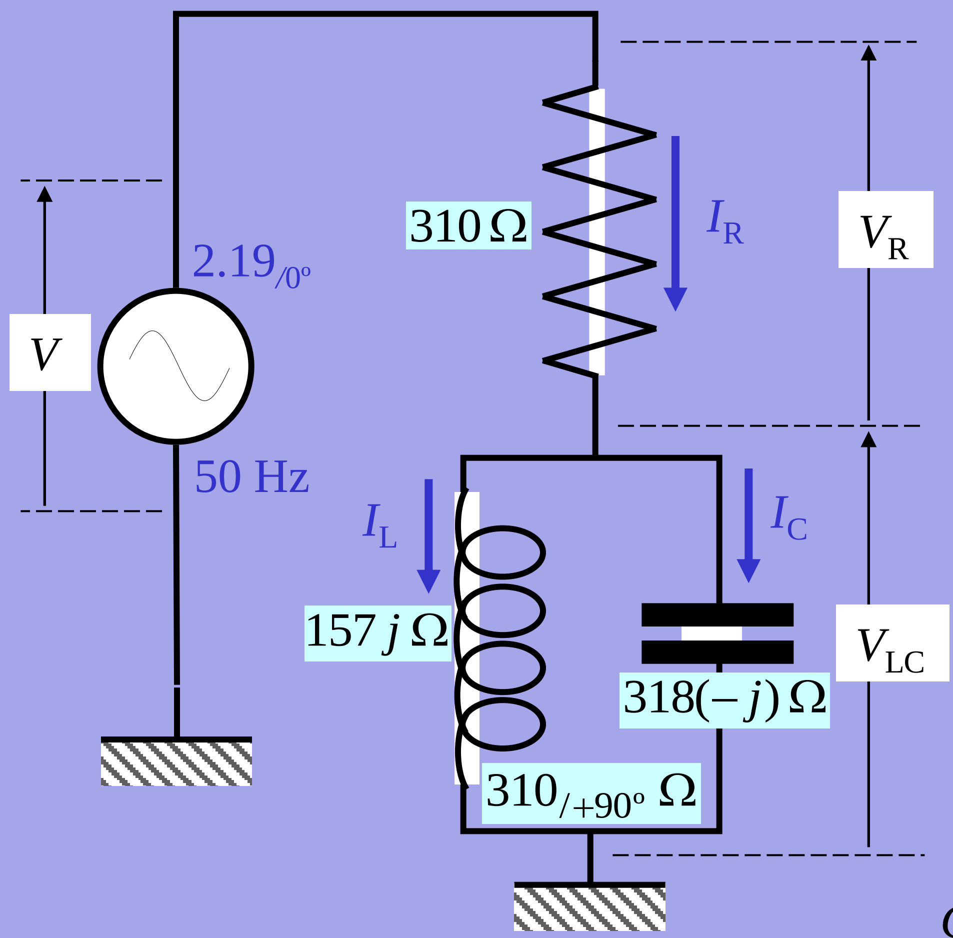
$$Q_R = 7.75 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}\, 0^o = 0$$

# POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN 2)

Inductancia: potencia compleja

$$S_L = V_L \cdot I_L^* = 1.55_{/+45^o} \cdot 9.87 \cdot 10^{-3}{}_{/+45^o}$$

$$S_L = 15.30 \cdot 10^{-3}{}_{/+90^o}$$




Potencia aparente:
módulo de la potencia compleja

$$|S_L| = 15.30 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{A}$$

Potencia activa:
parte real de la potencia compleja

$$P_L = 15.30 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 90^o = 0$$

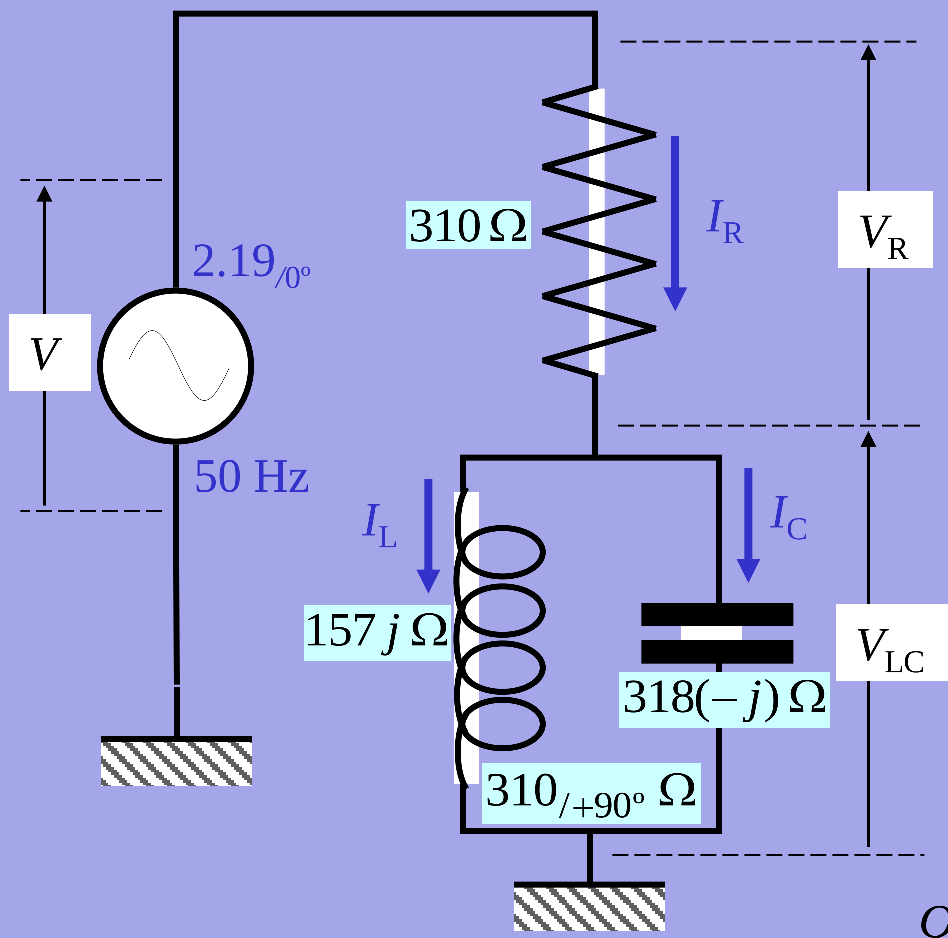
Potencia reactiva:
parte imaginaria de la potencia compleja

$$Q_L = 15.30 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}\, 90^o = 15.30 \cdot 10^{-3} \text{ VAR}$$

# POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN 3)

Condensador: potencia compleja $S_C = V_C \cdot I_C^* = 1.55_{/+45^o} \cdot 4.87 \cdot 10^{-3}{}_{/-135^o}$

$$S_C = 7.55 \cdot 10^{-3}{}_{/-90^o}$$




Potencia aparente:
módulo de la potencia compleja

$$|S_C| = 7.55 \cdot 10^{-3}\ \text{V} \cdot \text{A}$$

Potencia activa:
parte real de la potencia compleja

$$P_C = 7.55 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(-90^o) = 0$$

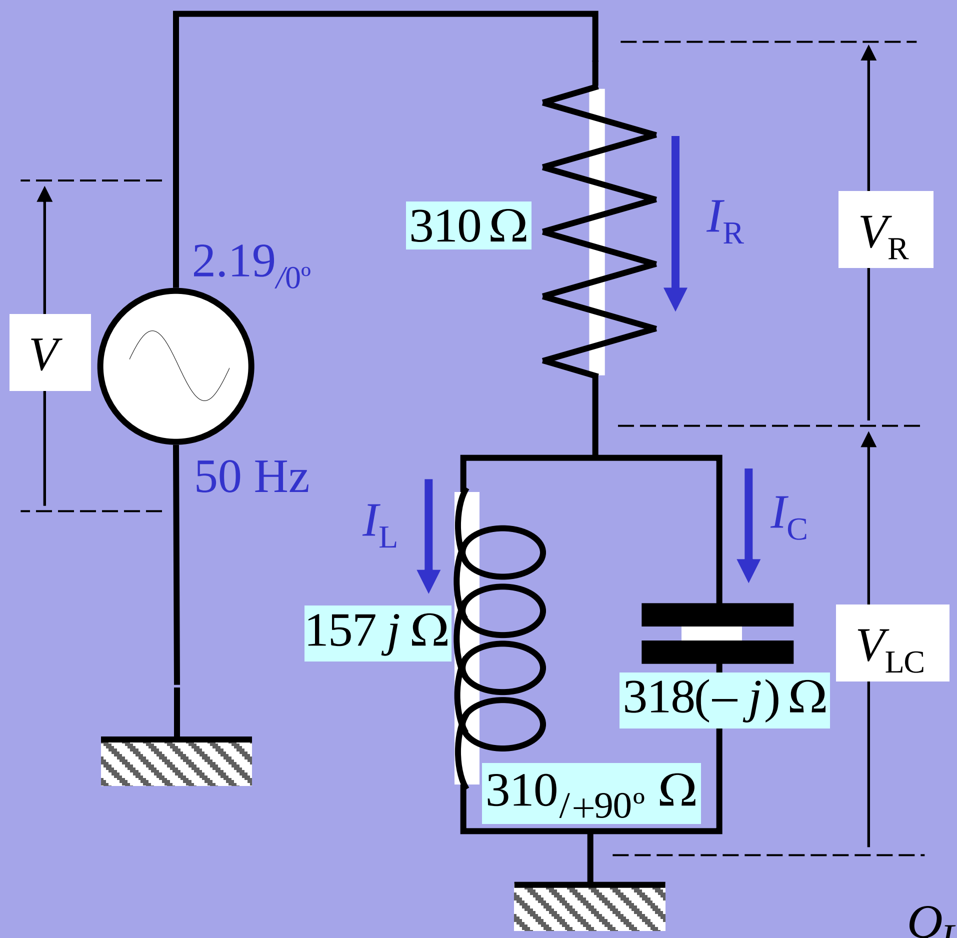
Potencia reactiva:
parte imaginaria de la potencia compleja

$$Q_C = 7.55 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}(-90^o) = -7.55 \cdot 10^{-3}\ \text{VAR}$$

# POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN 4)

Impedancia paralelo LC: potencia compleja $S_{LC} = V_{LC} \cdot I_R^* = 1.55_{/+45^o} \cdot 5 \cdot 10^{-3}{}_{/+45^o}$

$$S_{LC} = 7.75 \cdot 10^{-3}{}_{/+90^o}$$




Potencia aparente:
módulo de la potencia compleja

$$|S_{LC}| = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{A}$$

Potencia activa:
parte real de la potencia compleja

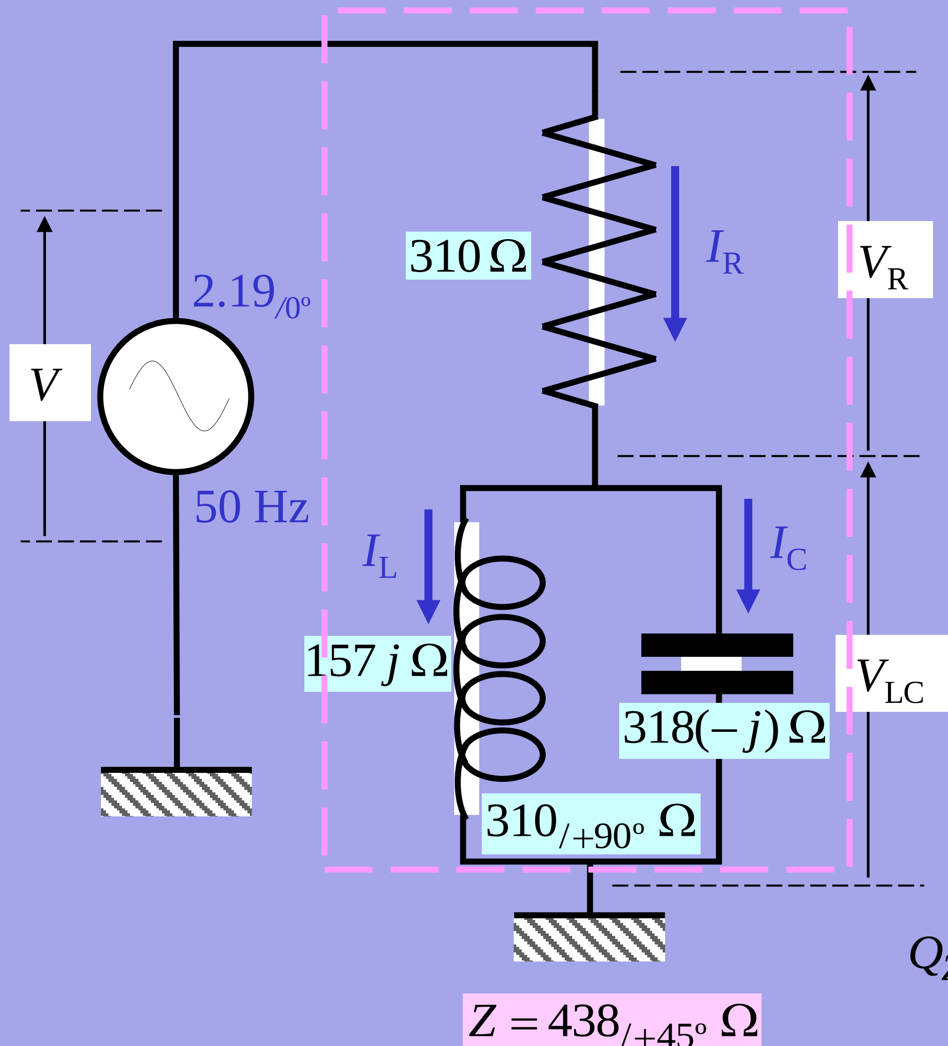
$$P_{LC} = 7.75 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(+90^o) = 0$$

Potencia reactiva:
parte imaginaria de la potencia compleja

$$Q_{LC} = 7.75 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}(+90^o) = 7{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ VAR}$$

# POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN 5)

Impedancia $Z$ del circuito: potencia compleja




$$S_Z = V_Z \cdot I_R^* = 2.19_{/0^o} \cdot 5 \cdot 10^{-3}{}_{/+45^o}$$

$$S_Z = 10.95 \cdot 10^{-3}{}_{/+45^o}$$

Potencia aparente:
módulo de la potencia compleja

$$|S_Z| = 10.95 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{A}$$

Potencia activa:
parte real de la potencia compleja

$$P_Z = 10.95 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(+45^o) = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ w}$$

Potencia reactiva:
parte imaginaria de la potencia compleja

$$Q_Z = 10.95 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}(+45^o) = 7{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ VAR}$$

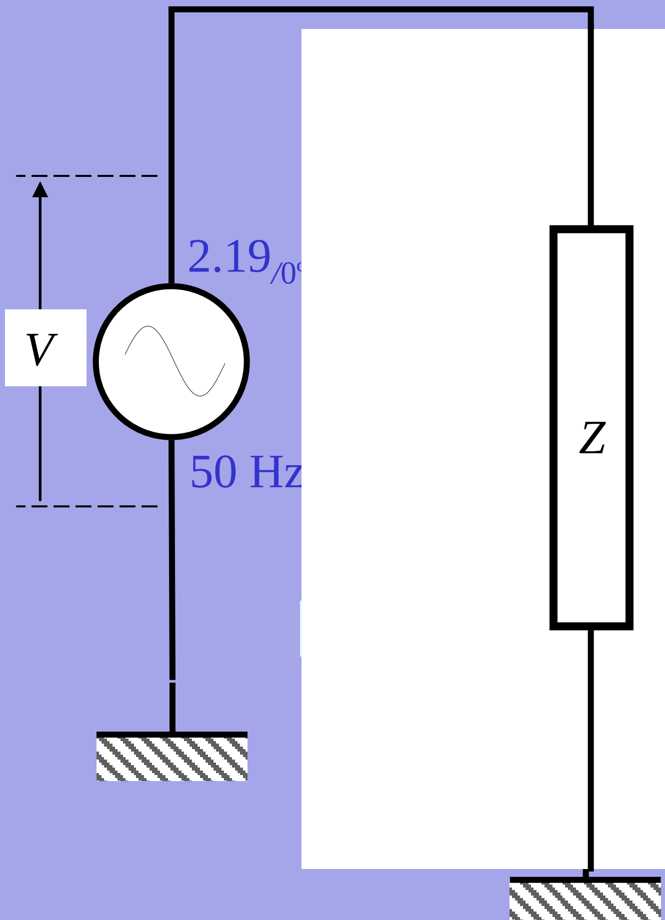
# POTENCIA EN ALTERNA (EJEMPLO 4 CONTINUACIÓN 6)

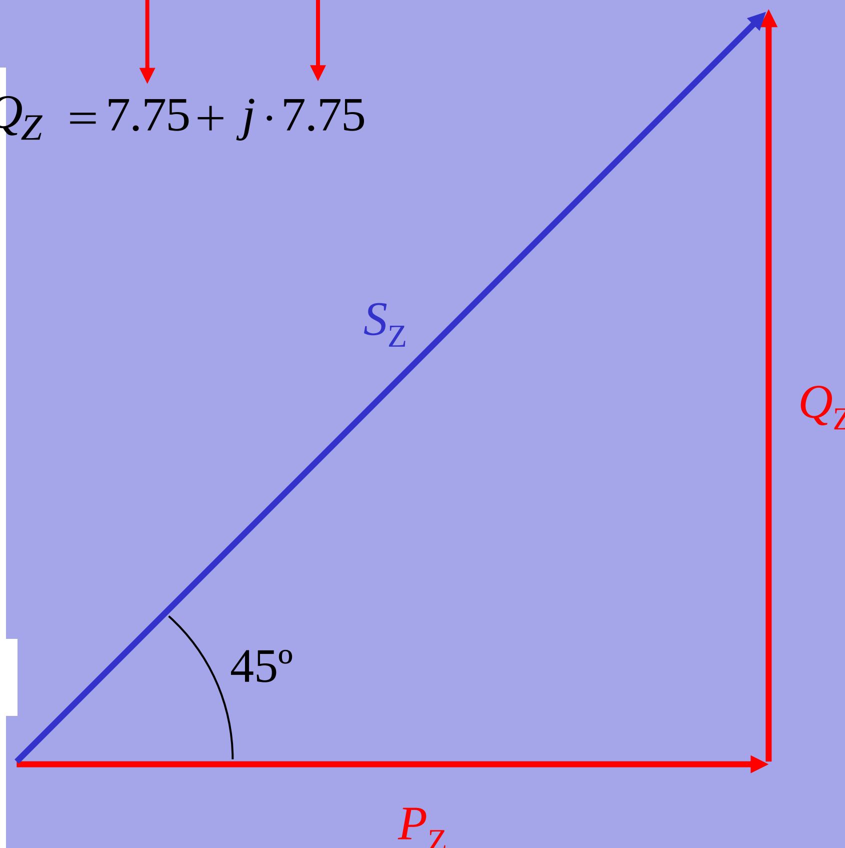
Triángulo de potencias (impedancia *Z*)

mw

mVAR

$$S_Z = P_Z + jQ_Z = 7.75 + j \cdot 7.75$$

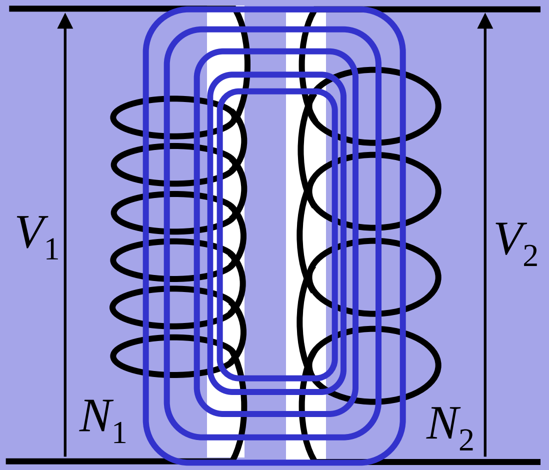


# TRANSFORMADORES

Un transformador es un conjunto de bobinados que comparten el mismo flujo magnético.

El paso de AC por uno de ellos produce en cambio de flujo magnético, el cual a su vez origina un cambio de voltaje en el resto.

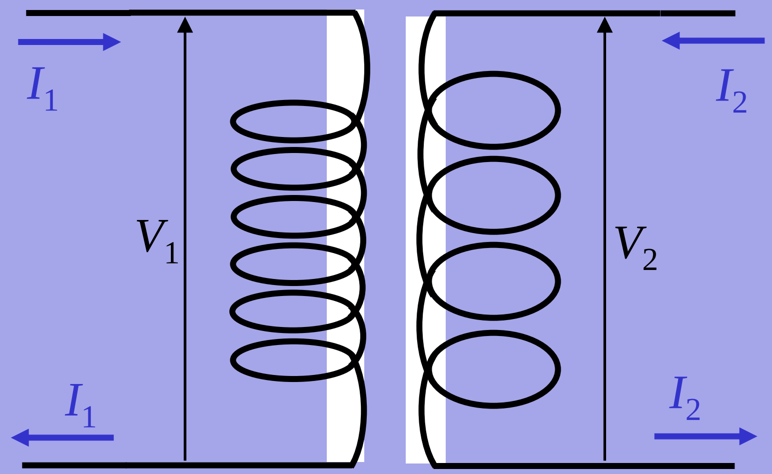



Para mantener el campo magnético confinado en los bobinados, éstos se arrollan sobre un núcleo ferromagnético

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \\ V_2 &= -N_2 \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Usando una relación apropiada $\dfrac{N_1}{N_2}$ puede elevarse o disminuirse el voltaje

# TRANSFORMADORES (II)




$$POTENCIA = I \cdot V \cdot \cos\varphi$$

$$I_1 \cdot V_1 = I_2 \cdot V_2$$

A diferencias de potencial bajas corresponden altas intensidades, y viceversa

Para el transporte de corriente conviene que la intensidad sea lo más baja posible (disminución de pérdidas por efecto Joule)