

Generalidades:

Definición:

Una **ecuación diferencial ordinaria** es una ecuación que contiene derivadas ordinarias de una o mas variables dependientes con respecto a una sola variable independiente.

Las siguientes son ecuaciones diferenciales ordinarias:

Ejemplos: $\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} - z = 0$

$$y' + xy = \frac{1}{x}$$

$$\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)x = y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 1$$

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden en la ecuación diferencial.

Ejemplos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dz} + \frac{y}{z} = 0 \text{ es una ED de segundo orden}$$

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x} \text{ es una ED de primer orden}$$

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden también puede expresarse en términos de las diferenciales de las variables, en cuyo caso se obtiene la **forma diferencial** de la ecuación diferencial. Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sqrt{x} &\iff \frac{dy}{dx} = \sqrt{x} - \frac{y}{x} \\ &\iff dy = \left(\sqrt{x} - \frac{y}{x}\right) dx \\ &\iff \left(\frac{y}{x} - \sqrt{x}\right) dx + dy = 0 \end{aligned}$$

Por lo que $\left(\frac{y}{x} - \sqrt{x}\right) dx + dy = 0$ es la forma diferencial de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sqrt{x}$.

$Mdx + Ndy = 0$ es la forma diferencial de la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$ porque:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \iff Ndy = -Mdx \iff Mdx + Ndy = 0$$

Una función $y = f(x)$ es **solución explícita** de una ecuación diferencial, si satisface dicha ecuación, es decir, si al sustituir la variable “y” por su expresión “f(x)” en la ecuación diferencial, se obtiene una identidad.

Ejemplo:

La función $y = e^{\frac{1}{x}}$ es solución explícita de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}$, porque $y = e^{\frac{1}{x}}$ satisface esta ecuación. Veamos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} &\iff \frac{de^{\frac{1}{x}}}{dx} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \\ &\iff -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \\ &\iff 1 = 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Una relación en términos de x y de y, de la forma $g(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial, si dicha relación define al menos una función que es solución explícita de la ecuación diferencial.

Ejemplo:

La relación $x^2 + y^2 - 3 = 0$ es de la forma $g(x, y) = 0$ en donde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ es solución implícita de la ecuación diferencial

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0$$

porque $x^2 + y^2 - 3 = 0$ define implícitamente las funciones

$$y = \sqrt{3 - x^2} \quad y \quad y = -\sqrt{3 - x^2},$$

cada una de las cuales es solución explícita de la ecuación diferencial: $x + y \frac{dy}{dx} = 0$, como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} x + y \frac{dy}{dx} &= x + \sqrt{3 - x^2} \left(\frac{d}{dx} \sqrt{3 - x^2}\right) \\ &= x + \sqrt{3 - x^2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{3 - x^2}} \\ &= x - x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y \frac{dy}{dx} &= x - \sqrt{3 - x^2} \left(\frac{d}{dx} (-\sqrt{3 - x^2})\right) \\ &= x - \sqrt{3 - x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{3 - x^2}} \\ &= x - x = 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

O bien la relación $x^2 + y^2 - 3 = 0$ es solución implícita de $x + y \frac{dy}{dx} = 0$, porque al derivar implícitamente, dicha relación se obtiene la mencionada ecuación diferencial, veamos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 3 &\implies \frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 3) = \frac{d}{dx}(0) \\ &\implies 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \\ &\implies \boxed{x + y \frac{dy}{dx} = 0} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ecuaciones de variables separables

Definición:

Una ecuación diferencial es una **ecuación de variables separables o ecuación separable** si tiene la forma:

$$f(x)g(y)dx + F(x)G(y)dy = 0$$

en donde "f" y "F" son funciones de "x", y "g" y "G" son funciones de "y". donde cada una de ellas puede ser constante

Ejemplo:

La ecuación diferencial

$$(3xy + 2y)dx + (4x^2 + 2) dy = 0$$

es una ecuación separable, porque cumple con la definición:

$$\begin{aligned} (3xy + 2y)dx + (4x^2 + 2) dy &= 0 \\ (3x + 2) \cdot y \cdot dx + (2x^2 + 1) \cdot 2 \cdot dy &= 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & \\ f(x) \cdot g(y) \cdot dx + F(x) \cdot G(y) \cdot dy &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Una ecuación separable:

$$f(x)g(y)dx + F(x)G(y)dy = 0$$

se resuelve multiplicándola por el factor $\boxed{\frac{1}{g(y)F(x)}}$ llamado

factor integrante, obteniéndose una ecuación diferencial equivalente a la ecuación diferencial original, es decir, que tiene las mismas soluciones que la primera. Entonces:

$$\begin{aligned} f(x)g(y)dx + F(x)G(y)dy &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)F(x)} \cdot f(x)g(y)dx + \frac{1}{g(y)F(x)} \cdot F(x)G(y)dy &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{f(x)}{F(x)} dx + \frac{g(y)}{G(y)} dy &= 0 \end{aligned}$$

Al integrar ambos lados de esta ecuación se obtiene una familia de soluciones llamada la **solución general** de la ecuación diferencial original. Tenemos que:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx + \int \frac{g(y)}{G(y)} dy = c$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $(x^3 + 1) y dx + (y^2 + y) x^2 dy = 0$

Solución: La ecuación es separable, entonces, dividiendo entre "x²y" se obtiene:

$$(x^3 + 1) y dx + (y^2 + y) x^2 dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + 1}{x^2} dx + \frac{y^2 + y}{y} dy = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + x^{-2}) dx + (y + 1) dy = 0$$

Integrando esta última ecuación se tiene:

$$\int (x + x^{-2}) dx + \int (y + 1) dy = c_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + c_1 - \frac{1}{x} + \frac{y^2}{2} + y + c_2 = c_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{y^2}{2} + y = c} \quad \blacksquare$$

↑
(c = c₀ - c₁ - c₂)

Entonces $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{y^2}{2} + y = c$ es la solución general implícita de la ecuación $(x^3 + 1) y dx + (y^2 + y) x^2 dy = 0$

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $x^3 \tan y dx + (y^2 + y) x^2 dy = 0$, de modo que $y(1) = \frac{\pi}{4}$

Solución: La ecuación $x^3 \tan y dx + (y^2 + y) x^2 dy = 0$ es separable, por lo que se deben separar las variables en dos productos, uno en términos de x y el otro en términos de y, para lo cual se multiplica la ecuación por el factor integrante

$\boxed{\frac{1}{(x^4 + 1) \tan y}}$, obteniéndose lo siguiente:

$$\frac{x^3 \tan y}{(x^4 + 1) \tan y} dx + \frac{(x^4 + 1) \sec^2 y}{(x^4 + 1) \tan y} dy = 0$$

$$\frac{x^3}{x^4 + 1} dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = 0$$

Integrando esta última ecuación se obtiene:

$$\int \frac{x^3}{x^4+1} dx + \int \frac{sec^2 y}{\tan y} dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + c_1 + \ln|\tan y| + c_2 = c_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \ln|\tan y| = c_0 - c_1 - c_2$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^4 + 1) + 4 \ln|\tan y| = 4(c_0 - c_1 - c_2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^4 + 1) + \ln|\tan^4 y| = \ln c$$

$$(c > 0 \text{ y } \ln c = 4(c_0 - c_1 - c_2))$$

De donde:

$$\ln(x^4 + 1) \cdot \ln|\tan^4 y| = \ln c$$

$$\boxed{(x^4 + 1) \cdot \ln|\tan^4 y| = c} \text{ (Solución general implícita)}$$

La **condición inicial** o **valor inicial** $y(1) = \frac{\pi}{4}$ es una condición que restringe la solución general a un valor particular de la constante "c", obteniéndose una **solución particular** de la ecuación diferencial, para lo cual puede mencionarse lo siguiente:

La condición inicial $y(1) = \frac{\pi}{4}$ debe interpretarse a partir del hecho de que la variable "y" es una función de "x", es decir $y = y(x)$; por lo que $y(1) = \frac{\pi}{4}$ significa que $y = \frac{\pi}{4}$ cuando $x = 1$. Por lo tanto, sustituyendo los valores de $y = \frac{\pi}{4}$ y $x = 1$ en la solución general, se obtiene:

$$(1^4 + 1) \cdot \ln|\tan^4 1| = c$$

$$(2) \cdot (1)^4 = c$$

$$2 = c$$

Entonces la solución del problema de valor inicial del ejemplo es:

$$\boxed{(x^4 + 1) \cdot \ln|\tan^4 y| = 2}$$

lo cual es una solución particular de la ecuación diferencial:

$$x^3 \tan y dx + (y^2 + y) x^2 dy = 0 \quad \blacksquare$$

Ciertas ecuaciones diferenciales no tienen la forma o el aspecto de una ecuación separable, pero pueden transformarse, mediante un cambio de variable, en una ecuación separable. Un ejemplo de tales ecuaciones diferenciales son aquellas que tienen la siguiente la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

en donde $f(x, y)$ es una expresión en "x" y "y", o función de "x" y "y", para la cual existe una función escalar o función real "g" tal que:

$$f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = g(v)$$

en donde $v = \left(\frac{y}{x}\right)$ en cuyo caso $y = vx$. Por lo tanto, derivando $y = vx$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} vx = v \frac{dx}{dx} + x \frac{dv}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

Por lo que:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Leftrightarrow v + x \frac{dv}{dx} = g(v)$$

$$\Leftrightarrow v - g(v) + x \frac{dv}{dx} = 0$$

$$\text{Ecuación separable} \rightarrow \Leftrightarrow (v - g(v)) dx + x dv = 0$$

Ahora multiplicando por el factor integrante $\frac{1}{x(v-g(v))}$

nos queda:

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{x} dx + \frac{1}{(v - g(v))} dv = 0}$$

Por lo tanto, las soluciones de $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, son las mismas que las de $\frac{1}{x} dx + \frac{1}{(v - g(v))} dv = 0$, siempre que

$$v = \frac{y}{x} \text{ y } \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación $(x^2 - 2y^2) dx - x^2 dy = 0$

Solución:

$$(x^2 - 2y^2) dx - x^2 dy = 0 \iff \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2xy^2}{x^2}$$

$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}} = \boxed{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Haciendo $\frac{y}{x} = v$, se tiene:

$$\frac{y}{x} = v \implies y = vx$$

$$\implies \boxed{\frac{dy}{dx}} = \frac{d}{dx}(vx) = \boxed{v + x \frac{dv}{dx}}$$

Observe la relación entre las expresiones en recuadros

Por lo que:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 \iff v + x \frac{dv}{dx} = 1 - 2v^2$$

(Ecuación separable) $\iff (2x^2 + v - 1) dx + x dv = 0$

$$\iff \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2v^2 + v - 1} dv = 0$$

Integrando esta última expresión tenemos:

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{2v^2 + v - 1} dv = c_0$$

$$\iff \ln|x| + c_1 + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2v-1}{2v+2} \right| + c_2 = c_0$$

$$\iff 3 \ln|x| + \ln \left| \frac{2v-1}{2v+2} \right| = 3(c_0 - c_1 - c_2)$$

$$\iff \ln|x^3| + \ln \left| \frac{2v-1}{2v+2} \right| = \ln c$$

$(c > 0 \text{ y } \ln c = 3(c_0 - c_1 - c_2))$

$$\iff \ln \left| \frac{x^3(2v-1)}{2v+2} \right| = \ln c$$

$$\iff \left| \frac{x^3(2v-1)}{2v+2} \right| = c$$

Pero $v = \frac{y}{x}$, entonces devolviendo el cambio:

$$\left| \frac{x^3 \left(\frac{2y-x}{x} \right)}{\frac{2(y+x)}{x}} \right| = c$$

De donde la expresión:

$$\boxed{|x^3 y - x^4| = |2c(x+y)|}$$

Es la solución general de la ecuación:

$$(x^2 - 2y^2) dx - x^2 dy = 0 \quad \blacksquare$$

Ecuaciones lineales de primer orden

Definición:

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una **ecuación diferencial lineal de primer orden** en la variable dependiente y respecto a la variable independiente y respecto a la variable independiente x , si es o puede escribirse de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

La ecuación anterior también es llamada **Ecuación Diferencial de Bernoulli**

Ejemplo:

La ecuación: $x \frac{dy}{dx} + y = x^3$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden en la variable y respecto a x, porque puede escribirse de la forma $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$. Veamos:

$$x \frac{dy}{dx} + y = x^3 \iff \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$$

$$\iff \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2$$

$$\iff \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Tenemos que $p(x) = \frac{1}{x}$ y $q(x) = x^2$ ■

Una ecuación lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

se resuelve multiplicándola por el factor integrante:

$$\mu = e^{\int p(x)dx}$$

Como se muestra enseguida:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Multiplicando por el factor integrante:

$$\underbrace{\left[e^{\int p(x)dx} \right]} \cdot \frac{dy}{dx} + \left[e^{\int p(x)dx} \right] \cdot p(x) \cdot y = \left[e^{\int p(x)dx} \right] \cdot q(x)$$

Pero ↓

$$\frac{d}{dx} \left(y \cdot e^{\int p(x)dx} \right) = e^{\int p(x)dx} \cdot \frac{dy}{dx} + y \left(\frac{d}{dx} e^{\int p(x)dx} \right)$$

$$= e^{\int p(x)dx} \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot e^{\int p(x)dx} \frac{d}{dx} \left(\int p(x)dx \right)$$

$$= e^{\int p(x)dx} \cdot \frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx} \cdot p(x) \cdot y$$

Así que:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = q(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(y \cdot e^{\int p(x)dx} \right) = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)$$

$$\Leftrightarrow d \left(y \cdot e^{\int p(x)dx} \right) = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) \cdot dx$$

Ahora, integrando esta última ecuación se tiene:

$$y \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) \cdot dx + c$$

De donde:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) \cdot dx + c \right]$$

es la solución general de la ecuación lineal:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad \blacksquare$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$

Solución:

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

en donde $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = x^2$

Multiplicando la ecuación $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ por el factor integrante:

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2 \ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$$

se obtiene:

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = x^4$$

Pero $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{d}{dx} (x^2y)$, entonces:

$$\frac{d}{dx} (x^2y) = x^4$$

de donde: $d(x^2y) = x^4 dx$

Integrando esta última ecuación diferencial, se obtiene

$$x^3y = \int x^4 dx \Leftrightarrow x^2y = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^3}{5} + \frac{c}{x^2}$$

Por lo tanto, $y = \frac{x^3}{5} + \frac{c}{x^2}$ es la solución de $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $(4xy - x)dx + (x^2 + 1) dy = 0$, de tal manera que $y(1) = 0$.

$$(4xy - x)dx + (x^2 + 1) dy = 0 \iff \frac{dy}{dx} = \frac{x - 4xy}{x^2 + 1}$$

$$\iff \frac{dy}{dx} + \left(\frac{4x}{x^2 + 1} \right) y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\iff \frac{dy}{dx} + \underset{\downarrow}{p(x)} y = \underset{\downarrow}{q(x)}$$

en donde $p(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ y $q(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Multiplicando la ecuación $\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2 + 1} \cdot y = \frac{x}{x^2 + 1}$ por el factor integrante:

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{4}{x^2+1} dx} = e^{2 \ln(x^2+1)} = e^{\ln(x^2+1)^2} = (x^2+1)^2$$

se obtiene:

$$(x^2 + 1)^2 \frac{dy}{dx} + 4x(x^2 + 1)y = x(x^2 + 1)$$

Pero:

$$(x^2 + 1)^2 \frac{dy}{dx} + 4x(x^2 + 1)y = \frac{d}{dx} (x^2 + 1)^2 \cdot y$$

Entonces

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 1)^2 \cdot y = x(x^2 + 1)$$

De donde

$$d((x^2 + 1)^2 \cdot y) = x(x^2 + 1)dx$$

Integrando esta última ecuación se obtiene:

$$((x^2 + 1)^2 \cdot y) = \int x(x^2 + 1)dx$$

$$(x^2 + 1)^2 \cdot y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

De donde:

$$y = (x^2 + 1)^{-2} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c \right)$$

Es la solución general de $(4xy - x)dx + (x^2 + 1) dy = 0$, la cuál está sujeta a la condición inicial $y(1) = 0$, entonces sustituyendo los valores $x = 1$ y $y = 0$ en la solución general, se obtiene:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + c \right) = 0$$

De donde $c = -\frac{3}{4}$, por lo que:

$$y = (x^2 + 1)^{-2} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4} \right)$$

es la solución del problema del valor inicial del ejemplo en cuestión.

Ejercicios:

Resuelva la ecuación diferencial que se indica:

1. $3x^2 + 2y \frac{dy}{dx} = 0$
2. $(1 + y)dx + xdy = 0$
3. $\cos x dy - \sin x dx = 0$
4. $(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$
5. $(x^3 + x^2)ydx + x^2(y^3 + 2y)dy = 0$
6. $\frac{\sin x}{\ln^2 y} dx + \frac{1}{x} dy = 0$
7. $\frac{x}{y^2} dx + \frac{e^y}{2^{3x}} dy = 0$
8. $x + \frac{\arctan x}{\cos 2x} - \frac{dx}{dx} = 0$
9. $\ln x + (x^2 \ln^2 e)y' = 0$
10. $y^2 \sqrt{x^2 - 1} dx + x^3 \sqrt{1 - y^2} dy = 0$
11. $\frac{\cos^3 x}{\sec^2 y} + \frac{\tan^2 y}{3x} \cdot y' = 0$
12. $\sin^2 x \sin^2 y dx + \cos y \sin^2 x dy = 0$
13. $\sin^2 \theta + r \frac{dr}{d\theta} = 0$
14. $\sqrt{r^2 + 2} d\theta + r(1 - \cos \theta) dr = 0$
15. $(1 + \csc v) du + \sqrt{1 - u^2} du = 0$

16. $(y + x \operatorname{sen} \frac{y}{x}) dx + xdy = 0$
17. $y^3 dx - (xy^2 + x^3) dy = 0$
18. $\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{y}{1+y} \cdot y' = 0$
19. $(x\sqrt{x-y^2} + y^2) dx - xydy = 0$
20. $(x^2 + y^2 + xy) dx - x^2 dy = 0$
21. $(2xy - x) dx + dy = 0$
22. $(x^2 y - x^2 - 1) dx + (x^3 + x) dy = 0$
23. $(y \tan x - \cos x) dx + dy = 0$
24. $\cos x dx + (y - \cos^2 x) y = 0$
25. $(y - xe^{x^2}) dx + dy = 0$
26. $(xy - 1) dx + x^3 dy = 0$
27. $(2y - 3xe^{x^3}) dx + xdy = 0$
28. $xy' + y - \cos x = 0$
29. $xy' + y - 2x = 0$
30. $x^2 y' + xy - 1 = 0$
31. $\theta r' + r + \operatorname{sen} \theta = 0$
32. $(y' - 1) \cos x - y \operatorname{sen} x = 0$
33. $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy + \operatorname{csc}^2 x - \cot x \operatorname{csc} x = 0$
34. $y' + y \tan x - 2x \sec x = 0$
35. $(1+x) \frac{dy}{dx} + y - 2x = 0$
36. $(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy - 3x^2 = 0$
37. $(1 + \sec \theta) \frac{dr}{d\theta} + r \sec \theta \tan \theta - \sec^2 \theta = 0$
38. $xy' + y - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0$
39. $\frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{1+x}\right) y = \frac{1}{x}$
40. $x(1+x^2)y' = 1 - (1+x^2)y$

Del ejercicio 41 al 50, resuelva la ecuación diferencial con el valor inicial que se indica:

41. $x dy + (1 - y) dx = 0, y(1) = 2$
42. $x(y + 1) dx + (x^2 + 1) dy = 0, y(0) = 1$
43. $\cos x dy - \operatorname{sen} y dx = 0, y(0) = \frac{\pi}{2}$
44. $(y + 1) dx + x dy = 0, y(2) = 1$
45. $(xy + x^2) - (x^2 + xy + x^2) dx = 0$

46. $xydy - (2y^2 + x^2) dx = 0, y(1) = 1$
47. $xy' + y + 1 = 0, y(2) = 2$
48. $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} - 2xy = 2x, y(0) = 2$
49. $(1 + x)y' - \operatorname{sen} x = 0, y(\pi) = 1$
50. $y' - y \tan x = 1, y(0) = 3$

Respuestas de los ejercicios impares:

- 1 $x^2 + y^2 = c$
- 3 $y = c \sec x$
- 5 $3x^2 + 6x + 2y^3 + 12y = c$
- 7 $2^{3x} \left(\frac{x}{3 \ln 2} - \frac{1}{9 \ln^2 2}\right) + e^x (x^2 - 2x + 2) = c$
- 9 $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x - \frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} = c$
- 11 $\frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}$
- 13 $\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{r^2}{2} = c$
- 15 $\left(\frac{1}{u}\right) + \sec v - \tan v + v = c$
- 17 $\frac{y^2}{2x^2} + \ln |y| = c$
- 19 $e^{\frac{y^2 - cx}{x}} = cx$
- 21 $y = \frac{1}{2} (1 + ce^{-x^2})$
- 23 $y = \cos x(x + c)$
- 25 $y = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right) = \frac{1}{2x} (e^{x^2} + c)$
- 27 $y = \frac{1}{x^2} (e^x + c)$
- 29 $y = \frac{1}{x} (c - x^2)$
- 31 $r = \theta (c - \cos \theta)$
- 33 $y = \frac{1}{x^2} (\cot x - \operatorname{csc} x + c)$
- 35 $y = \frac{x^2 + c}{x + 1}$
- 37 $r = \frac{\tan \theta + c}{1 + \sec \theta}$
- 39 $y = \frac{x \ln x + c}{1 + x}$
- 41 $y = 1 + x$
- 43 $\operatorname{csc} y - \cot y = \sec x + \tan x$
- 45 $\frac{y^2}{2x^2} + \frac{y}{x} = \ln x$
- 47 $y = \frac{6 - x}{x}$
- 49 $y = \frac{2 + x^2}{1 + x^2}$