

Transformaciones de mapeo

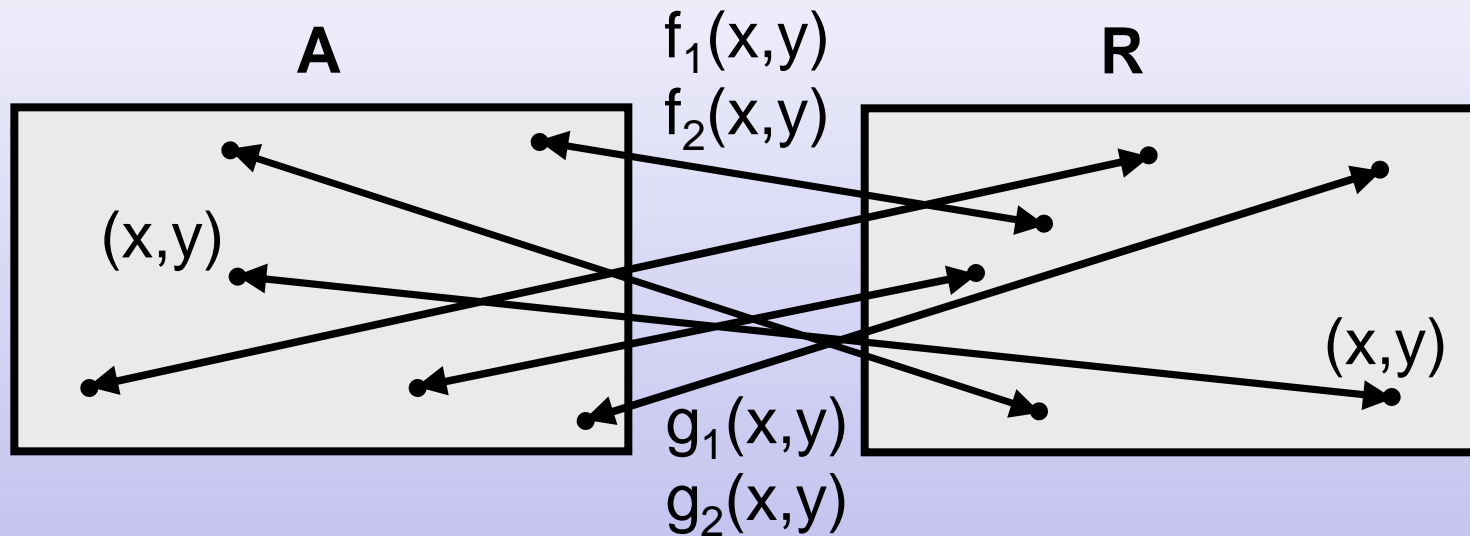
- Recordemos que una **transformación geométrica** es cualquier operación del tipo:

$$R(x, y) := A(f_1(x, y), f_2(x, y))$$

- Siendo f_1 y f_2 dos funciones cualesquiera:

$$f_1, f_2: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$$

- f_1 : posición en X del original para el píxel resultante (x,y)
 - f_2 : posición en Y del original para el píxel resultante (x,y)
- Las transformaciones vistas hasta ahora tienen formas particulares y son continuas.
- Un **mapeo** (*mapping*) es cualquier transformación arbitraria, definida por un par de funciones f_1 y f_2 , continuas o escalonadas.



- **Mapeo inverso:** el mapeo puede venir dado al revés:
 $R(g_1(x,y), g_2(x,y)) := A(x,y)$
- **Significado:** el píxel (x,y) en la imagen original se mueve a la posición $(g_1(x,y), g_2(x,y))$.
- Normalmente trabajaremos con mapeo directo.
- Existen infinitos mapeos. Cualquier par de funciones locas, (f_1, f_2) , es posible, pero ¿cuáles son plausibles?

- **Ejemplo 1. Difuminado aleatorio, de radio a :**

$$f_1(x,y) := x + \text{random}(2a+1) - a$$

$$f_2(x,y) := y + \text{random}(2a+1) - a$$



- **Ejemplo 2. Pixelado:** $f_1(x,y) := \lfloor x/8 \rfloor * 8$; $f_2(x,y) := \lfloor y/8 \rfloor * 8$

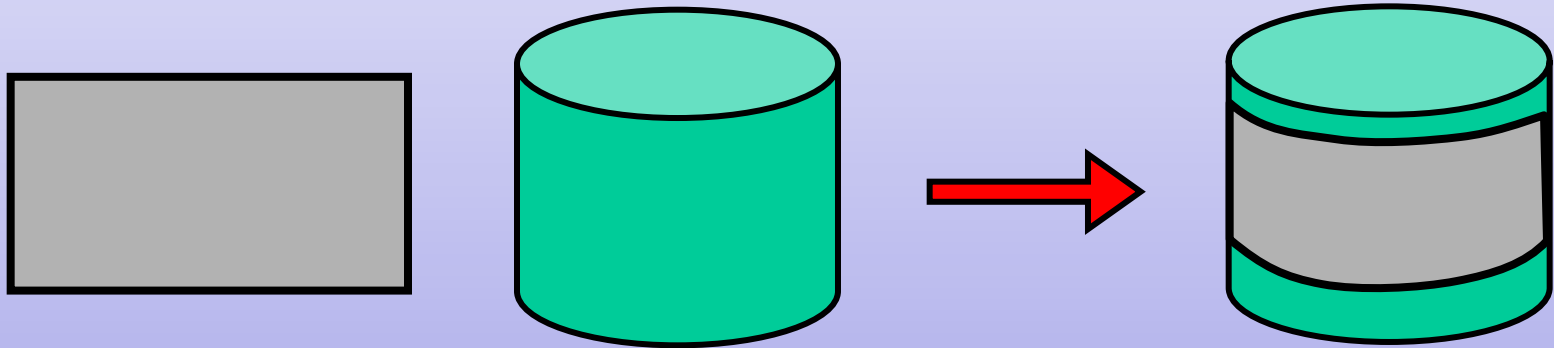


Aplicado
sólo en la
ROI.

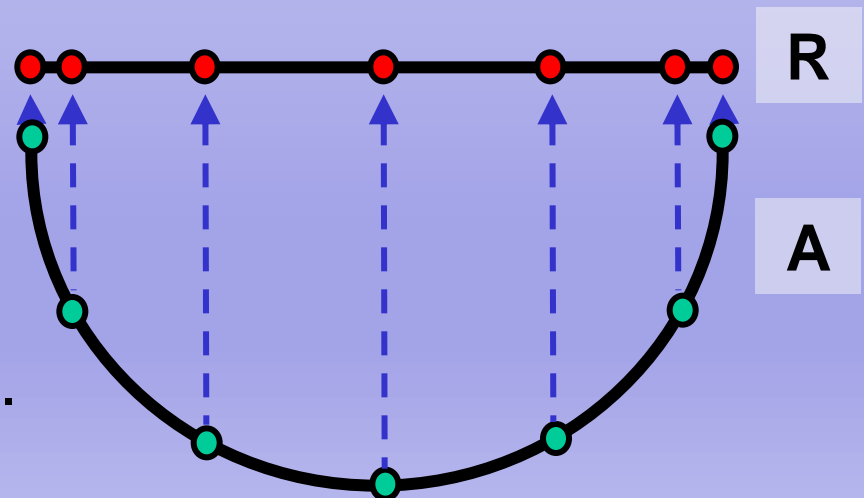
- **Ejemplo 3. Efecto de cristal a cuadros:**
 $f_1(x,y) := x - x \bmod 30 + y \bmod 30$; $f_2(x,y) := y - y \bmod 30 + x \bmod 30$



- Los mapeos pueden servir para **simular** las deformaciones producidas por **fenómenos físicos naturales**.
- Por ejemplo, ¿cómo se deforma una imagen pegada a un cilindro (como una etiqueta de una botella)?

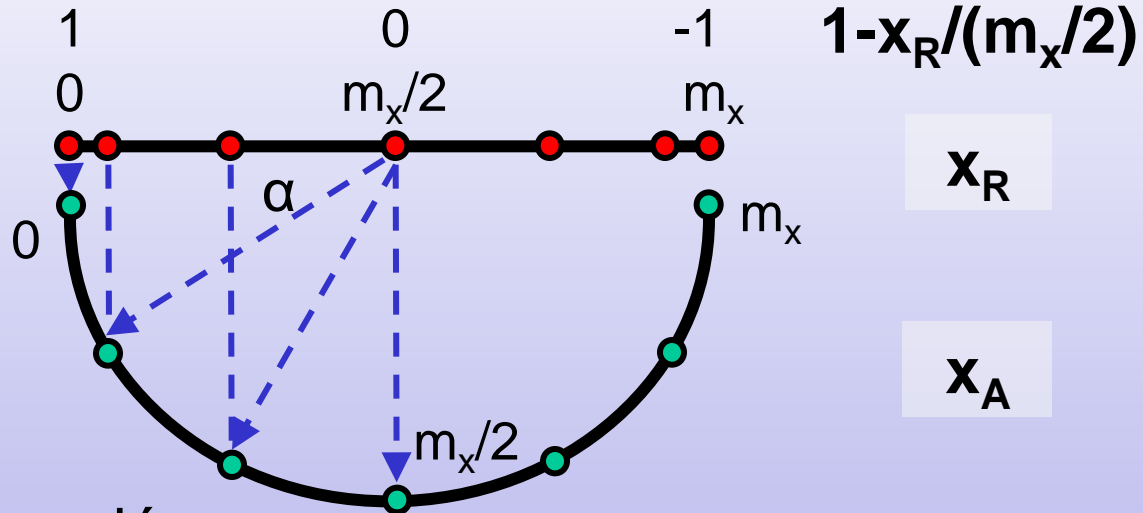


- La coordenada Y no se modifica: $f_2(x, y) := y$
- ¿Qué pasa con la X ?
- La X de R es el coseno del ángulo correspondiente en A .



$$\alpha = \arccos(1 - x_R / (m_x / 2))$$

$$x_A = \alpha \cdot m_x / \pi$$

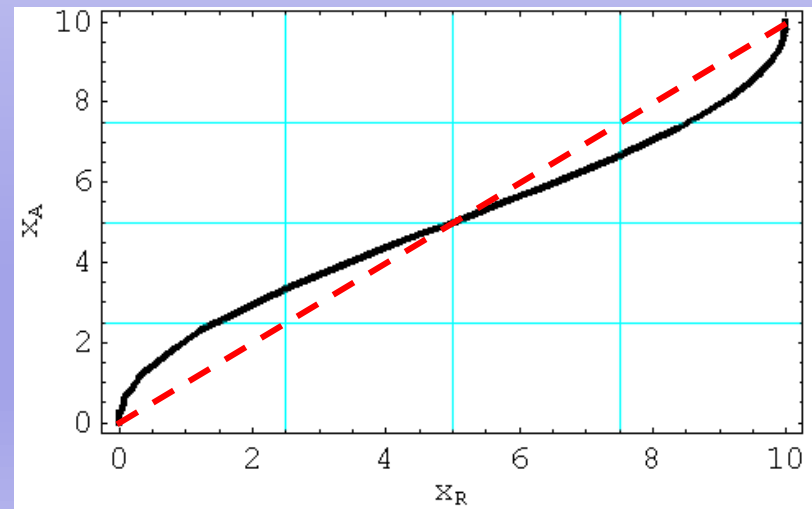


- **Conclusión.** Transformación cilíndrica en X : $R(x, y) := A(\arccos(1 - x / (m_x / 2)) \cdot m_x / \pi, y)$

Representación de la función

$$f(x) := \arccos(1 - x / (m_x / 2)) \cdot m_x / \pi$$

con $m_x = 10$



- **Ejemplo.** Aplicación de la transformación cilíndrica.

Imagen de entrada



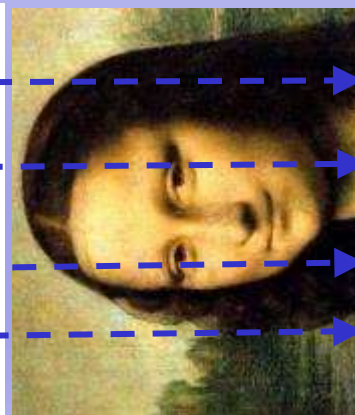
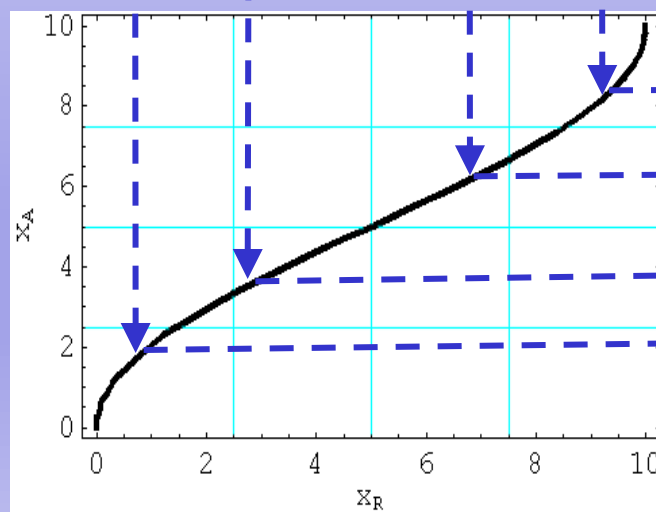
Tr. cilíndrica en X



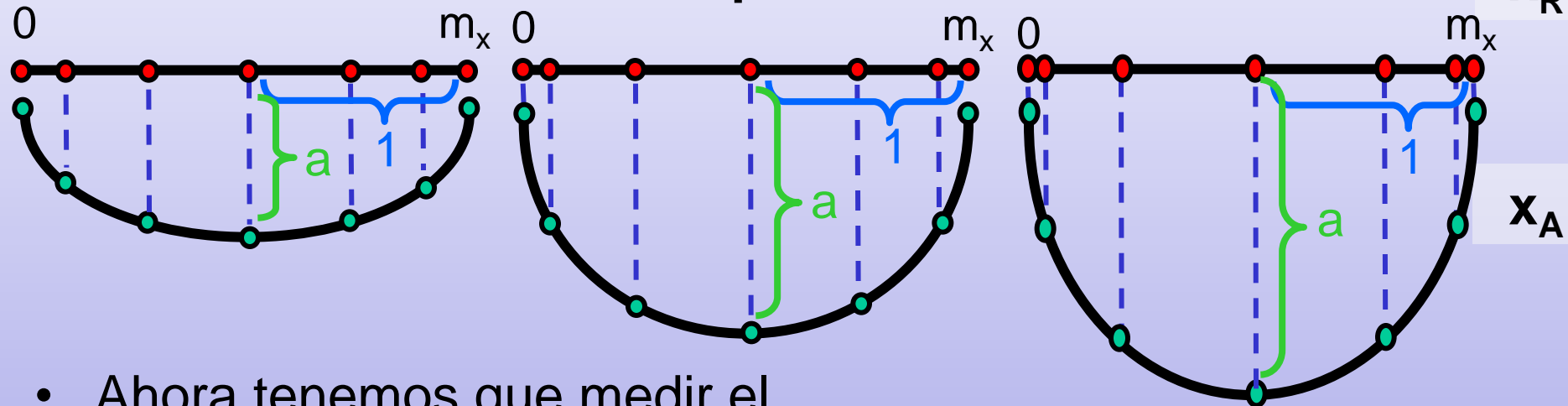
Tr. cilíndrica en Y



**Interpretación de
la transformación
cilíndrica**

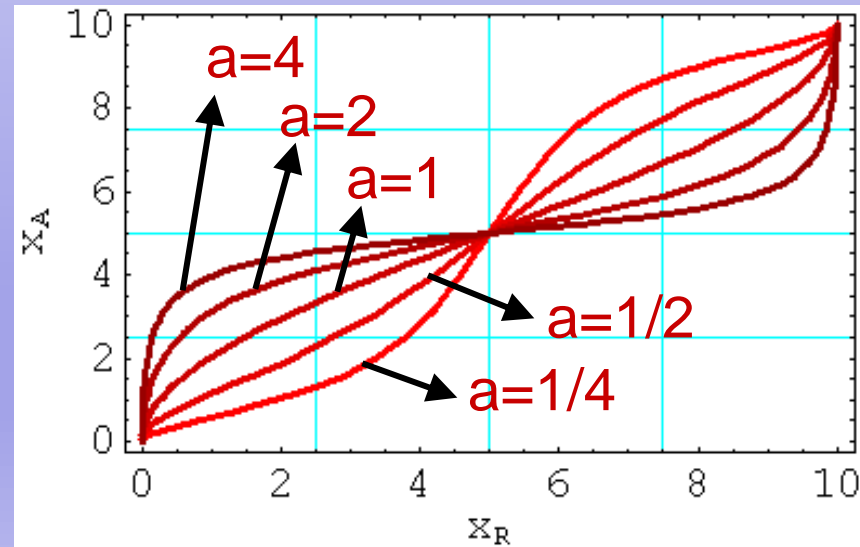


- El efecto se puede **graduar**, si en lugar de un semicírculo consideramos una **semielipse**, más o menos ovalada.



- Ahora tenemos que medir el **ángulo en una elipse**. Si tomamos $x' = 1 - x_R / (m_x / 2)$, ent.:

$$f_1(x, y) := \text{atan}(a \cdot \sqrt{1 - x'^2}) / x' m_x / \pi$$
 siendo **a** el segundo radio de la elipse (en relación al ancho de la imagen).



- **Ejemplos.** Transformaciones elípticas.

$a = 0,3$

$a = 1,2$

$a = 2$

En Y



En X



- De forma parecida, podemos definir otros muchos tipos de transformaciones, basados en **deformaciones** producidas por **fenómenos físicos naturales** (o no).
- **Método:** estudiar la forma (matemática) de la deformación, y obtener el par de funciones $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$.
- **Ejemplo.** Transformaciones geométricas genéricas.



Estirar: simula un panel abombado hacia afuera

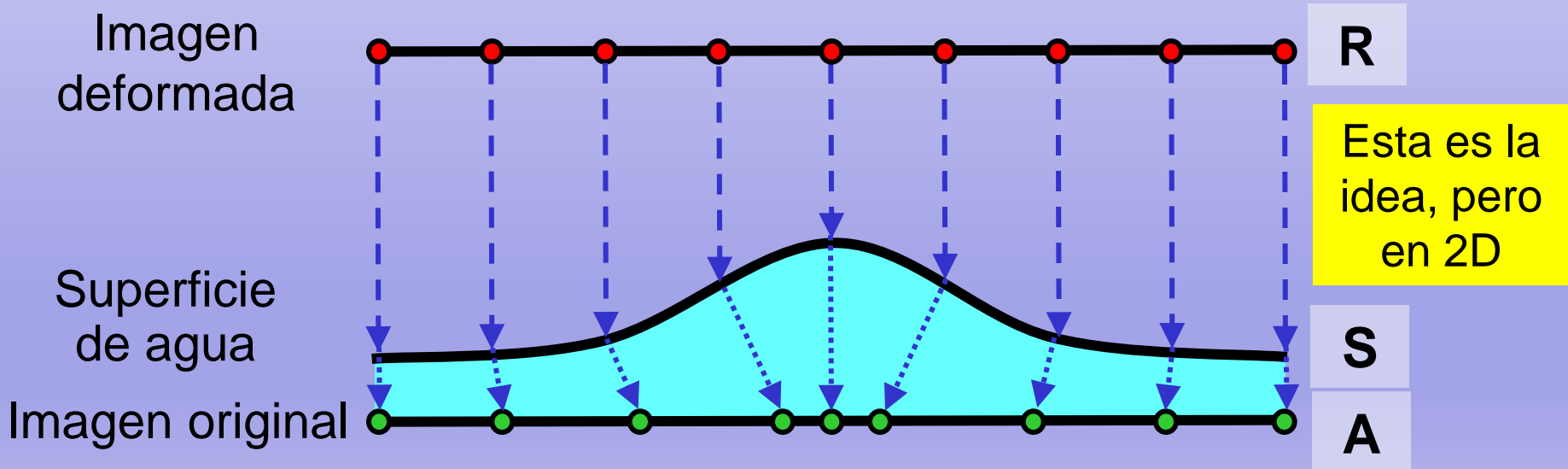


Pinchar: simula apretar la superficie del panel



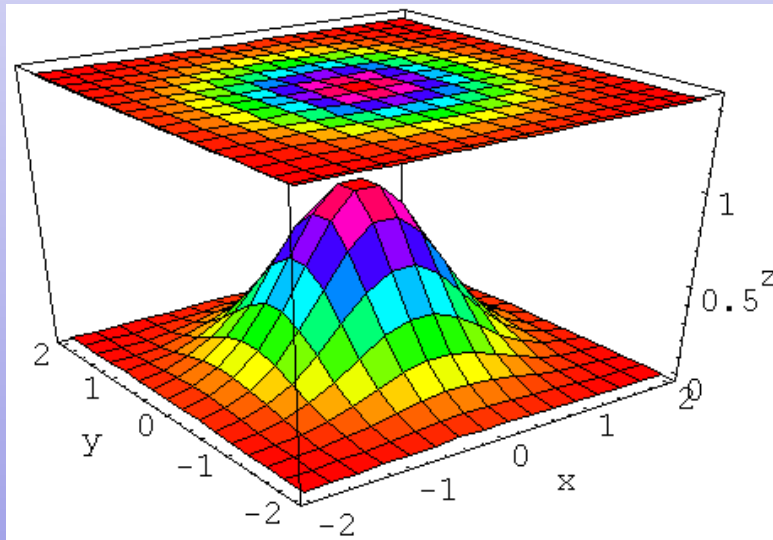
Ondulación: simula una deformación por ondas de agua

- ¿Cómo **unificar** todas estas deformaciones? Es decir, crear un **marco común** a todas ellas.
- **Idea:** supongamos que sobre una imagen podemos colocar una capa de agua. Podemos poner gotas, hacer ondas, formar olas, etc.
- La deformación de la imagen es el resultado de la **refracción** de la luz, al pasar del aire al agua.



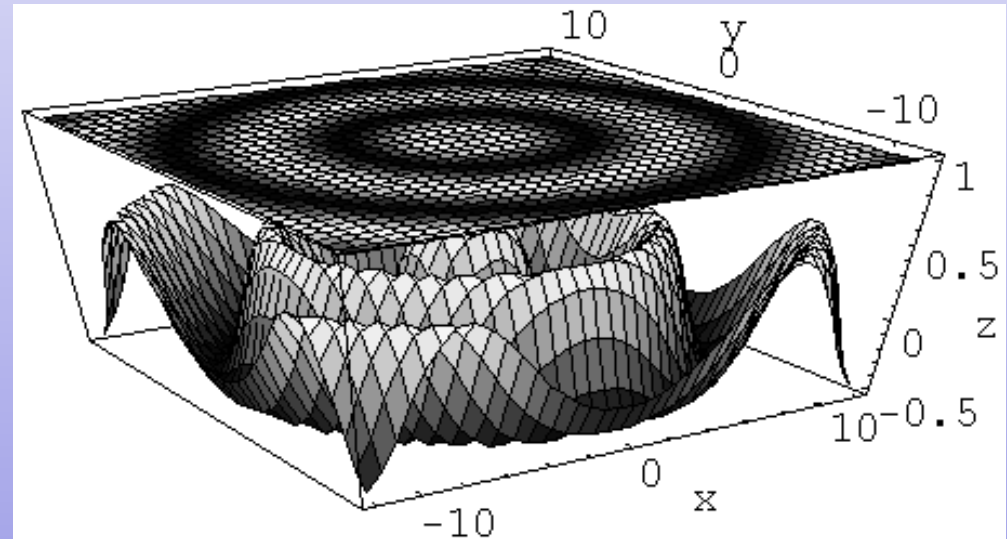
- Ojo, la **superficie deformante**, **S**, no es ni más ni menos que una imagen, donde el valor de un píxel **S(x,y)** indica la altura del agua en ese punto.

S_1 . Superficie de efecto pinchar/estirar



$$S(x,y) := e^{-((x-cx)^2 + (y-cy)^2)/\sigma^2}$$

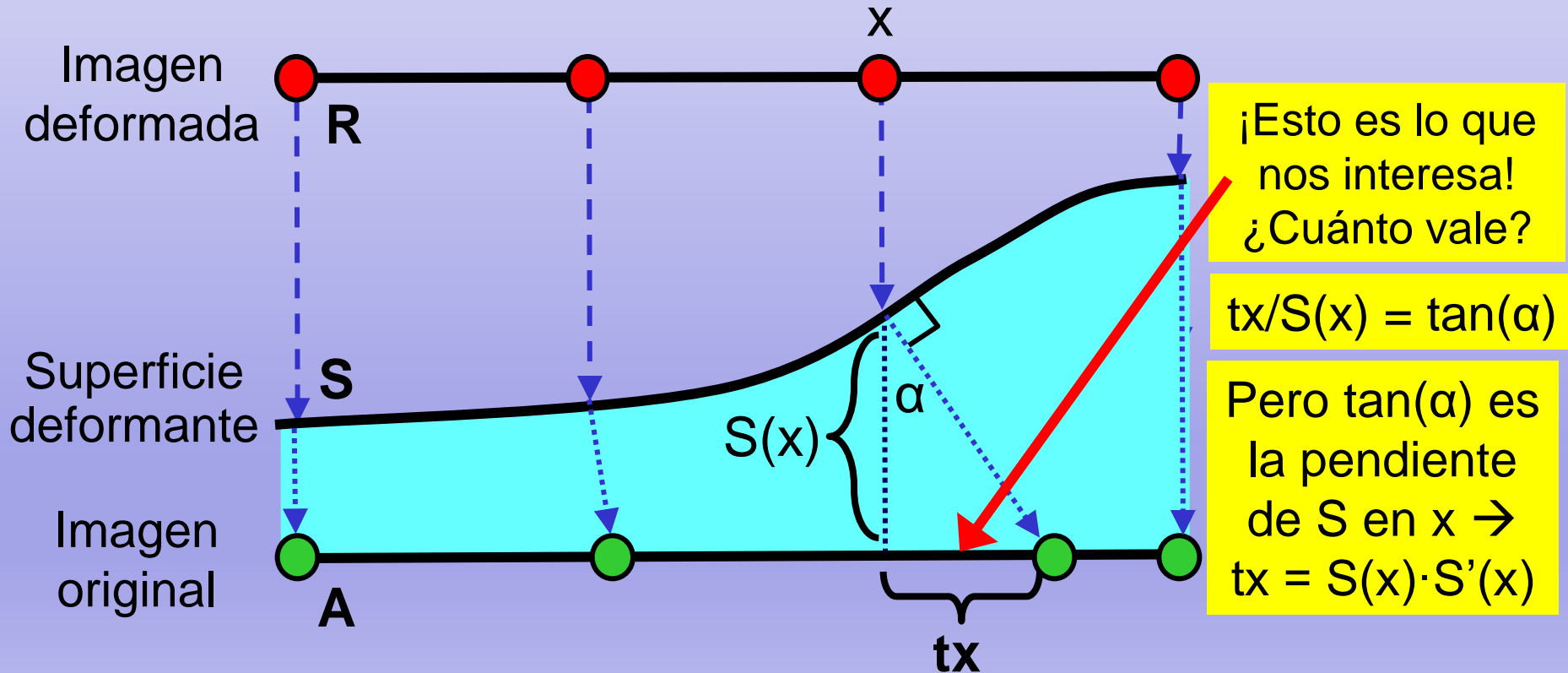
S_2 . Superficie de efecto de ondas marinas



$$S(x,y) := \text{sen}(f \cdot \sqrt{((x-cx)^2 + (y-cy)^2)})$$

Ahora sólo hay que calcular los rayos incidentes, el ángulo de refracción de cada uno, y el sitio donde choca con el fondo...

- **Objetivo:** dada una imagen **A**, una superficie deformante **S** (imagen de 1 solo canal) definir la transformación geométrica correspondiente: $R(x,y) := A(f_1(x,y,S), f_2(x,y,S))$
- **En una dimensión:** en el caso de mayor refracción, el rayo se desvía perpendicularmente a la superficie del agua.



- ¡Ya está! $\rightarrow R(x) := A(x + S(x) \cdot dS(x)/dx)$

- Y en dos dimensiones:

$$R(x,y) := A(x + S(x,y) \cdot dS(x,y)/dx , y + S(x,y) \cdot dS(x,y)/dy)$$

- Ale, ¡todos a derivar!

$$\begin{aligned} S(x,y) \cdot dS(s,y)/dx &= e^{-((x-cx)^2+(y-cy)^2)/\sigma^2} \cdot d(e^{-((x-cx)^2+(y-cy)^2)/\sigma^2})/dx = \\ &= -2(x-cx)/\sigma^2 \cdot e^{-2((x-cx)^2+(y-cy)^2)/\sigma^2} \dots \end{aligned}$$

- Y así para cualquier función...

Cachis... ¿no
habrá una forma
más sencilla?

- Pero, ¿qué vimos en el tema anterior?
- La **derivada en X** (o en Y) de una imagen se puede calcular con un filtro de **convolución** adecuado: Sobel, Prewitt, Scharr, etc.
- Además, de esta forma podemos usar cualquier superficie deformante arbitraria.

- **Algoritmo.** Transformación de una imagen **A** según la superficie deformante **S**.

1) Calcular $G_x := S_x \otimes S$

siendo S_x una máscara de derivada en X

2) Calcular $G_y := S_y \otimes S$

siendo S_y una máscara de derivada en Y

3) Calcular $\text{MapaX}(x,y) := x + a \cdot S(x,y) \cdot G_x(x,y)$

4) Calcular $\text{MapaY}(x,y) := y + a \cdot S(x,y) \cdot G_y(x,y)$

5) Obtener la imagen resultante:

$R(x,y) := A(\text{MapaX}(x,y), \text{MapaY}(x,y))$

S_x

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

S_y

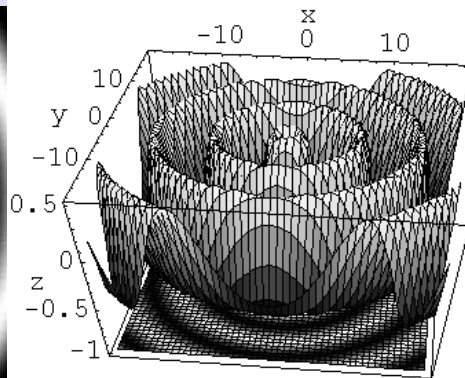
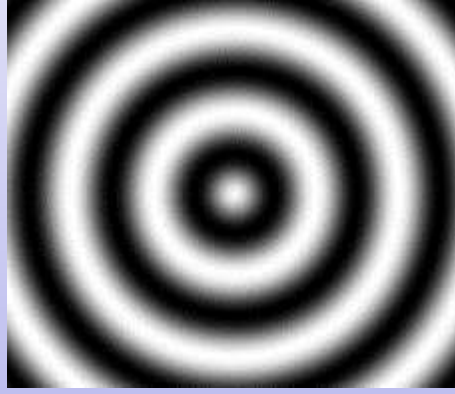
-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

Notas: todas las imágenes (A , S , G_x , G_y , MapaX , MapaY , R) son del mismo tamaño.

El parámetro **a** indica el grado de la transformación. Cuanto mayor, más pronunciada.

- **Ejemplo.** Aplicación de la deformación de ondas.

Im. de entrada, **A** Sup. deformante, **S** Superficie en 3D Im. de salida, **R**

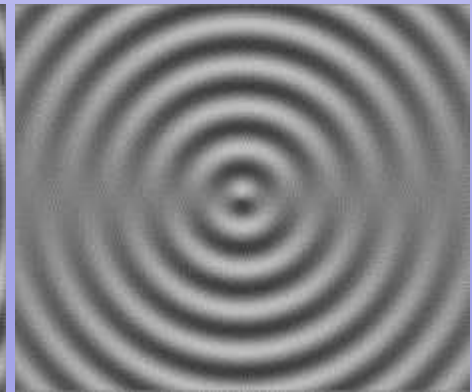
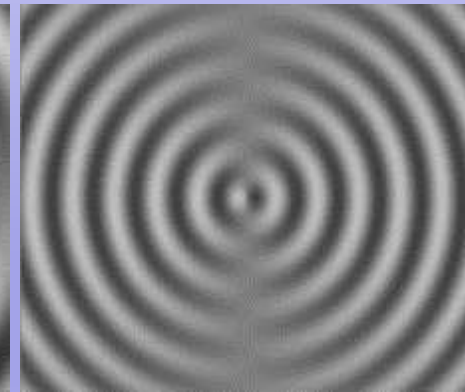
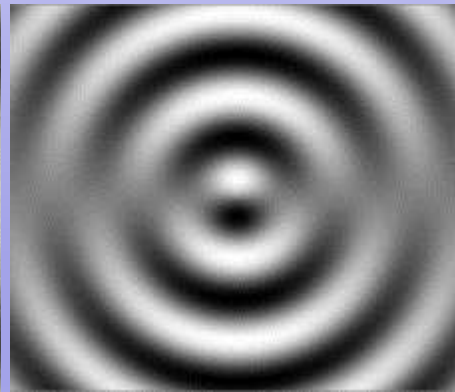
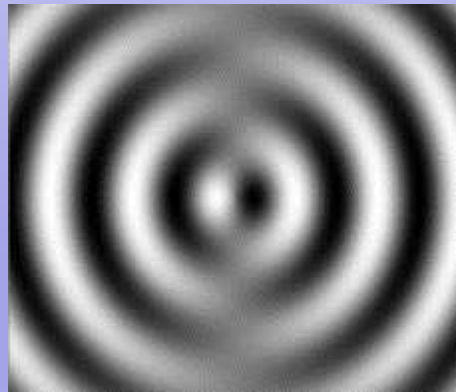


Derivada X, **Gx**

Derivada Y, **Gy**

Mapa X, **S·Gx**

Mapa Y, **S·Gy**



Ojo: -1=Negro, +1=Blanco

- **Transformación de ondas:**

$$S(x,y) := \sin(f \cdot \sqrt{(x-cx)^2 + (y-cy)^2} + p)$$

- **(cx, cy)**: centro de las ondas
- **f**: frecuencia; **p**: fase

- **Transformación apretar/pinchar:**

$$S(x,y) := e^{-((x-cx)^2 + (y-cy)^2)/\sigma^2}$$

- **(cx, cy)**: centro de la deformación
- **σ** : anchura de la zona deformada
- **a**: fuerza de la deformación; **a < 0** → pinchar, **a > 0** → estirar

Variación de frecuencia



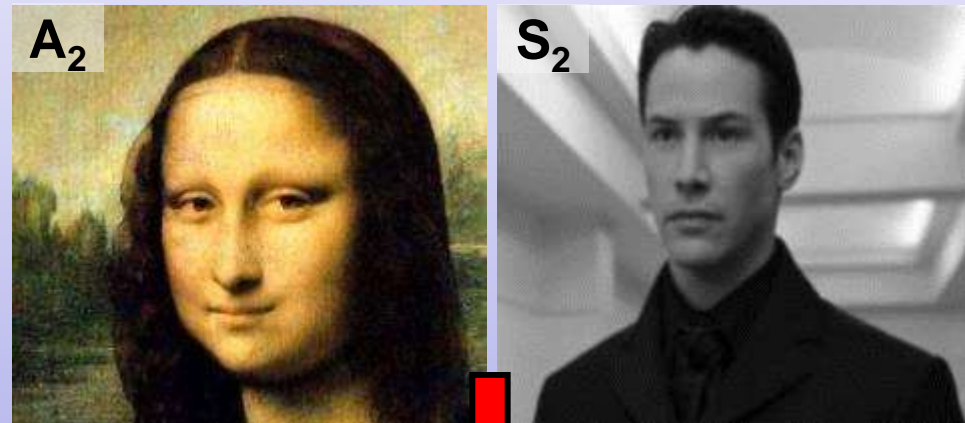
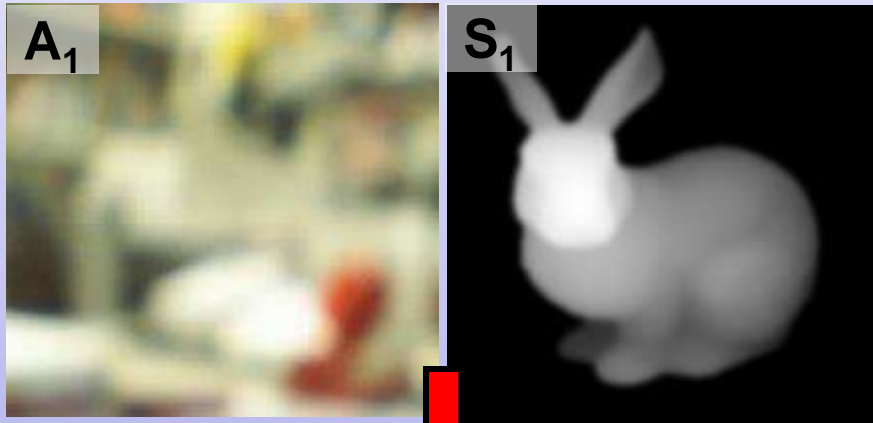
Variación de fase



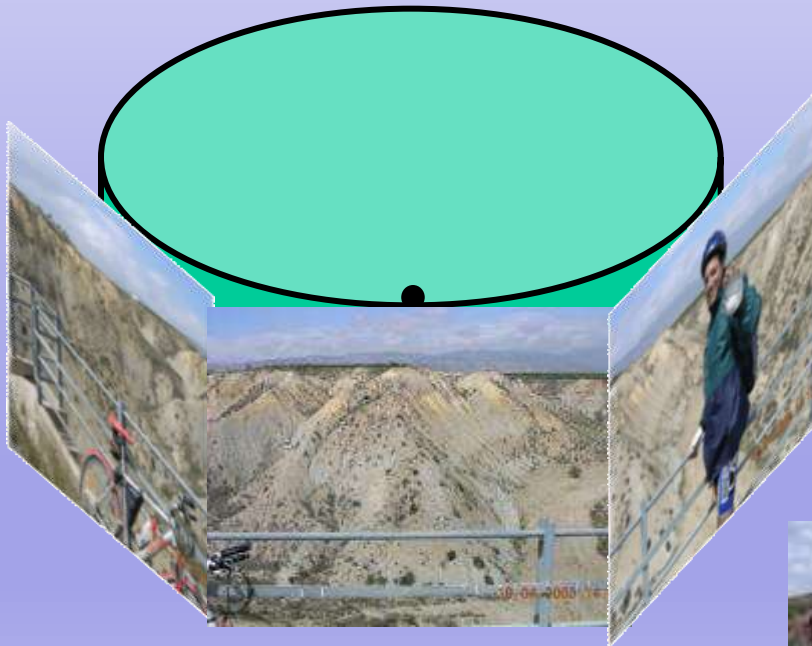
Variación de fuerza



- Lo interesante de esta transformación es que se puede usar **cualquier imagen** como superficie deformante.



- Las transformaciones geométricas son esenciales en las **composiciones panorámicas**.
- **Idea:** obtener la imagen que debería estar pegada a un cilindro que envuelve todo el campo visual del sujeto.
- **Cuestión:** ¿cómo se proyectan las imágenes individuales en el cilindro?



Imágenes de entrada

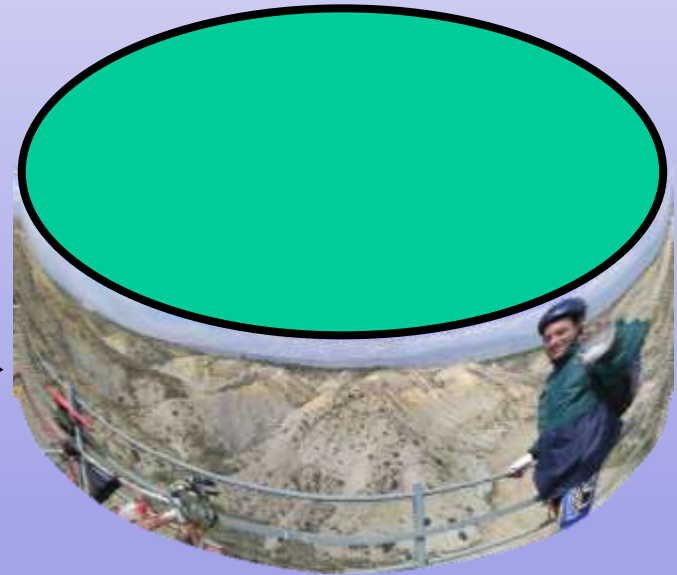
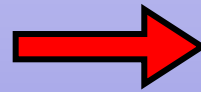
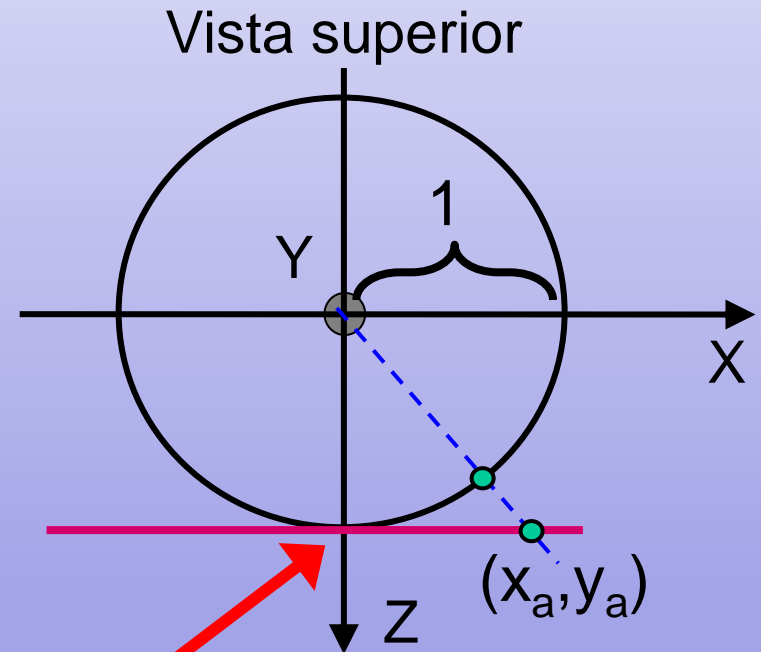
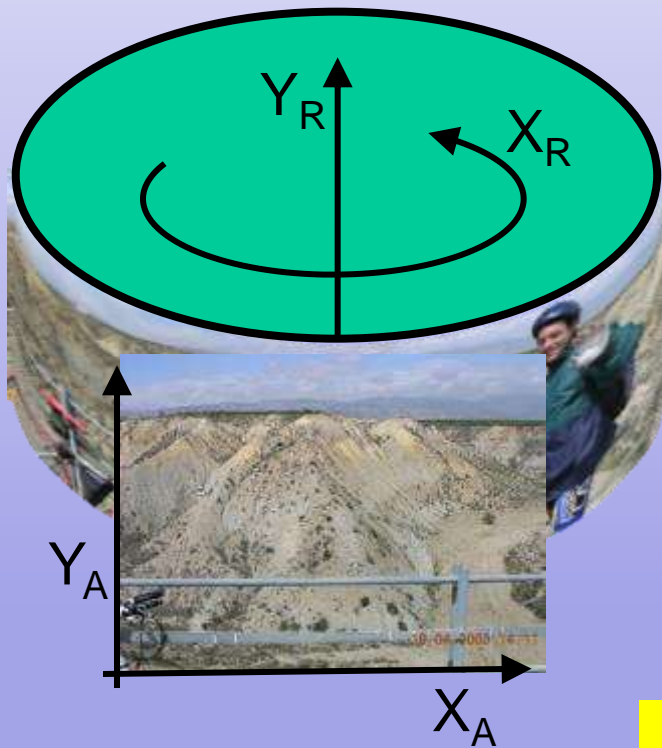


Imagen resultado

- **Idea:** la X en la panorámica es el ángulo en el cilindro.
- La proyección de un punto (x_a, y_a) de la imagen viene dada por la intersección de la recta que pasa por $(x_a, y_a, 1)$ y $(0, 0, 0)$, y el cilindro con radio 1, a lo largo del eje Y .



¿Dónde toca la imagen con el cilindro? Centro: (x_c, y_c)

- Si todas las fotos se toman desde el centro, sin mover la cámara (sólo girarla en Y), el punto (x_c, y_c) será el centro de la imagen $(m_x/2, m_y/2)$.
- Si hay giro arriba o abajo, sí que se modifica y_c .
- Y también puede haber giro a lo largo de Z.
- Otro parámetro es cuántos grados corresponden al ancho de una foto, es decir cuánto es el **campo visual**. Lo podemos medir en el **número de píxeles** que representan 45° , **fp**.

- Con estos parámetros, la transformación será:

$$x_R := \arctan((x_A - x_c)/fp)$$

$$y_R := (y_A - y_c) / \sqrt{(x_A - x_c)^2 + (y_A - y_c)^2 + fp^2}$$

- x_R estará entre -90° y 90° ,
 y_R entre $-m_y/2$ y $m_y/2$.

Ojo, esta **fp** no es ni más ni menos que la **distancia focal**

Podrá variar según el valor del zoom

- Pero, cuidado, lo que necesitamos son las funciones $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ (de $R(x,y) := A(f_1(x,y), f_2(x,y))$) que vienen dadas por las **inversas**:

$$f_1(x,y) := x_c + fp \cdot \tan x$$

$$f_2(x,y) := y_c + y \cdot \sqrt{1 + \tan^2 x}$$

- En definitiva, tenemos una transformación con 3 parámetros:
 - El centro de la imagen (**cx**, **cy**).
 - La distancia focal, en píxeles, **fp**.
- **Ejemplo.** Variación de **df**, con centro $(m_x/2, m_y/2)$, 480x360.



df = 20 pix.



df = 120 pix.

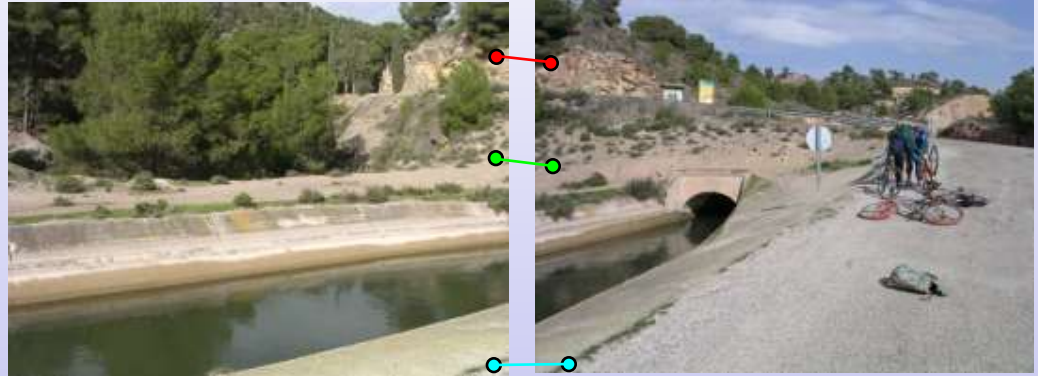


df = 530 pix.

- La distancia focal **no cambia**, si no cambiamos el zoom entre una foto y otra. Se puede calibrar una vez y usarla en todas las fotos de la composición.
 - El centro en X se puede dejar en la mitad de la imagen, si no cambiamos el eje de rotación.
 - El centro en Y, c_y , puede cambiar.
 - El giro en el eje Z también. Se puede corregir con una rotación afín a priori.
 - Por último, se debe encontrar el desplazamiento en X para ajustar las imágenes.
- Calibración previa
- Calibración para cada grupo de imágenes

- **Proceso:**

- 1) Buscar puntos análogos (de forma manual o automática) entre cada par de imágenes consecutivas.
- 2) Calcular los parámetros de la transformación, usando los puntos definidos.
- 3) Transformar las imágenes individualmente.
- 4) Componer las imágenes resultantes.



Versión simplificada (aunque inexacta):

- Normalmente la distancia focal será grande y se puede sustituir la transf. anterior por una simple transf. afín.
- **Parámetros de la transf. afín:** desplazamiento (dx, dy), escala s (igual en ambos ejes) y rotación r . No hay inclinac.
- Con **dos puntos análogos** basta para resolver los 4 parámetros.



Es mucho más sencillo,
pero peor. Observar la
línea quebrada del
canal

Corrección de la distorsión radial

- La distorsión radial es una deformación introducida por las lentes de las cámaras, que da lugar a un *curvado* de las zonas periféricas de las imágenes.

Observar la
curvatura de
la puerta



- La distorsión radial se modela como un desplazamiento radial, según la distancia, r , al centro de la imagen de la forma:

$$p \cdot (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4)$$

- **Corrección de la distorsión radial:**

$$R(x,y) := A((x-c_x)(1+k_1r^2+k_2r^4)+c_x, (y-c_y)(1+k_1r^2+k_2r^4)+c_y)$$

con $r^2 = (x-c_x)^2 + (y-c_y)^2$

- Para poder aplicarla, tenemos que encontrar valores adecuados de k_1 , k_2 , c_x y c_y . → **Calibración.**
- **Posibilidades:** hacer pruebas, o bien obtener 4 ecuaciones.

Imagen de entrada
(384x288)



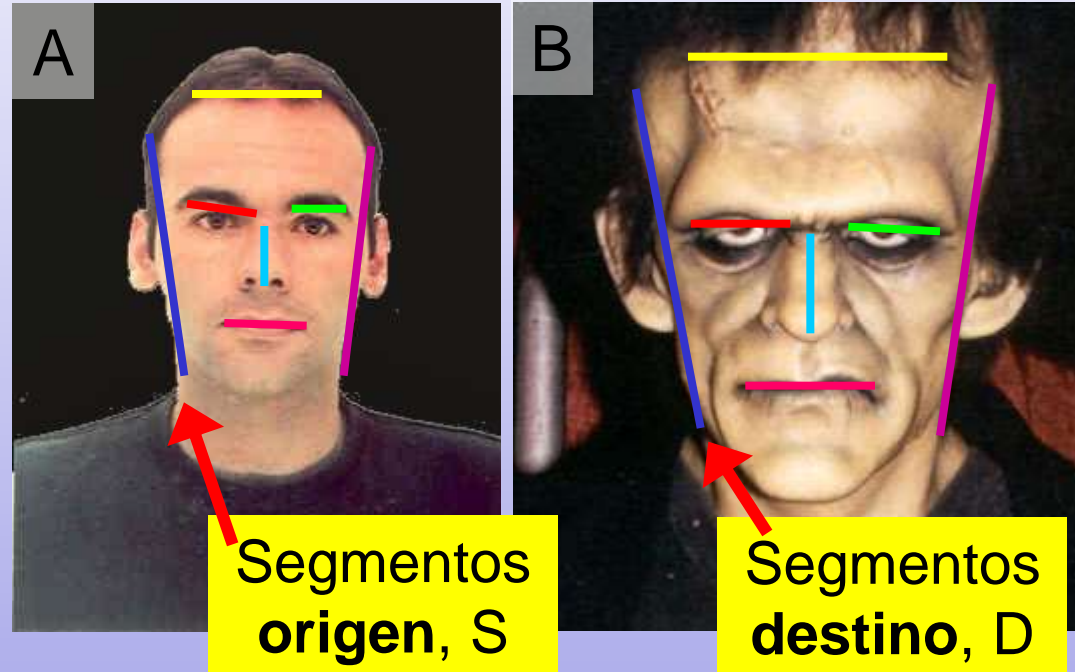
Imagen resultante
con $k_1 = -2,9 \cdot 10^{-7}$, $k_2 = -1 \cdot 10^{-13}$



- Otro tipo de transformaciones geométricas interesantes son las de **morphing**, muy usadas en efectos especiales.
- El **morphing** es un efecto de **transición suave y progresiva** entre dos (o más) imágenes.
- Está basado en algunas **ideas** ya estudiadas:
 - Una **transformación geométrica**, definida por un conjunto de puntos de origen, S, y otro de destino, D. El proceso es similar a la transformación de malla, pero en lugar de rectángulos se usan segmentos equivalentes.
 - La transf. geométrica está **graduada**, entre las posiciones de origen y de destino. 0%: posiciones de origen, 100%: posiciones de destino, 50%: término medio entre ambos.
 - El **color de un píxel** es una **media ponderada**, entre la imagen origen y destino, según el grado de la transformación.

- **Morphing entre dos imágenes basado en líneas.**
- **Paso 1.** Establecer segmentos equivalentes entre dos imágenes.

- $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$
- $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$



- **Paso 2. Repetir** el proceso para **g** desde 0 hasta 1.
En el paso **g**, los segmentos intermedios son:
$$i_k = (1-g)s_k + g \cdot d_k$$

- **Morphing entre dos imágenes basado en líneas.**

2.1. Transformar **A**, moviendo los puntos de **S** a **I**
 $\rightarrow R_1$



2.2. Transformar **B**, moviendo los puntos de **D** a **I**
 $\rightarrow R_2$



2.3. Media ponderada: $R = (1 - g)R_1 + g \cdot R_2$



Conclusiones:

- Las transformaciones de mapeo son el **caso general** de las transformaciones geométricas.
- Permiten modelar los efectos producidos por **fenómenos físicos naturales**.
 - Para simularlos (efecto de ondas, pinchar, estirar...).
 - Para corregirlos (distorsión radial, aberraciones en las lentes...).
- Y también otras cosas no naturales: **efectos especiales**.
- La transformación de mapeo está definida por un par de funciones $f_1, f_2, (R \times R \rightarrow R)$ o bien un par de imágenes $\text{mapa}_x, \text{mapa}_y$.