

Efectos Cuánticos en Modelos Braneworld

Alexander Moreno Sánchez

Centro Colombiano de Cosmología y Astrofísica

Bogotá. D. C, Colombia.

amorenosa@unal.edu.co

Recibido 10-11- 2015; Aceptado 10 - 12- 2015; Publicado en línea 10 - 04- 2016

Resumen

Los modelos braneworld han constituido un nuevo paradigma dentro de la cosmología, estos modelos presentan aproximaciones y nuevos enfoques a problemas u observaciones astrofísicas o cosmológicas que a la fecha no han sido resueltos de forma satisfactoria en el marco de las teorías y paradigmas convencionales. No obstante, a pesar de resolver o realizar una aproximación a la solución de problemas cosmológicos, se generan otra serie de dificultades, empezando por la observación misma de las estructuras o geometrías previstas por dichos modelos, entre otras, sin embargo independiente de lo anterior los modelos permiten plantear soluciones novedosas y hasta cierto punto verificables mediante la observación. Es propósito del presente trabajo mostrar aspectos de tales modelos y considerar los posibles efectos cuánticos que deben estar presentes en la descripción física del universo.

PACS: 97.60.Bw, 04.50.-h, 04.50.Kd, 14.70.Kv

Palabras Claves: cosmología, braneworld, tunelamiento, fuerza Casimir, gravedad cuántica.

Abstract

The braneworld models have established a new paradigm in cosmology, these models contain approximations and new approaches to problems or astrophysical and cosmological observations to date have not been resolved satisfactorily under conventional theories and paradigms. However, despite solving or make an approach to the solution of cosmological problems, other difficulties generated, starting from the same point of estructuras or geometries provided by these models, among others, however independent of the above models offer innovative solutions to raise and to some extent by verifiable observation. Purpose of this paper is to show aspects of these models and consider the possible quantum effects that must be present in the physical description of the universe.

PACS: 97.60.Bw, 04.50.-h, 04.50.Kd, 14.70.Kv

Keywords: cosmology, braneworld , tunneling , Casimir force , quantum gravity.

1 Introducción

El modelo estándar de la física de las partículas elementales describe el microcosmos con gran precisión a energías que alcanzan la escala electrodébil, surge entonces una posible pregunta, ¿Qué sucede a energías mayores que la alcanzada en esta escala?. Uno de los mayores interrogantes tiene que ver con el llamado problema de jerarquías en las interacciones fundamentales, ¿Por que la intensidad de la fuerza gravitacional es tan débil en comparación con la intensidad de las otras interacciones?. Tenemos, por ejemplo que en teoría de perturbaciones, las correcciones cuánticas a la masa del Higgs son sensibles a la escala de energía que se considere, por ejemplo si consideramos la escala de energía de Planck o de Gran Unificación, para que la masa del Higgs permanezca del orden de la escala electrodébil se requiere realizar un proceso de ajuste fino en los parámetros a nivel cuántico, esto crea una teoría bastante artificial, no entendemos por qué los parámetros de la teoría deban ajustarse de esta forma. Por lo tanto, el primer paso a dar, debe estar encaminado a resolver el problema de jeraquías, y asumir que esto concierne específicamente con la naturaleza del modelo estándar, y no como un elemento sólo de consistencia en la teoría, es decir, que la jerarquía de las intensidades es inherente a la misma naturaleza[1][2].

En el escenario braneworld se sugiere un nuevo esquema donde este problema se puede resolver de una forma diferente. En la imagen del braneworld, el espaciotiempo tiene dimensiones adicionales y la materia está confinada a una superficie cuadri-dimensional llamada brane. Allí las interacciones gauge actúan sobre la brane mientras que la interacción gravitacional actúa o se manifiesta en todo el espaciotiempo incluyendo las dimensiones extras.

Los primeros elementos fenomenológicos del escenario braneworld fueron presentados por Arkani-Hamed, Dimopoulos, y Dvali, en su modelo conocido como ADD. El hecho clave de este modelo es que el tamaño de la dimensión adicional es del orden de los límites o cotas experimentales corrientes que a la fecha es de TeV , en consecuencia, podríamos observar efectos o manifestaciones de la dimensión o dimensiones adicionales, en este nivel de energía. En otros términos este modelo propone dimensiones adicionales del tamaño de milímetros, en consecuencia experimentos gravitacionales que involucren estos ordenes de longitud deben de mostrar desviaciones de la ley inverso del cuadrado, lo cual permitiría determinar o detectar estas dimensiones adicionales. En este espacio de dimensiones extras se puede pensar que la minúscula intensidad del campo gravitacional se relaciona con una escala de energías del orden de los TeV .

Randall y Sundrum propusieron un modelo de brane simple en cinco dimensiones donde los 16 ordenes de magnitud que separan la escala de Planck de la escala electrodébil no son debidos al tamaño del bulk sino a la geometría curva del espaciotiempo Anti-de Sitter AdS.

En ambos modelos ADD y RS, la jeraquía EW/Planck es determinada por el tamaño y geometría del bulk, de forma equivalente se puede conseguir un resultado análogo mediante el valor esperado de la energía del vacío para un hipotético campo cuántico llamado radión, el cual se puede considerar como un campo que describe de forma cuántica el radio o que cuántiza el tamaño de la brane, también se encuentra que el radión es una de las componentes de la métrica en altas dimensiones, por lo cual en principio debe ser un campo sin masa que se puede descomponer en tres proyecciones sobre la brane, esto permite la interacción con campos escalares de largo rango trayendo como consecuencia una posible masa para el radión, lo cual genera serias complicaciones en la descripción teórica, no obstante se puede incorporar a la descripción teórica de los modelos braneworld[3][4][5].

De este modo, en el escenario BW, el problema de jeraquías es equivalente al problema de estabilizar el radión en una escala adecuada y quizá a una gran masa. La estabilización del radión es llamada estabilización de jerarquías. En el contexto de modelos tipo RS, el esquema más conocido para estabilizar el radión es el propuesto por Goldberg y Wise, ellos introducen un campo volumétrico clásico con condiciones de frontera apropiadas lo cual lleva a estabilizar el radión generando una gran jerarquía sin ajuste fino.

Weinberg y Candelas mostraron que el efecto Casimir puede estabilizar dimensiones adicionales en modelos Kaluza-Klein, igualmente en los modelos RS, existe la posibilidad de que efectos cuánticos estabilicen una gran jerarquía de masas. También es importante mencionar, que la gravedad cuántica puede ser descrita en este marco, y que ella tiene que ver con esta posible estabilización no sólo del radión, sino de otros campos que surgen en estos esquemas teóricos.

El propósito de este escrito es mostrar algunos fenómenos y procesos cuánticos, desarrollar algunas ideas y tratar de divulgar algunos resultados teóricos obtenidos en estos nuevos enfoques, que quizá en el futuro puedan probarse o demostrarse de forma observacional o experimental, por el momento sólo nos conduce las

teorías canónicas existentes, las observaciones experimentales probadas, un toque de intuición y el sentido de exploración de ideas diferentes[6][7].

2 Escenarios Braneworld

El hecho de que la materia este confinada a la brane es un fenómeno bien conocido en modelos teóricos que involucran defectos topológicos. En el contexto de teoría de cuerdas, las branes son objetos extendidos sobre las cuales las cuerdas abiertas pueden comenzar o finalizar y cuya excitación corresponde a bosones gauge y materia, por lo tanto en teoría de cuerdas la localización sobre las branes es automática. Bajo estos supuestos, se ha desarrollado el escenario conocido como braneworld, este suministra una gran variedad de mecanismos nuevos para obtener interesantes hechos fenomenológicos, por ejemplo, desde los fermiones quirales hasta jerarquía de masa de fermiones, bariogénesis a baja escala, rompimiento supersimétrico, tales como inflación y aun alternativas a la compactificación, este escenario, además brinda la posibilidad de tratar problemas como el de la constante cosmológica, de jerarquías, gravedad cuántica, energía oscura o materia oscura, entre otros[1][2][3][4].

2.1 Escenario ADD

Uno de los primeros escenario braneworld se conoce como modelo ADD allí el espaciotiempo tiene un número de dimensiones adicionales las cuales son accesibles a la gravedad, mientras la materia está confinada a una superficie 3D llamada brane. Asumimos, que el espaciotiempo tiene la forma o topología dada por $M \times \Sigma$, donde Σ es una variedad compacta n-dimensional de radio R , y una brane cudri-dimensional M (3-brane) localizada en el bulk.

Según la ley de Gauss en $4 + n$ dimensiones, encontramos que por debajo del radio de compactificación $r \ll R$, el potencial Newtoniano entre dos partículas de masa m_1, m_2 se expresa como

$$V_N(r) = -G^{(4+n)} \frac{m_1 m_2}{r^{1+n}}, \quad (1)$$

donde $G^{(4+n)}$ es la constante de Newton en $4 + n$ dimensiones. Así, $V_N(r)$ decrece más rápido que la interacción 4D localizada sobre la brane $\sim 1/r$. Para distancias mayores $r \gg R$, el comportamiento del potencial es

$$V_N(r) \sim -\frac{G^{(4+n)}}{V_n} \frac{m_1 m_2}{r} = -G_N \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (2)$$

donde $V_n \propto R^n$ es el volumen de Σ donde además se identifica la constante efectiva de Newton en 4D como $G_n \sim \frac{G^{(4+n)}}{V_n}$.

Mediante este análisis se entiende porque un volumen "grande" conduce a una gravedad 4D muy débil. Uno de los hechos claves, es que las cotas observacionales para el tamaño de las dimensiones extras cambian dramáticamente si la materia se propaga a lo largo de ella o no. En las antiguas teorías de Kaluza-Klein con materia accesible a las dimensiones extras, su tamaño se restringe al menos a $R \lesssim 1 \text{ TeV}$, debido a que ninguna señal en los aceleradores ha mostrado desviaciones de la gravedad, las cotas experimentales para medir desviaciones de la ley de Newton a cortas distancias deben ser mucho menores que $R \lesssim 0.1 \text{ mm}$. Por ende el tamaño de la dimensión adicional puede conducir a una fuerte disminución en la intensidad gravitacional.

En términos de la masa de Planck M_P en $4 + n$ dimensiones y la masa de Planck usual $m_p = \frac{1}{4\sqrt{\pi G_N}}$, tenemos

$$m_P^2 \sim V_n M^{2+n} \sim (MR)^n M^2, \quad (3)$$

esto muestra que el tamaño del bulk debe ser grande en comparación con el límite fundamental de longitud $1/M$. Entonces, el mecanismo ADD permite que la jerarquía dada entre la intensidad de la gravedad y las interacciones gauge creen una nueva jerarquía, dada por el tamaño de la dimensión extra. Sin embargo, una interpretación geométrica entre la jerarquía Planck/EW conduce a un problema de estabilización de R .

De otro lado, la expresión de la masa de Planck, sugiere una solución al problema de la inestabilidad cuántica de las masas escalares. Ya que no están descartados los valores macroscópicos de R , no obstante, existe la

esperanza de que el límite fundamental sea muy bajo, de unos pocos TeV . En tal caso la sensibilidad a este límite no es un problema porque está bastante cerca de la escala EW. Si se toma $M_P \sim TeV$, encontramos que el tamaño necesario de R para obtener un bulk que permita una masa de Planck efectiva 4D es de $m_P \simeq 10^{16} TeV$, con lo cual se obtiene

$$R \sim 10^{32/n-16} \text{ mm} . \quad (4)$$

Entonces, con sólo una dimension adicional su tamaño puede ser astronómico, lo cual está claramente descartado. Empero, para $n \geq 2$ el rango de tamaños necesarios para obtener submilímetros debe ser $\geq 1/TeV$. En el caso de dimensiones extra mayores a $\sim mm$ se debe tener dos dimensiones y en este caso, las desviaciones de la ley de Newton se podrían observar en esta escala. Para un gran número de dimensiones adicionales, se deduce un valor muy pequeño de R lo cual permite mantener la esperanza de que se pueda observar y detectar desviaciones de la ley de gravitación universal de Newton[8][9].

2.2 Modelo de Randall-Sundrum

El éxito experimental de la ley inversa del cuadrado y de la teoría general de la relatividad, por lo menos entre sus enormes aciertos, es que estas teorías en principio implican cuatro dimensiones espacio-temporales no compactas o extendidas, por tal razón las dimensiones adicionales o extras sólo podrían ser aceptadas si ellas son compactas y suficientemente pequeñas para ser consistentes con las pruebas y observaciones gravitacionales corrientes, entonces tomando esto, se encuentra que la escala de Planck se vincula con la escala gravitacional en altas dimensiones, mediante la siguiente relación $M_{Pl}^2 = M^{2+n} V_n$, donde M_{Pl} es la masa de Planck y V_n es el volumen del espaciotiempo con dimensiones adicionales.

En el modelo de Randall-Sundrum se muestra que lo establecido anteriormente se basa en las propiedades de una geometría factorizable, esto quiere decir que la métrica del subespacio-tiempo (3-brane) o subvariedades en las que hipotéticamente vivimos no dependen de las coordenadas de las dimensiones extras o adicionales, es decir la métrica de los subespacios es independiente de las coordenadas extras; ahora bien, si aceptamos una geometría no factorizable y dejamos que la métrica general, ahora sí, dependa de todas las coordenadas podemos conseguir dimensiones extras no compactas en plena concordancia con los experimentos y observaciones realizadas de la fenomenología gravitacional, por ende, también se puede conseguir una nueva relación para la escala de Planck en la que ésta no dependa del tamaño de las dimensiones extras, más bien que dependa de la curvatura de las dimensiones adicionales, por lo tanto la masa de Planck estará determinada por la curvatura de las dimensiones extras más que por el tamaño de las mismas.

Para lograr las condiciones anteriores, requerimos construir una teoría básica con dos 3-brane, planas, una de ellas con tensión positiva, la otra con tensión negativa y juntas sumergidas en un espaciotiempo AdS_5 , para ello se propone la siguiente acción[2] [3]

$$S = S_{bulk} + S_{brane} + S_{brane'} , \quad (5)$$

$$S_{bulk} = \int d^4x \int dy \sqrt{-g_{mn}} [-\Lambda + 2M^3 R] , \quad (6)$$

$$S_{brane} = \int d^4x \sqrt{-g_b} [V_b + \mathcal{L}_b] , \quad (7)$$

$$S_{brane'} = \int d^4x \sqrt{-g_{b'}} [V_{b'} + \mathcal{L}_{b'}] , \quad (8)$$

donde R es el escalar de Ricci 5D, g_{mn} , Λ , V_{brane} son el tensor métrico en cinco-dimensiones, la constante cosmológica en el volumen (bulk) y la energía del vacío en la brane respectivamente, \mathcal{L}_b describe todos los campos de materia en la llamada brane visible. Con estos elementos, y con el fin de obtener una solución de la ecuación de campo, se puede considerar la siguiente métrica

$$ds^2 = e^{-2K|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 , \quad (9)$$

y los siguientes presupuestos; el orbifold S^1/Z_2 en el espacio AdS_5 , el cual tiene dos puntos fijos en los cuales ubicamos cada una de las branes, por lo tanto podemos considerar que la coordenada de la dimensión adicional está acotada por $0 \leq y \leq \pi r_c$ donde r_c es esencialmente un radio de compactificación, que permite modular la distancia inter-brane, de tal modo que la solución se mantiene sólo cuando la frontera y los términos cosmológicos volumétricos se relacionan de la siguiente manera

$$V_b = -V_{b'} = 24M^3k, \quad \Lambda = -24M^3k^2, \quad (10)$$

esto corresponde a la condición de ajuste fino del modelo Randall-Sundrum. El factor exponencial es llamado factor de curvatura y significa que el volumen del espacio 5D puede llegar a ser muy pequeño cuando y sea muy grande. En su primer artículo Randall y Sundrum mostraron que la jerarquía entre la escala fundamental de TeV y la aparente escala de Plank de $10^{19}GeV$, puede ser explicada por el factor de curvatura, aun si el tamaño de la dimensión extra es relativamente pequeña (distancia entre branes). En su segundo artículo mostraron que si no existe una segunda brane, y la dimensión extra se extiende al infinito, la gravedad permanece efectivamente localizada sobre la única brane, ya que el volumen entre branes o sobre la brane permanece finito cuando $y \rightarrow \infty$, entonces, llevando la métrica anterior a la ecuación de campo, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$6K^2 = -\kappa^2\Lambda, \quad 3K' = \kappa^2\lambda\delta(y), \quad (11)$$

solucionando la primera ecuación se obtiene la solución

$$K(y) = \sqrt{-\frac{\kappa^2\Lambda}{6}}y \equiv k|y|, \quad (12)$$

lo cual nos dice que Λ debe ser negativo, ahora bien, si se integra la segunda ecuación desde $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$ y tomando el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ (ε es un parámetro superfluo), y bajo la consideración de la simetría Z_2 , encontramos $6K' = \kappa^2\lambda$, lo cual junto con $K(y) = k|y|$ conduce al resultado $\Lambda = -\frac{\kappa^2\lambda^2}{6}$, que es la expresión correspondiente al ajuste fino entre la tensión de la brane y la constante cosmológica volumétrica, y es la condición que mediante un adecuado manejo permite obtener la solución RS estática. Entonces, se obtiene la forma que debe tener el factor de curvatura que tiene como consecuencia que cualquier escala de energía E en una teoría 5D quede localizada sobre la brane de tensión negativa correspondiente a una escala física 4D dada por $aE = e^{-kd}E$, con $d = |y_+ - y_-|$.

Ahora bien, en esta parte se muestra un análisis covariante para el modelo RSII, que permite obtener la ecuación de campo efectiva sobre una membrana. Se asume la simetría Z_2 y se confina el tensor momentum-energía sobre la brane. En el escenario *braneworld* la *3-brane* dada por $(M, e_{\mu\nu})$ contiene el universo físico observable sumergido en un espaciotiempo de cinco dimensiones *bulk* (V, g_{uv}) , así podemos denotar el vector normal unitario a la brane M por n^α , y el vector tangente a curvas contenidas en la 3-brane por $e_\alpha^a = (\frac{\partial x^a}{\partial x^\alpha})$, junto con la métrica inducida sobre M dada según $e_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$. Para dar inicio al desarrollo formal del anterior esquema se considera la ecuación de Gauss

$$R_{uvps}e_\alpha^ue_\beta^ve_\gamma^pe_\delta^s = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + K_{\alpha\gamma}K_{\beta\delta} - K_{\alpha\delta}K_{\beta\gamma}, \quad (13)$$

que relaciona curvatura extrínseca con el tensor de Riemann, también se involucra la ecuación de Codazzi, que permite un análisis dinámico

$$R_{ab}n^be_\alpha^a = \partial_\nu K_\alpha^\nu - \partial_\alpha K, \quad (14)$$

entonces, realizando un proceso algebraico de contracción de índices se obtiene

$$R_{\beta\delta} = R_{vps}^ue_\beta^pe_\delta^s + KK_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha}, \quad (15)$$

y considerando la métrica inducida, sobre la hipersuperficie, se encuentra $e_u^p = g_u^p - n^pn_u$, aquí se identifica e_u^p como la métrica inducida, con lo cual resulta la siguiente expresión

$$R_{\beta\delta} = R_{vps}e_\beta^ve_\delta^s - R_{vps}^un_une_\beta^pe_\delta^s + KK_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha}. \quad (16)$$

Ahora, si tomamos el tensor de Einstein en cuatro dimensiones

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}e_{\alpha\beta}R, \quad (17)$$

junto con la ecuación de Gauss contraída, se obtiene el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, obteniendo la expresión para el tensor de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = G_{ab}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b + \frac{e_{\alpha\beta}}{2}R_v^un_un^v + KK_{\alpha\beta} - K_{\beta}^{\delta}K_{\alpha\delta} - \frac{e_{\alpha\beta}}{2}(K^2 - K^{\beta\delta}K_{\beta\delta}) - E'_{\alpha\beta}, \quad (18)$$

con $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$, $E'_{\alpha\beta} = R_{\rho\nu\gamma}^{\mu}n_{\mu}n^{\nu}e_{\alpha}^{\rho}e_{\beta}^{\gamma}$.

Así, haciendo uso de la ecuación de campo de Einstein en cinco dimensiones

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa^2T_{ab}, \quad (19)$$

y descomponiendo el tensor de Riemann en el tensor de curvatura de Weyl, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, podemos obtener la siguiente expresión

$$G_{\alpha\beta} = \frac{2\kappa^2}{3} \left[T_{ab}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b + \left(T_{uv}n^un^v - \frac{T}{4} \right) e_{\alpha\beta} \right] + KK_{\alpha\beta} - K_{\beta}^{\delta}K_{\alpha\delta} - \frac{e_{\alpha\beta}}{2}(K^2 - K^{\beta\delta}K_{\beta\delta}) - C_{\alpha\nu b}^un_un^ve_{\alpha}^ae_{\beta}^b. \quad (20)$$

Si ahora consideramos la ecuación de Codazzi se obtiene

$$\partial^v K_v^u - \partial^u K = \kappa^2 T_{ab}n^be_u^a, \quad (21)$$

en donde no se ha asumido ninguna simetría ni forma particular para el tensor momentum-energía, así de este modo podemos involucrar el escenario brane-world, donde tomamos por conveniencia una coordenada y adicional, de tal forma que la hipersuperficie $y = 0$ coincide con la 3-brane y junto con la siguiente condición $n_u dx^u = dy$, lo cual implica que $a^u = n^v \partial_v n^u = 0$, que es una condición sobre la coordenada adicional en la dirección de la dimensión extra.

Con el espíritu del braneworld en mente, el tensor momentum-energía 5-dimensional, se puede escribir de la siguiente forma

$$T_{uv} = -\Lambda g_{uv} + (\tau_{uv} - \lambda h_{uv}) \delta(y), \quad (22)$$

donde Λ es la constante cosmológica del espaciotiempo cinco-dimensional o volumétrico, λ es la energía del vacío de la brane, $\tau_{\mu\nu}$ es el tensor momentum-energía del universo sobre la brane y además donde el parámetro λ se puede asociar con la tensión de la brane en 5-dimensiones.

En el marco del braneworld, el tensor momentum-energía, solamente se considera sobre la brane, es decir que describe la energía momentum de la brane, por ello su carácter singular, el cual se representa mediante la función delta que aparece en la expresión anterior.

Para completar la descripción anterior, se consideran las condiciones de frontera sobre la brane, las cuales deben satisfacer los requerimientos de la métrica inducida y de la curvatura extrínseca, así

$$[h_{\mu\nu}] = \lim_{y \rightarrow +0} e_{\mu\nu} - \lim_{y \rightarrow -0} e_{\mu\nu} = 0, \quad (23)$$

$$[K_{uv}] = -\kappa^2 [(\tau_{uv} - \lambda e_{uv}) - \frac{1}{3}e_{uv}(\tau - \lambda)], \quad (24)$$

que junto con la simetría Z_2 , y la brane en puntos fijos, se determina la curvatura extrínseca de la subvariedad o brane en términos del tensor momentum-energía

$$K_{uv}^+ = -K_{uv}^- = -\frac{1}{2}\kappa^2[(\tau_{uv} - \lambda e_{uv}) - \frac{1}{3}e_{uv}(\tau - \lambda)] , \quad (25)$$

sustituyendo esta ecuación en la expresión del tensor de Einstein, se obtiene la ecuación gravitacional 4D sobre la brane, y considerando la simetría Z_2 , la forma particular del tensor momentum-energía y las condiciones de frontera se obtiene la ecuación de campo efectiva sobre la brane

$$G_{\alpha\beta} = -\Lambda_4 e_{\alpha\beta} + 8\pi G_N \tau_{\alpha\beta} + \kappa^4 \Pi_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta} , \quad (26)$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\tau_{\alpha\gamma}\tau_{\beta}^{\gamma} + \frac{1}{12}\tau\tau_{\alpha\beta} + \frac{1}{8}h_{\alpha\beta}\tau_{\gamma\delta}\tau^{\gamma\delta} - \frac{1}{24}e_{\alpha\beta}\tau^2 , \quad (27)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}\kappa^2 \left(\Lambda + \frac{1}{6}\kappa^2\lambda^2 \right) , \quad G_N = \frac{\kappa^4\lambda}{48\pi} . \quad (28)$$

La ecuación gravitacional de la brane describe la curvatura de ella en términos de su contenido de materia-energía, su energía de vacío, la constante cosmológica 5-dimensional, y de la curvatura extrínseca de la brane en el espacio 5-dimensional, este es el modelo de Braneworld Randall-Sundrum covariante el cual se reduce a la descripción estándar tomando el límite $\kappa \rightarrow 0$.

Es importante notar que el hecho de introducir una dimensión adicional, conduce a una ecuación de campo modificada, en la cual aparecen dos términos adicionales, conocidos en la literatura como el término de energía del vacío y el término de radiación oscura[4].

Adicional a lo expuesto, para la condición de conservación de la energía tenemos la identidad $\partial^v T_{uv} = 0$, la cual no es cierta si están presentes campos escalares u otra clase de campos en el volumen (bulk). En general tenemos que T_{uv} no se conserva, es decir que se produce intercambio de energía-momentum entre la brane y el volumen. Si existe una constante cosmológica en el volumen, no se da tal intercambio de energía, por lo tanto se conserva la energía-momentum, entonces la identidad de Bianchi contraída $\partial^v G_{uv} = 0$, permite encontrar la proyección del tensor de Weyl, que cumple con la restricción $\partial^\nu E_{\mu\nu} = \frac{6\kappa^2}{\lambda}\partial^v \Pi_{\mu\nu}$, así se muestra que $E_{\mu\nu}$, se comporta como una fuente para el tensor momentum-energía volumétrico[2][3].

2.3 Gravedad débil y el problema de jerarquías

El problema de jerarquías de la física de partículas consiste en la gran sensibilidad de la interacción gravitacional con el valor de la escala de energías M en las correcciones cuánticas de la masa de campos escalares fundamentales, como se ha dicho. Por ejemplo, para el campo del boson de Higgs del modelo estándar, su valor esperado determina la masa de todas las partículas. El modelo estándar se considera que es válido hasta la gran unificación, es decir hasta la escala de gravedad cuántica del orden de $10^{16}TeV$. Para que la masa del Higgs sea del orden de la masa límite se debe involucrar un ajuste fino en los parámetros que describe la teoría, orden por orden en la teoría de perturbaciones. Técnicamente esto es inconsistente, conduce a una teoría no natural. Las propuestas de dicha teoría incluyen Technicolor y Supersimetría, aunque la precisión corriente para las medidas a escala electrodébil desfavorecen muchos modelos basados en technicolor y en otras propuestas.

El hecho central es que, la repulsión electrostática entre dos protones es de 10^{40} veces más fuerte que su atracción gravitacional, es sorprendente que la naturaleza ha determinado una gran jerarquía entre estas dos interacciones fundamentales. De hecho, esto no invalida el Modelo Estándar como una teoría de interacción débil y fuerte, y por demás refuerza la esperanza de que el MS sea una teoría efectiva que describe la naturaleza hasta 100 GeV. Más allá de esta escala, se espera una nueva física que resuelva los rompecabezas del MS y conduzca a una unificación de la gravedad con las otras interacciones. En la imagen clásica, la baja intensidad de la gravedad y la inestabilidad de la masa de Higgs están vinculadas una a otra[17][18].

3 Fuerza de Casimir

A la fecha muy pocas manifestaciones macroscópicas de la física cuántica han sido descritas. Entre ellas tenemos la superconductividad, la superfluides, el efecto Hall cuántico y el efecto Casimir, el cual es uno de los éxitos más notables de la teoría cuántica de campos. En *QFT*, los campos son un conjunto infinito de osciladores marcados o rotulados por algún número cuántico k , entonces, la n -ésima excitación de un único oscilador k corresponde al estado con el quantum de campo n y energía $E_n^k = \hbar\omega(n + 1/2)$, así, el estado de un quantum no real (vacío) tiene una energía no cero dada por

$$E_0^k = \frac{\hbar\omega_k}{2}, \quad (29)$$

resultando una energía total infinita para el vacío $E_{cas} = (\hbar/2) \sum_k \omega_k$. En la cuantización canónica, se toma ventaja de la ambigüedad en el orden del operador en la definición del Hamiltoniano e impone un ordenamiento normal, el cual efectivamente coloca la energía de este estado en cero. Esto puede hacer que en la ausencia de gravedad, la energía pueda ser definida físicamente con una constante aditiva y por ende solo las diferencias de energía son relevantes.

Todo esto, conduce al efecto Casimir, a saber como la dependencia de la energía del vacío sobre las condiciones de frontera del campo produce efectos medibles. Casimir calculó la energía del vacío del campo electromagnético con dos platos paralelos perfectamente conductores separados una distancia d y sustrayendo la contribución de Minkowski con platos infinitamente distantes. La famosa fuerza atractiva resultante es

$$F(d) = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} A. \quad (30)$$

Es claro que el efecto Casimir no es exclusivo del campo electromagnético, sino que ocurre en cualquier campo que se propague en el bulk. De otro lado la analogía entre la configuración de platos paralelos y los modelos de branes tipo RS es directa. Entonces, la fuerza de Casimir se espera se origine en el campo gravitacional, o de forma análoga con los gravitones o cuantos del campo gravitacional, igualmente en modelos donde otros campos estén confinados a la brane.

Con el fin de ilustrar este efecto puramente cuántico, se ilustra la conexión entre la energía de Casimir y el potencial efectivo V_{eff} a 1-loop, así consideremos un campo escalar de masa m en un espacio de Minkowski D -dimensional. El número cuántico que marca los modos de frecuencia es el momentum k , y $\omega_k = \sqrt{m^2 + k^2}$, por lo tanto usando la regularización dimensional $D = 4 - 2\varepsilon$, la densidad de energía de Casimir es

$$\frac{E_{Cas}}{V_{D-1}} = \frac{\hbar}{2} \mu^{D-4} \int \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}} \sqrt{m^2 + k^2} = -\frac{\mu^4}{2(4\pi)^{D/2}} \Gamma(-\frac{D}{2}) \left(\frac{m}{\mu}\right)^D, \quad (31)$$

donde por razones dimensionales se ha introducido μ y además V_{D-1} es el volumen de espacio. Para un campo escalar, el potencial efectivo a un 1-loop es

$$V_{eff} = \frac{\hbar}{2} \mu^{D-4} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln\left(\frac{k^\mu k_\mu + m^2}{\mu^2}\right) = \frac{\mu^{D-4}}{(4\pi)^D \Gamma(D/2)} \int_0^\infty dk k^{D-1} \ln\left(\frac{k^2 + m^2}{\mu^2}\right). \quad (32)$$

En el límite $D \rightarrow \infty$, la función gamma diverge, por lo tanto

$$V_{eff} = -\frac{1}{4(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} m^4 [1 - 2\varepsilon \ln\left(\frac{m}{\mu}\right) + O(\varepsilon^2)], \quad (33)$$

se puede decir que la parte divergente es absorbida por la constante cosmológica, y el potencial renormalizado en $D=4$ es

$$V_{eff} = -\frac{1}{2(4\pi)^2} m^4 \ln\left(\frac{m}{\mu}\right), \quad (34)$$

conocido éste como el resultado de Coleman-Weinberg.

En un espaciotiempo curvo general, la energía de Casimir y el potencial efectivo no pueden coincidir. Sin embargo en una amplia clase de espaciotiempos ellas se hacen proporcionales con un término finito al operador local que puede siempre ser absorbido en una redefinición de escala de renormalización.

Cercano al concepto de energía de Casimir, también tenemos el valor esperado del tensor momentum-energía, $\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle$, lo cual conduce a otras definiciones de la energía de Casimir.

En el contexto de los escenarios braneworld, algunos cálculos del potencial efectivo han sido desarrollados, como también computos en orbifolds S^1/Z_2 y T^2/Z_k , allí, las contribuciones de un campo en el bulk con masa m junto con aquellos sin masa pueden estabilizar naturalmente el radio a $\sim 1/m$. En los orbifolds 5D, los términos cinéticos localizados en los puntos fijos corren el espectro de masas KK, y además se puede mostrar que la energía de Casimir debidos a los campos del bulk pueden estabilizar los modelos RS[16][17][18].

4 Tunelamiento en el braneworld Randall-Sundrum

La alternativa a la compactificación que se ha sugerido muchas veces, ha generado cierta atención hoy día, esto parece ser una de las alternativas más prometedoras para unificar la gravedad con las otras interacciones fundamentales. Esto es realmente el desarrollo de la antigua idea del braneworld considerando la localización de la gravedad sobre la brane debido a la geometría AdS . La versión más simple que se sugirió, considera una geometría dada por $R^4 \times \frac{S^1}{Z_2}$ con la métrica AdS_5 . En otras aproximaciones se hacen otras modificaciones, en particular se ha sugerido, una quinta dimensión no compacta como se ha dicho anteriormente, con la métrica plana en $|y| > y_0$, donde y es la quinta coordenada. Este escenario involucra tres branes localizadas a lo largo de y y suministran el desvanecimiento o anulación de la constante cosmológica total en cuatro dimensiones junto con la suma de las tensiones de la brane que debe ser despreciable.

Muchos de los escenarios adolecen de la necesidad de considerar al menos una brane de tensión negativa, pero las branes de tensión negativa son difíciles de imaginar para que sean estables, aquí no se discutirá este modelo, por el contrario se propone el modelo de Gregory, Sibiryakov, Rubakov (GRS) como el relativamente más cercano a la familia de modelos RS. Aunque los modelos GRS no consideran branes con tensión negativa también saltan la constante cosmológica. Dos ingredientes claves del modelo son el tensor de intensidad para el campo de cuadriforma y la presencia de las tres branes unidas.

Tal vez, el campo externo de cuadriformas puede parecer artificial, pero nótese que muchas compactificaciones de la teoría-M naturalmente involucran flujos en los campos de cuadriformas así, el campo externo es usado para salvar el ajuste fino entre la tensión de la brane y la constante cosmológica, también el campo externo es una manera de ocultar la construcción GRS ya que su constante cosmológica no es una constante debido a que está unida a las branes. En conclusión se puede obtener un escenario 4D localizado sobre una brane la cual es originada por un campo externo que tunela las altas dimensiones, quiere decir esto que una manera para producir branes es el tunelamiento cuántico de dimensiones extras. Como en otras construcciones de braneworld tenemos un mecanismo universal que disminuye la constante cosmológica, también se puede mostrar que en este tipo de modelos la métrica en nuestro mundo corresponde a un espacio AdS.

Para clarificar el rol del campo externo, consideremos que este puede producir pares de branes en los procesos de tunelamiento de Schwinger espontáneos[16][17][18]. Sin embargo, se requiere involucrar procesos de tunelamiento con la presencia de branes externas.

La ecuación de campo de Einstein puede explícitamente solucinarse en el caso de branes originandosen de forma espontánea, para ello consideremos dos piezas de AdS , las cuales se pueden tomar como dos segmentos simétricos de esferas que se intersectan sobre la variedad que las une, de este modo, en el escenario GRS, se pueden considerar tres branes en cinco dimensiones, descritas mediante la siguiente acción

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^5x \sqrt{g} [-R + 2\Lambda] + \frac{1}{\kappa} \oint d^5x \sqrt{g_{ind}} K + \frac{1}{\kappa} \oint d^5x \sqrt{g} h^2 + T_R \oint d^5x \sqrt{g_{ind}} + T_{RS} \oint d^5x \sqrt{g_{ind}}, \quad (35)$$

donde h es el escalar dual de Hodge para la intensidad del campo gravitacional, $H = dB$, $H_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_5} = \sqrt{g} \varepsilon_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_5} h$, es el campo de cuadriformas, esta acción bastante compleja, describe como surgen dos branes en un espaciotiempo AdS cincodimensional, bajo un proceso de interacción de campos, que mediante

tunelamiento da origen a las branes que en algún momento se intersectan. Los mecanismos y descripción completa son bastante complejos, aquí, sólo es importante hacer notar que los procesos cuánticos pueden justificar y describir el surgimiento de branes, algo análogo a la creación de pares en un campo[14][15].

5 Gravedad Cuántica en el Braneworld

La gravedad cuántica efectiva debe tener cualidades o propiedades que deben ser diferentes de las proporcionadas por las teorías gauge, expresando este aspecto en términos cuantitativos de niveles de energía, permite sugerir que el problema de la cuantización del campo gravitacional debe ser resuelto concomitantemente con el problema de jerarquías de las interacciones fundamentales. La gravedad de braneworld está basada en una solución de altas dimensiones al problema de jerarquías, en las primeras propuestas se cuestiona la hipótesis corrientemente aceptada de que los gravitones son cuantitativamente relevantes sólo a la escala de energías de Planck, esencialmente porque esta es una asunción no probada experimentalmente. Se ha propuesto que los campos gauge conocidos (y de este modo toda la materia ordinaria conocida) están confinados dentro del braneworld cuatri-dimensional, pero donde los gravitones pueden propagarse en el espacio de altas dimensiones, el bulk, a la misma escala de TeV de las energías de campos gauges. De acuerdo a este punto de vista, la gravedad del braneworld distinta de los campos gauge del modelo estándar, pero cualitativamente equivalente a los campos gauge del modelo estándar[7][8][9].

La gravedad del braneworld predice la existencia de miniagujeros negros de corta vida a la escala de TeV, los cuales en principio pueden ser producidos en el laboratorio mediante colisiones protón-protón de alta energía, con la consabida pérdida de información, esto llamado el problema de información a nivel cuántico. El experimento propuesto es llevado a cabo en un espaciotiempo de Minkowski con una extensión en un espaciotiempo de Schwarzschild o Reissner-Nordstrom. Por tanto la teoría que soporta este experimento debe ser compatible con la sección eficaz del orden del radio de Schwarzschild, y también de una explicación de como el espaciotiempo original de Minkowski se deforma en agujeros negros y blancos en un corto periodo de tiempo.

La gravedad de braneworld puede también explicar la aceleración del universo. De forma sucinta, debido a la presencia de la curvatura extrínseca, el vacío en la gravedad en el braneworld es enriquecido más que el vacío previsto por la relatividad general. Junto a la constante cosmológica, este también contiene un tensor geométrico conservado construido de la curvatura extrínseca. Por lo tanto cuando se estudia las fluctuaciones cuánticas de tal vacío pueden obtenerse estimados diferentes para la densidad de energía del vacío en comparación de lo obtenida en relatividad general.

Debido a que muchas de las investigaciones en la teoría del braneworld se basa en modelos definidos en un bulk cinco-dimensional, usando coordenadas específicas y simetrías particulares, así es importante considerar la ecuación covariante de movimiento de un braneworld definido en un bulk arbitrario, con un número arbitrario de dimensiones.

5.1 Gravedad covariante en el braneworld

Existen fundamentalmente tres postulados básicos en la teoría del braneworld: (1) La geometría del bulk es definida por la ecuación de campo de Einstein, (2) El braneworld es una subvariedad inmersa en este bulk; (3) los campos gauge y la materia ordinaria están confinados a cuatro dimensiones, pero los gravitones se propagan a lo largo de las dimensiones extras a energías de TeV.

La inmersión del braneworld en el bulk juega un rol esencial en la formulación covariante de la gravedad del braneworld, porque esta dice como la dinámica de Einstein-Hilbert del bulk es transferida al braneworld. Sin embargo, existen muchas maneras diferentes de sumergir una variedad en otra, clasificadas como local, global, isométrica, conformal, rígida, deformable, analítica o diferenciable. La escogencia de una u otra depende de lo que la variedad sumergida deba hacer o recrear.

En teoría de cuerdas el principio de acción es definido sobre capas de mundo u hojas de mundo, con condiciones de frontera adicional, de este modo la inmersión es necesariamente global. Como las hojas de mundo son bi-dimensionales son todas ellas conformalmente planas y su inmersión global no es difícil de llevar a cabo. Sin embargo, si objetos de altas dimensiones tales como p-branes son consideradas, entonces la inmersión global puede tornarse difícil de realizarse en 10 o aún en 11 dimensiones.

A diferencia de la teoría de cuerdas, la acción de Einstein-Hilbert en la teoría del braneworld es colocada sobre el bulk, el cual es por lo tanto el objeto dinámico primario. Además, la inmersión es definida localmente, significa que el bulk es un haz fibrado local que es la suma directa del espacio tangente y normal en cada punto del braneworld tomado como el espacio base. Si se quiere una imagen, el bulk puede ser mirado como un espacio construido localmente en cada punto del braneworld.

Una inmersión local, diferenciable requiere solo que la función de sumersión sea diferenciable y regular, lo cual exige que este representada por series de potencias positivas convergentes.

En términos formales tenemos lo siguiente, por ejemplo, dada una sub-variedad Riemanniana $\bar{\sigma}_4$, su inmersión isométrica y local en algun bulk M_D , don de $D = 4 + N$, entonces la aplicación de sumersión debe ser diferenciable y regular o suave, dada por

$$\bar{I}^A : \bar{\sigma}_4 \rightarrow M_D , \quad (36)$$

tal que

$$\bar{I}_{,\mu}^A \bar{I}_{,\nu}^B \hat{g}_{AB} = g_{\mu\nu} , \quad \bar{I}_{,\mu}^A \bar{\eta}_b^B \hat{g}_{AB} = 0 , \quad \bar{\eta}_a^A \bar{\eta}_b^B \hat{g}_{AB} = g_{ab} , \quad (37)$$

donde $\bar{\eta}_a^A$ son las componentes de los N campos vectoriales linealmente independientes en las mismas coordenadas del bulk donde estan definidas las componentes \hat{g}_{AB} de la métrica del bulk. Los vectores $\{\bar{I}_{,\mu}^A, \bar{\eta}_b^B\}$ definen un sistema de referencia gaussiano llamado el marco de inmersión. Las derivadas de los vectores $\bar{\eta}_a^A$ se expresan en términos de la primera y segunda forma fundamental $\bar{k}_{\mu\nu a}$, $\bar{A}_{\mu ab}$, respectivamente en la ecuación de Gauss-Weingerten, como

$$\bar{\eta}_{a,\alpha}^A = g^{\mu\nu} \bar{k}_{\mu\nu a} \bar{I}_{,\nu}^A + g^{mn} \bar{A}_{am} \bar{\eta}_n^A . \quad (38)$$

Continuando con el análisis realizado anteriormente, se puede obtener el tensor de Ricci y el escalar de Ricci para el braneworld expresado respectivamente como

$$R_{\mu\nu} = g^{ac} (g^{\alpha\beta} k_{\mu\alpha c} k_{\nu\beta d}) + R_{AB} Z_{,\mu}^A Z_{,\nu}^B - g^{ab} R_{ABCD} \eta_a^A Z_{,\mu}^B Z_{,\nu}^C \eta_b^D , \quad (39)$$

$$R = (K^2 - h^2) + R - 2g^{ab} R_{AB} \eta_a^A \eta_b^B , \quad (40)$$

donde $K^2 = g^{ab} k_a^{\mu\nu} k_{\mu\nu b}$, $h_a = g^{\mu\nu} k_{\mu\nu a}$, $h^2 = g^{ab} h_a h_b$. Por tanto la acción de Einstein-Hilbert para la geometría del bulk en D-dimensiones puede ser escrita como como

$$S = \int R \sqrt{\hat{g}} d^D v = [R - (K^2 - h^2) + 2g^{ab} R_{AB} \eta_a^A \eta_b^B] \sqrt{\hat{g}} d^D v , \quad (41)$$

con lo cual se obtiene la ecuación de campo respecto a \hat{g} en D-dimensiones

$$R_{AB} + \frac{1}{2} R \hat{g}_{AB} = \kappa T_{AB} , \quad (42)$$

Las ecuaciones de movimiento del braneworld inmerso pueden ser derivadas directamente de las componentes de la ecuación de campo escritas en el marco de inmersión. Las componentes tangentes se obtienen de contracciones tensoriales con $Z_{,\mu}^A Z_{,\nu}^B$, obtenemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu} - W_{\mu\nu} - g^{ab} R_{AB} \eta_a^A \eta_b^B = \kappa T_{\mu\nu} \quad (43)$$

Esta representa una generalización de la ecuación de campo de la relatividad general, en el sentido de que ella describe la evolución de todas las componentes geométricas $g_{\mu\nu}$, $A_{\mu ab}$, $k_{\mu\nu a}$ del braneworld, esto es similar o equivalente a la descripción covariante desarrollada anteriormente. Obviamente, la ecuación de campo usual es recobrada cuando todos los elementos de la geometría extrínseca son removidos de esta ecuación[11][12][13].

5.2 Ecuaciones canónicas

La cuantización canónica estándar ADM del campo gravitacional en relatividad general fue originalmente desarrollada para describir las fluctuaciones cuánticas de hipersuperficies tri-dimensionales en un espaciotiempo. La métrica espaciotemporal es descompuesta en tres componentes de 3-superficies, más un vector de corrimiento, y una función de lapso definida en un sistema de referencia gaussiano dada sobre las hipersuperficies tri-dimensionales. Después de escribir el lagrangiano de Einstein-Hilbert en el marco gaussiano, se siguen las ecuaciones de Euler-Lagrange respecto a los corrimientos lo cual conduce a la anulación del Hamiltoniano. Esto no es un problema real porque en principio el sistema puede ser resuelto usando el proceso estándar de Dirac para restringir el sistema. Sin embargo, como es bien conocido, la estructura de corchetes de Poisson no se propagan covariantemente como debería ser esperado. A pesar de los esfuerzos hechos hasta el momento, este problema permanece sin solución[10]. Es posible definir un sistema canónico no restringido en un marco especial definido por una hipersuperficie tri-dimensional ortogonal al sistema coordenado gaussiano. En tal marco especial, el vector de corrimiento se anula y el Hamiltoniano restringido no se aplica. No obstante, esto ha sido considerado como de poco valor para la relatividad general en sí mismo, esencialmente porque los grupos de difeomorfismos de la teoría es tomado como uno de los postulados fundamentales de la misma.

La extensión de la formulación canónica ADM al braneworld es directa pero requiere unas pocas adaptaciones: Primero, el bulk es localmente foliado por una secuencia continua de braneworlds que se propagan a lo largo de la dimensión extra además de una 3-superficie propagándose a lo largo de la dirección del tiempo. Segundo, la hipótesis de confinamiento implica que la invarianza del difeomorfismo no se extiende a la dimensión extra, entre otras, una transformación coordenada en el bulk puede tener el efecto de introducir una componente del tensor energía-esfuerzo de los campos confinados y la materia ordinaria en el bulk. Por lo tanto, con el fin de mantener la solución destinada al problema de jerarquías, los difeomorfismos del braneworld deben ser restringidos como una simetría confinada. Realmente esto puede ser considerado como uno de los méritos de la teoría del braneworld, la cual la diferencia desde el comienzo sólo como una versión en altas dimensiones de la relatividad general. Sin embargo, para merecer tal mérito la dimensión extra debe ser tomada seriamente como un grado de libertad físico verdadero en la formulación canónica de la teoría. El momento conjugado del campo métrico \hat{g}_{AB} , respecto al desplazamiento a lo largo de η_a es definido de la forma usual[10]

$$p_{(a)}^{AB} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \hat{g}_{AB}}{\partial y^a} \right)}, \quad (44)$$

donde \mathcal{L} es el lagrangiano de Einstein-Hilbert del bulk. Se encuentra que en el marco de inmersión podemos escribir $2g^{ab}R_{AB}\eta_a^A\eta_b^B = K^2 - g^{ab}h_{a,b}$, después de eliminar el término divergente $g^{ab}h_{a,b}$ el lagrangiano puede ser simplificado a

$$\mathcal{L} = [R - (K^2 + h^2)]\sqrt{\hat{g}} \quad (45)$$

de tal forma que se obtiene el momentum canonicamente conjugado

$$p_{(a)}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^a} \right)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{\mu\nu a}} = -(k_a^{\mu\nu} + h_a g^{\mu\nu})\sqrt{\hat{g}}, \quad (46)$$

$$p_{(b)}^{\mu a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\left(\frac{\partial g_{\mu a}}{\partial y^b} \right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu ab}} = 0, \quad (47)$$

$$p_{(c)}^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial y^c} \right)} = 0. \quad (48)$$

Usando estas expresiones, expresamos el Hamiltoniano como

$$H_a(g, p_{(a)}) = p_{(a)}^{AB} g_{AB,a} - \mathcal{L} = -R\sqrt{\hat{g}} - [K^2 + h^2 + 2(K_a^2 + h_a^2)]\sqrt{\hat{g}}, \quad (49)$$

donde tenemos $K_a^2 = k_a^{\mu\nu} k_{\mu\nu a}$, $K^2 = g^{ab} K_a K_b$, y $p_{(a)} = g^{\mu\nu} p_{\mu\nu(a)}$, y reemplazando $h_a = \frac{-p_{(a)}}{5\sqrt{\hat{g}}}$ se obtiene

$$H_a(g, p_{(a)}) = -R\sqrt{\hat{g}} - \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \left[\frac{3p^2}{5} + 2\frac{p_{(a)}^2}{5} + p_{(a)}^{\mu\nu} p_{\mu\nu(a)} \right]. \quad (50)$$

Entonces para un funcional dado $\mathcal{F}(g_{\mu\nu}, p_{\mu\nu})$ definido en el espacio de fase del braneworld, la propagación de \mathcal{F} a lo largo de y^a es dada por el corchete de Poisson con cada hamiltoniano separadamente

$$\frac{\tilde{\delta}\mathcal{F}}{\tilde{\delta}y^a} = [\mathcal{F}, H_a] = \frac{\tilde{\delta}\mathcal{F}}{\tilde{\delta}g_{\mu\nu}} \frac{\tilde{\delta}H_a}{\tilde{\delta}p^{\mu\nu(a)}} - \frac{\tilde{\delta}\mathcal{F}}{\tilde{\delta}p^{\mu\nu(a)}} \frac{\tilde{\delta}H_a}{\tilde{\delta}g_{\mu\nu}}. \quad (51)$$

donde $\tilde{\delta}$ denota la derivada funcional estándar en el espacio de fase. Así obtenemos las ecuaciones de Hamilton para el braneworld respecto a cada una de las coordenadas extras y^a las cuales pueden ser escritas como

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{dy^a} = \frac{\tilde{\delta}H_a}{\tilde{\delta}p^{\mu\nu(a)}} = [g_{\mu\nu}, H_a] = -2k_{\mu\nu a}, \quad (52)$$

$$\frac{dp_{(a)}^{\mu\nu}}{dy^a} = -\frac{\tilde{\delta}H_a}{\tilde{\delta}g_{\mu\nu}} = [p_{(a)}^{\mu\nu}, H_a]. \quad (53)$$

Como puede observarse, las diferencias entre la formulación canónica del braneworld y la formulación ADM de la relatividad general se sigue de el Hamiltoniano H_a no nulo, como una consecuencia del esquema braneworld para resolver el problema de jerarquías. Con este resultado, el programa de cuantización ADM puede ser retomado, con la diferencia que la ecuación cuántica debe describir los "estados" de subvariedades en el bulk, con respecto a las dimensiones extras[15][16].

5.3 Estados cuánticos de Tomonaga-Schwinger

La ecuación de Tomonaga-Schwinger originada del formalismo seguido por Dirac para la teoría cuántica relativista, en el cual un conjunto de n-electrones estan asociados a n-tiempos propios que satisfacen n-ecuaciones como de Schrodinger. El límite continuo de esta ecuación fue formulado por Tomonaga para definir un campo relativista en una región del espaciotiempo caracterizado por una 3-hipersuperficie σ como de espacio que evoluciona en la dirección del tiempo unida a cada uno de sus puntos. Esta extensión geométrica de Dirac puede señalar muchos tiempos, lo cual puede ser comparado prontamente para que sea equivalente a la representación de la interacción de la mecánica cuántica desarrollada por Schwinger. Aquí, es más conveniente observar la ecuación de Tomonaga-Schwinger desde el punto de vista geométrico escrita como

$$i\hbar \frac{\delta\Psi}{\delta\sigma} = \hat{H}_\sigma \Psi, \quad (54)$$

la cual representa una generalización de la ecuación de Schrödinger, que describe el funcional de estados cuánticos Ψ de una 3-hipersuperficie σ como de espacio sumergida en un espaciotiempo de Minkowski. En el lado derecho, el operador Hamiltoniano describe la operación de traslación a lo largo de la línea temporal ortogonal a σ . También la derivada temporal en el lado izquierdo es definida mediante el límite

$$\frac{\delta\Psi}{\delta\sigma} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Psi(\sigma') - \Psi(\sigma)}{\Delta V}, \quad (55)$$

donde ΔV denota el volumen local elemental entre dos hipersuperficies σ y σ' vecinas.

El principal inconveniente con la ecuación de Tomonaga-Schwinger es que no es integrable facilmente. En el caso particular donde $[\hat{H}_\sigma, \hat{H}_{\sigma'}] = 0$ la ecuación puede ser integrada facilmente, porque las hipersuperficies son planas, es decir no hay gravedad. En el caso general cuando las hipersuperficies son curvas, la solución de la ecuación puede ser determinada como una aproximación después de aplicar el formalismo de Yang-Feldmann y la expresión de Dyson para la matriz S . La dificultad en resolver la ecuación reside en que no es claro como

definir que tan cerca está σ de σ' , lo cual solo puede ser definido después de resolver la ecuación cuántica en sí misma usando algún método de aproximación cuántica.

En las aplicaciones de la ecuación de Tomonaga-Schwinger al braneworld, la operación de límite entre dos braneworld cuatri-dimensionales σ_4 y σ'_4 a nivel clásico está en definir la separación entre las dos sub-variedades. En otras palabras, cada uno de los braneworlds fue generado por una perturbación clásica de una sub-variedad inicial σ_4 , entonces el volumen elemental que se requiere especificar en la ecuación debe hacerse con el parámetro δy^a de la geometría perturbada. En la práctica puede dividirse el volumen ΔV entre σ_4 y σ'_4 como un producto de Δv de una pequeña región compacta en σ_4 veces la variación δy^a de la coordenada de la dimensión extra y^a , de tal manera que es suficiente especificar la operación de límite con $\Delta y^a \rightarrow 0$, entonces respecto a cada dimensión extra puede ser simplificado a[11][12][13]

$$\frac{\delta\Psi}{\delta\sigma} = \lim_{\Delta y^a \rightarrow 0} \frac{\Psi(\sigma') - \Psi(\sigma)}{\Delta y^a} = \frac{\partial\Psi}{\partial y^a} . \quad (56)$$

Realizando lo mismo en cada dimensión extra, encontramos que la ecuación de Tomonaga-Schwinger puede ser extendida al braneworld, como un sistema de n ecuaciones parciales, lo cual se expresar como

$$i\hbar \frac{\partial\Psi_a}{\partial y^a} = \hat{H}_\sigma \Psi_a , \quad a = 5, 6, \dots, D \quad (57)$$

en la cual se interpreta cada \hat{H}_σ como el operador de traslación en cada dimensión extra. Con todo esto, podemos obtener o expresar de forma general el estado cuántico final como una superposición de los n-estados separados Ψ_a , que se puede expresar como

$$\Psi = \sum B^a \Psi_a , \quad (58)$$

el estado del funcional densidad Ψ representa las fluctuaciones cuánticas de la sub-variedad braneworld en el bulk en la escala de energías de TeV, sujeta a la incertidumbre cuántica y a la probabilidad de estados dada por

$$||\Psi||^2 = \int \Psi^\dagger \Psi \delta y \delta v . \quad (59)$$

Entonces, un observador confinado al braneworld, puede evaluar el valor esperado cuántico de la métrica del braneworld y la curvatura extrínseca dadas mediante las siguientes expresiones

$$\langle \Psi | \hat{g}_{\mu\nu} | \Psi \rangle = \int \Psi^\dagger \hat{g}_{\mu\nu} \Psi \delta y \delta v , \quad (60)$$

$$\langle \Psi | K_{\mu\nu} | \Psi \rangle = \int \Psi^\dagger K_{\mu\nu} \Psi \delta y \delta v , \quad (61)$$

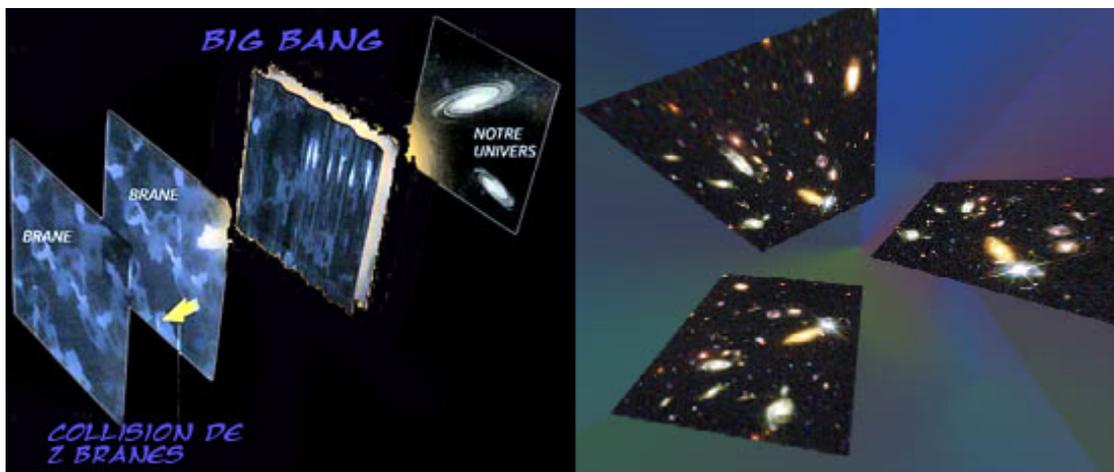
pero como $K_{\mu\nu}$ es la derivada de la métrica $g_{\mu\nu}$ respecto a y^a , podemos involucrar esto en las condiciones de frontera sobre estas cantidades en la braneworld inicial $y^a = 0$ para determinar la solución final. A decir verdad una formulación cuántica de la gravedad del braneworld no se tiene completamente, lo hecho anteriormente solo es una aproximación o caso particular, como es sabido la formulación de la gravedad cuántica en relatividad general, no se ha logrado de forma completa y satisfactoria, existen hoy día varias propuestas, pero a la fecha se sigue desarrollando la investigación en torno a este tema.

6 Conclusiones

Podemos concluir lo siguiente: Los modelos braneworld, constituyen una teoría que tiene como pretención incluir y explicar nuevos fenómenos físicos, como son materia y energía oscura, expansión acelerada del universo, unificación de interacciones fundamentales, posible formulación de la gravedad cuántica, entre otros muchos aspectos. Aquí, se ha mostrado unos pocos elementos de naturaleza cuántica en torno a los modelos braneworld, no pretende esto ser un asunto completo ni riguroso, sólo informar sobre la existencia de estos temas frente a un posible

modelo que intenta ser más general y predictivo que los modelos estándar. También, a manera de sugerencia, se hace un énfasis un poco mayor en torno a la posible formulación de la gravedad cuántica en este marco, lo que puedo decir acerca de ello, es que la naturaleza de la gravedad, en mi ingenua interpretación, es que es un asunto muy complejo, al parecer su naturaleza cuántica como también su desconcertante disminución en su intensidad, su posible unificación con otras interacciones, o la curvatura del espaciotiempo como imagen mental de ella, se hace aun más complejo en el marco del braneworld, pero a su vez permite contar con procesos y descripciones que son más claras en esta teoría, me refiero a que la disminución de su intensidad, o la posible interacción entre branes mediante fuerza Casimir se haría mucho más clara en el contexto de un universo braneworld; bueno, esto es un intento novedoso de explicar la naturaleza, es muy atractivo un esquema con dimensiones adicionales, aunque mucho más engorroso matemáticamente, quizá la naturaleza sí permite la existencia de otras dimensiones o de otras extensiones mucho más exóticas, no lo sabemos, pero un punto de inicio es mostrar que se puede por lo menos pensar en ello, demarcar algunos límites formales y cotejar esto con la observación, experimentación, simulación y con los resultados y predicciones de las teorías convencionales.

Finalmente mostramos algunas representaciones artísticas de braneworlds



Estas imágenes son recreaciones artísticas de las branes o del modelo braneworld, tenemos allí, colisión de branes y branes interactuando. Imágenes tomadas de Google imágenes.



En estas imágenes, igualmente artísticas, se pueden considerar como el surgimiento por tunelamiento y posterior evolución de braneworlds. Imágenes tomadas de Google imágenes.

References

- [1] Martens, R., “Brane-World Gravity”, *Living Reviews in Relativity*, gr-qc/0101059
- [2] Randall, L., and Sundrum, R., “An Alternative to Compactification”, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4690-4693 (1999)
- [3] Randall, L., and Sundrum, R., “Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension”, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3370-3373 (1999).
- [4] S. K. Lamoreaux, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1975) 5
- [5] S. Blau, M. Visser and A. Wipf, *Nucl. Phys. B* 310, 163 (1988)
- [6] J. S. Dowker and J. S. Apps, *Class. Quant. Grav.* 12, 1363 (1995)
- [7] C. Misner, *Rev. Mod. Phys.* 29, 497 (1957)
- [8] N. Arkani-Hamed et Al, *Phys. Lett. B*429,263 (1998), hep-ph/9807344 *Phys. Rev. Lett.*84, 586 (2000)
- [9] P. Horava & E. Witten, *Nuc. Phys. B*475, 94 (1996)
- [10] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London* 136, 453 (1932)
- [11] S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* 1,27 (1946)
- [12] J. Schwinger, *Phys. Rev.* 74, 1439 (1948)
- [13] S. Hawking, *Phys. Rev. D*72, 084013 (2005), hep-th/0507171
- [14] M. D. Maia, *Int. J. Mod. Phys. D*14, 2251 (2005), gr-qc/0505119
- [15] T. Thiemann, AEI-2006-066, hep-th/0608210
- [16] J. D. Brown and C. Teitelboim, *Nucl. Phys. B*297, 787 (1988)
- [17] A. Gorsky and K. Selivanov, *Nucl. Phys. B*571, 120 (2000), hep-th/9904041
- [18] S. Coleman and F. De Luccia, *Phys. Rev. D*21, 3305 (1980)