MATRICES Y DETERMINANTES

Conceptos Básicos
Teórico y Prácticos

Escrito por **Prof. A. Rodrigo Farinha**

Publicado en [Octubre de 2010] en mi sitio
www.arfsoft.com.uy

Índice

MATRICES

DETERMINANTES

[MATRICES]

Noción de Matriz

Matriz de mxn: es un conjunto de elementos ordenados en una tabla de **m filas** (horizontales) y **n columnas** (verticales).

En esta publicación veremos solamente matrices en las que sus elementos son números reales.

Ejemplo:

$$\begin{array}{cc} A= & \begin{bmatrix} 5 & -9 & 3 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to fila\,1 \\ \to fila\,2 \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ col\,1 & col\,2 & col\,3 \end{array} \end{array}$$

A es una matriz de 2x3 (2 filas y 3 columnas), pudiéndose indicar sus dimensiones así: A_{2x3}

Definición

Designaremos con N_m y N_n a los conjuntos de los primeros m naturales positivos y primeros n naturales positivos respectivamente. Llamaremos matriz M(m,n) a las matrices con coeficientes reales.

Definición: $\quad$ M(m,n): N_m x $N_n \to R$

(La matriz <u>real</u> de m filas y n columnas es una <u>función</u> cuyo dominio es el conjunto de todas las parejas (i,j), donde $1 \le i \le m, i \in N\ y\ 1 \le j \le n, j \in N$, y cuyo codominio es el conjunto de los números reales.)

Casos Particulares

- *Matriz Fila:* tiene una sola fila.

  $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ (1x4)

- *Matriz Columna:* tiene una sola columna.

  $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$ (3x1)

- *Matriz Rectangular:* tiene diferente cantidad de filas y columnas.

  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -6 \\ 4 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 7 & 2 \end{bmatrix}$

- *Matriz Cuadrada:* tiene la misma cantidad de filas y columnas.

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 9 & -2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 14 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se llama <u>diagonal principal</u> a la conformada por los números que van de la esquina superior izquierda a la inferior derecha de una matriz cuadrada.

En la matriz de 2x2: 1 5
En la matriz de 3x3: 6 3 1

- *Matriz Triangular:* matriz **cuadrada** en la que todos sus elementos que están "por encima" (matriz triangular inferior) o "por debajo" (matriz triangular superior) de la diagonal principal son 0s.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz triangular inferior matriz triangular superior

- *Matriz Diagonal:* matriz **cuadrada** en la que todos sus elementos fuera de la diagonal principal son 0s.

$$\begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Observación: toda matriz diagonal es simultáneamente una matriz triangular inferior y superior.

- *Matriz Identidad:* matriz **diagonal** formada por 1s en su diagonal principal. Se simboliza **I**.

$$I_{1x1} = [1] \qquad I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Matriz Nula:* matriz formada completamente por 0s. Se simboliza **O**.

$$O_{1x1} = [0] \qquad O_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O_{4x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O_{3x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen las mismas dimensiones y los elementos que ocupan los mismos lugares son iguales.

Suma de matrices

Las matrices involucradas deben tener **las mismas dimensiones**.
Se suman los elementos posición a posición.

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5+1 & 8+6 & -4+8 \\ -3+2 & 1-7 & 7+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 14 & 4 \\ -1 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la Suma de matrices:

Sean A, B, C y **O** matrices de iguales dimensiones:

<u>Neutro de la Suma</u>: es la matriz Nula (**O**).

$\mathbf{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matriz nula de 2x3 $\mathbf{O}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ matriz nula de 3x1

Para todo A se cumple: A + **O** = **O** + A = A

<u>Asociativa</u>: (A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C

<u>Conmutativa</u>: A + B = B + A

<u>Existencia del Opuesto</u>: Para toda matriz A existe una única matriz opuesta de A que se anotará –A que cumple: A + (-A) = (-A) + A = **O**

Ejemplo: $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad La\ matriz\ opuesta\ de\ A\ es: \ -A=\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 6 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$

Ejercicio: Verificar que A + (-A) = **O**

Resta de matrices

Las matrices involucradas deben tener **las mismas dimensiones**.
Restar dos matrices, es <u>sumar a la primera la opuesta de la segunda</u>.

$$A - B = A + (-B)$$

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 15 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 20 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 15 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -20 & 7 & -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1-5 & 2+3 & 15+2 \\ 8-20 & -6+7 & 0-6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 5 & 17 \\ -12 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Se pueden multiplicar dos matrices solamente si estas son **<u>conformables</u>** (el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, es decir que A es de mx**n** y B es de **n**xp).

$$A_{mxn} \text{ x } B_{nxp} = C_{mxp}$$

Para obtener el elemento ubicado en la fila **i** y columna **j** de la matriz resultado, se multiplican elemento a elemento los de la fila **i** de la primera matriz con los de la columna **j** de la segunda matriz.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -6 & 5 \end{bmatrix} \\ A\text{x}B = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (11)(1)+(-5)(0) & (11)(-2)+(-5)(7) & (11)(5)+(-5)(-6) & (11)(-3)+(-5)(5) \\ (0)(1)+(-2)(0) & (0)(-2)+(-2)(7) & (0)(5)+(-2)(-6) & (0)(-3)+(-2)(5) \\ (3)(1)+(1)(0) & (3)(-2)+(1)(7) & (3)(5)+(1)(-6) & (3)(-3)+(1)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -57 & 85 & -58 \\ 0 & -14 & 12 & -10 \\ 3 & 1 & 9 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observar en el ejemplo que A es de 3x2 y B es de 2x4, por lo que AxB es de 3x4:

$$\begin{array}{ccc} \text{A} \quad\quad \text{B} & & \text{AxB} \\ (3 \quad \text{x} \quad \underbrace{2) \text{ x } (2}_{\text{A y B son conformables}} \quad \text{x} \quad 4) & \Rightarrow & (3 \quad \text{x} \quad 4) \end{array}$$

Propiedades de la Multiplicación de matrices:

Sean A, B y C matrices conformables.

<u>Neutro de la Multiplicación</u>: para las **matrices cuadradas**, es la matriz Identidad (I).
Sea A cuadrada: AxI = IxA = A

<u>Asociativa</u>:
Sean A_{mxn} B_{nxp} C_{pxq} (A conformable con B, y B conformable con C)
Se cumple que: (A.B).C = A.(B.C) = A.B.C

<u>Distributiva respecto a la suma</u>:
Sean A_{mxn} B_{nxp} C_{nxp} (A conformable con B y con C)
Se cumple que: A.(B + C) = A.B + A.C

Observación: El producto de números es conmutativo (5x6 = 6x5), pero generalmente EL PRODUCTO DE MATRICES <u>NO ES CONMUTATIVO</u>. Esto significa que *no siempre* se cumple que AxB = BxA

Ejercicio: Escriba dos matrices A_{3x2} y B_{2x4} y multiplíquelas: AxB y BxA ¿AxB = BxA ?

Ejercicio: Escriba otras dos matrices A y B de 2x2 y multiplíquelas: AxB y BxA ¿AxB = BxA ?

Multiplicación de un número por una matriz

Se multiplican todos los elementos de la matriz por el número.

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$6\text{A}=6\text{x}\begin{bmatrix} 3 & \text{-1} & \text{-4} \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6\text{x}3 & 6\text{x(-1)} & 6\text{x(-4)} \\ 6\text{x}5 & 6\text{x}0 & 6\text{x}8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 18 & \text{-6} & \text{-24} \\ 30 & 0 & 48 \end{bmatrix}$$

$$\text{-2A}=(-2)\text{x}\begin{bmatrix} 3 & \text{-1} & \text{-4} \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (-2)\text{x}3 & (-2)\text{x(-1)} & (-2)\text{x(-4)} \\ (-2)\text{x}5 & (-2)\text{x}0 & (-2)\text{x}8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \text{-6} & 2 & 8 \\ \text{-10} & 0 & \text{-16} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la Multiplicación de un número por una matriz:

Sean A y B matrices de iguales dimensiones.
Sean λ y γ números reales.

Se cumple que:

$$\lambda(\gamma A)=(\lambda\gamma)A$$
$$(\lambda+\gamma)A=\lambda A+\gamma A$$
$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$
$$1.A=A$$
$0.A=O$ (0 es el número cero y O es la matriz nula de iguales dimensiones que A)

$\lambda.O=O$ (O es una matriz nula)

Matriz Inversa

Se sabe de cursos anteriores que el número inverso a^{-1} de un número real a ($a \neq 0$) es aquel que cumple:

$$a \text{ x } a^{-1} = a^{-1} \text{ x } a = 1 \qquad \text{(1 es el neutro de la multiplicación de números reales)}$$

En forma similar, la matriz inversa A^{-1} de una matriz A (**A debe ser cuadrada** y debe cumplirse que $\boxed{det(A) \neq 0}$, donde "det" significa determinante, el cual se verá más adelante), es aquella matriz que cumple:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I \qquad (I \text{ es la matriz identidad: el neutro de la multiplicación de matrices})$$

Si dicha matriz inversa existe ($det(A) \neq 0$), es única y se dice que A es *invertible*.

Propiedades de la matriz inversa:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$Demostración: \left.\begin{array}{l} \left(A^{-1}\right).\left(A^{-1}\right)^{-1} = I \\ A^{-1}.A = I \end{array}\right\} \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

$$Demostración: \left.\begin{array}{l} (A.B).(B^{-1}.A^{-1}) = A.(B.B^{-1}).A^{-1} = A.I.A^{-1} = (A.I).A^{-1} = A.A^{-1} = I \\ (A.B).(A.B)^{-1} = I \end{array}\right\} \Rightarrow (A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

Ejercicios:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad$ Calcular AxB y BxA. ¿Qué se puede concluir?

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\quad$ Calcular AxB y BxA. ¿Qué se puede concluir?

Cómo calcular la matriz inversa de una matriz de 2x2

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad (si \;\; ad-bc \neq 0)$$

Si $ad-bc=0$, A no tiene matriz inversa.

Ejemplo:

multiplicación de un número por una matriz
↓

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{(-2)(4)-(10)(-3)}\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}=\frac{1}{22}\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{22} & \frac{-10}{22} \\ \frac{3}{22} & \frac{-2}{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{3}{22} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Ejercicio: verificar que la matriz inversa obtenida en el ejemplo cumple $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_{2x2}$

Cómo calcular la matriz inversa de una matriz de 3x3

Se necesita saber hallar determinantes.
Así que esto se verá en Determinantes (pág. 20 y 22).

División de matrices

Solamente se pueden dividir **matrices cuadradas con iguales dimensiones**: $A_{\mathrm{n\,x\,n}}$ y $B_{\mathrm{n\,x\,n}}$

Se sabe de cursos anteriores que dividir dos números reales es multiplicar el primero por el inverso del segundo (siendo el segundo distinto de 0) y que, debido a la propiedad conmutativa de la multiplicación de números reales, el resultado es el mismo si se realiza dicha multiplicación al revés:

$$\frac{5}{3}=5.(3)^{-1}=(3)^{-1}.5$$

$$\frac{2}{9}=2.(9)^{-1}=(9)^{-1}.2$$

La división de matrices es similar, con la salvedad de que, como la multiplicación de matrices no es conmutativa (ver *Propiedades de la Multiplicación de matrices*), hay 2 formas de realizar la división: multiplicando la matriz del numerador por la <u>matriz inversa del denominador</u> y multiplicando la <u>matriz inversa del denominador</u> por la matriz del numerador.

$$\frac{A}{B}=A\mathrm{x}B^{-1}$$

$$\frac{A}{B}=B^{-1}\mathrm{x}A$$

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 5\\ 0 & 4 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

Para hallar $\frac{A}{B}$ necesitamos conocer B^{-1}...

En el ejercicio 1 de la pág. 7 se comprobó que: $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{bmatrix}$

Una forma de dividir A entre B:

$$\frac{A}{B}=A\mathrm{x}B^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 5\\ 0 & 4 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\mathrm{x}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 5\\ 0 & 4 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\mathrm{x}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}31 & -8 & -18\\ 11 & -3 & -5\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

La otra forma de dividir A entre B:

$$\frac{A}{B}=B^{-1}\mathrm{x}A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}^{-1}\mathrm{x}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 5\\ 0 & 4 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{bmatrix}\mathrm{x}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 5\\ 0 & 4 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 3 & -6\\ 5 & -1 & -4\\ -21 & -1 & 19\end{bmatrix}$$

Observación: Recuérdese que hay matrices cuadradas que no tienen inversa (porque <u>su determinante vale 0</u>). Esto significa que la división entre matrices no es siempre posible, ya que **depende si la matriz que está en el denominador es invertible**.

Matriz Traspuesta

Dada una matriz A, se llama *traspuesta de A*, y se representa por A^t , a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas (cambiar columnas por filas también produce ese resultado).
Si A es de mxn, A^t es de nxm.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

A es de 2 x 3, A^t es de 3 x 2.

Si A es cuadrada, su matriz traspuesta puede obtenerse aplicando una "simetría" de sus elementos respecto de la diagonal principal (esto produce el mismo resultado que cambiar sus filas por columnas).

Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -2 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la matriz traspuesta:

1) $I^t = I$

2) $(A+B)^t = A^t + B^t$

3) $(k.A)^t = k.A^t$

4) $(A.B)^t = B^t.A^t$

5) $\left(A^t\right)^t = A$

6) $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$ (A debe ser cuadrada e invertible)

Demostración:

Por definición de matriz inversa: $A.A^{-1} = I$

Tomando traspuestas: $\left(A.A^{-1}\right)^t = I^t$

Por las propiedades 1 y 4: $\left(A^{-1}\right)^t.A^t = I$

Por definición de matriz inversa: $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$

Práctico de MATRICES

Ejercicio 1: $A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 5\\ -2 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 5\\ -3 & 7 & 1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ -6 & 3 & 2\end{bmatrix}$

Determinar: A+B A+C A-B A+B+C C-A B-C-A

Ejercicio 2: $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ -5 & 2 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -5\\ 5 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$

a) Hallar una matriz D que verifique A+D=B
b) Hallar una matriz E que verifique que C+E es diagonal.
c) Comprobar que A+(B-C)=(A+B)-C

Ejercicio 3: $A=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}4 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$

Realizar la única suma, las 2 sustracciones y los 4 productos posibles entre estas matrices.

Ejercicio 4: $A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -3 & 7\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -6 & 3\end{bmatrix}$

Calcular: 3A+2B 4A+2C-3B A^2 2AB $(A+B)^2$ $A^2+2AB+B^2$

(Tener en cuenta que $M^2 = M \text{x} M$)

Ejercicio 5: Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}9 & -1 & 8 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 12\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}11 & 8\\ -1 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

Establecer qué productos están definidos y calcularlos.

Ejercicio 6:

$A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 6 & 3\\ 1 & 4 & 7 & 11\\ -2 & 8 & 1 & 6\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}11 & 8\\ -1 & 4\\ 0 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}5 & 0 & 6 & 3\\ 1 & 4 & 7 & 11\end{bmatrix}$

Determinar cuáles de los siguientes productos están definidos y, en caso de estarlo, efectuar la operación.

A.B B.A A.C C.A A.D D.A B.C C.B B.D D.B C.D D.C

Ejercicio 7: Calcular las matrices inversas de $\text{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ y de $\text{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

Hallar la matriz inversa de A.B sin calcularla directamente. *Sugerencia: usar una propiedad*

Ejercicio 8: Sean las matrices del ejercicio 4. Hallar:

a) $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{A}$ (cualquiera de las dos formas de dividir)
b) A^t y B^t. Verificar que $(A.B)^t = B^t.A^t$

Soluciones del Práctico de Matrices

1)

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A+C=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 7 \\ -8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} -7 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A+B+C=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 \\ -11 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C-A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B-C-A=\begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2)

$$a)\ D=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad b)\ E=\begin{bmatrix} a & -1 & 5 \\ -5 & b & 0 \\ 0 & -1 & c \end{bmatrix}$$

3)

$$C+D=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C-D=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D-C=\begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AxB=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BxA=[2]$$

$$CxA=\begin{bmatrix} 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$DxA=\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

4)

$$3A+2B=\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$4A+2C-3B=\begin{bmatrix} -26 & -4 \\ -11 & -15 \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2AB=\begin{bmatrix} -30 & 2 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix} -14 & 24 \\ -40 & 34 \end{bmatrix}$$

$$A^2+2AB+B^2=\begin{bmatrix} -13 & 21 \\ -43 & 33 \end{bmatrix}$$

5)

$$AxB=\begin{bmatrix} -27 & 7 & -18 & 9 \\ 0 & 8 & 12 & 48 \end{bmatrix}$$

$$CxA=\begin{bmatrix} -33 & 54 \\ 3 & 14 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$CxB=\begin{bmatrix} 99 & 5 & 112 & 151 \\ -9 & 9 & 4 & 43 \\ 0 & 6 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

6)

$$CxA=\begin{bmatrix} -33 & 54 \\ 3 & 14 \\ 0 & 12 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad AxD=\begin{bmatrix} -13 & 8 & -4 & 13 \\ 4 & 16 & 28 & 44 \end{bmatrix}$$

$$BxC=\begin{bmatrix} 58 & 58 \\ 18 & 45 \\ -24 & 19 \end{bmatrix} \quad CxD=\begin{bmatrix} 63 & 32 & 122 & 121 \\ -1 & 16 & 22 & 41 \\ 3 & 12 & 21 & 33 \\ 5 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$DxC=\begin{bmatrix} 58 & 58 \\ 18 & 45 \end{bmatrix}$$

7)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{26} & \frac{2}{13} \\ \frac{7}{26} & -\frac{1}{13} \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\left(A.B\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{26} & -\frac{4}{65} \\ -\frac{1}{13} & \frac{7}{65} \end{bmatrix}$$

8)

a)

$$\frac{A}{B} = AxB^{-1} = \begin{bmatrix} \text{-0,52941} & 0{,}29412 \\ \text{-0,41176} & 0{,}11765 \end{bmatrix}$$

$$\frac{C}{A} = CxA^{-1} = \begin{bmatrix} \text{-1} & 2 \\ 3 & \text{-}\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

b)

$$A^{t} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{t} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

| DETERMINANTES |

Noción de Determinante

Un determinante es un **número** que resulta de hacer ciertas cuentas con los elementos de una **matriz cuadrada**.

Se simboliza: det(A) siendo A la matriz de la cual se calcula el determinante.
Otra forma de simbolizar al determinante es escribiendo el nombre o el contenido de la matriz entre líneas verticales.

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{es una matriz}$$

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{es un número (el determinante de la matriz A)}$$

Definición

$$\det(A): M_{nxn} \rightarrow R$$

det(A) es una <u>función</u> cuyo dominio es el conjunto de las matrices cuadradas y cuyo codominio es el conjunto de los números reales.

Determinante de una matriz de 1x1

El determinante de una matriz de 1x1 es el elemento de dicha matriz.

Ejemplos: A = [2] det(A) = 2
B = [-5] det(B) = -5

Determinante de una matriz de 2x2

Dada una matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, su determinante se calcula de la siguiente forma:

$$\boxed{\det(A)=ad-bc}$$

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A)=(3)(1)-(-5)(9)=3-(-45)=3+45=48$$

Determinante de una matriz de 3x3 (Regla de Sarrus)

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Para hallar el determinante de una matriz de 3x3, se aplica la *Regla de Sarrus*, la cual consiste en:

1. Agregar a la derecha de la matriz sus 2 primeras columnas:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{array}$$

2. Multiplicar según las flechas, poniendo el signo contrario en los 3 números de la izquierda:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{40 \quad 0 \quad -6}_{\text{se escribieron con signo contrario}} \qquad\qquad 8 \quad -15 \quad 0$$

3. Sumar los 6 números obtenidos:

$$40 + 0 - 6 + 8 - 15 + 0 = 27$$

Así que: $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 27$

Algunas propiedades de los determinantes

1. *Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas iguales, su determinante vale 0.*

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{la primera y tercera fila son iguales}$$

$$\det(A)=0$$

2. *Si se multiplica por un número todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada, su determinante queda multiplicado por dicho número.*

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad B=\begin{bmatrix} 5 & 2(-3) \\ -1 & 2(4) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{(se multiplicó la segunda columna por 2)}$$

$$\det(A)=17$$

$$\det(B)=34 \qquad \Rightarrow \text{ efectivamente } \det(\mathrm{B})=2.\det(\mathrm{A})$$

3. *Si en una matriz cuadrada se cambian las filas por las columnas en forma ordenada, su determinante no cambia.*

Recordando que al cambiar las filas por las columnas de una matriz en forma ordenada se obtiene su *matriz traspuesta* (pág. 10), se puede expresar esta propiedad de la siguiente forma: $\det\left(A^t\right)=\det\left(A\right)$

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinante de esa matriz:

$$\det\left(A\right)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Determinante de la matriz resultante de cambiar las filas por las columnas (matriz traspuesta):

$$\det\left(A^t\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

4. *Si se intercambian entre sí dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante pasa a ser el valor opuesto.*

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\ 8 & -8 & 6\\ 2 & 3 & -7\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-1 & 7 & 5\\ 8 & 6 & -8\\ 2 & -7 & 3\end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{se cambiaron de lugar las columnas 2 y 3}$$

$$\det(A)=582$$

$$\det(B)=-582$$

5. *Si en una matriz cuadrada una fila es proporcional a otra fila, o una columna es proporcional a otra columna, su determinante vale 0.*

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ 1 & 0 & 6\\ -4 & 6 & 10\end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{las filas 1 y 3 son proporcionales (la fila 3 es igual a la fila 1 multiplicada por 2)}$$

$$\det(A)=0$$

6. *Si una matriz cuadrada tiene una fila o columna compuesta completamente por 0s, su determinante vale 0.*

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 3\\ -3 & 0 & 5\\ 2 & 0 & -6\end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{la segunda columna está compuesta completamente por ceros}$$

$$\det(A)=0$$

Nota: Que una matriz tenga una de sus dos <u>diagonales</u> compuesta completamente por 0s, **no** implica necesariamente que su determinante valga 0.

7. *El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de esas matrices.*

Es decir que: $\det(A.B)=\det(A).\det(B)$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \det(A)=-11 \\ B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \det(B)=-23 \end{array}\right\} \rightarrow \det(A).\det(B)=(-11).(-23)=253$$

$$A.B=\begin{bmatrix} -2 & -15 & 16 \\ -4 & -7 & 9 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A.B)=253$$

Nota: Se puede comprobar en el ejemplo que **no es cierto** que det(A+B) = det(A) + det(B)

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \det(A+B)=3 \\ \det(A)+\det(B) = (-11)+(-23) = -34 \end{array}\right\} \rightarrow \det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$$

8. *El determinante de la matriz identidad es 1.*

Es decir que: $\det(I)=1$

Ejemplos: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$ etc.

9. *El determinante de una matriz cuadrada de nxn multiplicada por un número es igual al determinante de la matriz multiplicado por el número elevado a la n.*

Es decir que: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ siendo A_{nxn}

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \det(A) = -3$$

$$5A = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 5 \\ 15 & -5 & 10 \\ -20 & 0 & -15 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \det(5A) = -375$$

$$(5)^3 \det(A) = (125)(-3) = -375$$

$$-2A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & -4 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \det(-2A) = 24$$

$$(-2)^3 \det(A) = (-8)(-3) = 24$$

10. *El determinante de la matriz inversa de una matriz es igual al inverso del determinante de la matriz.*

Es decir que: $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Nota: Esto se cumple si existe A^{-1}, o sea si $\det(A) \neq 0$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \det(A) = -2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \det\left(A^{-1}\right) = -\frac{1}{2}$$

Demostración:

A^{-1} cumple (por ser matriz inversa de A): $A^{-1}.A = I \;\Rightarrow\; \det(A^{-1}.A) = \det(I)$

Por la propiedad 7: $\det(A^{-1}.A) = \det(A^{-1}).\det(A)$

Por la propiedad 8: $\det(I) = 1$

Entonces: $\det(A^{-1}).\det(A) = 1 \;\Rightarrow\; \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Cálculo de la matriz inversa

$$\boxed{A^{-1} = \frac{Adj^{t}}{\det(A)}}$$

A debe ser una matriz cuadrada tal que su determinante sea distinto de 0 (pág. 7).
Adj es la matriz *adjunta* de A.
Adj^{t} es la matriz *traspuesta* de *Adj* (pág. 10).

Cada elemento Adj_{ij} de la matriz *Adj* se halla de la siguiente forma:

$$Adj_{ij} = \begin{cases} \left|M_{ij}\right| & si \;\; i+j \;\; es \;\; par \\ -\left|M_{ij}\right| & si \;\; i+j \;\; es \;\; impar \end{cases}$$

Adj_{ij} es el elemento de la matriz *Adj* ubicado en la fila *i* y la columna *j*.

M_{ij} es la matriz *menor del elemento* a_{ij}, resultante de suprimir la fila *i* y la columna *j* de la matriz A.

$\left|M_{ij}\right|$ es el determinante de M_{ij}.

Cómo calcular la matriz inversa

1. Hallar *det(A)*: el determinante de A $\begin{cases} \text{Si es 0} & \Rightarrow \text{ No existe la matriz inversa} \\ \text{Si no es 0} & \Rightarrow \text{ Continuar} \end{cases}$
2. Hallar *Adj*: la matriz adjunta de A (se calculan cada uno de sus elementos Adj_{ij})
3. Formar Adj^{t}: la matriz traspuesta de *Adj*
4. Multiplicar el número $\dfrac{1}{\det(A)}$ por la matriz Adj^{t}

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

$\det(A)=3$ es distinto de 0, así que podemos continuar

$$Adj=\begin{bmatrix}Adj_{11} & Adj_{12} & Adj_{13}\\ Adj_{21} & Adj_{22} & Adj_{23}\\ Adj_{31} & Adj_{32} & Adj_{33}\end{bmatrix}$$

Para comprender cómo se determina una matriz M_{ij} , se detalla la forma de construir M_{11} y M_{12}:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix} \rightarrow M_{11}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix} \rightarrow M_{12}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$Adj_{11}=|M_{11}|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{vmatrix}=0 \qquad Adj_{12}=-|M_{12}|=-\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-(2)=-2 \qquad Adj_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$$

(1+1 es par) (1+2 es impar) (1+3 es par)

$$Adj_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & -3\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-(3)=-3 \qquad Adj_{22}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-4 \qquad Adj_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-(-2)=2$$

(2+1 es impar) (2+2 es par) (2+3 es impar)

$$Adj_{31}=\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-6 \qquad Adj_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-(5)=-5 \qquad Adj_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1$$

(3+1 es par) (3+2 es impar) (3+3 es par)

$$Adj=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ -3 & -4 & 2\\ -6 & -5 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow Adj^t=\begin{bmatrix}0 & -3 & -6\\ -2 & -4 & -5\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}Adj^t=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & -3 & -6\\ -2 & -4 & -5\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{0}{3} & \frac{-3}{3} & \frac{-6}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Ejercicio: verificar que la matriz inversa obtenida en el ejemplo cumple $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_{3x3}$

Forma abreviada de calcular la matriz inversa de una matriz de 3x3

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}$$

Si *det(A) = 0* , A no tiene matriz inversa.

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando Sarrus para obtener el determinante (det(A) = -12) y realizando las operaciones planteadas, se obtiene:

multiplicación de un número por una matriz (pág. 6)

$$A^{-1}=\frac{1}{-12}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -5 & 1 & -6 \\ 24 & -12 & 24 \end{bmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -5 & 1 & -6 \\ 24 & -12 & 24 \end{bmatrix}\downarrow = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{12}\right)(3) & \left(-\frac{1}{12}\right)(-3) & \left(-\frac{1}{12}\right)(6) \\ \left(-\frac{1}{12}\right)(-5) & \left(-\frac{1}{12}\right)(1) & \left(-\frac{1}{12}\right)(-6) \\ \left(-\frac{1}{12}\right)(24) & \left(-\frac{1}{12}\right)(-12) & \left(-\frac{1}{12}\right)(24) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{3}{12} & \frac{3}{12} & -\frac{6}{12} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{6}{12} \\ -\frac{24}{12} & \frac{12}{12} & -\frac{24}{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: verificar que la matriz inversa obtenida en el ejemplo cumple $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_{3x3}$

Práctico de DETERMINANTES

Ejercicio 1: Calcular:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 10 \\ 4 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2: Mencionar las propiedades utilizadas para obtener las siguientes igualdades (no se permite justificar las igualdades hallando específicamente los determinantes):

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & -18 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

g) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -27$ h) $\begin{vmatrix} -21 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ -9 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ i) $\det\left(I_{14x14}\right) = 1$

Ejercicio 3: Hallar las matrices inversas de:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 6 & 15 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ -3 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4: $A=\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$ Hallar **a** sabiendo que es negativo y que det(A) = 10

Ejercicio 5: $A=\begin{bmatrix} a+1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & a \\ -2 & a-4 \end{bmatrix}$ Hallar **a** sabiendo que det(A) x det(B) = 15a

Soluciones del Práctico de Determinantes

1)

$26 \qquad -18 \qquad 1 \qquad -84 \qquad 25$

$87 \qquad 1 \qquad -5 \qquad 17 \qquad 1 \qquad 333$

2) A cargo del estudiante/lector

3)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{bmatrix} \qquad B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad C^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad D^{-1}\text{ no existe (det(D)=0)}$$

4) $a=-5$

5) $a=0 \qquad a=-\frac{5}{3} \qquad a=3$

Fuentes de información

- G. A. Duffour, “Geometría Analítica”, Séptima Edición.
- Experiencias personales de aprendizaje y enseñanza de estos temas.