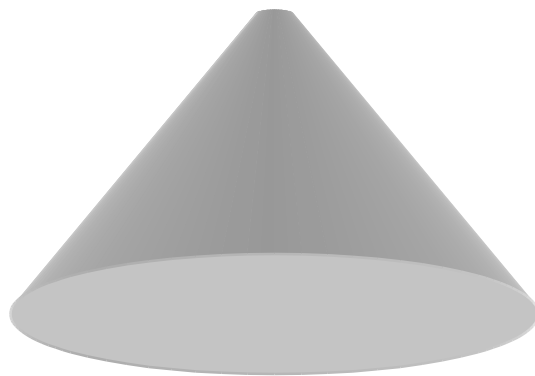


CÓNICAS



Resumen Teórico

Escrito por **Prof. A. Rodrigo Farinha**

Publicado en [Octubre de 2010] en mi sitio

www.arfsoft.com.uy

Queda absolutamente prohibido el uso total o parcial de este material sin dar crédito a su autor. Solamente se puede imprimir y sin modificación alguna.

Índice

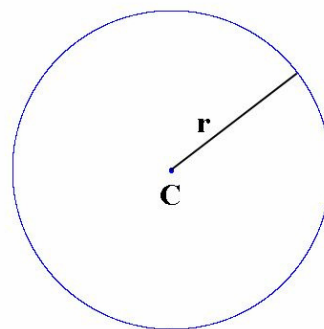
Introducción	3
Circunferencia	4
Parábola	
Eje de simetría vertical	5
Eje de simetría horizontal	7
Elipse	
Eje focal horizontal	9
Eje focal vertical	11
Hipérbola	
Eje focal horizontal	13
Eje focal vertical	15
Análisis especial de la cond. de existencia en elipse e hipérbola ..	17
Reconocimiento de cónicas	23
Bibliografía consultada	24

Introducción

Se llaman cónicas a las curvas: *Circunferencia*, *Parábola*, *Elipse* e *Hipérbola*.

Todas estas curvas tienen como *fórmula implícita* una ecuación de la siguiente forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

CIRCUNFERENCIA

DATOS	x_C	abscisa del centro
	y_C	ordenada del centro
	r	radio
	$(r > 0)$	

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\begin{aligned}
 A &= 1 \\
 B &= 0 \\
 C &= 1 \\
 D &= -2x_C \\
 E &= -2y_C \\
 F &= x_C^2 + y_C^2 - r^2
 \end{aligned}$$

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$y = \pm \sqrt{r^2 - (x - x_C)^2} + y_C$$

$$x_C - r \leq x \leq x_C + r$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

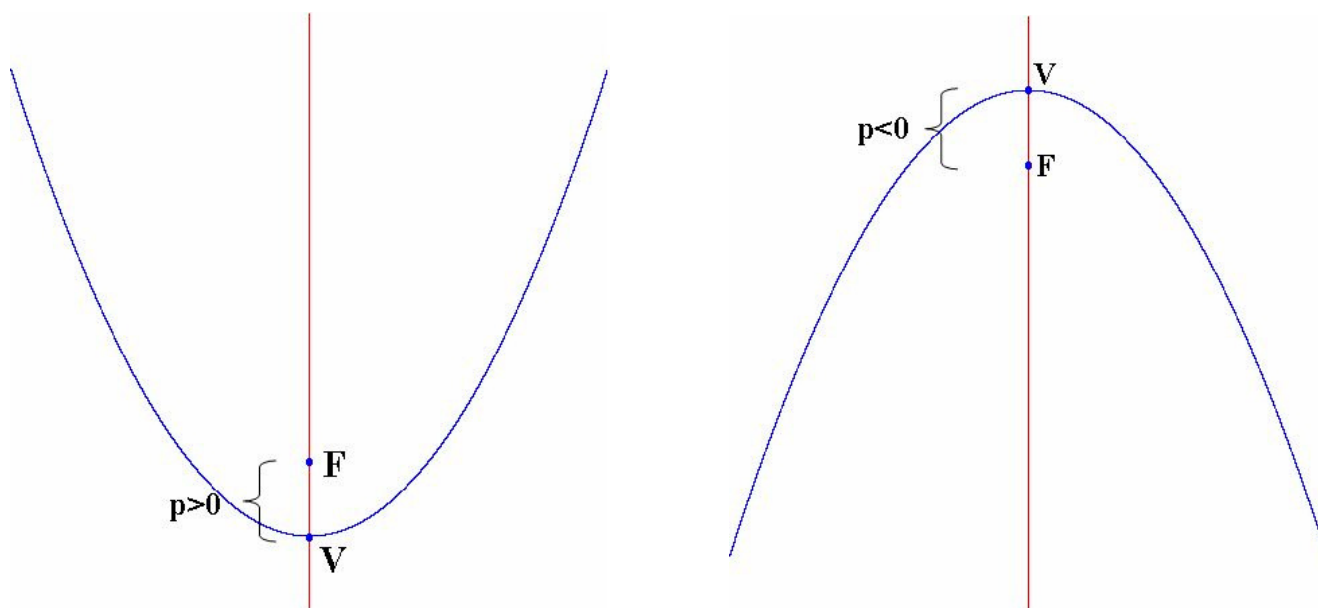
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(condición de existencia : $D^2 + E^2 - 4F > 0$)

$$\begin{aligned}
 x_C &= -\frac{D}{2} \\
 y_C &= -\frac{E}{2} \\
 r &= \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}
 \end{aligned}$$

PARÁBOLA

Eje de simetría VERTICAL



	x_V	abscisa del vértice
	y_V	ordenada del vértice
DATOS	y_F	ordenada del foco
	$(y_F \neq y_V)$	

Parámetro auxiliar: $p = y_F - y_V$ ($p \neq 0$)

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{4p} \\
 B &= 0 \\
 C &= 0 \\
 D &= -\frac{x_V}{2p} \\
 E &= -1 \\
 F &= \frac{x_V^2}{4p} + y_V
 \end{aligned}$$

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$a \neq 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA EXPLÍCITA

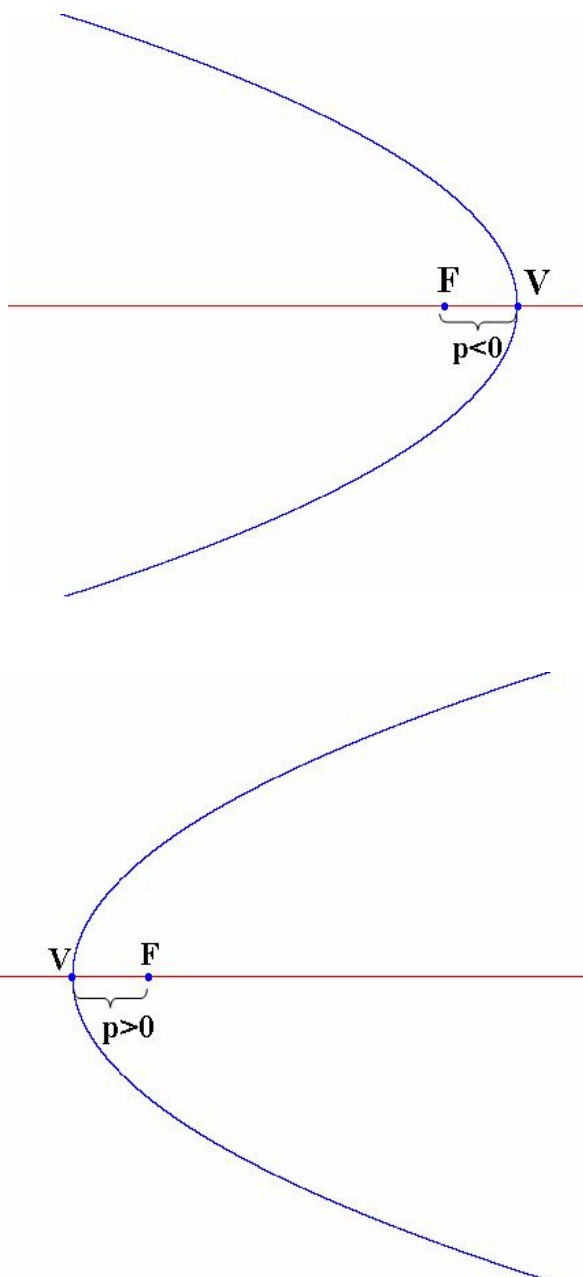
$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4p} \\ b &= -\frac{x_V}{2p} \\ c &= \frac{x_V^2}{4p} + y_V \end{aligned}$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA EXPLÍCITA

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{4a} \\ x_V &= -\frac{b}{2a} \\ y_V &= c - \frac{b^2}{4a} \\ x_F &= x_V \\ y_F &= y_V + p \end{aligned}$$

PARÁBOLA

Eje de simetría HORIZONTAL



DATOS

x_V abscisa del vértice
 y_V ordenada del vértice
 x_F abscisa del foco
 $(x_F \neq x_V)$

Parámetro auxiliar: $p = x_F - x_V$ ($p \neq 0$)

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 0 \\ C &= 1 \\ D &= -4p \\ E &= -2y_V \\ F &= y_V^2 + 4px_V \end{aligned}$$

FÓRMULA EXPLÍCITA

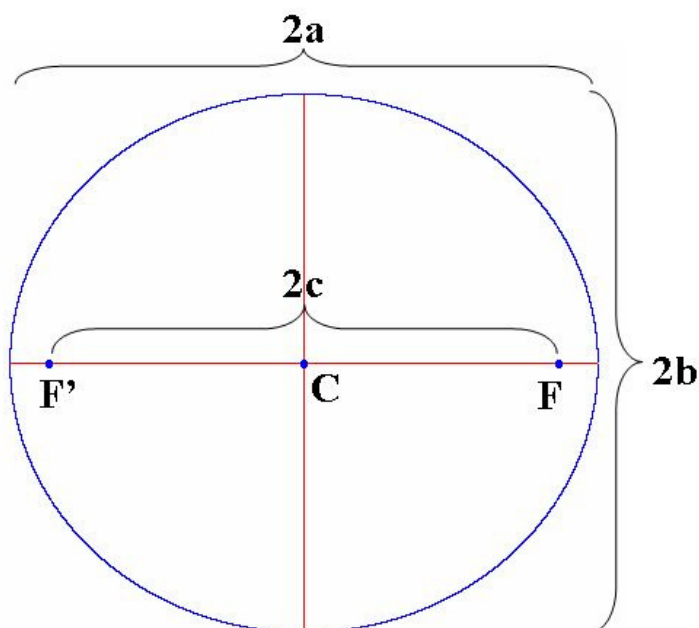
$$y = \pm 2\sqrt{p(x - x_V)} + y_V$$

$$\text{si } p > 0: x \geq x_V$$

$$\text{si } p < 0: x \leq x_V$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\begin{aligned} p &= -\frac{D}{4} \\ x_V &= \frac{E^2 - 4F}{4D} \\ y_V &= -\frac{E}{2} \\ x_F &= x_V + p \\ y_F &= y_V \end{aligned}$$

ELIPSE**Eje focal HORIZONTAL**

DATOS

x_C abscisa del centro
 y_C ordenada del centro
 a semieje mayor
 b semieje menor
 $(a \geq b > 0)$

Parámetro auxiliar: distancia focal $2c$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\begin{aligned}
 A &= b^2 \\
 B &= 0 \\
 C &= a^2 \\
 D &= -2b^2 x_C \\
 E &= -2a^2 y_C \\
 F &= a^2 y_C^2 + b^2 x_C^2 - a^2 b^2
 \end{aligned}$$

Condición de Existencia: $F = \frac{1}{4} \left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} \right) - AC$ (ver un análisis exhaustivo de esta condición al final de la monografía)

Si $a = b \Rightarrow$ Circunferencia

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x - x_C)^2} + y_C$$

$$x_C - a \leq x \leq x_C + a$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

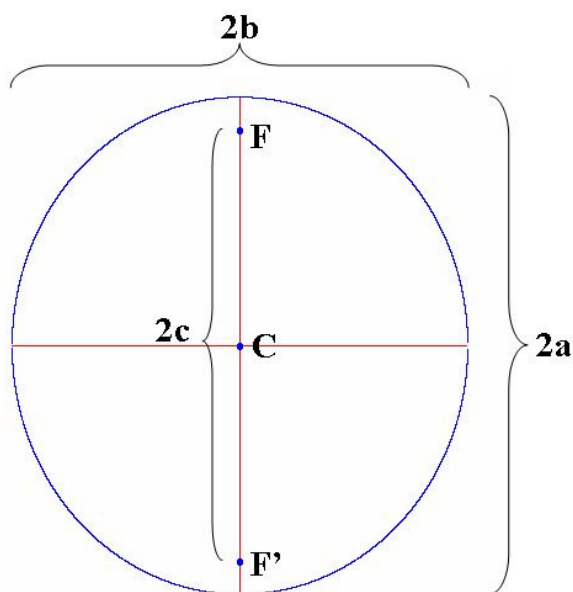
$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{C} \\
 b &= \sqrt{A} \\
 x_C &= -\frac{D}{2A} \\
 y_C &= -\frac{E}{2C}
 \end{aligned}$$

FOCOS

$$\begin{aligned}
 x_F &= x_C + c \\
 y_F &= y_C \\
 x_{F'} &= x_C - c \\
 y_{F'} &= y_C
 \end{aligned}$$

ELIPSE

Eje focal VERTICAL



DATOS	x_C	abscisa del centro
	y_C	ordenada del centro
	a	semieje mayor
	b	semieje menor
	$(a \geq b > 0)$	

Parámetro auxiliar: distancia focal $2c$ $\boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\begin{aligned}
 A &= a^2 \\
 B &= 0 \\
 C &= b^2 \\
 D &= -2a^2x_C \\
 E &= -2b^2y_C \\
 F &= b^2y_C^2 + a^2x_C^2 - a^2b^2
 \end{aligned}$$

Condición de Existencia: $F = \frac{1}{4} \left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} \right) - AC$
condición al final de la monografía)

(ver un análisis exhaustivo de esta

Si $a = b \Rightarrow$ Circunferencia

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x - x_C)^2} + y_C$$

$$x_C - b \leq x \leq x_C + b$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

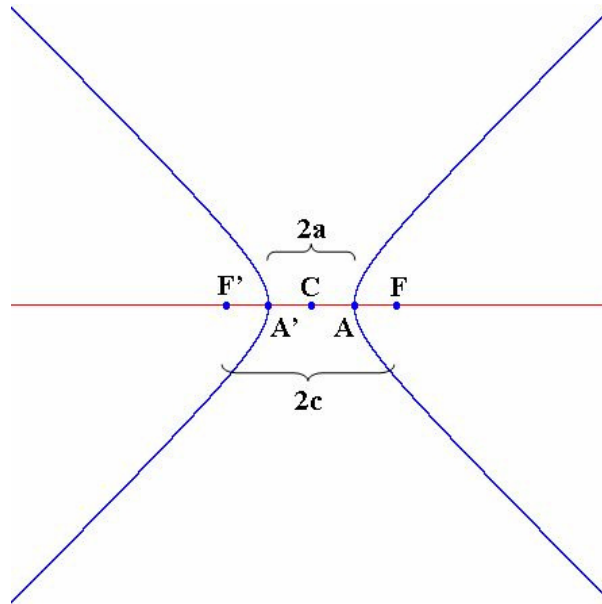
$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{A} \\
 b &= \sqrt{C} \\
 x_C &= -\frac{D}{2A} \\
 y_C &= -\frac{E}{2C}
 \end{aligned}$$

FOCOS

$$\begin{aligned}
 x_F &= x_C \\
 y_F &= y_C + c \\
 x_{F'} &= x_C \\
 y_{F'} &= y_C - c
 \end{aligned}$$

HIPÉRBOLA

Eje focal HORIZONTAL



DATOS

x_C abscisa del centro

y_C ordenada del centro

$\overline{AA'}$ eje transverso (longitud: $2a$)

$\overline{BB'}$ eje normal (longitud: $2b$) NOTA: B y B' no son puntos relevantes en el dibujo

$\overline{FF'}$ eje focal (longitud: $2c$)

$(c > a > 0)$

Parámetro auxiliar: distancia focal $2c$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$A = b^2$$

$$B = 0$$

$$C = -a^2$$

$$D = -2b^2x_C$$

$$E = 2a^2y_C$$

$$F = b^2x_C^2 - a^2y_C^2 - a^2b^2$$

Condición de Existencia: $F = \frac{1}{4} \left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} \right) + AC$ (ver un análisis exhaustivo de esta condición al final de la monografía)

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x - x_C)^2 - a^2} + y_C$$

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$x \leq x_C - a$$

$$x \geq x_C + a$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$a = \sqrt{-C}$$

$$b = \sqrt{A}$$

$$x_C = -\frac{D}{2A}$$

$$y_C = -\frac{E}{2C}$$

FOCOS Y VÉRTICES

$$x_A = x_C + a$$

$$y_A = y_C$$

$$x_{A'} = x_C - a$$

$$y_{A'} = y_C$$

$$x_F = x_C + c$$

$$y_F = y_C$$

$$x_{F'} = x_C - c$$

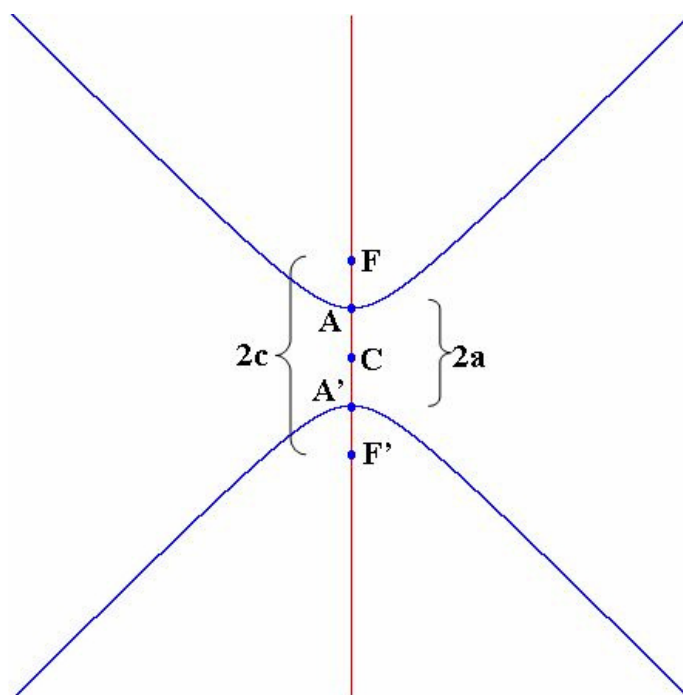
$$y_{F'} = y_C$$

ASÍNTOTAS

$$y = \pm \frac{b}{a} (x - x_C) + y_C$$

HIPÉRBOLA

Eje focal VERTICAL



DATOS

x_C abscisa del centro

y_C ordenada del centro

$\overline{AA'}$ eje transversal (longitud: $2a$)

$\overline{BB'}$ eje normal (longitud: $2b$) NOTA: B y B' no son puntos relevantes en el dibujo

$\overline{FF'}$ eje focal (longitud: $2c$)

$(c > a > 0)$

Parámetro auxiliar: distancia focal $2c$ $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\begin{aligned}
 A &= -a^2 \\
 B &= 0 \\
 C &= b^2 \\
 D &= 2a^2x_C \\
 E &= -2b^2y_C \\
 F &= b^2y_C^2 - a^2x_C^2 - a^2b^2
 \end{aligned}$$

Condición de Existencia: $F = \frac{1}{4} \left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} \right) + AC$
 condición al final de la monografía)

(ver un análisis exhaustivo de esta

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{(x - x_C)^2 + b^2} + y_C$$

$$x \in R$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{-A} \\
 b &= \sqrt{C} \\
 x_C &= -\frac{D}{2A} \\
 y_C &= -\frac{E}{2C}
 \end{aligned}$$

FOCOS Y VÉRTICES

$$\begin{aligned}
 x_A &= x_C \\
 y_A &= y_C + a \\
 x_{A'} &= x_C \\
 y_{A'} &= y_C - a \\
 x_F &= x_C \\
 y_F &= y_C + c \\
 x_{F'} &= x_C \\
 y_{F'} &= y_C - c
 \end{aligned}$$

ASÍNTOTAS

$$y = \pm \frac{a}{b} (x - x_C) + y_C$$

Análisis especial de la condición de existencia en elipse e hipérbola (realizado por Rodrigo Farinha)

Fórmula "Normal": $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

A veces A, C, D, E y F tienen $MCD \neq 1$, con lo cual la fórmula puede expresarse en forma "Reducida", en vez de "Normal".

Fórmula "Reducida": $A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$

Donde (le llamo k al MCD, $k \neq 1$):

$$A' = \frac{A}{k} \quad C' = \frac{C}{k} \quad D' = \frac{D}{k} \quad E' = \frac{E}{k} \quad F' = \frac{F}{k} \quad (1)$$

Si intento deducir los datos característicos de la cónica a partir de esta fórmula reducida en vez de la normal, casi todo da mal:

Por ejemplo en la **elipse con eje focal horizontal**:

Desde la fórmula Normal: $a = \sqrt{C}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $a' = \sqrt{C'} = \sqrt{\frac{C}{k}} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{k}} = \frac{a}{\sqrt{k}} \neq a$ (mal)

Desde la fórmula Normal: $b = \sqrt{A}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $b' = \sqrt{A'} = \sqrt{\frac{A}{k}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{k}} = \frac{b}{\sqrt{k}} \neq b$ (mal)

Desde la fórmula Normal: $x_C = -\frac{D}{2A}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $x'_C = -\frac{D'}{2A'} = -\frac{\frac{D}{k}}{2\frac{A}{k}} = -\frac{D}{2A} = x_C$ (bien)

Desde la fórmula Normal: $y_C = -\frac{E}{2C}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $y'_C = -\frac{E'}{2C'} = -\frac{\frac{E}{k}}{2\frac{C}{k}} = -\frac{E}{2C} = y_C$ (bien)

Para las elipses debe cumplirse: $F = \frac{1}{4} \left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} \right) - AC \quad (2)$

Si la fórmula que se me proporciona como dato es la “reducida”, tendré como datos A' , C' , etc, pero no A , C , etc.

Necesito saber cuánto vale el k que se usó para la “reducción” de la fórmula.

Sé que en la fórmula “normal” (de la que desconozco sus coeficientes) deberá cumplirse la condición (2).

Utilizando (1) y sustituyendo en (2):

$$kF' = \frac{1}{4} \left(\frac{k^2 D'^2}{A'} + \frac{k^2 E'^2}{C'} \right) - kA' \cdot kC'$$

$$F' = \frac{1}{4} \left(\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'} \right) - kA' \cdot kC'$$

$$F' = \frac{1}{4} \left(\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'} \right) - kA'C'$$

(o sea que la relación (2) NO ES INVARIANTE al reducir la fórmula)

Pero de aquí puedo despejar k en base a los coeficientes que tengo (los de la fórmula “reducida”):

$$k = \frac{F' - \frac{1}{4} \left(\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'} \right)}{-A'C'}$$

Con ese valor y (1) podré hallar los coeficientes de la fórmula normal, los cuales necesito para poder obtener correctamente los datos característicos de la elipse:

$$A = kA' \quad C = kC' \quad D = kD' \quad E = kE' \quad F = kF'$$

Esto también sucede si se analiza la **elipse con eje focal vertical**.

Ahora detallaré el análisis de la **hipérbola con eje focal horizontal** (sucede algo muy parecido):

Desde la fórmula Normal: $a = \sqrt{-C}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $a' = \sqrt{-C'} = \sqrt{-\frac{C}{k}} = \frac{\sqrt{-C}}{\sqrt{k}} = \frac{a}{\sqrt{k}} \neq a$ (mal)

Desde la fórmula Normal: $b = \sqrt{A}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $b' = \sqrt{A'} = \sqrt{\frac{A}{k}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{k}} = \frac{b}{\sqrt{k}} \neq b$ (mal)

Desde la fórmula Normal: $x_C = -\frac{D}{2A}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $x'_C = -\frac{D'}{2A'} = -\frac{\frac{D}{\cancel{k}}}{2\frac{A}{\cancel{k}}} = -\frac{D}{2A} = x_C$ (bien)

Desde la fórmula Normal: $y_C = -\frac{E}{2C}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $y'_C = -\frac{E'}{2C'} = -\frac{\frac{E}{\cancel{k}}}{2\frac{C}{\cancel{k}}} = -\frac{E}{2C} = y_C$ (bien)

Para las hipérbolas debe cumplirse: $F = \frac{1}{4} \left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} \right) + AC$ (3)

Si la fórmula que se me proporciona como dato es la “reducida”, tendré como datos A', C', etc, pero no A, C, etc.

Necesito saber cuánto vale el **k** que se usó para la “reducción” de la fórmula.

Sé que en la fórmula “normal” (de la que desconozco sus coeficientes) deberá cumplirse la condición (3).

Utilizando (1) y sustituyendo en (3):

$$kF' = \frac{1}{4} \left(\frac{k^2 D'^2}{A'} + \frac{k^2 E'^2}{C'} \right) + kA' \cdot kC'$$

$$kF' = \frac{1}{4} \left(\frac{k^2 D'^2}{A'} + \frac{k^2 E'^2}{C'} \right) + kA' \cdot kC'$$

$$F' = \frac{1}{4} \left(\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'} \right) + kA'C'$$

(o sea que la relación (3) NO ES INVARIANTE al reducir la fórmula)

Pero de aquí puedo despejar k en base a los coeficientes que tengo (los de la fórmula “reducida”):

$$k = \frac{F' - \frac{1}{4} \left(\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'} \right)}{A'C'}$$

Con ese valor y (1) podré hallar los coeficientes de la fórmula normal, los cuales necesito para poder obtener correctamente los datos característicos de la hipérbola:

$$A = kA' \quad C = kC' \quad D = kD' \quad E = kE' \quad F = kF'$$

Esto también sucede si se analiza la **hipérbola con eje focal vertical**.

Ejemplo ilustrativo

Sea una hipérbola con eje focal horizontal que tiene las siguientes características:

$$a = 6$$

$$b = 4$$

$$x_C = -4$$

$$y_C = 1$$

Utilizo las fórmulas de cálculo de los coeficientes que están en la página 14:

$$A = b^2 = 4^2 = 16$$

$$B = 0$$

$$C = -a^2 = -6^2 = -36$$

$$D = -2b^2x_C = -2 \cdot 4^2 \cdot (-4) = 128$$

$$E = 2a^2y_C = 2 \cdot 6^2 \cdot (1) = 72$$

$$F = b^2x_C^2 - a^2y_C^2 - a^2b^2 = 4^2 \cdot (-4)^2 - 6^2 \cdot 1^2 - 6^2 \cdot 4^2 = -356$$

$$16x^2 - 36y^2 + 128x + 72y - 356 = 0 \quad \text{Esta es la fórmula "Normal".}$$

Todos sus coeficientes son múltiplos de 4 (dicho de otra forma, 4 es el MCD de todos ellos). Así que la fórmula se puede "reducir":

$$4x^2 - 9y^2 + 32x + 18y - 89 = 0 \quad \text{Esta es la fórmula "Reducida".}$$

Veamos cómo utilizando los coeficientes de la fórmula Normal en las fórmulas de cálculo de datos de la página 14, se vuelve a los valores de a, b, x_C, y_C :

$$a = \sqrt{-C} = \sqrt{-(-36)} = 6$$

$$b = \sqrt{A} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_C = -\frac{D}{2A} = -\frac{128}{2(16)} = -4$$

$$y_C = -\frac{E}{2C} = -\frac{72}{2(-36)} = 1$$

Veamos cómo utilizando los coeficientes de la fórmula Reducida en las fórmulas de cálculo de datos de la página 14, se vuelve a los valores de x_C, y_C , pero no a los de a, b :

$$a' = \sqrt{-C'} = \sqrt{-(-9)} = 3 \neq 6$$

$$b' = \sqrt{A'} = \sqrt{4} = 2 \neq 4$$

$$x'_c = -\frac{D'}{2A'} = -\frac{32}{2(4)} = -4$$

$$y'_c = -\frac{E'}{2C'} = -\frac{18}{2(-9)} = 1$$

O sea que a partir de la fórmula Reducida, hay problemas para hallar a y b originales. Esto se soluciona calculando k:

$$k = \frac{F' - \frac{1}{4} \left(\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'} \right)}{A'C'} = \frac{-89 - \frac{1}{4} \left(\frac{32^2}{4} + \frac{18^2}{-9} \right)}{(4) \cdot (-9)} = 4$$

Entonces:

$$A = kA' = 4(4) = 16$$

$$C = kC' = 4(-9) = -36$$

$$D = kD' = 4(32) = 128$$

$$E = kE' = 4(18) = 72$$

$$F = kF' = 4(-89) = -356$$

Y, como ya se comprobó, a partir de esos valores de A, C, D, E y F se pueden hallar correctamente a, b, x_c, y_c

RECONOCIMIENTO DE CÓNICAS

Se trata de, dada una ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, determinar si es una cónica real (verdadera). Y si lo es, clasificarla y determinar su centro (si lo tiene) y cuánto está girada respecto a los ejes de coordenadas.

Los siguientes son los pasos a seguir:

$$M = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} \quad N = B^2 - 4AC \quad S = A + C$$

Si $N < 0$ y $M.S < 0 \rightarrow$ *ELIPSE REAL*

Si $N > 0$ y $M \neq 0 \rightarrow$ *HIPÉRBOLA REAL*

Si $N = 0$ y $M \neq 0 \rightarrow$ *PARÁBOLA REAL*

a) Si es elipse o hipérbola, hallar su **centro** (x_C, y_C) :

$$x_C = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \quad y_C = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}$$

Y hallar su **ángulo de rotación** w :

$$Si \begin{cases} B \neq 0 \rightarrow \\ B = 0 \rightarrow \end{cases} \quad Si \begin{cases} A \neq C \rightarrow \\ A = C \rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} tg(2w) = \frac{B}{A - C} \\ w = 45^\circ \end{cases}$$

La cónica no está rotada

b) Si es parábola, hallar su **ángulo de rotación** w :

$$Si \begin{cases} B \neq 0 \rightarrow \\ B = 0 \rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} tg w = \frac{-2A}{B} \\ \text{La cónica no está rotada} \end{cases}$$

Bibliografía consultada

“Geometría Analítica”, Gustavo A. Duffour, Séptima edición.