

ECUACIONES E INECUACIONES

PROGRAMACIÓN LINEAL

**Teórico
Ejercicios y Problemas**

Escrito por Prof. A. Rodrigo Farinha

Publicado en [Octubre de 2010] en mi sitio

www.arfsoft.com.uy

Queda absolutamente prohibido el uso total o parcial de este material sin dar crédito a su autor. Solamente se puede imprimir y sin modificación alguna.

Introducción e Índice

El propósito de este trabajo es brindar una visión holística, breve, pragmática, sistemática y ¿completa? (con ejemplos y ejercicios cuidadosamente seleccionados) de los temas:

Ecuaciones e Inecuaciones	3
Ecuación de 1° grado con una incógnita.....	4
Inecuación de 1° grado con una incógnita.....	4
Ecuación de 2° grado con una incógnita.....	8
Inecuación de 2° grado con una incógnita.....	9
Ecuación de 1° grado con dos incógnitas.....	12
Inecuación de 1° grado con dos incógnitas.....	13
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.....	16
Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.....	18
Programación Lineal	19
Método para crear un problema de Programación Lineal de 2 restricciones oblicuas con solución entera.....	24
Ejercicios.....	26
Problemas.....	27

Para lograr un mejor entendimiento de lo desarrollado en este trabajo, es muy recomendable abordar su lectura o estudio en forma secuencial.

ECUACIONES E INECUACIONES

Con 1 incógnita		Con 2 incógnitas	
Ecuación	Inecuación	Ecuación	Inecuación
$f(x)=0$	$f(x)<0$	$f(x,y)=0$	$f(x,y)<0$
	$f(x)\leq 0$		$f(x,y)\leq 0$
	$f(x)>0$		$f(x,y)>0$
	$f(x)\geq 0$		$f(x,y)\geq 0$

Se llama **ecuación** a una relación de **igualdad** que se cumple para algunos valores de la incógnita (x).
 Se llama **inecuación** a una relación de **desigualdad** que se cumple para algunos valores de la incógnita (x).

NOTAS:

- $f(x)$ y $f(x,y)$ representan a expresiones algebraicas.
- Se plantea en forma genérica como miembro derecho de la ecuación / inecuación al cero. Con esto no se pierde generalidad ya que en los casos en que no sea cero, se la puede transformar a ese formato:

$$f_1(x)=f_2(x) \quad \rightarrow \quad f_1(x)-f_2(x)=0$$

$$f_1(x)\leq f_2(x) \quad \rightarrow \quad f_1(x)-f_2(x)\leq 0$$

(En estos casos $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$)

$$f_1(x,y)=f_2(x,y) \quad \rightarrow \quad f_1(x,y)-f_2(x,y)=0$$

$$f_1(x,y)>f_2(x,y) \quad \rightarrow \quad f_1(x,y)-f_2(x,y)>0$$

(En estos casos $f(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$)

etc.

CON 1 INCÓGNITA

- Si f es de la forma $f(x)=ax+b$ (con $a\neq 0$) se tiene una ecuación / inecuación “lineal” o “de primer grado” con una incógnita.

Ejemplos:

$$6x-1=0$$

$$-2x+4=0$$

$$-3x+11\geq 0$$

- Si f es de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ (con $a\neq 0$) se tiene una ecuación / inecuación “cuadrática” o “de segundo grado” con una incógnita.

Ejemplos:

$$-2x^2+7x-9=0$$

$$6x^2+2x=0$$

$$x^2-1<0$$

Ecuación de 1º grado

$$ax + b = 0$$

Paso 1: Hallamos la raíz de $ax + b$: $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ solución de la ecuación
(existe porque exigimos antes que $a \neq 0$)

Paso 2: Expresar la solución de la ecuación (valor de x para el cual se cumple la igualdad) mediante un conjunto.

Ejemplo: $6x - 1 = 0$

Paso 1: raíz = $\frac{1}{6}$

Verificación: $6\left(\frac{1}{6}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$ verifica

Paso 2: Solución = $\left\{\frac{1}{6}\right\}$

Ejercicios:

$$-7x + 3 = 0$$

$$55x + 9 = 2$$

$$-15 + 8x = -1 - 7x$$

$$5 - 11x = 2x + 1$$

Inecuación de 1º grado

$$ax + b < 0$$

$$ax + b \leq 0$$

$$ax + b > 0$$

$$ax + b \geq 0$$

Hay 2 formas de resolverlas:

- Estudiando el signo de la expresión de la inecuación
 - Despejando la incógnita de la inecuación

Estudio del signo de la expresión de una Inecuación de 1º grado

Paso 1: Hallamos la raíz de $ax+b$: $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$

Paso 2: Signo de $ax+b$:

Signo opuesto de a	0	Signo de a
----- -----		
$-\frac{b}{a}$		

Paso 3: Marcar el sector solución según la desigualdad.

Paso 4: Expresar la solución de la inecuación (conjunto de valores de x para los cuales se cumple la desigualdad) mediante intervalos o mediante conjunto.

Ejemplo: $-2x+18 \geq 0$

Paso 1: raíz = 9

Paso 2: Signo de $-2x+18$:

+++++	0	-----
----- -----		
9		

Paso 3: Marcar el sector:

//////////	0	-----
----- -----		
9		

Paso 4: Solución = $(-\infty, 9] = \{x / x \in R \wedge x \leq 9\}$

Ejemplo: $6x-1 < 0$

Paso 1: raíz = $\frac{1}{6}$

Paso 2: Signo de $6x-1$:

-----	0	+++++
----- -----		
$\frac{1}{6}$		

Paso 3: Marcar el sector:

////////// \	0	+++++
----- -----		
$\frac{1}{6}$		

Paso 4: Solución = $(-\infty, \frac{1}{6}) = \{x / x \in R \wedge x < \frac{1}{6}\}$

Despejando la incógnita de una Inecuación de 1º grado

Si se pasa **multiplicando o dividiendo** al otro lado de una **desigualdad** un **número negativo**, hay que **cambiar el sentido de la desigualdad**.

Una consecuencia de esto es que:

Si se cambia de signo ambos lados de una desigualdad, hay que cambiar el sentido de la desigualdad.

Ejemplos:

$$2x - 9 > 5$$

$$2x > 5 + 9 \quad (\text{pasar un número } \mathbf{restando} \text{ o } \mathbf{sumando} \text{ no cambia el sentido de la desigualdad})$$

$$2x > 14$$

$$x > \frac{14}{2} \quad (\text{pasar un número } \mathbf{positivo} \text{ dividiendo no cambia el sentido de la desigualdad})$$

$$x > 7$$

$$3 - \frac{x}{6} \leq 5$$

$$-\frac{x}{6} \leq 5 - 3 \quad (\text{pasar un número } \mathbf{restando} \text{ o } \mathbf{sumando} \text{ no cambia el sentido de la desigualdad})$$

$$-\frac{x}{6} \leq 2$$

$$-x \leq 6 \cdot 2 \quad (\text{pasar un número } \mathbf{positivo} \text{ multiplicando no cambia el sentido de la desigualdad})$$

$$-x \leq 12$$

$$x \geq -12 \quad (\text{cambiar de signo ambos lados de una desigualdad, } \mathbf{cambia el sentido de la desigualdad})$$

$$2 - 3x \geq 10y$$

$$-3x \geq 10y - 2 \quad (\text{pasar un número } \mathbf{restando} \text{ o } \mathbf{sumando} \text{ no cambia el sentido de la desigualdad})$$

$$x \leq \frac{10y - 2}{-3} \quad (\text{pasar un número } \mathbf{negativo} \text{ dividiendo } \mathbf{cambia el sentido de la desigualdad})$$

$$\frac{x}{-2} < 8$$

$$x > (-2) \cdot 8 \quad (\text{pasar un número } \mathbf{negativo} \text{ multiplicando } \mathbf{cambia el sentido de la desigualdad})$$

$$x > -16$$

Ejercicios:

$$4x - 8 < 0$$

$$6 - 2x < 0$$

$$3x \geq 0$$

$$8x + 2 > 3x - 5$$

$$x - 2 < 3x - 6$$

Ecuación de 2º grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Paso 1: Hallamos las raíces de $ax^2 + bx + c$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (soluciones de la ecuación)

Existencia de las soluciones: si $b^2 - 4ac$ $\begin{cases} < 0 & \text{No hay solución} \\ = 0 & \text{Hay una solución (raíz doble)} \\ > 0 & \text{Hay 2 soluciones} \end{cases}$

Paso 2: Expresar la solución de la ecuación (valores de x para los cuales se cumple la igualdad) mediante un conjunto.

Ejemplos:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad x = 1 \quad \underline{\text{Hay 2 soluciones}}$$

$$\text{Verificación: } (-2)^2 + (-2) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0 \quad \text{verifica}$$

$$(1)^2 + (1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 \quad \text{verifica}$$

$$\text{Solución} = \{-2, 1\}$$

$$-x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ (doble)} \quad \underline{\text{Hay una solución}}$$

$$\text{Verificación: } -(2)^2 + 4(2) - 4 = -4 + 8 - 4 = 0 \quad \text{verifica}$$

$$\text{Solución} = \{2\}$$

$$-x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow \underline{\text{No hay solución}}$$

$$\text{Solución} = \emptyset \quad (\emptyset \text{ simboliza al conjunto vacío: } \emptyset = \{ \})$$

Ejercicios:

$$-x^2 + 1 = 0$$

$$10x - 5x^2 = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$-4x^2 = 0$$

Inecuación de 2º grado

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

Paso 1: Hallamos las raíces de $ax^2 + bx + c$: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Existencia de las raíces: si $b^2 - 4ac$ $\begin{cases} < 0 & \text{No hay raíces} \\ = 0 & \text{Hay una raíz (doble)} & \alpha \\ > 0 & \text{Hay 2 raíces} & \alpha \text{ y } \beta \end{cases}$

Paso 2: Signo de $ax^2 + bx + c$:

Si $b^2 - 4ac < 0$: Signo de a

Si $b^2 - 4ac = 0$: Signo de a 0 Signo de a
 -----||-----
 α

Si $b^2 - 4ac > 0$: Signo de a 0 Signo opuesto de a 0 Signo de a
 -----|-----|-----
 α β

Paso 3: Marcar el sector o los sectores solución según la desigualdad.

Paso 4: Expresar la solución de la inecuación (conjunto de valores de x para los cuales se cumple la desigualdad) mediante intervalos o mediante conjunto.

Ejemplo: $x^2 + x + 1 \leq 0$

Paso 1: No hay raíces

Paso 2: Signo de $x^2 + x + 1$: +++++

Paso 3: Marcar el sector: No hay ningún sector o valor puntual que sea negativo o 0

Paso 4: Solución = \emptyset (no hay solución)

Ejemplo: $x^2 - 9 \leq 0$

Paso 1: Raíces: -3 y 3

Paso 2: Signo de $x^2 - 9$:

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & + & + & 0 & - & - & - & - & - & 0 & + & + & + & + & + \\ \hline & & & & & -3 & & & & & & 3 & & & & & \end{array}$$

Paso 3: Marcar los sectores:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & 0 & - & - & - & - & - & 0 & & & & & \\ + & + & + & + & + & | & / & / & / & / & / & / & / & | & + & + & + & + & + \\ \hline & & & & & -3 & & & & & & 3 & & & & & \end{array}$$

Paso 4: Solución = $[-3, 3] = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge (-3 \leq x \leq 3)\}$

- Ejercicios:
- $-x^2 + 1 \leq 0$
 - $10x - 5x^2 < 0$
 - $x^2 + x + 1 > 0$
 - $x^2 - 10x + 25 < 0$
 - $-(x-7)(x-12) \geq 0$

CON 2 INCÓGNITAS

Aquí se trabajará con funciones de la forma $f(x, y) = ax + by + c$ (a y b no pueden ser simultáneamente 0), es decir con una ecuación / inecuación “lineal” o “de primer grado” con dos incógnitas.

- $ax + by + c = 0$ Representa a una recta
- $ax + by + c < 0$ (etc) Representa a un semiplano (con borde en la recta $ax + by + c = 0$)

- Ejemplos:
- $6x - 5y - 1 = 0$ (representa a una recta)
 - $-3x + 2y + 11 > 0$ (representa a un semiplano con borde en la recta $-3x + 2y + 11 = 0$)

Ecuación de 1° grado

$$ax + by + c = 0$$

Si $a=0 \Rightarrow$ Recta horizontal $y = -\frac{c}{b}$

Si $b=0 \Rightarrow$ Recta vertical $x = -\frac{c}{a}$

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0 \Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } c \neq 0: \\ \text{Recta oblicua que corta al eje horizontal en } x = -\frac{c}{a} \text{ y al eje vertical en } y = -\frac{c}{b} \\ \text{si } c = 0: \text{ Recta oblicua que pasa por el origen y por el punto } \left(1, -\frac{a}{b}\right) \end{array} \right.$

Ver ejemplos en páginas siguientes (Inecuación de 1° grado)

Inecuación de 1º grado

$$ax+by+c < 0$$

$$ax+by+c \leq 0$$

$$ax+by+c > 0$$

$$ax+by+c \geq 0$$

La solución será el conjunto de puntos (x, y) ubicados en uno de los dos semiplanos determinados por la recta $ax+by+c=0$. Si la desigualdad es \leq o \geq , además de los puntos del semiplano, también serán solución los puntos de la recta.

Para saber qué semiplano es:

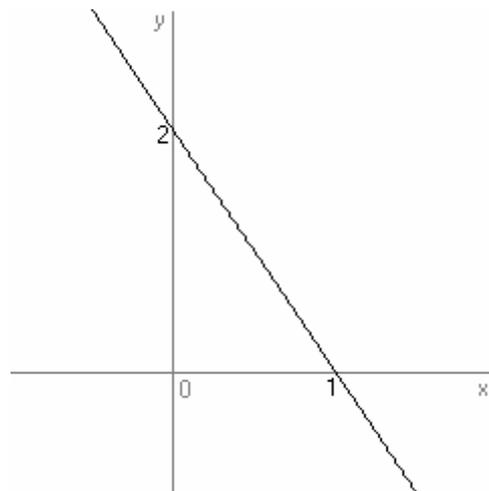
1. Representar la recta $ax+by+c=0$ (ver recuadro anterior)
2. Elegir un punto que no pertenezca a la recta.
3. Si las coordenadas del punto verifican la inecuación, el semiplano es el que contiene a ese punto. Sino, es el otro semiplano.

Ejemplo: $2x+y-2 < 0$

1. (Ver recuadro en Ecuación de 1º grado)

Corte con eje horizontal: $x = -\frac{c}{a} = -\frac{-2}{2} = 1$

Corte con eje vertical: $y = -\frac{c}{b} = -\frac{-2}{1} = 2$

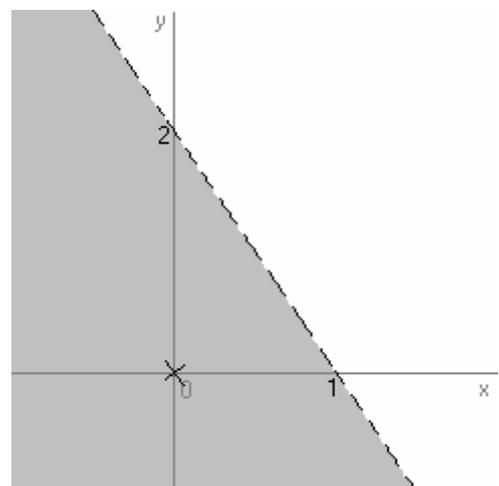


2. Se elige el origen: $x = 0, y = 0$

3. $2(0) + (0) - 2 = -2$ que efectivamente es < 0 , por lo tanto el semiplano buscado contiene al origen.

Las coordenadas (x,y) de todos los puntos que estén en esa región, serán solución de la inecuación planteada.

Obsérvese que, debido a que la desigualdad es $<$, y no \leq , los puntos que están en el borde del semiplano (la recta $2x+y-2=0$) no forman parte de la solución. Por lo cual se traza la recta en forma punteada.

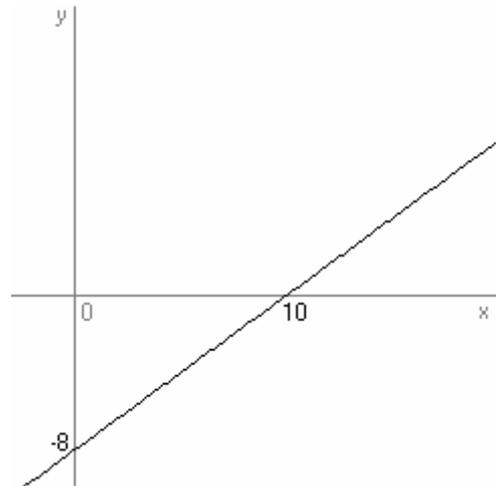


Ejemplo: $-4x + 5y + 40 \geq 0$

1. (Ver recuadro en Ecuación de 1º grado)

Corte con eje horizontal: $x = -\frac{c}{a} = -\frac{40}{-4} = 10$

Corte con eje vertical: $y = -\frac{c}{b} = -\frac{40}{5} = -8$

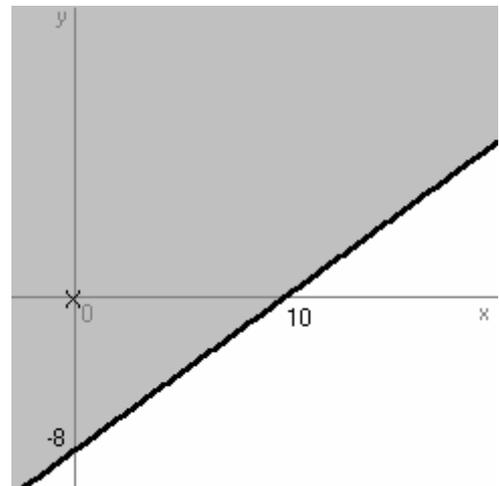


2. Se elige el origen: $x = 0, y = 0$

3. $-4(0) + 5(0) + 40 = 40$ que efectivamente es ≥ 0 , por lo tanto el semiplano buscado contiene al origen.

Las coordenadas (x,y) de todos los puntos que estén en esa región, serán solución de la inecuación planteada.

Obsérvese que, debido a que la desigualdad es \leq (es decir que la igualdad está permitida), los puntos que están en el borde del semiplano (la recta $-4x + 5y + 40 = 0$) forman parte de la solución. Por lo cual se traza la recta en forma completa.



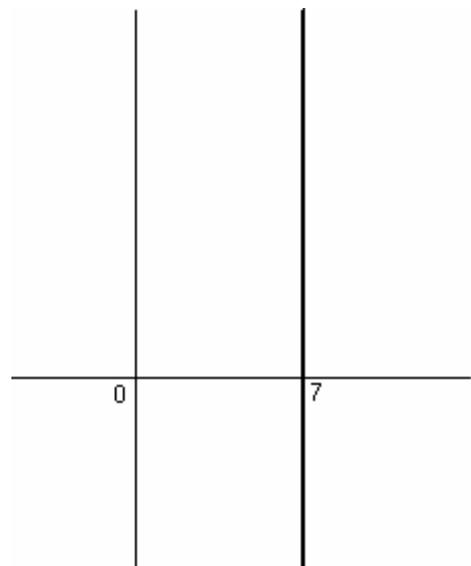
Ejemplo: $x \leq 7$

1. (Ver recuadro en Ecuación de 1º grado)

Se manipula la inecuación para que quede de la forma $ax + by + c \leq 0$:

$$x - 7 \leq 0$$

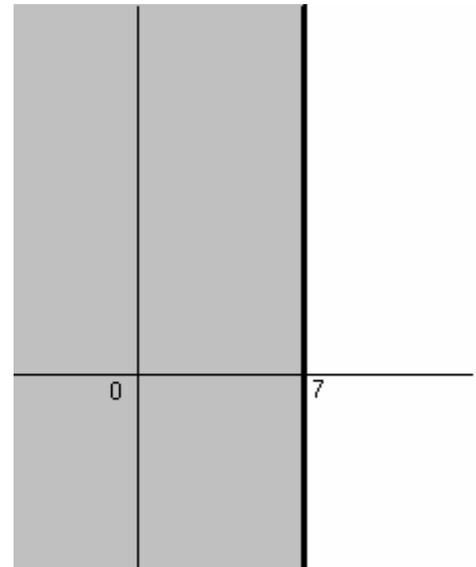
$$b = 0 \Rightarrow \text{Recta vertical } x = -\frac{c}{a} = -\frac{-7}{1} = 7$$



2. Se elige el origen: $x = 0$, $y = 0$

3. $0 - 7 = -7$ que efectivamente es ≤ 0 , por lo tanto el semiplano buscado contiene al origen.

Las coordenadas (x,y) de todos los puntos que estén en esa región, serán solución de la inecuación planteada.
 Obsérvese que, debido a que la desigualdad es \leq (es decir que la igualdad está permitida), los puntos que están en el borde del semiplano (la recta $x=7$) forman parte de la solución. Por lo cual se traza la recta en forma completa.



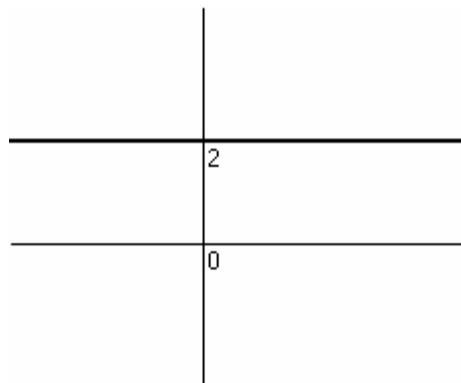
Ejemplo: $y \geq 2$

1. (Ver recuadro en Ecuación de 1° grado)

Se manipula la inecuación para que quede de la forma $ax+by+c \geq 0$:

$$y - 2 \geq 0$$

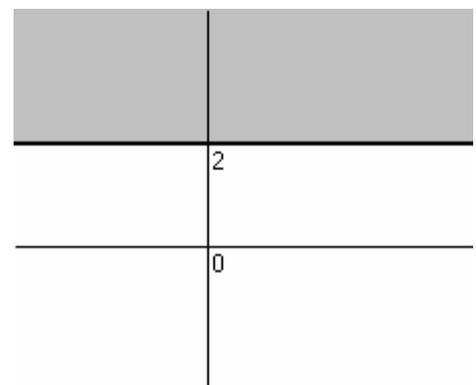
$$a=0 \Rightarrow \text{Recta horizontal } y = -\frac{c}{b} = -\frac{-2}{1} = 2$$



2. Se elige el origen: $x = 0$, $y = 0$

3. $0 - 2 = -2$ que no es ≥ 0 , por lo tanto el semiplano buscado es el que no contiene al origen.

Las coordenadas (x,y) de todos los puntos que estén en esa región, serán solución de la inecuación planteada.
 Obsérvese que, debido a que la desigualdad es \geq (es decir que la igualdad está permitida), los puntos que están en el borde del semiplano (la recta $y=2$) forman parte de la solución. Por lo cual se traza la recta en forma completa.



Ejercicios:

$$\begin{aligned} 3x - y &< 0 \\ y - 10 &\leq 0 \\ x + 6 &< 0 \\ x - 2y - 6 &\geq 0 \\ \underline{y + 1} &> 0 \end{aligned}$$

Sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Estos sistemas pueden

{	tener una única solución	(Sistema Compatible Determinado)
{	tener infinitas soluciones	(Sistema Compatible Indeterminado)
{	no tener solución	(Sistema Incompatible)

Se pueden resolver despejando una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituyendo en la otra, o por *escalerización* (Gauss).

A continuación se muestran ejemplos resueltos aplicando el método de escalerización.

Ejemplo de Sistema Compatible Determinado (solución única)

$$\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ -5x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5(2x - 3y = -5) &\rightarrow 10x - 15y = -25 \\ 2(-5x + 2y = -4) &\rightarrow -10x + 4y = -8 \\ \hline &-11y = -33 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = -5 \\ -11y = -33 \Rightarrow y = \frac{-33}{-11} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 3(3) = -5 \Rightarrow 2x - 9 = -5 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Solución del sistema: $x = 2$ $y = 3$ (la solución es una sola: el punto de coordenadas (2,3))

Ejemplo de Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

$$\begin{cases} -2x - 2y = -6 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 1(-2x - 2y = -6) & \rightarrow & -2x - 2y = -6 \\ 2(x + y = 3) & \rightarrow & 2x + 2y = 6 \\ \hline & & 0x + 0y = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = -6 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \quad \text{(esta ecuación se descarta porque no aporta ninguna información, ya que cualquier par de valores (x,y) la verifica)}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = -6 \Rightarrow -2y = 2x - 6 \Rightarrow y = -x + 3 \\ \end{cases}$$

Solución del sistema: $x = \text{cualquier número real}$
 $y = -x + 3$

(Las soluciones son las coordenadas (x,y) de todos los puntos de la recta $y = -x + 3$)

Ejemplo de Sistema Incompatible (no tiene solución)

$$\begin{cases} 3x + 3y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 1(3x + 3y = 2) & \rightarrow & 3x + 3y = 2 \\ -3(x + y = 3) & \rightarrow & -3x - 3y = -9 \\ \hline & & 0x + 0y = -7 \end{array}$$

$0x + 0y = -7$ es imposible de resolver (no existen x e y que verifiquen dicha ecuación)

Solución del sistema: No hay

Sistemas de inecuaciones lineales con 2 incógnitas

$$\begin{cases} ax+by+c < 0 \\ a'x+b'y+c' \geq 0 \\ a''x+b''y+c'' > 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

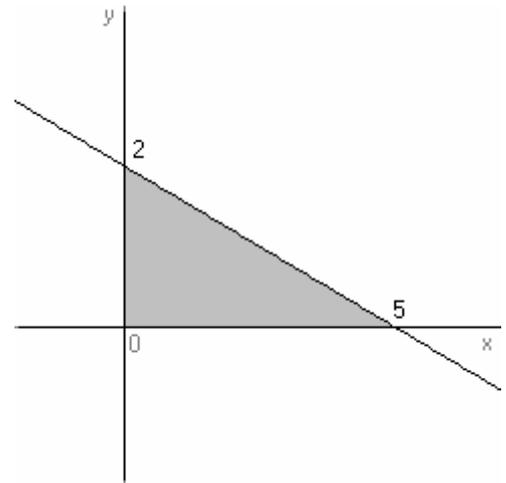
La solución será la región del plano resultante de intersectar todos los semiplanos asociados a cada inecuación del sistema. (Esto se debe a que solo los puntos de la intersección son comunes a todos los semiplanos involucrados y por ende solo ellos cumplen simultáneamente todas las inecuaciones del sistema.)

Si alguna de las desigualdades es \leq o \geq , además de los puntos del semiplano que aporte esa inecuación, también serán solución los puntos de la recta.

Ejemplo:
$$\begin{cases} 2x+5y-10 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Luego de intersectar los 3 semiplanos correspondientes a las 3 inecuaciones del sistema, se obtiene la región gris del dibujo.

Las coordenadas de los puntos (x,y) que están en la región gris serán solución del sistema planteado.



Ejercicios:

Resolver gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} x < 3 \\ x-3y > 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y \geq 2 \\ 2x+y > 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x+y \geq 1 \\ -6x+3y \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y \geq 0 \\ -x+2y < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3y \leq 6 \\ x-y \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y \leq 2 \\ x+3y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+6y \leq 2400 \\ 3x+y \leq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x+5y \leq 60 \\ 2x+10y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+y-10 \geq 0 \\ x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

PROGRAMACIÓN LINEAL

Es una técnica matemática utilizada para dar solución a problemas que se plantean en diversas disciplinas tales como Economía, Ingeniería, Sociología, Biología, etc.

Trata de optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal de dos o más variables teniendo en cuenta que dichas variables deben cumplir ciertas condiciones o exigencias (generalmente debidas a la escasez de ciertos recursos).

Hoy día, cualquier decisión de tipo económico es precedida por el estudio de todas las variables y restricciones que intervienen en el tema, consistiendo la optimización en la maximización de un beneficio o la minimización de un costo.

Cualquier problema de PL consta de 2 componentes:

1. $f(x, y, z, \dots)$ función a optimizar

2. $\begin{cases} R1(x, y, z, \dots) \\ R2(x, y, z, \dots) \\ \dots \end{cases}$ restricciones

Veremos:

Función a optimizar : $f(x, y) = ax + by + c$

lineal con 2 incógnitas

Restricciones : $\begin{cases} a'x + b'y + c' \geq 0 \\ a''x + b''y + c'' < 0 \\ \dots \end{cases}$

inecuaciones lineales con 2 incógnitas

Cómo se resuelve un problema de PL

1. Dibujar el recinto determinado por las restricciones (ver “Sistemas de inecuaciones lineales con 2 incógnitas”).
[Si ese recinto **no está acotado** y se busca **maximizar** la función., el problema **no tiene solución**. No se continúa.]
2. Determinar las coordenadas de todos los vértices del recinto. Dichos vértices formarán el **polígono de puntos factibles**.
3. Calcular en cada uno de los vértices el valor que toma la función a optimizar.
4. Aquel vértice en el cual la función alcance un valor máximo (o mínimo), será la solución óptima.
[Si la función alcanza el valor máximo o mínimo en **dos vértices**, significa que la solución óptima no será única, sino que cada uno de los puntos del **segmento cuyos extremos son esos vértices** será una solución óptima.]

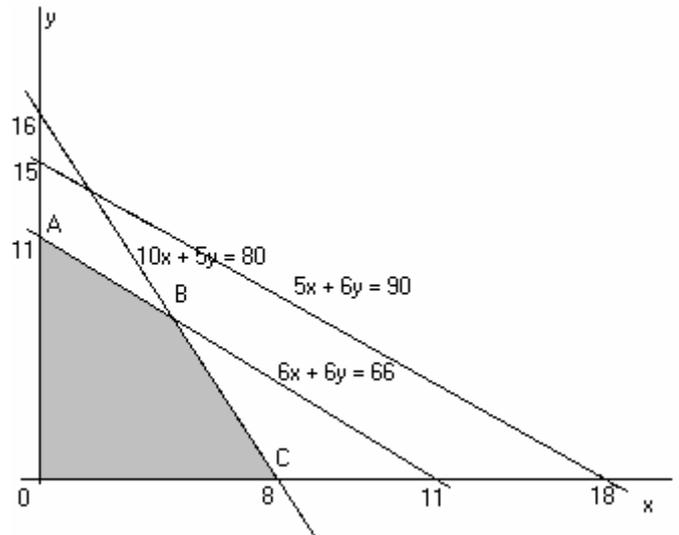
Ejemplo (solución única)

beneficio = $1200x + 1000y$ (debe ser máximo)

$$\text{Restricciones} \begin{cases} 10x + 5y \leq 80 \\ 6x + 6y \leq 66 \\ 5x + 6y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

Se grafica, a partir de las restricciones, el polígono de puntos factibles:



OABC es el polígono de puntos factibles.

B, por ser el punto de corte de dos rectas, se halla resolviendo el sistema formado por las mismas:

$$\begin{cases} 10x + 5y - 80 = 0 \\ 6x + 6y - 66 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$$

(ver cómo se resuelve en “Sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas”)

Luego se evalúa la función beneficio en los puntos A, B y C:

A (0, 11)	beneficio(0, 11) = 11000
B (5, 6)	beneficio(5, 6) = 12000
C (8, 0)	beneficio(8, 0) = 9600

De los 3 valores hallados, el máximo es el del punto B, así que sus coordenadas son la solución de lo planteado:

$$\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Ejemplo (problema completo con solución única)

Un establecimiento de producción agrícola posee 120 há de tierras en la cual planta maíz y soja. Se estima que se puede emplear a lo sumo 320 horas del tiempo de laboreo.

Basándose en rendimiento promedio y en expectativas de precios se estima que el retorno neto luego de cubrir los gastos sería de 40 U\$S por há de maíz y 30 U\$S por há de soja.

Además se estima que se emplea 4 horas de laboreo para producir una há de maíz y 2 horas para producir una há de soja.

El objetivo del establecimiento es maximizar el retorno neto de la producción de los cultivos. Para lograr esto se debe determinar la cantidad de há destinadas a la producción de cada cultivo.

Solución: Primero, a partir de la información proporcionada, se establecen cuáles son las incógnitas del problema y se expresan la función ganancia y las restricciones.

		x	y	
		maíz	soja	tope
<i>Restricciones</i>	tierra	1	1	120 → $x + y \leq 120$
	laboreo	4	2	320 → $4x + 2y \leq 320$
<i>Ganancia</i>		40	30	→ $40x + 30y$

x: há de maíz
y: há de soja

$$Ganancia(x,y) = 40x + 30y$$

$$Restricciones \begin{cases} x + y \leq 120 \\ 4x + 2y \leq 320 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Obsérvese que, como x e y representan a ciertas cantidades materiales, no pueden ser negativas. Por eso, a las restricciones obtenidas del enunciado del problema, siempre se les agregan $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

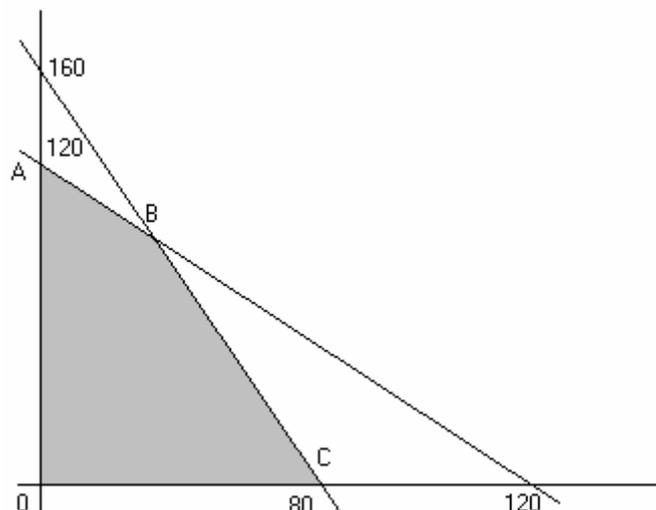
Se grafica, a partir de las restricciones, el polígono de puntos factibles.

Luego se evalúa la función ganancia en los puntos A, B y C:

A (0,120) $G(0,120) = 3600$
C (80,0) $G(80,0) = 3200$

B, por ser el punto de corte de dos rectas, se halla resolviendo el sistema formado por las mismas:

B (40,80) $G(40,80) = 4000$



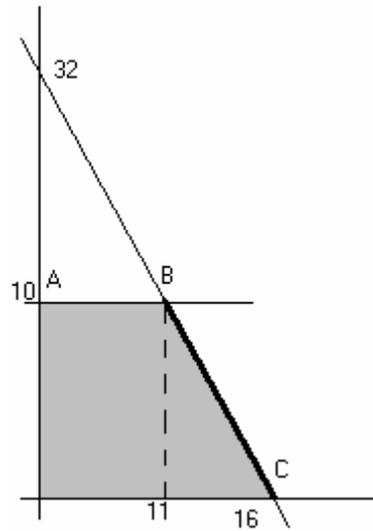
De los 3 valores hallados, el máximo es el del punto B, así que sus coordenadas son la solución de lo planteado: **40 há de maíz y 80 há de soja**

Ejemplo (varias soluciones)

beneficio = $200x + 100y$ (debe ser máximo)

$$\text{Restricciones} \begin{cases} y \leq 10 \\ 2x + y \leq 32 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- A: $f(0,10) = 1000$
- B: $f(11,10) = 3200$
- C: $f(16,0) = 3200$



Hay más de un vértice en donde la función es máxima (B y C), por lo tanto la solución óptima no será única, sino que corresponderá a todos los puntos situados en el segmento BC.

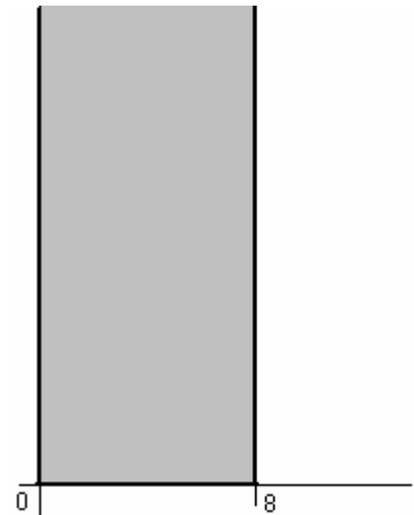
Como usualmente se buscan soluciones enteras (los puntos cuyas coordenadas son enteras), estas son las soluciones enteras: **(11,10) (12,8) (13,6) (14,4) (15,2) (16,0)**

Ejemplo (sin solución)

beneficio = $5x + 17y$ (debe ser máximo)

$$\text{Restricciones} \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

El recinto **no está acotado** y lo que se busca es un valor **máximo** de la función. Por lo tanto **no hay solución** (acotada).



Ejemplo (de minimización)

costo = $4000x + 5000y$ (debe ser mínimo)

$$\text{Restricciones} \begin{cases} x + y \geq 8 \\ 30x + 50y \geq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A: $f(0,8) = 40000$

B: $f(5,3) = \mathbf{35000}$

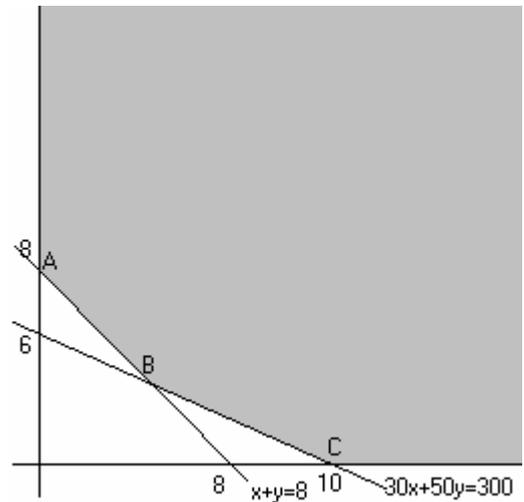
C: $f(10,0) = 40000$

Hay un vértice en donde la función es mínima (B).

Solución:

$x = 5$

$y = 3$

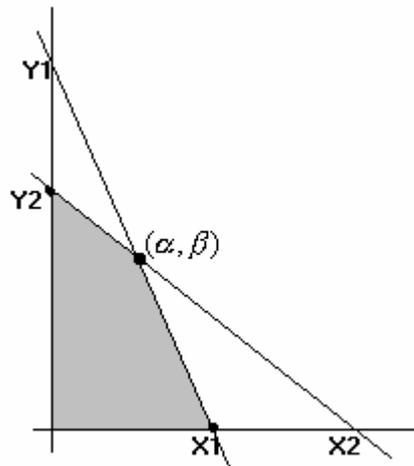


Obsérvese que en este caso no importa que el recinto no esté acotado, ya que lo que se busca es un valor **mínimo** de la función. Si se hubiera buscado maximizar la función, no habría solución.

[PARA DOCENTES DE MATEMÁTICA]

Método para crear un problema de Programación Lineal de 2 restricciones oblicuas con solución entera

Ideado por Prof. Rodrigo Farinha



1. Elegir X_1, X_2 y α enteros positivos ($\alpha < X_1 < X_2$)

2. $\beta =$ múltiplo de $(X_1 - \alpha) \cdot (X_2 - \alpha)$ ($\beta \neq 0$)

3.

$$Y_1 = \frac{\beta X_1}{X_1 - \alpha}$$

$$Y_2 = \frac{\beta X_2}{X_2 - \alpha}$$

4. Elegir k_1 y k_2 (enteros positivos)

5.

<p>Restricciones:</p> $\begin{cases} k_1 \left(\frac{Y_1}{X_1} \right) x + k_1 y \leq k_1 Y_1 \\ k_2 \left(\frac{Y_2}{X_2} \right) x + k_2 y \leq k_2 Y_2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

6. Elegir A (número positivo)

7. Para que la solución sea $\begin{cases} (0, Y_2) \\ (X_1, 0) \\ (\alpha, \beta) \end{cases}$ elegir B que cumpla $\begin{cases} B > \frac{A(X_2 - \alpha)}{\beta} \\ B < \frac{A(X_1 - \alpha)}{\beta} \\ \frac{A(X_1 - \alpha)}{\beta} < B < \frac{A(X_2 - \alpha)}{\beta} \end{cases}$

8. **Función Ganancia:** $G = Ax + By$

Ejemplo de aplicación:

$$\alpha = 4$$

$$1. \quad X_1 = 6 \\ X_2 = 9$$

$$2. \quad (X_1 - \alpha) \cdot (X_2 - \alpha) = (6 - 4) \cdot (9 - 4) = (2) \cdot (5) = 10 \\ \beta = \text{múltiplo de } 10 = 20$$

$$3. \quad Y_1 = \frac{\beta X_1}{X_1 - \alpha} = \frac{20 \cdot 6}{6 - 4} = \frac{120}{2} = 60 \\ Y_2 = \frac{\beta X_2}{X_2 - \alpha} = \frac{20 \cdot 9}{9 - 4} = \frac{180}{5} = 36$$

$$4. \quad k_1 = 1 \\ k_2 = 2$$

5.

$$k_1 \left(\frac{Y_1}{X_1} \right) x + k_1 y \leq k_1 Y_1$$

$$k_2 \left(\frac{Y_2}{X_2} \right) x + k_2 y \leq k_2 Y_2$$

$$(1) \cdot \left(\frac{60}{6} \right) x + (1) \cdot y \leq (1) \cdot 60$$

$$(2) \cdot \left(\frac{36}{9} \right) x + (2) \cdot y \leq (2) \cdot 36$$

$$10x + y \leq 60$$

$$8x + 2y \leq 72$$

<p>Restricciones:</p> $\begin{cases} 10x + y \leq 60 \\ 8x + 2y \leq 72 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$6. \quad A = 35$$

7. Quiero que la solución sea (α, β) , es decir $(4, 20)$

$$\frac{A(X_1 - \alpha)}{\beta} < B < \frac{A(X_2 - \alpha)}{\beta}$$

$$\frac{35(6 - 4)}{20} < B < \frac{35(9 - 4)}{20}$$

$$3,5 < B < 8,75$$

Elijo B=6,5

$$8. \quad \boxed{\text{Función Ganancia: } G = 35x + 6,5y}$$

Ejercicios ¹

1) Maximizar la función $4x + 3y$ sujeta a las restricciones:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \leq y \end{cases}$$

Solución: $x=y=12/5$

2) Minimizar la función $x + y$ sujeta a las restricciones:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x \geq y \\ x - 2y \geq 2 \end{cases}$$

Solución: $x=2 \ y=0$

3) Maximizar la función $2x + y$ sujeta a las restricciones:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 2y \leq 7 \\ y \leq 2 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$$

Solución: todos los puntos del segmento $(3/4, 2) - (3/2, 1/2)$

4) Maximizar la función $4x + 5y$ sujeta a las restricciones:
$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución: $x=y=2$

5) Minimizar la función $12x + 8y$ sujeta a las restricciones:
$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 1 \\ 4x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución: todos los puntos del segmento $(1/5, 1/5) - (1/3, 0)$

6) Maximizar la función $3x + 4y$ sujeta a las restricciones:
$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución: $x=0 \ y=4$

7) Maximizar la función $5x + 10y$ sujeta a las restricciones:
$$\begin{cases} 5x + 5y \leq 60 \\ 2x + 10y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución: $x=10 \ y=2$

8) Maximizar la función $5x + y$ sujeta a las restricciones:
$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 3x + y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución: No tiene

Problemas ¹

Fabricación de juguetes

Una empresa está dedicada a la fabricación de juguetes de plástico de dos tipos diferentes que llamaremos Tipo I y Tipo II.

La fabricación de cada unidad del juguete Tipo I necesita 0.5 horas de trabajo de una máquina M1 y 0.25 horas de otra máquina M2.

El juguete del Tipo II necesita 1 hora de M1 y 1 hora de M2.

El orden en que se efectúan las operaciones en las máquinas es indiferente.

La máquina M1 está disponible 40 horas por semana y la máquina M2 25 horas por semana.

Cada unidad del juguete Tipo I da una ganancia o utilidad de U\$S 10 y cada unidad del juguete Tipo II da una ganancia de U\$S 30.

Si se sabe que todos los juguetes fabricados serán vendidos, se desea saber cuántas unidades deben fabricarse por semana de cada uno de los tipos de juguetes para que la empresa obtenga máxima ganancia.

Solución: 60 de Tipo I y 10 de Tipo II

Ganancia de empresa 1

Una pequeña empresa está fabricando dos tipos de artículo que llamaremos A y B.

Cada unidad del artículo A insume 2 Kg. de materia prima y cada unidad del artículo B 3 Kg. La fábrica tiene asegurada una existencia de materia prima de 12 Kg. por día.

El artículo A necesita 2 horas de trabajo en máquina, mientras que el artículo B necesita 1 hora.

La máquina está disponible 8 horas al día.

El artículo A da una ganancia de 2,5 U\$S por unidad, y el artículo B de 5 U\$S por unidad.

El empresario está fabricando 3 unidades por día del artículo A y 2 unidades por día del artículo B y te consulta si está trabajando adecuadamente para obtener máxima ganancia.

¿Qué le contestarías al empresario?

Solución: “Deje de fabricar el artículo A y fabrique 4 unidades del artículo B”

Ganancia de empresa 2

Una empresa está fabricando dos tipos de artículos que llamaremos Art.1 y Art.2.

El Art.1 necesita 1 Kg. de plástico y 1.5 Kg. de aluminio, mientras que el Art. 2 necesita 1.5 Kg. de plástico y 1.5 Kg. de aluminio.

El fabricante dispone semanalmente de 50 Kg de plástico y 60 Kg. de aluminio.

a) Determina las cantidades a fabricar por semana de cada tipo de artículo para obtener máxima ganancia si el artículo 1 da una ganancia por unidad de 4 U\$S y el artículo 2 de 5 U\$S.

b) ¿Qué ocurre si las utilidades cambian a: 6 U\$S por unidad para el Art.1 y 5 U\$S por unidad para el Art.2?

Solución: a) 20 Art.1 y 20 Art.2

b) 40 Art.1 y 0 Art.2

Armado de computadoras

Un taller de armado de computadoras produce dos modelos de las mismas que llamaremos Mod. I y II.

El Mod.I requiere 1 horas de mano de obra especializada y 2 hora de mano de obra no especializada.

El Mod II requiere 1 hora de mano de obra especializada y 1 hora de no especializada.

Se disponen de 120 horas de mano de obra especializada y 200 horas de mano de obra no especializada por semana.

El Mod. I produce una utilidad de 60 U\$S por unidad y el Mod. II de 30 U\$S por unidad.

- a) Si sólo se admiten soluciones enteras, ¿cuántas posibilidades de obtener máximas utilidades existen?
 b) ¿Cuál es el menor número de unidades del modelo I y el correspondiente número de unidades del modelo II que deben armarse por semana para obtener máximas utilidades?
 c) ¿Cuál es el mayor número de unidades del modelo I y el correspondiente número de unidades del modelo II que deben armarse por semana para obtener máximas utilidades?

Solución: a) Todos los puntos de coordenadas enteras que están en el segmento de extremos (80,40) y (100,0); en total son 21 posibilidades. b) 80 de I, 40 de II c) 100 de I, ninguno de II

Costo de dieta

Una persona debe cumplir una dieta que le exige consumir por semana al menos 1 Kg. de carbohidratos y $\frac{1}{2}$ Kg. de proteínas.

Para ello cuenta con dos alimentos que llamaremos A y B que están constituidos exclusivamente por carbohidratos y proteínas.

El alimento A contiene 90% (en peso) de carbohidratos y el resto de proteínas, mientras que el alimento B contiene 60% de carbohidratos y el resto de proteínas.

El alimento A cuesta 20 \$ / Kg. y el alimento B, 40 \$ / Kg.

¿Qué cantidad de cada alimento deberá consumir la persona para que el costo de su dieta sea mínimo?

Solución: $\frac{1}{3}$ kg de A y $\frac{7}{6}$ kg de B

Confección de prendas

Una empresa que confecciona ropa está dedicada a la fabricación de dos tipos de prendas de vestir que denominaremos I y II.

Ambas prendas requieren el uso de dos máquinas M1 y M2, siendo indiferente el orden en que se realizan ambas operaciones.

Cada prenda del tipo I debe permanecer 5 minutos en la máquina M1 y 3 minutos en la máquina M2.

Cada prenda del tipo II debe permanecer 6 minutos en M1 y 2 minutos en M2.

La máquina M1 está disponible 40 horas a la semana y la máquina M2 15 horas por semana.

Si cada prenda del tipo I produce una utilidad de \$40 y cada prenda del tipo II una utilidad de \$ 50, te pedimos: ¿ Cuántas unidades de ambas prendas deben confeccionarse semanalmente para que la empresa obtenga máxima ganancia?

Solución: 0 de I y 400 de II

Fabricación de bibliotecas

Una empresa fabrica dos tipos distintos de bibliotecas metálicas que denominaremos como Tipo I y Tipo II.

Ambas requieren la utilización de piezas de dos metales diferentes a las que llamaremos piezas A y B.

Cada unidad de la biblioteca tipo I requiere 3 unidades de las piezas A y 7 unidades de las piezas B, mientras que cada unidad de las del Tipo II requiere 5 unidades de las piezas A y 1 unidad de la pieza B.

Se dispone en total de 25 unidades de la pieza A y 21 unidades de la pieza B por semana.

Las bibliotecas del tipo I dan una utilidad de 20 U\$S y las del tipo II de 25 U\$S.

a) Considerando admisibles soluciones fraccionarias, ¿cuántas bibliotecas de cada tipo se deben fabricar para tener utilidad máxima? Calcular esa utilidad.

b) Calcular una solución entera redondeando la solución fraccionaria obtenida en a).

Solución: a) $\frac{5}{2}$ de I y $\frac{7}{2}$ de II b) 2 de I y 3 de II

¹ Obtenidos de “Introducción a la Programación Lineal” de los profesores Ana Coló Herrera y Héctor Patrìtti.