FUNCIONES

Escrito por **Prof. A. Rodrigo Farinha**

Publicado en [Octubre de 2010] en mi sitio
www.arfsoft.com.uy

Queda absolutamente prohibido el uso total o parcial de este material sin dar crédito a su autor. Solamente se puede imprimir y sin modificación alguna.

NOTA DEL AUTOR

El objetivo principal de este trabajo consiste en ser una referencia completa (orden secuencial y desarrollo de clases) para un **docente del curso teórico de Matemática A de 6º**.

No es adecuado para un estudiante (aunque darles a los estudiantes la copia de algunas carillas específicas puede facilitarle al docente el tener que escribir y presentar algunos temas, con el ahorro de tiempo y "tiza" que eso representa, además de que a los estudiantes les queda para futura consulta un material "prolijo" y libre de posibles errores de copiado).

Tiene un marcado sesgo teórico (hay pocos ejemplos y ejercicios), **obviándose**...

- Temas que considero inútiles (por su dudosa aplicación futura y/o excesiva complejidad para el enfoque dado a este desarrollo).
- Demostraciones de propiedades y teoremas (exceptuando límites tipo, derivadas y algunos teoremas de sencilla demostración). Las demostraciones faltantes están en los libros...

Además hay un **Apéndice** que contiene las tablas y esquemas más utilizados:
Límites Tipo, Derivadas, Primitivas y Estudio Analítico.

Bibliografía de referencia:

- ✓ *Buena parte del desarrollo de este trabajo, exceptuando el tema Integral, está basada en el libro "Matemática de Sexto" de Gustavo A. Duffour (Novena edición).*
- ✓ *La mayor parte del desarrollo del tema Integral está basada en el libro "Cálculo" de Fernando Peláez Bruno (edición 2007).*

ÍNDICE

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

$$f : A \rightarrow B$$

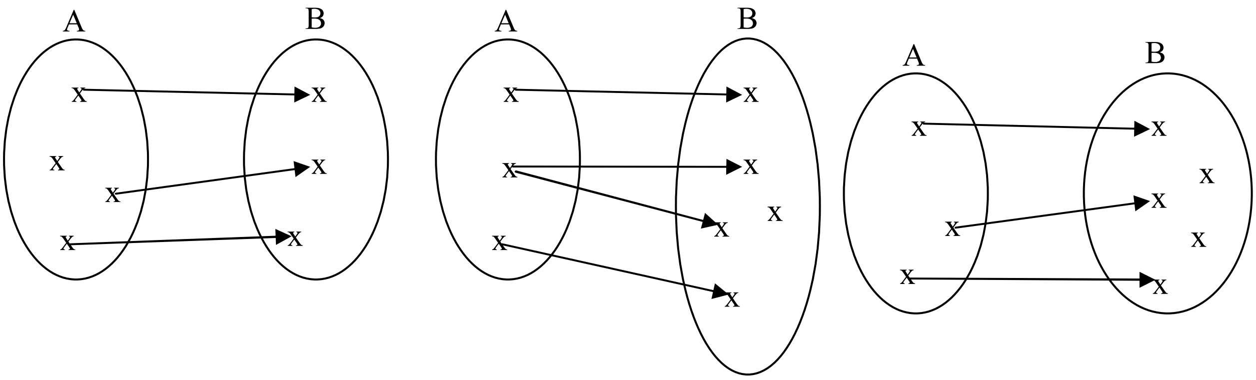
Una relación f entre elementos de un conjunto A y elementos de un conjunto B es una **función** si y solo si cumple 2 condiciones:

- ✓ *Existencia:* Todos los elementos de A tienen por lo menos una imagen en B.
- ✓ *Unicidad:* Ningún elemento de A tiene más de una imagen en B.

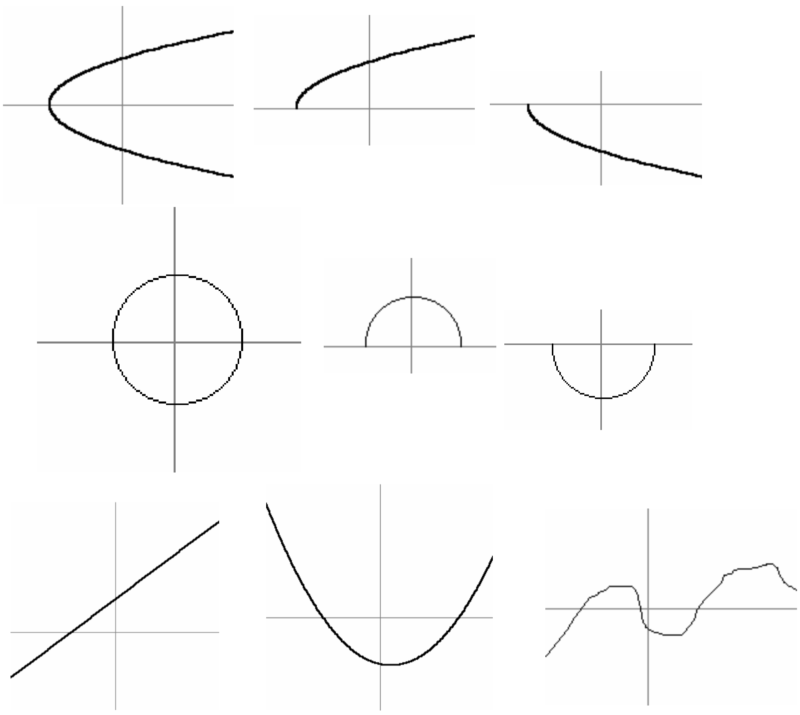
Observación: en el caso de que f sea una función, al conjunto A se le llama **Dominio de f** y al conjunto B **Codominio/Recorrido/Conjunto Imagen de f**.

IMPORTANTE: En este curso se trabajará solamente con funciones que van **de los reales a los reales**, es decir: $f : R \rightarrow R$

Ejemplos (en conjuntos): ¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones? ¿Cuáles no? ¿Por qué?



Ejemplos (en gráficas): ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan a funciones? ¿Cuáles no? ¿Por qué?



DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

El dominio de una función f es el conjunto de valores de x (reales) para los cuales la imagen f(x) está definida (existe).

Ejemplos:

1) Las siguientes son todas **funciones polinómicas**, o sea que **existen en todos los reales**:

$f(x)=2x+5$ $\qquad$ $Dom(f)=R$

$g(x)=-3x^2+6x-1$ $\qquad$ $Dom(g)=R$

$h(x)=9x^5-6x^4+x^2-7$ $\qquad$ $Dom(h)=R$

2) Como no se puede dividir entre 0, en las siguientes funciones **el denominador no puede valer 0**. Esto significa que **no pertenecen al dominio de la función las raíces del denominador**:

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $Dom(f)=R-\{0\}$ $\qquad$ porque el denominador se anula cuando $x=0$

$g(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$ $\qquad$ $Dom(g)=R-\{3\}$ $\qquad$ porque el denominador se anula cuando $x=3$

$h(x)=\dfrac{-4x+9}{-3x^2-3x+6}$ $\qquad$ $Dom(h)=R-\{-2,1\}$ porque el denominador se anula cuando $x=-2$ *o* $x=1$

Regla práctica:

> **Para que un dibujo sea la representación gráfica de una función:** cada recta vertical trazada <u>en el dominio</u> debe cortar al dibujo <u>en un solo punto</u>.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Conceptos previos al de límite: entorno y entorno reducido

Entorno: se llama entorno de **centro a** y **radio** δ (delta) al conjunto de los números reales situados entre $a-\delta$ y $a+\delta$

$$-----(\overbrace{----}^{\delta}|\overbrace{----}^{\delta})-----$$
$$a-\delta \qquad a \qquad a+\delta$$

Notación: $E(a,\delta)$

Diferentes formas de expresar dicho conjunto:

$$\{x/x\in R \ \wedge \ (a-\delta<x<a+\delta)\}$$
$$\{x/x\in R \ \wedge \ (|x-a|<\delta)\}$$

Entorno Reducido: es como el entorno común pero su centro (a) no pertenece a él.

$$-----(\overbrace{----}^{\delta})(\overbrace{----}^{\delta})-----$$
$$a-\delta \qquad a \qquad a+\delta$$

Notación: $E^*(a,\delta)$

Diferentes formas de expresar dicho conjunto:

$$\{x/x\in R \ \wedge \ (a-\delta<x<a+\delta \ \wedge \ x\neq a)\}$$
$$\{x/x\in R \ \wedge \ (a-\delta<x<a \ \vee \ a<x<a+\delta)\}$$
$$\{x/x\in R \ \wedge \ (0<|x-a|<\delta)\}$$
$$E(a,\delta)-\{a\}$$

Obsérvese que los extremos $a-\delta$ y $a+\delta$ ***no pertenecen a estos entornos***.

Límite finito de una función

La función **f** tiene límite **b** cuando **x** tiende a **a** (se anota $\lim_{x \to a} f(x) = b$) si y solo si los valores de la función **f(x)** se hacen arbitrariamente próximos al valor **b** cuando **x** se aproxima tanto como se quiera al valor **a**.

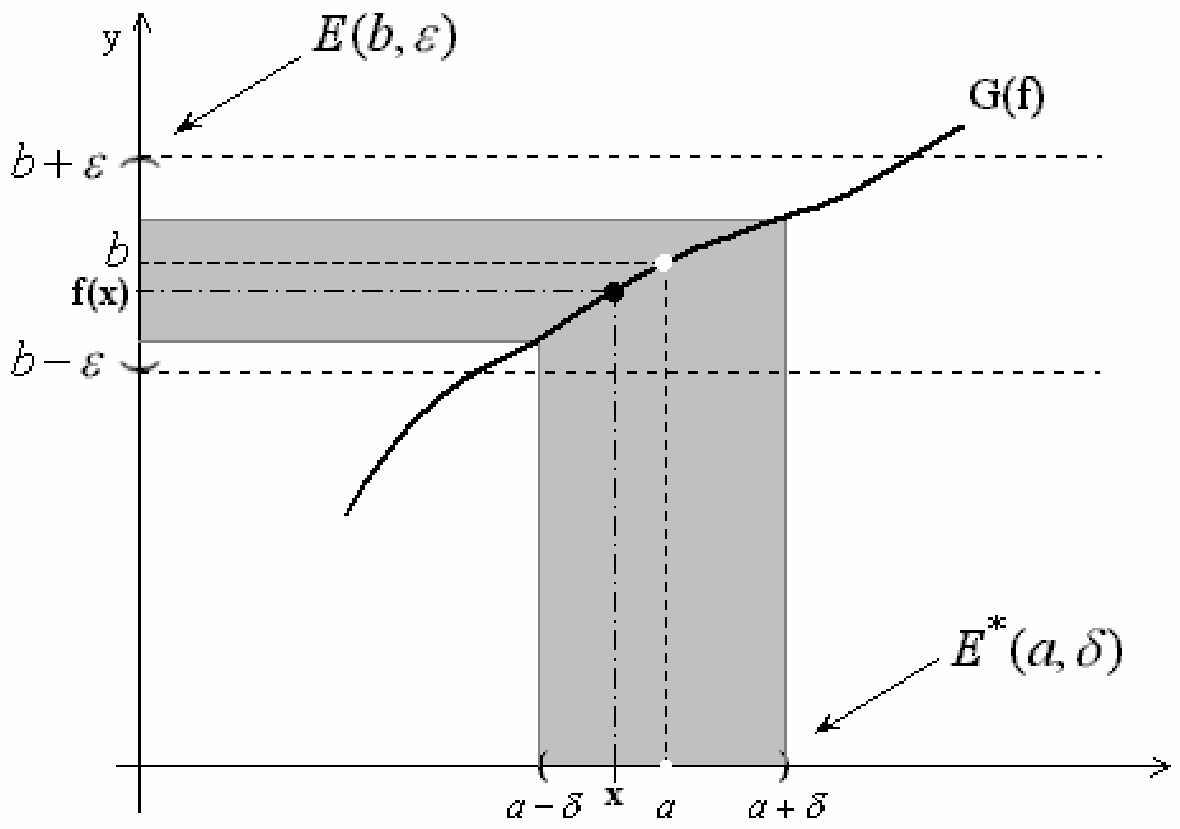
La forma rigurosa de definir el límite finito de una función, es mediante la *definición de Cauchy*:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \iff Dado\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 / \forall x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(b,\varepsilon)}$$

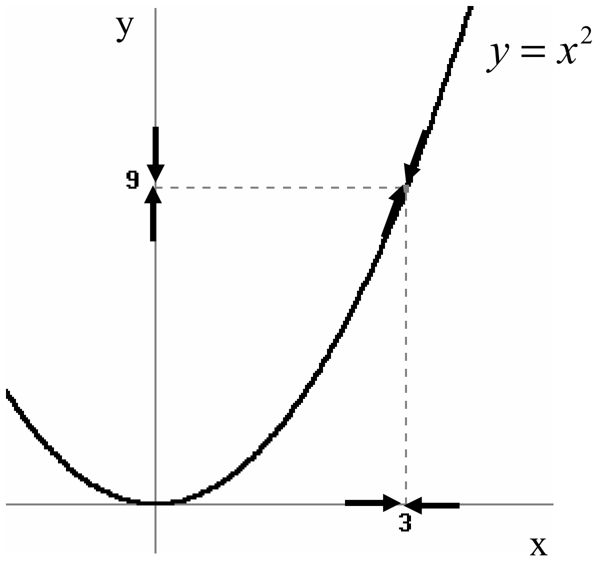
Observaciones:

1) En todo el desarrollo de este concepto se supone que existe algún entorno reducido de **a**, incluido en el dominio de la función: $\exists\ E^*(a,\delta) \subset D(f)$
2) La noción de límite está asociada con el comportamiento de los valores de una función **cuando x está cerca de a, no en a**. Es decir que **a** no tiene necesariamente que pertenecer al dominio de la función f.
3) El valor de δ **depende** del valor de ε . Matemáticamente es incorrecto decir que es *función* de ε .
4) En la definición intervienen dos entornos. Primero se fija la atención en el ε para la variable dependiente (y). El segundo entorno $E^*(a,\delta)$, que depende del primero, indica qué tan próximo del valor **a** debe encontrarse **x** para que $|f(x) - b| < \varepsilon$

Interpretación Gráfica:



Ejemplo:



x	y	x	y
2.9		3.1	
2.95		3.05	
2.99		3.01	
2.999		3.001	

Conclusión: $$\lim_{x \to ?} x^2 = ?$$

Teorema de Unicidad del Límite

El límite de una función (si existe) es único.

Ejemplo:
¿ Es posible que cierta función f pueda cumplir simultáneamente: $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ y $\lim_{x \to 2} f(x) = 11$?

Propiedades de Límites Finitos

(valen cuando $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ son **finitos**)

1) *Límite de la Suma:* $\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2) *Límite del Producto:* $\lim_{x \to a} \left(f(x).g(x) \right) = \left(\lim_{x \to a} f(x) \right) . \left(\lim_{x \to a} g(x) \right)$

3) *Límite del Cociente:* $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ (con la condición de que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$)

4) *Límite del Producto de un número por una función:* $\lim_{x \to a} \left(k.f(x) \right) = k . \lim_{x \to a} f(x)$ $\left(k \in R \right)$

Límites Laterales: En esos límites interesa "por cuál lado" la variable **x** se "acerca" al valor **a**.

Se lee: "x tiende a **a por izquierda**" ← $x \to a^-$ $x \to a^+$ → Se lee: "x tiende a **a por derecha**"

$$--(----\to|\leftarrow----)--$$
$$a-\delta \qquad a \qquad a+\delta$$

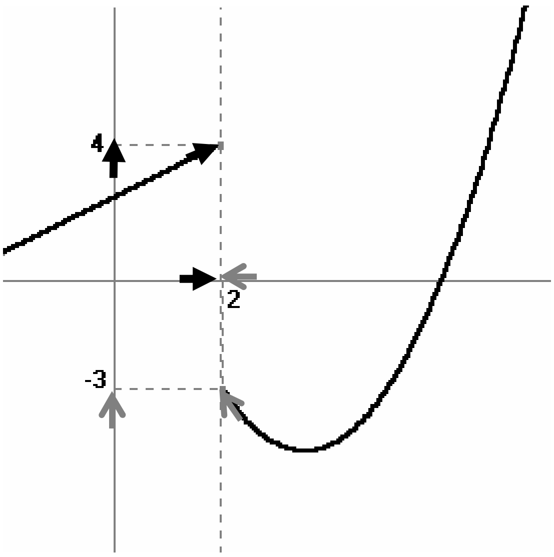
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b \Leftrightarrow Dado\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x\ que\ cumple\ a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) \in E(b,\varepsilon)$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b \Leftrightarrow Dado\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \forall x\ que\ cumple\ a < x < a+\delta \Rightarrow f(x) \in E(b,\varepsilon)$$

Observaciones:

1) Los límites laterales ya fueron usados en el ejemplo anterior (en x = 3).
2) Esta noción puede utilizarse en forma similar en el eje Oy (en el ejemplo anterior: $y \to 9^-$ $y \to 9^+$)

Ejemplo:



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -3$$

Teorema Fundamental del Límite (TFL)

Una función tiene **límite finito** si y solo si **sus límites por izquierda y por derecha son finitos e iguales**.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b} \qquad a \in R\ ,\ b \in R$$

Ejemplos:

1) Ejemplo anterior

2) $f(x) = \begin{cases} x+3 & si\ x \geq 1 \\ 2x & si\ x < 1 \end{cases}$ $\quad$ ¿*existe* $\lim_{x\to 1} f(x)$?

3) $f(x) = \begin{cases} 7x-1 & si\ x < 2 \\ 5x+3 & si\ x > 2 \end{cases}$ $\quad$ ¿*existe* $\lim_{x\to 2} f(x)$? ¿f está definida en x = 2?

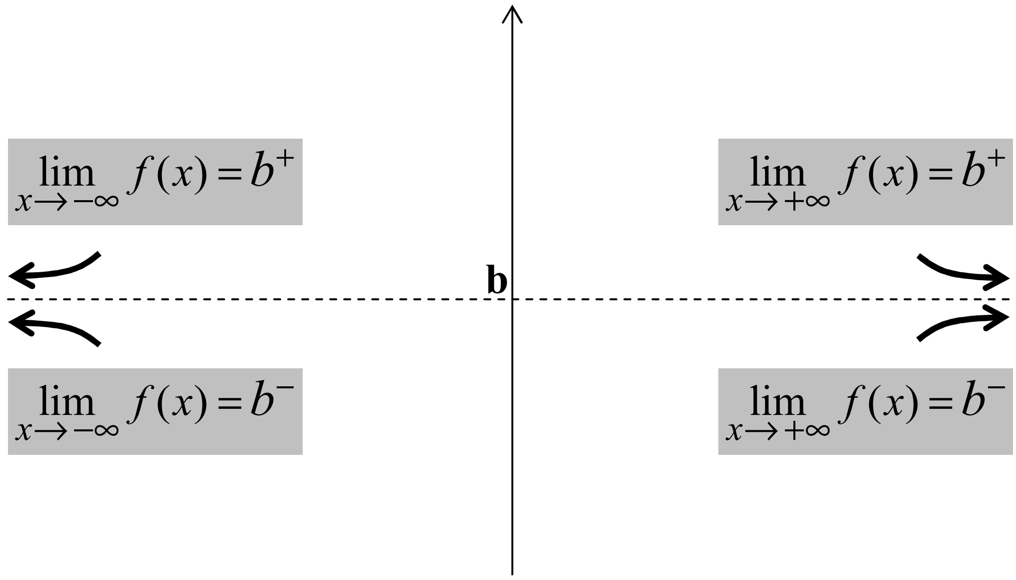
Límites con infinitos

Se dice que se está ante una situación de “límites con infinitos” cuando: $x \to \infty \quad y/o \quad \lim f(x) = \infty$

- *Límite finito de tendencia infinita (ASÍNTOTA HORIZONTAL)*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \iff Dado\ \varepsilon > 0\ \exists M < 0 / \forall x < M \Rightarrow f(x) \in E(b, \varepsilon)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \iff Dado\ \varepsilon > 0\ \exists M > 0 / \forall x > M \Rightarrow f(x) \in E(b, \varepsilon)$$



- *Límite infinito de tendencia finita (ASÍNTOTA VERTICAL)*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \iff Dado\ M > 0 \exists \delta > 0 / \forall x\ que\, cumple\ a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > M$$

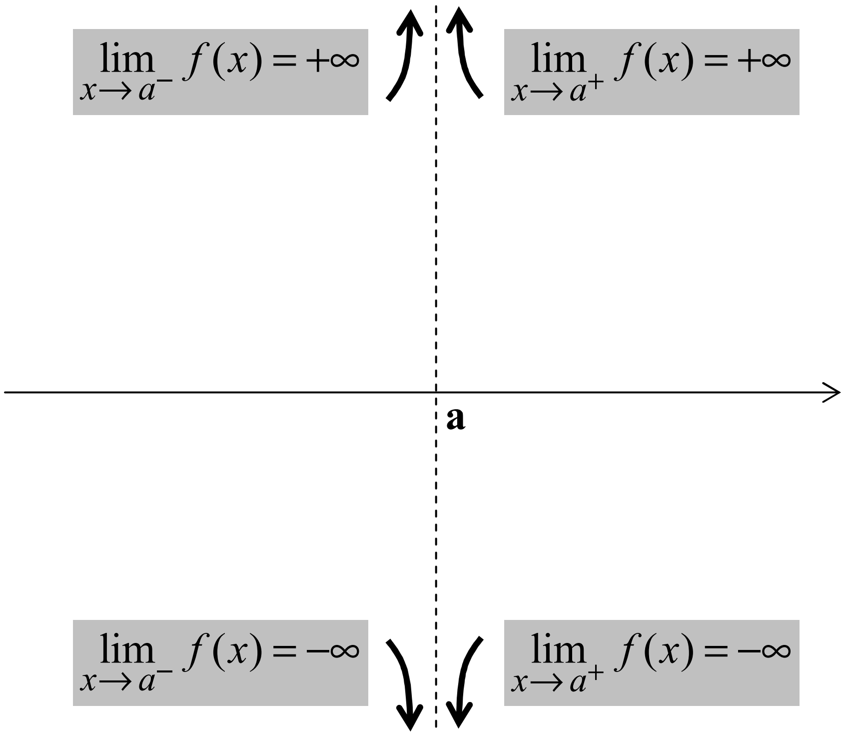
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \iff Dado\ M > 0 \exists \delta > 0 / \forall x\ que\, cumple\ a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff Dado\ M > 0 \exists \delta > 0 / \forall x \in E^*(a, \delta) \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \iff Dado\ M < 0 \exists \delta > 0 / \forall x\ que\, cumple\ a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < M$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \iff Dado\ M < 0 \exists \delta > 0 / \forall x\ que\, cumple\ a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < M$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff Dado\ M < 0 \exists \delta > 0 / \forall x \in E^*(a, \delta) \Rightarrow f(x) < M$$



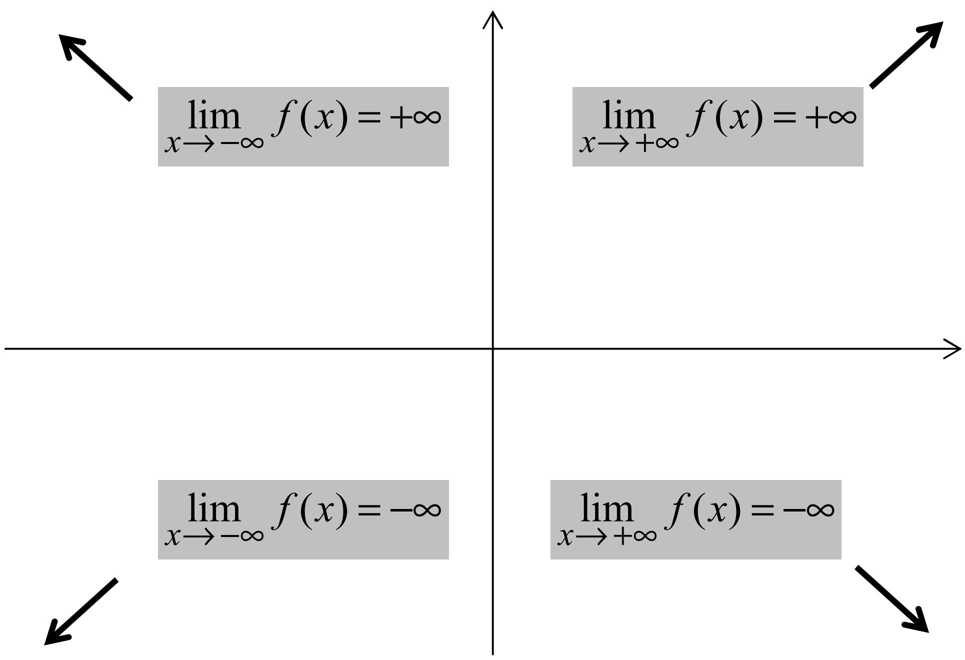
- *Límite infinito de tendencia infinita*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow Dado\ \ H > 0\, \exists M > 0 \,/\, \forall x > M \Rightarrow f(x) > H$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow Dado\ \ H > 0\, \exists M < 0 \,/\, \forall x < M \Rightarrow f(x) > H$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow Dado\ \ H < 0\, \exists M > 0 \,/\, \forall x > M \Rightarrow f(x) < H$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow Dado\ \ H < 0\, \exists M < 0 \,/\, \forall x < M \Rightarrow f(x) < H$$



$$\frac{k}{0}=? \qquad \frac{k}{\infty}=?$$

$$(k \neq 0)$$

$$\frac{k}{\to 0}=\begin{cases} +\infty & \text{si los límites laterales son } +\infty \\ -\infty & \text{si los límites laterales son } -\infty \\ \nexists & \text{si los límites laterales son } \infty \text{ de distinto signo} \end{cases}$$

$$\frac{+k}{0^+}=+\infty \qquad \frac{+k}{0^-}=-\infty$$

$$\frac{-k}{0^+}=-\infty \qquad \frac{-k}{0^-}=+\infty$$

$$\boxed{\frac{k}{\infty}=0}$$

ACLARO QUE EN LAS CONCLUSIONES ANTERIORES Y EN LA PARTE FINAL DE LA RESOLUCIÓN DE ALGUNOS DE LOS EJEMPLOS QUE SIGUEN, REALIZO "OPERACIONES" CON ∞ COMO SI FUERA UN NÚMERO. ESTO ES UN ABUSO DE NOTACIÓN , PERO QUE PROPORCIONA RESULTADOS INMEDIATOS Y VÁLIDOS.

<u>Límite de un Polinomio</u> (función polinómica)

- x tiende a un *número finito*:

El límite de un polinomio para $x \to número$ es igual al polinomio **evaluado en dicho número**.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^2-3x+1\right)=5(2)^2-3(2)+1=15$

- x tiende a *infinito*:

El límite de un polinomio para $x \to \infty$ es igual al límite del **término de mayor exponente**.

Ejemplos:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x^2-5x+6\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3\right)=-3(-\infty)^3=-3(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3+2x^2-5x+6\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3\right)=-3(+\infty)^3=-3(+\infty)=-\infty$$

Límite de un Cociente de Polinomios (función racional)

- x tiende a un *número finito*:

Se evalúan ambos polinomios en dicho número y luego se divide.

Ejemplos:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+6}{x^2-3x+3} = \frac{-1+6}{(-1)^2-3(-1)+3} = \frac{5}{7}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x}{-2x^2+10} = \frac{(5)^2-5(5)}{-2(5)^2+10} = \frac{0}{-40} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{6-5x}{2-x} = \frac{6-5(2)}{2-2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty \qquad \left(recordar\ \ que\ \frac{-k}{0^-} = +\infty \right)$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$ (se aplica Ruffini en N y/o D para luego cancelar un factor)

1) $$\lim_{x\to 2} \frac{5x^2+10x-40}{x^2+x-6} = \left]\frac{0}{0}\right[= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\,(5x+20)}{\cancel{(x-2)}\,(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{5x+20}{x+3} = \frac{30}{5} = 6$$

$(x - tendencia) = (x-2)$

RUFFINI *Num*:

	5	10	−40
2		10	40
	5	20	0

$\Rightarrow 5x+20$

Den:

	1	1	−6
2		2	6
	1	3	0

$\Rightarrow x+3$

2) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^2-1} = \left]\frac{0}{0}\right[= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\,(x^2-x-6)}{\cancel{(x-1)}\,(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x-6}{x+1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$(x - tendencia) = (x-1)$

RUFFINI *Num*:

	1	−2	−5	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

$\Rightarrow x^2-x-6$

Den:

	1	0	−1
1		1	1
	1	1	0

$\Rightarrow x+1$

3) $$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2-4x-6}{3x^2+6x+3} = \left]\frac{0}{0}\right[= \lim_{x\to -1^-} \frac{\cancel{(x+1)}\,(2x-6)}{\cancel{(x+1)}\,(3x+3)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x-6}{3x+3} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$$

$(x - tendencia) = (x-(-1)) = (x+1)$

RUFFINI *Num*:

	2	−4	−6
−1		−2	6
	2	−6	0

$\Rightarrow 2x-6$

Den:

	3	6	3
−1		−3	−3
	3	3	0

$\Rightarrow 3x+3$

- x tiende a *infinito*:

> Se sustituyen los polinomios por **sus términos de mayor exponente** y luego, si dá una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, se simplifican las x que hay en el numerador y denominador (la misma cantidad) hasta levantar la indeterminación.

Ejemplos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^2+x-6}{2x^2-3x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^2}{2x^2} = \left]\frac{\infty}{\infty}\right[= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = -\frac{5}{2}$$

$$\left(recordar\ \ que\ \frac{k}{\infty} = 0 \right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-8}{7x^2+x-9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-8}{7x^2} = \frac{-8}{7(-\infty)^2} = \frac{-8}{7(+\infty)} = \frac{-8}{+\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{-4x^3+3x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{-4x^3} = \frac{2}{-4(+\infty)^3} = \frac{2}{-4(+\infty)} = \frac{2}{-\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-7}{-5x^2+3x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{-5x^2} = \left]\frac{\infty}{\infty}\right[= \lim_{x\to-\infty} \frac{4\cancel{x}}{-5x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{-5x} = \frac{4}{-5(-\infty)} = \frac{4}{+\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-7}{-5x^2+3x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{-5x^2} = \left]\frac{\infty}{\infty}\right[= \lim_{x\to+\infty} \frac{4\cancel{x}}{-5x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{-5x} = \frac{4}{-5(+\infty)} = \frac{4}{-\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+5x-6}{2x-8} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2}{2x} = \left]\frac{\infty}{\infty}\right[= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{2} = \frac{-3(-\infty)}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+5x-6}{2x-8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{2x} = \left]\frac{\infty}{\infty}\right[= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{2} = \frac{-3(+\infty)}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

ALGUNAS "OPERACIONES" RESULTANTES DE LÍMITES

EN LA SUMA $(k \in R)$

$+\infty + k = +\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$\boxed{+\infty - \infty}$ *INDETERMINADO*

$-\infty + k = -\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$\boxed{-\infty + \infty}$ *INDETERMINADO*

EN LA MULTIPLICACIÓN $(k \in R)$

$k.\infty = \infty \quad (k \neq 0)$

$\infty.\infty = \infty$

$\boxed{0.\infty}$ *INDETERMINADO*

INDETERMINACIONES

POTENCIALES – EXPONENCIALES

$0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$

e^x	Lx
$e^0 = 1$	$L(1) = 0$
$e^{-\infty} = 0^+$	$L(0^+) = -\infty$
$e^{+\infty} = +\infty$	$L(+\infty) = +\infty$

EN LA DIVISIÓN $(k \in R)$

$\boxed{\dfrac{0}{0}}$ *INDETERMINADO*

$\dfrac{0}{k} = 0 \qquad (k \neq 0)$

$\dfrac{0}{\infty} = 0$

$(k \neq 0)$

$$\frac{k}{\to 0} = \begin{cases} +\infty & \text{si los límites laterales son } +\infty \\ -\infty & \text{si los límites laterales son } -\infty \\ \nexists & \text{si los límites laterales son } \infty \\ & \text{de distinto signo} \end{cases}$$

$\dfrac{+k}{0^+} = +\infty \qquad \dfrac{+k}{0^-} = -\infty$

$\dfrac{-k}{0^+} = -\infty \qquad \dfrac{-k}{0^-} = +\infty$

$\dfrac{k}{\infty} = 0$

$\dfrac{\infty}{k} = \infty$

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$ *INDETERMINADO*

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función f(x) es **continua en x = a** si y solo si se cumplen 3 condiciones:

- ✓ $f(a)$ existe y es finito $\left(\text{dicho de otra forma: } a \in D(f)\right)$
- ✓ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe y es finito
- ✓ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Observación:

Es decir que, si todo lo anterior se cumple y aplicando TFL, se obtiene:

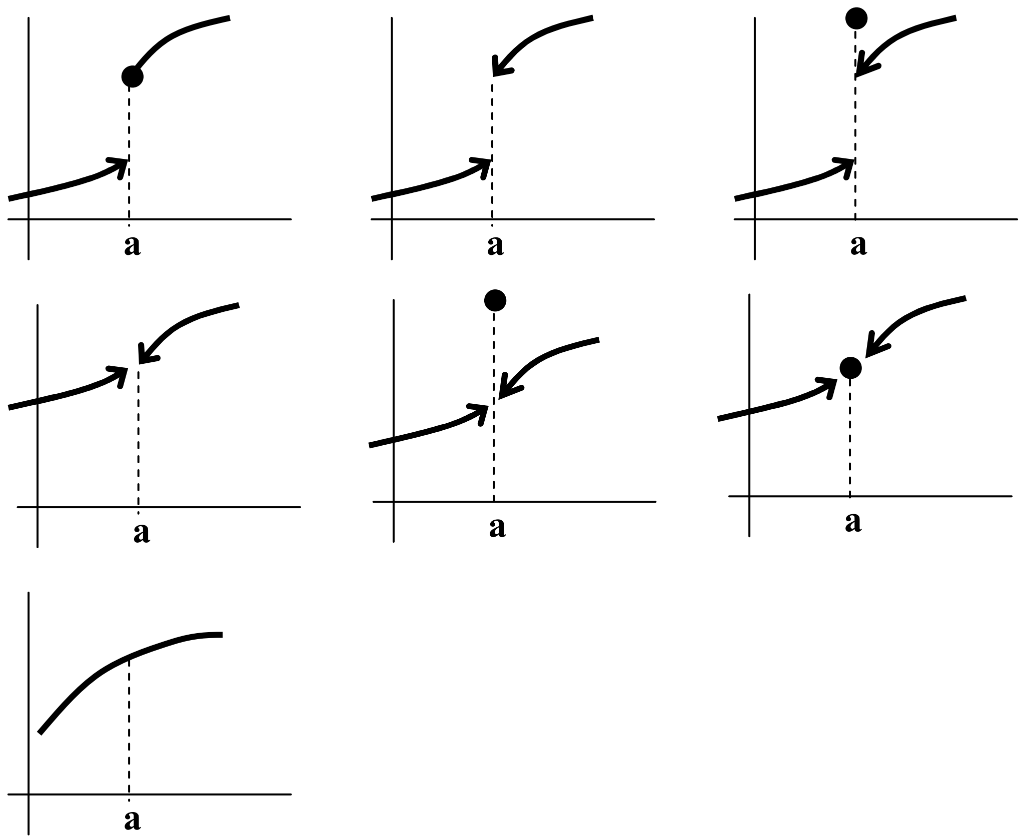
$$\text{f es continua en x = a} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Cabe aclarar que esto último <u>no es la definición de continuidad</u> , sino una consecuencia, una regla práctica obtenida a partir de la definición.

Ejemplos (análisis de todas las situaciones posibles para tendencia finita y límite no infinito)

Observando cada situación responder si $\begin{cases} \text{existe } \lim\limits_{x \to a} f(x) \\ \text{existe } f(a) \\ f(x) \text{ es continua en } x = a \end{cases}$

Sugerencia: Tener en cuenta TFL y la definición de continuidad en un punto.



Continuidad en un intervalo abierto

Una función f es continua en un **intervalo abierto (a,b)** si es continua en cada punto perteneciente al intervalo.

f es continua en (a,b) si es continua para todo x tal que $a<x<b$

Continuidad en un intervalo cerrado

Una función f es continua en un **intervalo cerrado [a,b]** si es continua en cada punto perteneciente al intervalo abierto y además es continua en **a** por la derecha y en **b** por la izquierda.

f es continua en [a,b] si es continua para todo x tal que $a<x<b$ y

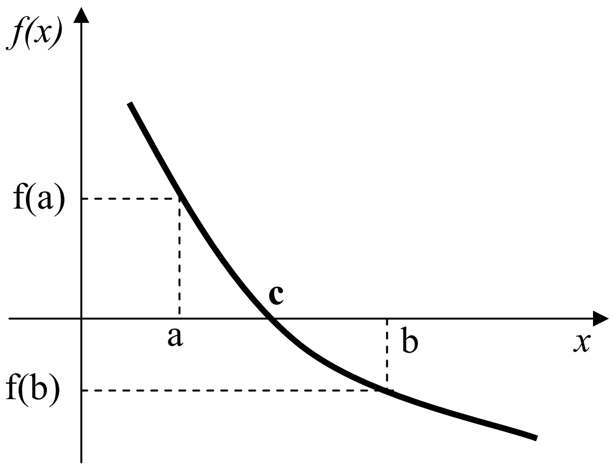
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

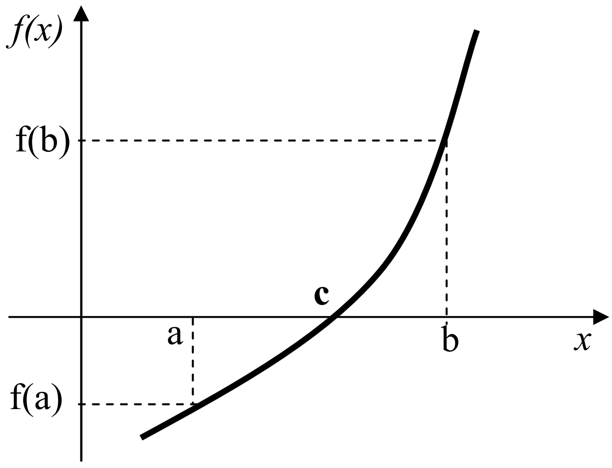
Teoremas sobre funciones Continuas

Teorema de Bolzano (Existencia de ceros)

H) f es continua en [a,b]
signo de f(a) $\neq$ signo de f(b) (otra forma de expresar lo anterior: f(a).f(b) < 0)

T) $\exists c \in (a,b) / f(c) = 0$





Observaciones:

1) El teorema no dice cuánto vale ese número c, solamente <u>indica su existencia</u>.
2) El teorema dice que existe <u>por lo menos</u> un c (pueden haber más de uno en (a,b)).
3) Que en la hipótesis se pida que f sea continua en [a,b] es <u>imprescindible</u>, ya que de no cumplirse dicha condición, la gráfica de la función podría no cortar al eje Ox en el intervalo considerado (es decir que no existiría c).

Ejemplos de aplicación:

1) Sea la función $f(x) = -5x^3 + 3x^2 + 8x - 4$ ¿f tiene algún cero en [0 , 1]?

$$\left.\begin{array}{l} \text{f es continua en } [0\,,\,1] \\ f(0) = -4 < 0 \\ f(1) = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ f en } [0\,,\,1] \text{ cumple con la hipótesis de Bolzano} \Rightarrow \text{ f tiene un cero en } (0\,,\,1)$$

2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ¿cumple con la hipótesis de Bolzano en [1 , 3]? ¿Y en [-2 , 0]? En caso afirmativo hallar ceros que pertenezcan al intervalo considerado.

$Dom(f) = R - \{2\}$

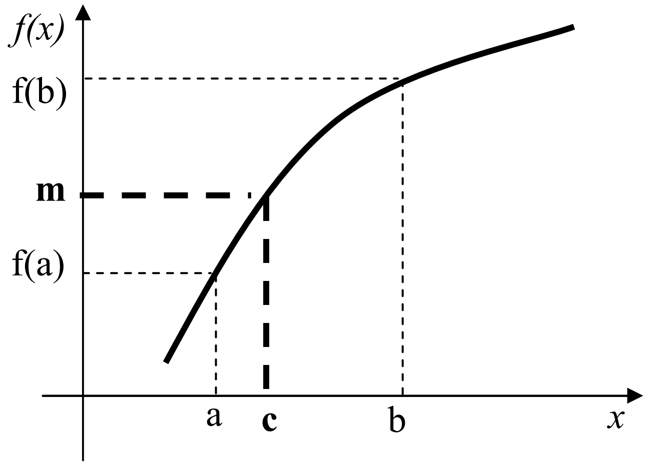
[1 , 3] f no es continua en [1 , 3] $\left(2 \notin Dom(f)\right)$ $\Rightarrow$ f en [1 , 3] NO cumple con la hipótesis de Bolzano

[-2 , 0]
$$\left.\begin{array}{l} \text{f es continua en } [-2\,,\,0] \\ f(-2) = 1/4 > 0 \\ f(0) = -1/2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ f en } [-2\,,\,0] \text{ cumple con la hipótesis de Bolzano} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f tiene un cero en (-2 , 0) (resolviendo el numerador se obtiene: $x = -1$)

Teorema de Darboux (Generalización del teorema de Bolzano)

H) f es continua en [a,b]
$f(a) \neq f(b)$
Sea m / f(a) < m < f(b)
T) $\exists c \in (a,b) / f(c) = m$



Demostración:

Sea la función auxiliar g(x) = f(x) – m
g(x) es continua en [a,b] por ser la resta de 2 funciones continuas en [a,b] (1)

Evaluando g en los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} g(a) \ = f(a) - m \\ por\ H : f(a) < m \Rightarrow f(a) - m < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(a) < 0$$

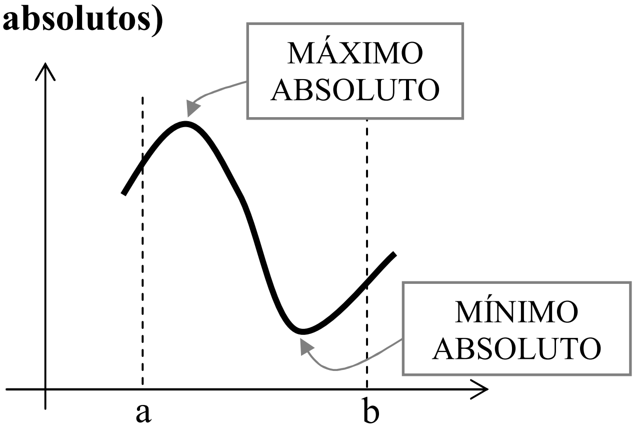
(2)

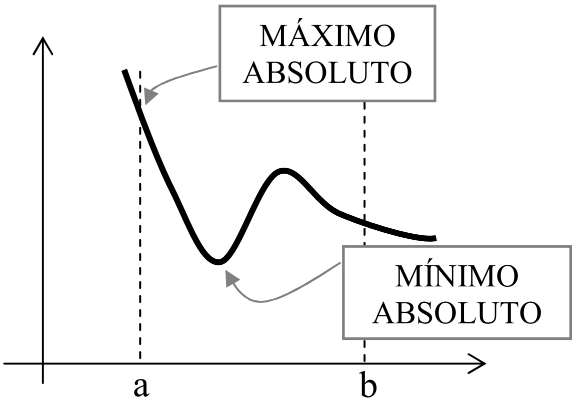
$$\left.\begin{array}{l} g(b) \ = f(b) - m \\ por\ H : f(b) > m \Rightarrow f(b) - m > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(b) > 0$$

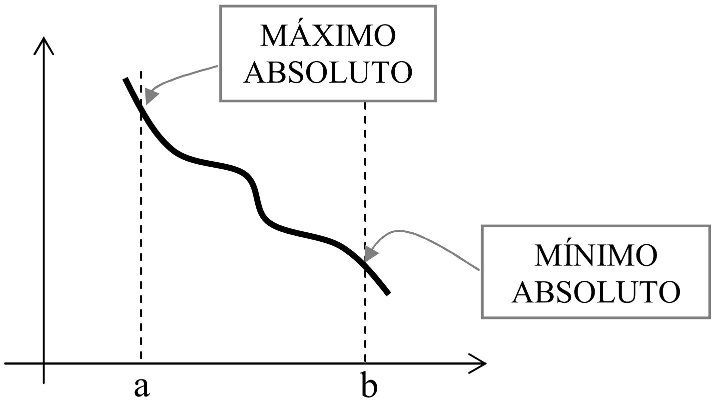
Por (1) y (2), *la función g cumple con la hipótesis del Teorema de Bolzano* $\Rightarrow \exists c \in (a,b) / g(c) = 0$
O sea que $f(c) - m = 0 \Rightarrow f(c) = m$

Teorema de Weierstrass (Existencia de extremos absolutos)

H) f es continua en [a,b]
T) f tiene máximo y mínimo absolutos en [a,b]



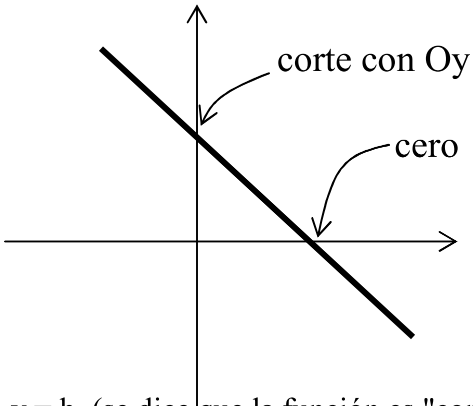




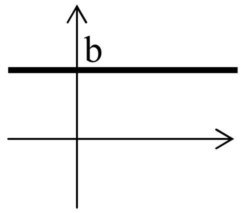
ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

Función Lineal

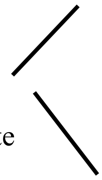
$$\boxed{f(x) = a\,x + b} \qquad a \in R,\ b \in R$$



- ✓ Representación Gráfica: **recta**
- ✓ Dominio: R
- ✓ Cero: $si\ a \begin{cases} = 0 & \Rightarrow \text{ recta horizontal } y = b \text{ (se dice que la función es "constante")} \\ \neq 0 & \Rightarrow \text{ recta oblicua que corta al eje 0x en } x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$

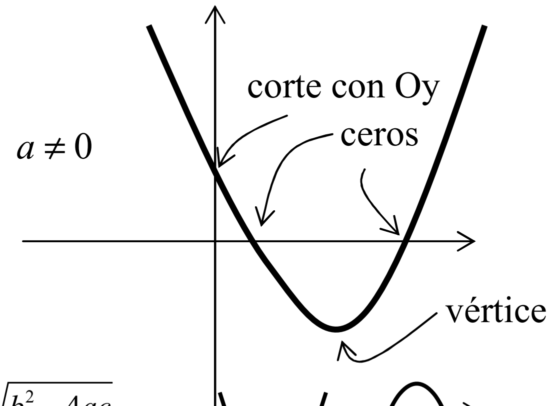


- ✓ Corte con 0y: y = b
- ✓ Crecimiento: $si\ a \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{ recta creciente} \\ < 0 & \Rightarrow \text{ recta decreciente} \end{cases}$



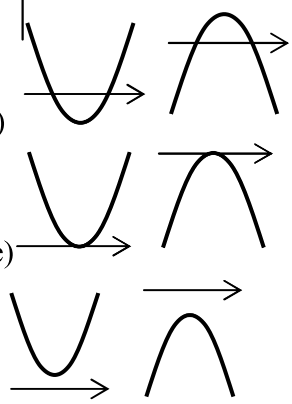
Función Cuadrática

$$\boxed{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c} \qquad a \in R,\ b \in R,\ c \in R,\ \ a \neq 0$$

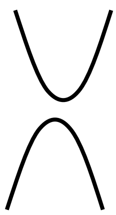


- ✓ Representación Gráfica: **parábola**
- ✓ Dominio: R
- ✓ Ceros:

$$si\ \ b^2 - 4ac \begin{cases} > 0 \ \Rightarrow \ \text{2 ceros} \qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \quad \text{(la parábola corta al eje 0x en 2 puntos distintos)} \\ = 0 \ \Rightarrow \ \text{1 cero doble} \qquad x = -\dfrac{b}{2a} \\ \quad \text{(la parábola corta al eje 0x en un solo punto: el vértice)} \\ < 0 \ \Rightarrow \ \text{no tiene ceros (la parábola no corta al eje 0x)} \end{cases}$$



- ✓ Corte con 0y: y = c
- ✓ Vértice: $x_V = -\dfrac{b}{2a} \qquad y_V = -\dfrac{b^2}{4a} + c$
- ✓ Concavidad: $si\ a \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{ positiva} \\ < 0 & \Rightarrow \text{ negativa} \end{cases}$



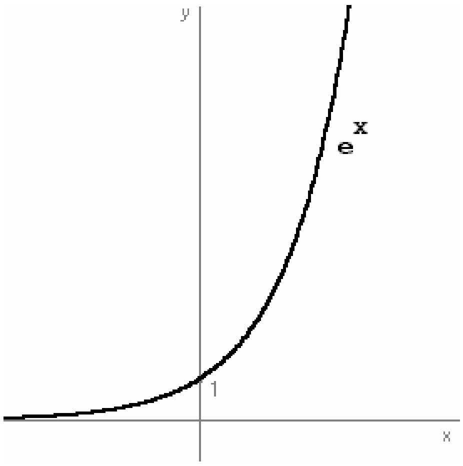
<u>Función Exponencial</u> (con base e)

¿Qué es el número **e**?
Es un número *irracional* cuyo valor es: e = 2,718281828459.......
Hay 2 formas de expresarlo como resultado de límites:

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$e = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

Sea la función $\boxed{f(x) = e^x}$

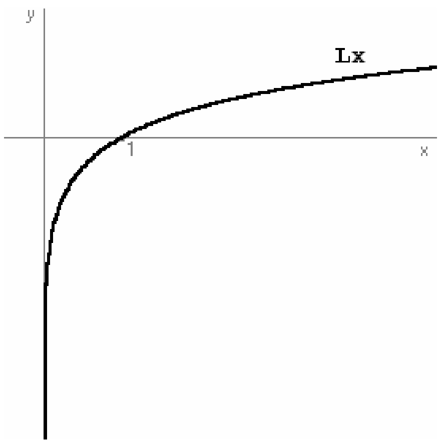


Características principales:

- ✓ Su dominio es R
- ✓ Es siempre positiva
- ✓ No tiene ceros
- ✓ Es siempre creciente (y en $(0,+\infty)$ crece muy rápidamente)
- ✓ $e^0 = 1$
- ✓ $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ (se suele resumir así: $e^{-\infty} = 0^+$)
- ✓ $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ (se suele resumir así: $e^{+\infty} = +\infty$)

<u>Función Logarítmica</u> (con base e)

Sea la función $\boxed{f(x) = L\,x}$ (aclaración: $L\,x = \log_e x$)



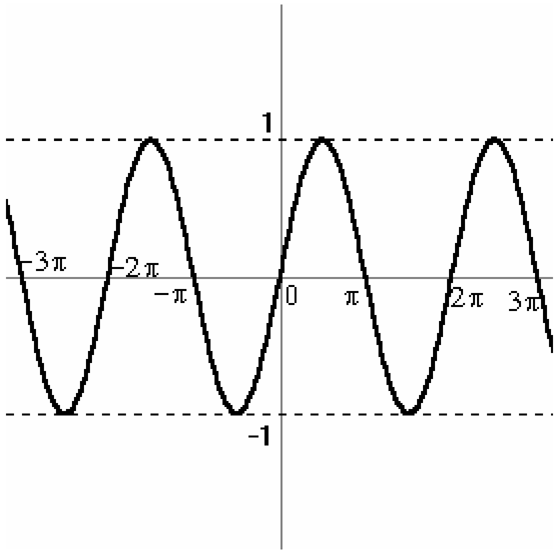
Características principales:

- ✓ Su dominio es R^+
- ✓ Es negativa en (0,1) y positiva en $(1,+\infty)$
- ✓ Tiene un cero en x = 1 (L(1) = 0)
- ✓ Es siempre creciente (y en $(1,+\infty)$ crece muy lentamente)
- ✓ $\lim_{x \to 0^+} L\,x = -\infty$ (se suele resumir así: $L(0^+) = -\infty$)
- ✓ $\lim_{x \to +\infty} L\,x = +\infty$ (se suele resumir así: $L(+\infty) = +\infty$)

Funciones Trigonométricas

Función Seno

$$\boxed{f(x) = sen\, x}$$

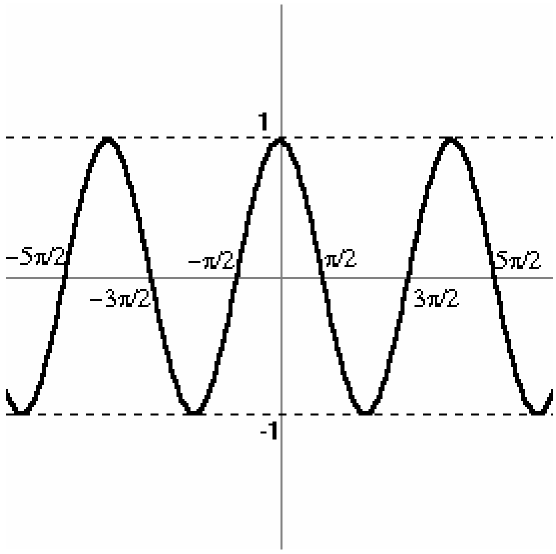


Características principales:

- ✓ Dominio = R
- ✓ Recorrido = [-1,1]
- ✓ Tiene ceros en $x = k\pi \qquad k \in Z$
- ✓ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} sen\, x \quad no\ existe$
- ✓ Es una función periódica de período 2π

Función Coseno

$$\boxed{f(x) = \cos x}$$

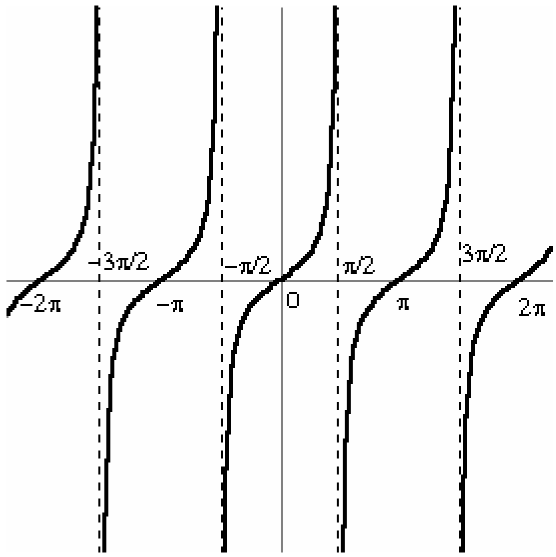


Características principales:

- ✓ Dominio = R
- ✓ Recorrido = [-1,1]
- ✓ Tiene ceros en $x = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi \qquad k \in Z$
- ✓ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \cos x \quad no\ existe$
- ✓ Es una función periódica de período 2π

Función Tangente

$$\boxed{f(x) = tg\, x \qquad \left(tg\, x = \frac{sen\, x}{\cos x} \quad \forall x / \cos x \neq 0 \right)}$$



Características principales:

- ✓ Dominio = $R - \left\{ \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi \quad k \in Z \right\}$
- ✓ Recorrido = R
- ✓ Tiene ceros en $x = k\pi \qquad k \in Z$
- ✓ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} tg\, x \quad no\ existe$
- ✓ Es una función periódica de período π

Infinitésimos

Una función f es un **infinitésimo** cuando $x \to a$ si y solo si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

(**a** puede ser finito o infinito, lo importante es que el límite valga 0)

Ejemplos: $\lim_{x \to 2} (x-2) = 0 \Rightarrow$ $x-2$ es un infinitésimo cuando x $\to$ 2

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}$ es un infinitésimo cuando x $\to +\infty$

Comparación de Infinitésimos: Orden de un infinitésimo

Dadas 2 funciones f y g que son *infinitésimos* cuando $x \to a$ $\left(\lim_{x \to a} f(x) = 0 \;\; y \;\; \lim_{x \to a} g(x) = 0\right)$
se compararán estos infinitésimos calculando *el límite del cociente*, para lo cual se debe admitir que $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E^*(a,\delta)$ (No confundir: lo que sí se cumple es que $g(x) \to 0$)

Por **orden de un infinitésimo** se entiende la *rapidez con que los valores de la función tienden a 0*. Un infinitésimo tiene mayor orden que otro si predomina como un 0 frente al otro infinitésimo.

Al comparar 2 infinitésimos solo puede ocurrir uno de los siguientes 4 casos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} k \neq 0 & \Rightarrow \quad \text{orden de f} = \text{orden de g} \quad (*) \\ 0 & \Rightarrow \quad \text{orden de f} > \text{orden de g} \\ \infty & \Rightarrow \quad \text{orden de f} < \text{orden de g} \\ \nexists & \Rightarrow \quad \text{f y g no son comparables} \end{cases}$$

(*) En el caso particular k = 1, además se dice que f y g son equivalentes

Es decir que: Se dice que f y g son *infinitésimos equivalentes* si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Se suele expresar también de otra forma: $f \underset{x \to a}{\sim} g$ ($\sim$ significa "equivalente a")

Ejemplos:

1) $\lim_{x \to 2} 5(x-2)^2 = 0$ $\qquad \lim_{x \to 2} \frac{5\,\cancel{(x-2)^2}}{\cancel{(x-2)^2}} = 5 \Rightarrow$ orden de $5(x-2)^2 =$ orden de $(x-2)^2$ cuando x $\to$ 2

$\lim_{x \to 2} (x-2)^2 = 0$

2) $\lim_{x \to 2} (x-2)^2 = 0$ $\qquad \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} (x-2) = 0 \Rightarrow$ orden de $(x-2)^2 >$ orden de $(x-2)$ cuando x $\to$ 2

$\lim_{x \to 2} (x-2) = 0$

3) $\lim_{x \to 2} (x-2) = 0$ $\qquad \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{3}}} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$ orden de $(x-2) <$ orden de $(x-2)^3$ cuando x $\to$ 2

$\lim_{x \to 2} (x-2)^3 = 0$

4) $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}.sg(x)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} sg(x) \nexists \Rightarrow |x|$ y x no son comparables cuando x $\to$ 0

$\lim_{x \to 0} x = 0$

Límites Tipo

Son cocientes del tipo $\frac{0}{0}$, es decir *cocientes de infinitésimos*.

Límite Tipo Exponencial: $\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1}$

Demostración:

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}}\right]-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1$$

O sea que: $\underset{si\ x\to 0}{e^x-1\sim x}$

$$\boxed{\underset{si\ u\to 0}{e^u-1\sim u}}$$

Se suele utilizar la versión general de la equivalencia anterior:
(Obsérvese que "u" es una expresión que depende de x y que lo que importa es que **u tienda a 0**, no que x tienda a 0)

$$\boxed{\underset{si\ u\to 0}{a^u-1\sim u\,L(a)}}$$

Además existe una equivalencia exponencial más general aún que la anterior ya que sirve para cualquier base (no solo e) siempre y cuando a > 0:

Ejemplo: $u=4x-4\to 0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{4x-4}-1}{x^2-1}=\left]\frac{0}{0}\right[=\lim_{x\to 1}\frac{4x-4}{x^2-1}=\left]\frac{0}{0}\right[=\lim_{x\to 1}\frac{4\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{x+1}=2$$

Límite Tipo Logarítmico: $\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\frac{Lx}{x-1}\right)=1}$

Demostración:

$$CV: z=x-1\Rightarrow\begin{cases}x=1+z\\ z\to 0\ \ (cuando\ x\to 1)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{Lx}{x-1}=\lim_{z\to 0}\frac{L(1+z)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}L(1+z)=\lim_{z\to 0}L\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]=L\,e=1$$

Propiedad de logaritmo

O sea que: $\underset{si\ x\to 1}{Lx \sim x-1}$

Se suele utilizar la versión general de la equivalencia anterior:
(Obsérvese que "u" es una expresión que depende de x y que lo que importa es que **u tienda a 1**, no que x tienda a 1)

$$\boxed{\underset{si\ u\to 1}{L(u) \sim u-1}}$$

Ejemplo:

$$u = 2x-3 \to 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{L(2x-3)}{x^2-4} = \left]\frac{0}{0}\right[= \lim_{x\to 2^+} \frac{(2x-3)-1}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-4}{x^2-4} = \left]\frac{0}{0}\right[= \lim_{x\to 2^+} \frac{2\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x+2} = 0,5$$

Límite Tipo Potencial:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^n-1}{n(x-1)}\right) = 1 \qquad n \neq 0}$$

Demostración:

Se aplica Ruffini en el numerador (1 es raíz de x^n-1):

	n	$n-1$	$n-2$	...	2	1	0
	1	0	0	...	0	0	-1
1		1	1	...	1	1	1
	1	1	1	...	1	1	0

$\downarrow$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{n(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\left(x^{n-1}+x^{n-2}+.....+x+1\right)}{n\,\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{n}\lim_{x\to 1}\left(x^{n-1}+x^{n-2}+.....+x+1\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(1^{n-1}+1^{n-2}+.....+1+1\right) = \frac{1}{n}\overbrace{(1+1+.....+1+1)}^{n\ veces} = \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n} = 1$$

O sea que: $\underset{si\ x\to 1}{x^n - 1 \sim n(x-1)}$

Se suele utilizar la versión general de la equivalencia anterior:
(Obsérvese que "u" es una expresión que depende de x y que lo que importa es que **u tienda a 1**, no que x tienda a 1)

$$\boxed{\underset{si\ u\to 1}{u^n-1 \sim n(u-1)}}$$

Ejemplo: $n=5$; $u = x-2 \to 1$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-2)^5-1}{x-3} = \left]\frac{0}{0}\right[= \lim_{x\to 3} \frac{5((x-2)-1)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{5(x-3)}{x-3} = \left]\frac{0}{0}\right[= \lim_{x\to 3} \frac{5\,\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = 5$$

Límite Tipo de Seno: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1}$

(Acá no se demuestra)

O sea que: $\underset{si\ x\to 0}{sen\,x \sim x}$

Se suele utilizar la versión general de la equivalencia anterior:
(Obsérvese que "u" es una expresión que depende de x y que lo que importa es que **u tienda a 0**, no que x tienda a 0)

$$\boxed{\underset{si\ u\to 0}{sen\,u \sim u}}$$

Límite Tipo de Tangente: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1}$

Demostración:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x.\cos x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}}_{=1\,(LT\ Seno)}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\underbrace{\cos x}_{\to 1}}=1.1=1$$

O sea que: $\underset{si\ x\to 0}{tg\,x \sim x}$

Se suele utilizar la versión general de la equivalencia anterior:
(Obsérvese que "u" es una expresión que depende de x y que lo que importa es que **u tienda a 0**, no que x tienda a 0)

$$\boxed{\underset{si\ u\to 0}{tg\,u \sim u}}$$

Límite Tipo de Coseno: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=1}$

Demostración:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\left(x^2/2\right)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\left(x^2/2\right)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{\left(x^2/2\right)(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x^2.\frac{1+\cos x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x.sen\,x.2}{x.x.(1+\cos x)}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}}_{=1\,(LT\ Seno)}.\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}}_{=1\,(LT\ Seno)}.\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+\underbrace{\cos x}_{\to 1}}=1.1.\frac{2}{2}=1$$

O sea que: $\underset{si\ x\to 0}{1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}}$

Se suele utilizar la versión general de la equivalencia anterior:
(Obsérvese que "u" es una expresión que depende de x y que lo que importa es que **u tienda a 0**, no que x tienda a 0)

$$\boxed{\underset{si\ u\to 0}{1-\cos u \sim \frac{u^2}{2}}}$$

Infinitos

Una función f es un **infinito** cuando $x \to a$ si y solo si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

(**a** puede ser finito o infinito, lo importante es que el límite valga ∞)

Ejemplos: $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{1}{x-5} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x-5}$ es un infinito cuando x $\to 5^-$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \quad \Rightarrow \quad x^2$ es un infinito cuando x $\to +\infty$

Comparación de Infinitos: Orden de un infinito

Dadas 2 funciones f y g que son *infinitos* cuando $x \to a$ $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \;\; y \;\; \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty\right)$ se compararán estos infinitos calculando *el límite del cociente*.

Por **orden de un infinito** se entiende la *rapidez con que los valores de la función tienden a* ∞. Un infinito tiene mayor orden que otro si predomina frente a él.

Al comparar 2 infinitos solo puede ocurrir uno de los siguientes 4 casos:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} k \neq 0 & \Rightarrow \quad \text{orden de f} = \text{orden de g} \quad (*) \\ 0 & \Rightarrow \quad \text{orden de f} < \text{orden de g} \\ \infty & \Rightarrow \quad \text{orden de f} > \text{orden de g} \\ \nexists & \Rightarrow \quad \text{f y g no son comparables} \end{cases}$$

(*) En el caso particular k = 1, además se dice que f y g son equivalentes

Es decir que: Se dice que f y g son *infinitos equivalentes* si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Se suele expresar también de otra forma: $\underset{x\to a}{f \sim g}$ ($\sim$ significa "equivalente a")

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} 5x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5\cancel{x}}{\cancel{x}} = 5 \Rightarrow$ orden de 5x = orden de x cuando x $\to +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ orden de $x <$ orden de x^2 cuando x $\to +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \Rightarrow$ orden de $x^2 >$ orden de x cuando x $\to +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x.sen(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x}.sen(x)}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} sen(x) \; \nexists \Rightarrow x.sen(x)$ y x

$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ $\qquad$ no son comparables cuando x $\to +\infty$

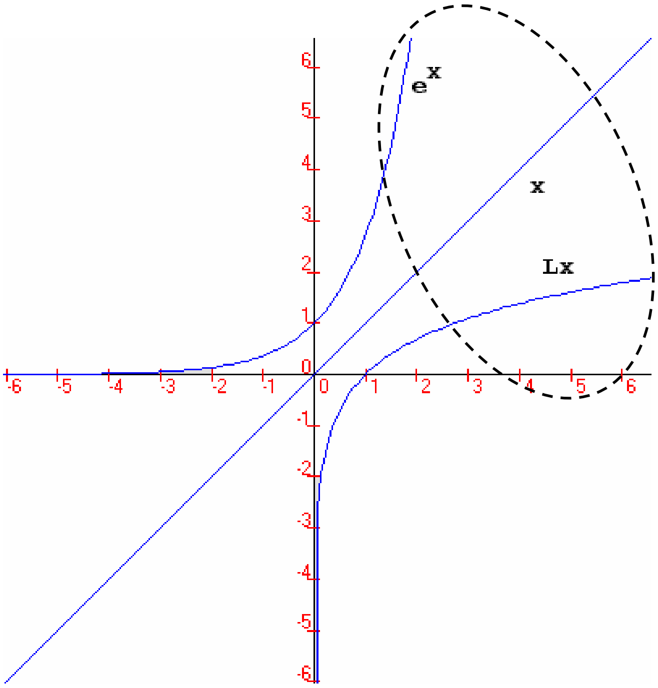
Infinitos Fundamentales

Son infinitos muy utilizados.

$\forall n \in R^{+}$:		
Infinito Exponencial:	$\left(e^{x}\right)^{n}$	Son infinitos sólo cuando $x \rightarrow +\infty$
Infinito Logarítmico:	$(L\,x)^{n}$	
Infinito Potencial:	x^{n}	

Comparación del orden de los infinitos fundamentales

Para facilitar la visualización mediante las representaciones gráficas de las funciones anteriores, se considerará **n = 1**



$$\boxed{x \rightarrow +\infty}$$

Recordando lo visto en "Comparación de Infinitos: Orden de un infinito", se puede observar que cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$orden\left[e^{x}\right] > orden[x] > orden[L\,x]$$

Está demostrado que lo anterior (ahora considerando n) puede generalizarse a lo siguiente:

$$orden\left[\left(e^{x}\right)^{n}\right] > orden\left[x^{n}\right] > orden\left[(L\,x)^{n}\right] \qquad \forall n \in R^{+}$$

Resumiendo (regla práctica):

$$\boxed{orden(\infty \text{ exponencial}) > orden(\infty \text{ potencial}) > orden(\infty \text{ logarítmico})}$$

Téngase en cuenta que **todas estas conclusiones son válidas solo cuando** $x \to +\infty$

Ejemplos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = \left]\frac{\infty}{\infty}\right[= \frac{+\infty \exp}{+\infty\ pot} = +\infty \qquad orden(\infty \text{ exp}) > orden(\infty \text{ pot})$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Lx}{x^2} = \left]\frac{\infty}{\infty}\right[= \frac{+\infty \log}{+\infty\ pot} = 0^+ \qquad orden(\infty \text{ log}) < orden(\infty \text{ pot})$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{Lx} = \left]\frac{\infty}{\infty}\right[= \frac{+\infty\ pot}{+\infty \log} = +\infty \qquad orden(\infty \text{ pot}) > orden(\infty \text{ log})$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{L(x^8+3x^2-6)}{-5e^{3x+2}} = \left]\frac{\infty}{\infty}\right[= \lim_{x\to+\infty} \frac{L(x^8)}{-5e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8L(x)}{-5e^{3x}} = \frac{+\infty \log}{-\infty \exp} = 0^- \qquad orden(\infty \text{ log}) < orden(\infty \text{ exp})$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+17}}{-x^3+2x^2-8} = \left]\frac{\infty}{\infty}\right[= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-x^3} = \frac{+\infty \exp}{-\infty\ pot} = -\infty \qquad orden(\infty \text{ exp}) > orden(\infty\ pot)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{L(x^{10}+30x)} = \left]\frac{\infty}{\infty}\right[= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{L(x^{10})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{10L(x)} = \frac{+\infty\ pot}{+\infty \log} = +\infty \qquad orden(\infty\ pot) > orden(\infty \text{ log})$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Sea una función **f(x)** y **a** un valor del dominio de f $(a \in D(f))$

Si existe y es finito el límite: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, a ese valor se le llama **derivada de f en x = a**, y se escribe así:

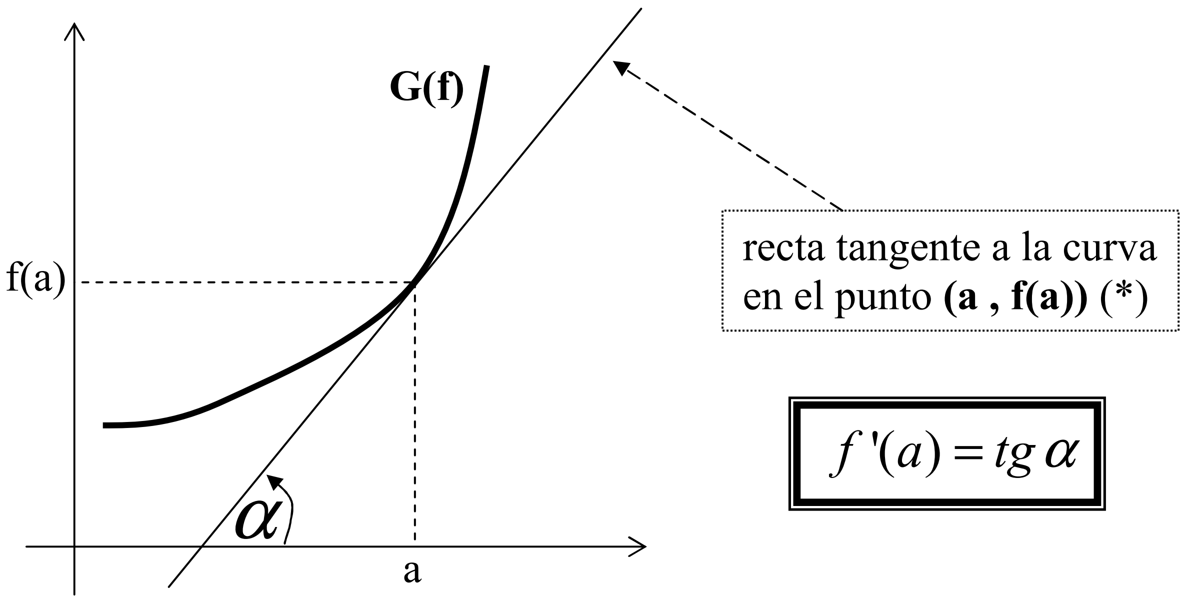
$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Observaciones:

1) $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se llama *cociente incremental*, por lo que es común decir que la derivada es *el límite del cociente incremental*.

2) *Interpretación geométrica*

La derivada de una función en un punto **<u>es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto</u>**.
También, en lugar de *pendiente*, se suele usar el término *coeficiente angular*.
Primero que todo hay que aclarar que la pendiente de una recta es un <u>número</u>. Es la tangente trigonométrica del ángulo que forma dicha recta con el eje x (considerando el ángulo que va desde el eje x hacia la recta en sentido *antihorario*).



$$\boxed{f'(a) = tg\,\alpha}$$

(*) La ecuación de dicha recta se expresa de la siguiente forma: $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

Ejemplos (aplicación directa de definición de derivada en un punto):

1) $f(x)=x^2$ Calcular f '(3)

En este caso: $f(x)=x^2$

$a=3$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3^2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\left]\frac{0}{0}\right[\overset{Ruffini}{=}\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

2) Calcular la pendiente de la recta tangente a la gáfica de la función $g(x)=5-x^2$ en el punto (2 , 1)

En este caso: $g(x)=5-x^2$

$a=2$ $g(a)=1$

$$g'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(5-x^2)-(1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-x^2+4}{x-2}=\left]\frac{0}{0}\right[\overset{Ruffini}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(-x-2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}(-x-2)=-4$$

Teoremas sobre derivadas

En todos los casos se supone que las funciones f y g son *derivables* (ver tema siguiente) en x.

1. Derivada de una constante

La derivada de una constante es cero.

$H)\ f(x) = k$

$T)\ f'(x) = 0$

$Demostración:$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{k-k}{x-a} = \frac{0}{\to 0} = 0$$

Como a representa a un x cualquiera: $f'(x) = 0$

Resumiendo: $\boxed{k' = 0}$

2. Derivada de una constante por una función

La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

$H)\ j(x) = k.f(x) \quad (k \in R)$

$T)\ j'(x) = k.f'(x)$

$Demostración:$

$$j'(a) = \lim_{x\to a} \frac{j(x)-j(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{k.f(x)-k.f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{k.\left(f(x)-f(a)\right)}{x-a} =$$

$$= k.\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k.f'(a)$$

Como a representa a un x cualquiera: $j'(x) = k.f'(x)$

Resumiendo: $\boxed{(k.f)' = k.f'}$

3. Derivada de una suma de funciones

La derivada de una suma (resta) de funciones es igual a la suma (resta) de las derivadas de cada una de las funciones.

$H)\ j(x)\ = f(x)\ \pm\ g(x)$

$T)\ j'(x)\ = f'(x)\ \pm\ g'(x)$

$Demostración\ (para\ la\ suma):$

$$j'(a) = \lim_{x\to a}\frac{j(x)-j(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\left(f(x)+g(x)\right)-\left(f(a)+g(a)\right)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a)$$

Como a representa a un x cualquiera: $j'(x) = f'(x)+g'(x)$

Resumiendo: $\boxed{\left(f+g\right)' = f'+g'}$ *Generalizando:* $\left(f+g+h+...\right)' = f'+g'+h'+...$

4. Derivada de un producto de funciones

La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada del primer factor por el segundo factor más el primer factor por la derivada del segundo factor.

$H)\ j(x)\ = f(x).g(x)$

$T)\ j'(x)\ = f'(x).g(x)\ + f(x).g'(x)$

$Demostración\ \ (\ se\ suma\ y\ resta\ en\ el\ numerador\ \ f(x).g(a)\ ):$

$$j'(a) = \lim_{x\to a}\frac{j(x)-j(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\left(f(x).g(x)\right)-\left(f(a).g(a)\right)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x).g(x)-f(a).g(a)+f(x).g(a)-f(x).g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x).g(x)-f(x).g(a)+f(x).g(a)-f(a).g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x).\left(g(x)-g(a)\right)+g(a)\left(f(x)-f(a)\right)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\left(f(x).\frac{\left(g(x)-g(a)\right)}{x-a}+g(a).\frac{\left(f(x)-f(a)\right)}{x-a}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} g(a).\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$$

$$= f(a).g'(a)+g(a).f'(a) = f'(a).g(a)+f(a).g'(a)$$

Como a representa a un x cualquiera: $j'(x) = f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

Resumiendo: $\boxed{\left(f.g\right)' = f'.g+f.g'}$ $Generalizando:\ \left(f.g.h\right)' = f'.g.h+f.g'.h+f.g.h'$

5. Derivada de un cociente de funciones

La derivada de un cociente de funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el denominador al cuadrado (si este es distinto de cero).

$H)\ j(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad (g(x)\neq 0 \text{ en un entorno de } x)$

$T)\ j'(x)=\dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Demostración (*se suma y resta en el numerador* $f(x).g(x)$):

$$j'(a)=\lim_{x\to a}\frac{j(x)-j(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(a)}{g(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x).g(a)}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x).g(a).(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x)}{g(x).g(a).(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)\big(f(x)-f(a)\big)-f(x)\big(g(x)-g(a)\big)}{g(x).g(a).(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{g(x)\big(f(x)-f(a)\big)}{g(x).g(a).(x-a)}-\frac{f(x)\big(g(x)-g(a)\big)}{g(x).g(a).(x-a)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{g(x).g(a)}.\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x).g(a)}.\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=$$

$$=\frac{g(a)}{g^2(a)}.f'(a)-\frac{f(a)}{g^2(a)}.g'(a)=\frac{g(a).f'(a)}{g^2(a)}-\frac{f(a).g'(a)}{g^2(a)}=\frac{f'(a).g(a)-f(a).g'(a)}{g^2(a)}$$

Como a representa a un x cualquiera: $j'(x)=\dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Resumiendo: $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'.g-f.g'}{g^2}}$

6. Derivada de una función potencial-exponencial

$H)\ h(x) = f(x)^{g(x)}$

$T)\ h' = f^g . \left(\frac{f'}{f} . g + g' . Lf \right)$ (se obviaron las x)

Demostración:

Tomando logaritmos: $L(h) = L(f^g)$

Aplicando una propiedad del logaritmo: $L(h) = g.Lf$

Derivando: $(L(h))' = (g.Lf)'$

$$\frac{h'}{h} = g'.Lf + g.\frac{f'}{f}$$

Despejando h' : $h' = h.\left(g'.Lf + g.\frac{f'}{f} \right)$

Sustituyendo h por su valor: $h' = f^g.\left(g'.Lf + g.\frac{f'}{f} \right)$

Reordenando: $h' = f^g.\left(\frac{f'}{f}.g + g'.Lf \right)$

Resumiendo:

$$\boxed{\left(f^g\right)' = f^g.\left(\frac{f'}{f}.g + g'.Lf \right)}$$

Ejemplo:

$$\left(x^x\right)' = x^x.\left(\frac{x'}{\cancel{x}}.\cancel{x} + x'.Lx \right) = x^x.(1 + 1.Lx) = x^x.(1 + Lx)$$

7. Derivada de una función compuesta

La derivada de una función compuesta f(g(x)) es igual a la derivada de la función f con respecto a g por la derivada de la función g con respecto a x.

$H)\ F(x) = f(g(x))$ (g es derivable en x = a y f es derivable en g(x) = g(a))

$T)\ F'(x) = f'(g(x)).g'(x)$

Demostración:

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}.\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \quad (1)$$

g es derivable en x = a $\Rightarrow$ g es continua en x = a $\Rightarrow$ g(x) $\to$ g(a) cuando x $\to$ a

Entonces: $(1) = \underbrace{\lim_{g(x)\to g(a)} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}}_{=f'(g(a))}.\underbrace{\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{=g'(a)} = f'(g(a)).g'(a)$

Como a representa a un x cualquiera: $F'(x) = f'(g(x)).g'(x)$

Resumiendo: $\boxed{\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)).g'(x)}$ *Regla de la cadena*

Ejemplo:

$f(x) = x^2$

$g(x) = L\,x$

$F(x) = f(g(x)) = f(L\,x) = \left(L\,x\right)^2$

$F'(x) = f'(g(x)).g'(x) = f'(L\,x).(L\,x)' = (2.L\,x).\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2L\,x}{x}$

8. Derivada de una función inversa

Si f es una función estrictamente creciente o decreciente en un intervalo [a,b], si existe f' y no se anula en algún $c \in (a,b)$, entonces la derivada de la inversa de f también existe y no es nula.

$H)\ F(x) = f^{-1}(x)$

$T)\ F'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Demostración:

Aplicando una propiedad de la función inversa: $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$

Derivando ambos miembros de la igualdad: $\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]' = x'$

Aplicando la derivada de una función compuesta: $f'\left(f^{-1}(x)\right).\left(f^{-1}\right)'(x) = 1$

Despejando: $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Resumiendo:

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Ejemplo:

$f(x) = sen\, x$

$f^{-1}(x) = arcsen\, x$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{sen'\left(arcsen\, x\right)} = \frac{1}{\cos\left(arcsen\, x\right)} \quad (1)$$

Aplicando la fórmula trigonométrica fundamental:

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1 \;\Rightarrow\; \cos x = \sqrt{1 - sen^2 x} \;\Rightarrow\; \cos(arcsen\, x) = \sqrt{1 - (\underbrace{sen(arcsen\, x)}_{x})^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

Entonces: $(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \left(arcsen\right)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Cálculo de la derivada de algunas funciones de uso frecuente

Derivada de la función Potencial

$f(x) = x^n \qquad (n \in R)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{a^n\left(\frac{x^n}{a^n} - 1\right)}{x - a} = a^n . \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n - 1}{x - a} \qquad (*)$$

Aplicando Límite Tipo Potencial, donde u = $\frac{x}{a}$: $\left(\frac{x}{a}\right)^n - 1 \sim n\left(\frac{x}{a} - 1\right)$

Entonces: $(*) = a^n . \lim_{x \to a} \frac{n\left(\frac{x}{a} - 1\right)}{x - a} = a^n . \lim_{x \to a} \frac{n\left(\frac{x-a}{a}\right)}{x - a} = a^n . \lim_{x \to a} \frac{n\cancel{(x-a)}}{a\cancel{(x-a)}} =$

$$= a^n . \frac{n}{a} = n . \frac{a^n}{a} = n.a^{n-1}$$

Como a representa a un x cualquiera: $f'(x) = n.x^{n-1}$

Resumiendo: $\boxed{\left(x^n\right)' = n.x^{n-1}}$

*Ejemplos de aplicación de esta fórmula (recuérdese que n es un **real** cualquiera):*

$(x)' = \left(x^1\right)' = 1.x^{1-1} = 1.x^0 = 1.1 = 1$

$\left(x^2\right)' = 2.x^{2-1} = 2.x^1 = 2.x$

$\left(x^3\right)' = 3.x^{3-1} = 3.x^2$

....

$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-1-1} = (-1)x^{-2} = (-1)\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

....

$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} = \left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1} = \left(\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Cómo derivar una función polinómica (su expresión es un polinomio)

Ejemplos paso a paso:

$$(2x-3)' \overset{T3}{=} (2x)'+(-3)' \overset{T2}{=} 2(x)'+(-3)' \overset{DFP\ y\ T1}{=} 2(1)+0=\boxed{2}$$

$$(-3x^2+5x+2)' \overset{T3}{=} (-3x^2)'+(5x)'+(2)' \overset{T2}{=} -3(x^2)'+5(x)'+(2)' \overset{DFP\ y\ T1}{=} -3(2x)+5(1)+0=\boxed{-6x+5}$$

$$(4x^5-3x^3+6x^2-2x+14)' \overset{T3}{=} (4x^5)'+(-3x^3)'+(6x^2)'+(-2x)'+(14)' \overset{T2}{=} 4(x^5)'-3(x^3)'+6(x^2)'-2(x)'+(14)'=$$

$$\overset{DFP\ y\ T1}{=} 4(5x^4)-3(3x^2)+6(2x)-2(1)+0=\boxed{20x^4-9x^2+12x-2}$$

Cómo derivar una función racional (su expresión es un cociente de polinomios)

Ejemplos paso a paso:
(se derivan los polinomios sin especificar los pasos intermedios vistos anteriormente)

$$\left(\frac{3x^2+4x-2}{x^2-5x}\right)' \overset{T5}{=} \frac{(3x^2+4x-2)'(x^2-5x)-(3x^2+4x-2)(x^2-5x)'}{(x^2-5x)^2}=$$

$$=\frac{(6x+4)(x^2-5x)-(3x^2+4x-2)(2x-5)}{(x^2-5x)^2}=\frac{6x^3-30x^2+4x^2-20x-(6x^3-15x^2+8x^2-20x-4x+10)}{(x^2-5x)^2}=$$

$$=\frac{6x^3-26x^2-20x-(6x^3-7x^2-24x+10)}{(x^2-5x)^2}=\frac{\cancel{6x^3}-26x^2-20x\cancel{-6x^3}+7x^2+24x-10}{(x^2-5x)^2}=\boxed{\frac{-19x^2+4x-10}{(x^2-5x)^2}}$$

$$\left(\frac{5x-4}{2x+3}\right)' \overset{T5}{=} \frac{(5x-4)'(2x+3)-(5x-4)(2x+3)'}{(2x+3)^2}=\frac{(5)(2x+3)-(5x-4)(2)}{(2x+3)^2}=\frac{10x+15-(10x-8)}{(2x+3)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{10x}+15\cancel{-10x}+8}{(2x+3)^2}=\boxed{\frac{23}{(2x+3)^2}}$$

$$\left(\frac{-3}{x^2}\right)' \overset{T5}{=} \frac{(-3)'(x^2)-(-3)(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{(0)(x^2)-(-3)(2x)}{x^4}=\frac{0-(-6x)}{x^4}=\frac{6\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}}=\boxed{\frac{6}{x^3}}$$

Derivada de la función Exponencial

$f(x) = b^x \qquad (b > 0 \ , \ b \neq 1 \ , \ x \in R)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{b^x - b^a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{b^a \left(b^{x-a} - 1\right)}{x - a} = b^a . \lim_{x \to a} \frac{b^{x-a} - 1}{x - a} \quad (*)$$

Aplicando Límite Tipo Exponencial General, donde u = x-a : $b^{x-a} - 1 \sim (x - a).L(b)$

Entonces: $(*) = b^a . \lim_{x \to a} \frac{(\cancel{x - a}).L(b)}{\cancel{x - a}} = b^a . L(b) = L(b) . b^a$

Como a representa a un x cualquiera: $f'(x) = L(b) . b^x$

Resumiendo: $\boxed{\left(b^x\right)' = L(b).b^x}$

Observación: en el caso particular que b = e ($L(e) = 1$), se obtiene: $\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$

Derivada de la función Logarítmica

$f(x) = L(x) \qquad (x \in R^+)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{L(x) - L(a)}{x - a} \quad (*)$$

Aplicando una Propiedad del Logaritmo: $L\left(\frac{c}{d}\right) = L(c) - L(d)$

Entonces: $(*) = \lim_{x \to a} \frac{L\left(\frac{x}{a}\right)}{x - a} \quad (**)$

Aplicando Límite Tipo Logarítmico, donde u = $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}$: $L\left(\frac{x}{a}\right) \sim \frac{x}{a} - 1$

Entonces: $(**) = \lim_{x \to a} \frac{\frac{x}{a} - 1}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{x - a}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{x - a}}{a(\cancel{x - a})} = \frac{1}{a}$

Como a representa a un x cualquiera: $f'(x) = \frac{1}{x}$

Resumiendo: $\boxed{\left(L\,x\right)' = \frac{1}{x}}$

Derivada de la función Seno

$f(x) = sen\, x$

Se utilizará la fórmula trigonométrica de resta de senos: $sen\,\alpha - sen\,\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) sen\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{sen\,x - sen\,a}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{2\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right) sen\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{x-a} =$$

$$= 2. \lim_{x \to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right). \lim_{x \to a} \frac{sen\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{x-a} \quad (*)$$

Aplicando Límite Tipo de Seno, donde u = $\dfrac{x-a}{2}$: $sen\left(\dfrac{x-a}{2}\right) \sim \dfrac{x-a}{2}$

Entonces: $(*) = 2. \lim_{x \to a} \cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right). \lim_{x \to a} \left(\dfrac{\dfrac{\cancel{x-a}}{2}}{\cancel{x-a}} \right) = \cancel{2}. \cos\left(\dfrac{a+a}{2}\right). \dfrac{1}{\cancel{2}} = \cos a$

Como a representa a un x cualquiera: $f'(x) = \cos x$

Resumiendo: $\boxed{(sen\,x)' = \cos x}$

Derivada de la función Coseno

$f(x)=\cos x$

Se utilizará la fórmula trigonométrica de resta de cosenos: $\cos\alpha-\cos\beta=-2\,sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2sen\left(\frac{x+a}{2}\right)sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}=$$

$$=-2.\lim_{x\to a}sen\left(\frac{x+a}{2}\right).\lim_{x\to a}\frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}\quad(*)$$

Aplicando Límite Tipo de Seno, donde u = $\frac{x-a}{2}$: $sen\left(\frac{x-a}{2}\right)\sim\frac{x-a}{2}$

Entonces: $(*)=-2.\lim_{x\to a}sen\left(\frac{x+a}{2}\right).\lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{\cancel{x-a}}{2}}{\cancel{x-a}}\right)=-\cancel{2}.\,sen\left(\frac{a+a}{2}\right).\frac{1}{\cancel{2}}=-sen\,a$

Como a representa a un x cualquiera: $f'(x)=-sen\,x$

Resumiendo: $\boxed{(\cos x)'=-sen\,x}$

Derivada de la función Tangente

$f(x) = tg\,x$

Se utilizará la fórmula trigonométrica de la tangente: $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$

Y se aplicará derivada del cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$

$$f'(x) = (tg\,x)' = \left(\frac{sen\,x}{\cos x}\right)' = \frac{(sen\,x)'(\cos x) - (sen\,x)(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

Se aplica derivada de seno y coseno:

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (sen\,x)(-sen\,x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x}$$

Se aplica la fórmula trigonométrica fundamental $(sen^2 x + \cos^2 x = 1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Resumiendo: $\boxed{(tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función f(x) es **derivable en x = a** si y solo si $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe y es finito.

Observación: es decir que f es derivable en x = a si y solo si existe $f'(a)$

Teorema (relación entre Continuidad y Derivabilidad)

Si f es **derivable** en x = a $\Rightarrow$ f es **continua** en x = a

Demostración:

Si f es derivable en x = a $\Rightarrow$ *existe* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (por definición de función derivable en un punto)

Se parte de la igualdad: $f(x)-f(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$ (recuérdese que $x\to a$ pero $x\neq a$)

Se toman límites a ambos miembros de la igualdad para $x\to a$:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right)$$

Se aplica límite de la suma y del producto de límites finitos:

$$\lim_{x\to a} f(x)-\underbrace{\lim_{x\to a} f(a)}_{=f(a)}=\underbrace{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)}_{=f'(a)}.\underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)}_{=0}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a)=0$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Esto significa que f es continua en x = a (por definición de función continua en un punto).

Observaciones:

1) ¿Se cumple el **Recíproco** de ese teorema (continua $\Rightarrow$ derivable) ?
NO SIEMPRE. Contraejemplos:
$f(x)=|x| \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *no existe* $\Rightarrow$ Esta función es continua en x = 0 pero **no** es derivable en x = 0
$f(x)=\sqrt[3]{x} \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ $\Rightarrow$ Esta función es continua en x = 0 pero **no** es derivable en x = 0

2) En la Lógica Matemática es un hecho comprobado que si se cumple un enunciado Directo, también se cumple su versión **Contrarecíproca**.

Directo:	$H \Rightarrow T$
Contrarecíproco:	$NT \Rightarrow NH$

Así que también será cierto el siguiente enunciado:
Si f **no es continua** en x = a $\Rightarrow$ f **no es derivable** en x = a

Resumiendo:

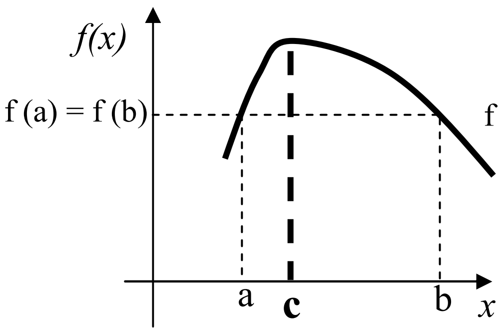
$$\boxed{\begin{array}{l} D \Rightarrow C \\ C \not\Rightarrow D \\ NC \Rightarrow ND \end{array}}$$

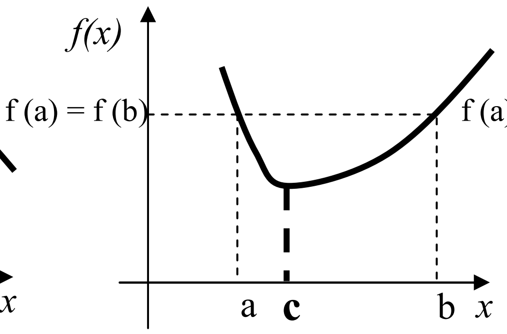
Teoremas sobre funciones Continuas y Derivables

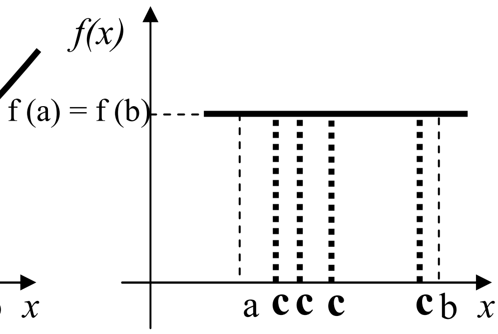
Teorema de Rolle (Existencia de extremos relativos)

H) f es continua en [a,b]
f es derivable en (a,b)
$f(a) = f(b)$

T) $\exists c \in (a,b) / f'(c) = 0$



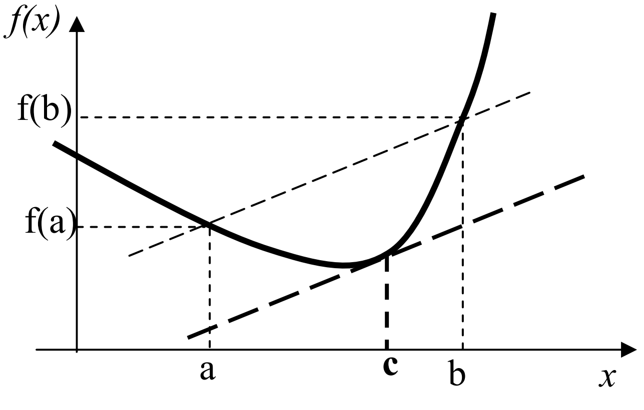




Teorema de Lagrange (Teorema del valor medio)

H) f es continua en [a,b]
f es derivable en (a,b)

T) $\exists c \in (a,b) / f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



Observación: El teorema de Rolle es un caso particular de este teorema.

$si\ f(b) = f(a) \Rightarrow f(b) - f(a) = 0 \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{0}{b - a} = 0$ (se obtuvo la tesis del teorema de Rolle)

Teorema de L'Hôpital (Método para resolver indeterminaciones 0/0 e ∞/∞ derivando)

$$H)\ \lim_{x\to A} f(x) = \lim_{x\to A} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \qquad T)\ \lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(A puede ser finito o infinito)

f y g son funciones derivables en un entorno de A (para A finito)

f ' y g ' no se anulan simultáneamente en un entorno de A (para A finito)

existe $\lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ejemplos de aplicación:

Indeterminación $\frac{0}{0}$:

1) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-9x+6}{x^2-5x+6} = \left]\frac{0}{0}\right[$

utilizando Ruffini:

$$= \ldots 2 \text{ esquemas de Ruffini} \ldots = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(3x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{3x-3}{x-3} = \frac{3}{-1} = -3$$

utilizando L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(3x^2-9x+6)'}{(x^2-5x+6)'} = \lim_{x\to 2} \frac{6x-9}{2x-5} = \frac{3}{-1} = -3$$

2) $\lim_{x\to -4} \frac{x^3+13x^2+56x+80}{-2x^3-4x^2+64x+192} = \left]\frac{0}{0}\right[$

utilizando Ruffini:

$$= \ldots 2 \text{ esquemas de Ruffini} \ldots = \lim_{x\to -4} \frac{\cancel{(x+4)}(x^2+9x+20)}{\cancel{(x+4)}(-2x^2+4x+48)} = \lim_{x\to -4} \frac{x^2+9x+20}{-2x^2+4x+48} = \left]\frac{0}{0}\right[=$$

$$= \ldots 2 \text{ esquemas de Ruffini} \ldots = \lim_{x\to -4} \frac{\cancel{(x+4)}(x+5)}{\cancel{(x+4)}(-2x+12)} = \lim_{x\to -4} \frac{x+5}{-2x+12} = \frac{1}{20}$$

utilizando L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to -4} \frac{(x^3+13x^2+56x+80)'}{(-2x^3-4x^2+64x+192)'} = \lim_{x\to -4} \frac{3x^2+26x+56}{-6x^2-8x+64} = \left]\frac{0}{0}\right[= \lim_{x\to -4} \frac{(3x^2+26x+56)'}{(-6x^2-8x+64)'} =$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{6x+26}{-12x-8} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^3+6x^2-3x}{2x^2+4}=\left]\frac{\infty}{\infty}\right[$$

utilizando el método de los términos de mayor exponente:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^{\cancel{3}}}{2\cancel{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{2}=-\infty$$

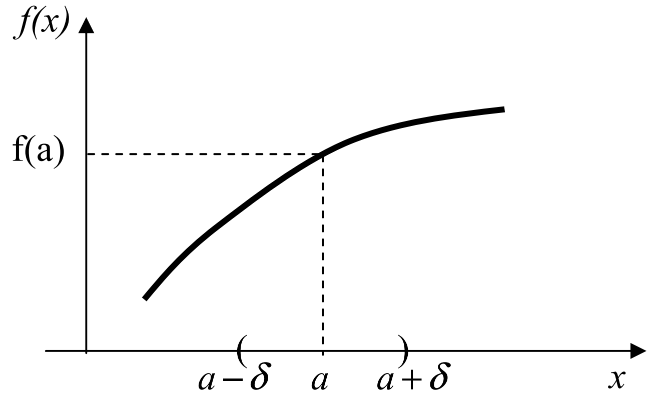
utilizando L'Hôpital:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-5x^3+6x^2-3x\right)'}{\left(2x^2+4\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-15x^2+12x-3}{4x}=\left]\frac{\infty}{\infty}\right[=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-15x^2+12x-3\right)'}{\left(4x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-30x+12}{4}=-\infty$$

DEFINICIONES VARIAS Y APLICACIONES DE LA DERIVADA

Definición de función Estrictamente Creciente en un punto

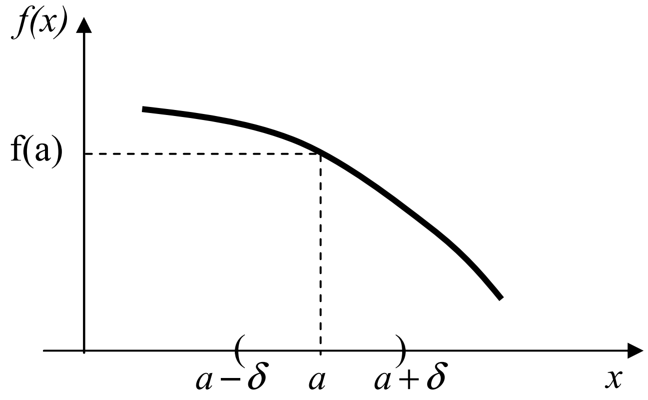
f es *estrictamente creciente* en x = a $\Leftrightarrow \exists E(a,\delta) \subset D(f) \;/\; \begin{cases} \forall x \in E_{-}(a,\delta) & f(x) < f(a) \\ y & \\ \forall x \in E_{+}(a,\delta) & f(x) > f(a) \end{cases}$



Observación: Nótese que la función *debe estar definida en x = a* ($f(a)$ existe y es finita) pero *no necesariamente debe ser continua en x = a.*

Definición de función Estrictamente Decreciente en un punto

f es *estrictamente decreciente* en x = a $\Leftrightarrow \exists E(a,\delta) \subset D(f) \;/\; \begin{cases} \forall x \in E_{-}(a,\delta) & f(x) > f(a) \\ y & \\ \forall x \in E_{+}(a,\delta) & f(x) < f(a) \end{cases}$



Observación: Nótese que la función *debe estar definida en x = a* ($f(a)$ existe y es finita) pero *no necesariamente debe ser continua en x = a.*

Condición Suficiente para que una función sea Estrictamente Creciente en un punto

$f'(a) > 0 \;\Rightarrow\; f$ es estrictamente creciente en x = a

Observación: pero no es necesario (no siempre se cumple el recíproco).

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ en x = 0

Condición Suficiente para que una función sea Estrictamente Decreciente en un punto

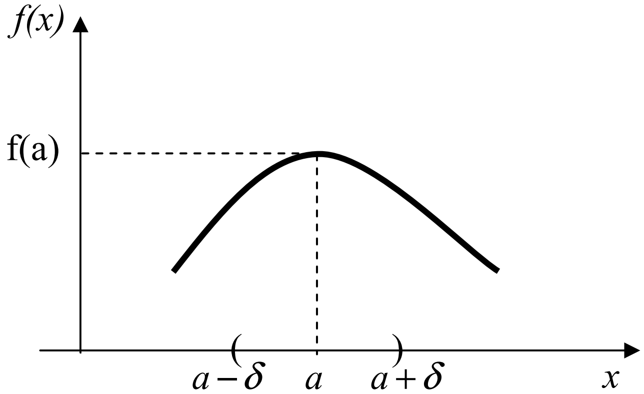
$f'(a) < 0 \;\Rightarrow\; f$ es estrictamente decreciente en x = a

Observación: pero no es necesario (no siempre se cumple el recíproco).

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$ en x = 0

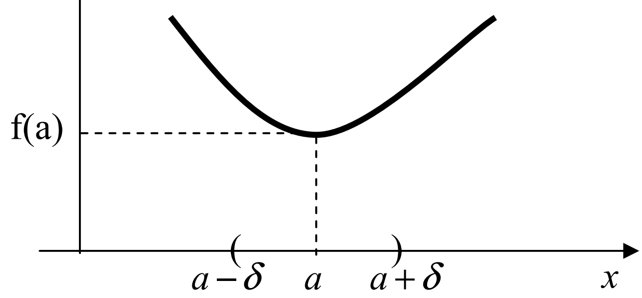
Definición de Máximo Relativo

f tiene un *máximo relativo* en x = a
$\Leftrightarrow\; \exists E(a,\delta) \subset D(f) / \forall x \in E(a,\delta) \quad f(x) \leq f(a)$



Definición de Mínimo Relativo

f tiene un *mínimo relativo* en x = a
$\Leftrightarrow\; \exists E(a,\delta) \subset D(f) / \forall x \in E(a,\delta) \quad f(x) \geq f(a)$



Condición Necesaria de existencia de Extremo Relativo (para funciones derivables)

f es derivable y tiene un extremo relativo en x = a $\Rightarrow \; f'(a) = 0$

Observación: pero no es suficiente (no siempre se cumple el recíproco). Ejemplo: $f(x) = x^3 \;\; en \;\; x = 0$

Primer criterio de Suficiencia de existencia de Extremo Relativo

$$\left.\begin{array}{c} \text{f es continua en x = a} \\ \exists E(a,\delta) \; / \left\{\begin{array}{l} \forall x \in E_-(a,\delta) \quad f'(x) > 0 \\ \quad y \\ \forall x \in E_+(a,\delta) \quad f'(x) < 0 \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ f tiene un máximo relativo en x = a}$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{f es continua en x = a} \\ \exists E(a,\delta) \; / \left\{\begin{array}{l} \forall x \in E_-(a,\delta) \quad f'(x) < 0 \\ \quad y \\ \forall x \in E_+(a,\delta) \quad f'(x) > 0 \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ f tiene un mínimo relativo en x = a}$$

Observación: Nótese que en este criterio *no se pide que la función sea derivable en a. Es decir que, por ejemplo, detecta el mínimo en x = 0 tanto de* x^2 *como de* $|x|$.

Segundo criterio de Suficiencia de existencia de Extremo Relativo (para funciones derivables)

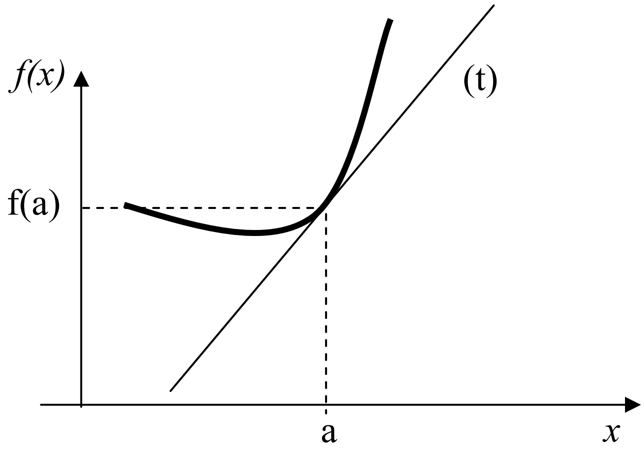
$f'(a) = 0 \;\; y \;\; f''(a) < 0 \;\; (finita) \;\Rightarrow$ f tiene un máximo relativo en x = a

$f'(a) = 0 \;\; y \;\; f''(a) > 0 \;\; (finita) \;\Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en x = a

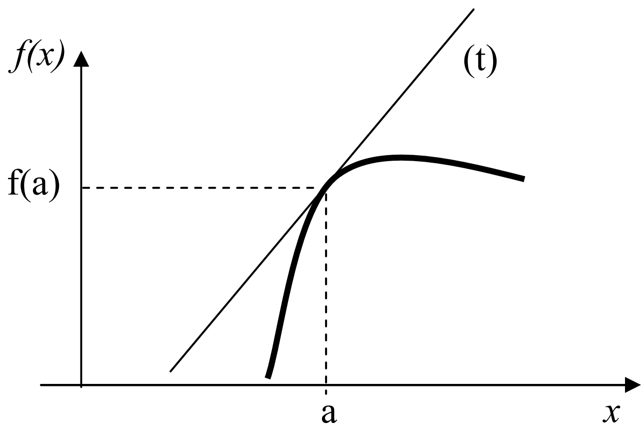
Observación: Nótese que en este criterio *se pide que la función sea derivable en a. Es decir que, por ejemplo, detecta el mínimo en x = 0 de* x^2 *pero* ***no*** *de* $|x|$.

Definiciones de Concavidad Positiva y Concavidad Negativa

f tiene *concavidad positiva* en x = a $\Leftrightarrow \exists E(a,\delta) \subset D(f) / \forall x \in E^{*}(a,\delta) \;\; f(x) > \left(f'(a).(x-a) + f(a) \right)$



f tiene *concavidad negativa* en x = a $\Leftrightarrow \exists E(a,\delta) \subset D(f) / \forall x \in E^{*}(a,\delta) \;\; f(x) < \left(f'(a).(x-a) + f(a) \right)$



Observación: Nótese que en esta def. *la función debe ser derivable en x = a* ($f'(a)$ existe y es finita)

Condición Suficiente de Concavidad Positiva

$f''(a) > 0$ *y finita* $\Rightarrow$ f presenta concavidad positiva en x = a

Observación: pero no es necesario (no siempre se cumple el recíproco).

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 2x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ (en x = 1 hay concavidad positiva, pero $f''(1)$ *no existe*)

Condición Suficiente de Concavidad Negativa

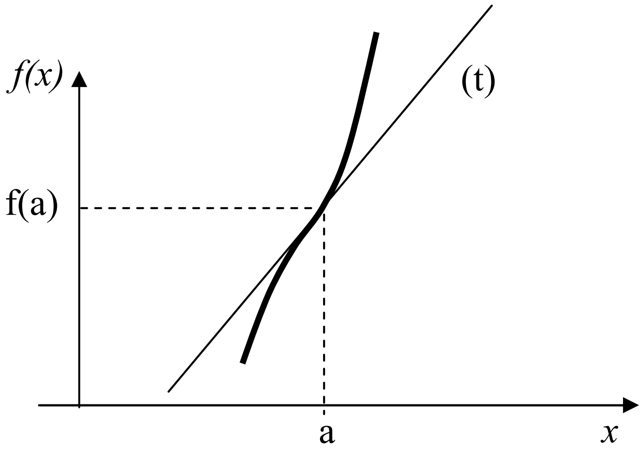
$f''(a) < 0$ *y finita* $\Rightarrow$ f presenta concavidad negativa en x = a

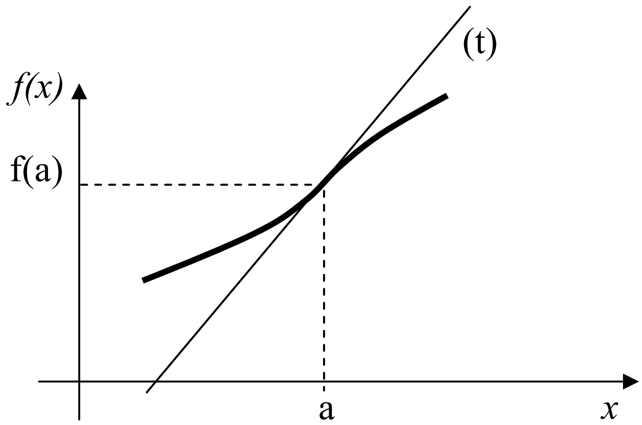
Observación: pero no es necesario (no siempre se cumple el recíproco).

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & x < 1 \\ -2x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ (en x = 1 hay concavidad negativa, pero $f''(1)$ *no existe*)

Definición de Punto de Inflexión
(para funciones derivables)

f tiene un *punto de inflexión* en x = a $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{cambia el signo de la concavidad de f a la izquierda} \\ \text{y derecha de x = a} \\ \text{y} \\ \text{f es derivable en x = a} \end{cases}$





Condición Necesaria de existencia de Punto de Inflexión
(para funciones derivables)

$$\left.\begin{array}{c} \text{existe } f''(a) \\ \text{y} \\ \text{f presenta un PI en x = a} \end{array}\right\} \Rightarrow f''(a) = 0$$

Observaciones:

1) Pero no es suficiente (no siempre se cumple el recíproco). Ejemplo: $f(x) = x^4 \;\; en \;\; x = 0$
2) Existen los denominados “puntos de inflexión con tangente vertical” en los cuales la función no es derivable. Ejemplo: $f(x) = \sqrt[3]{x} \;\; en \;\; x = 0$
   (Tener en cuenta que estos puntos no contradicen a la condición, ya que esta es válida solo para *funciones derivables en el punto*)

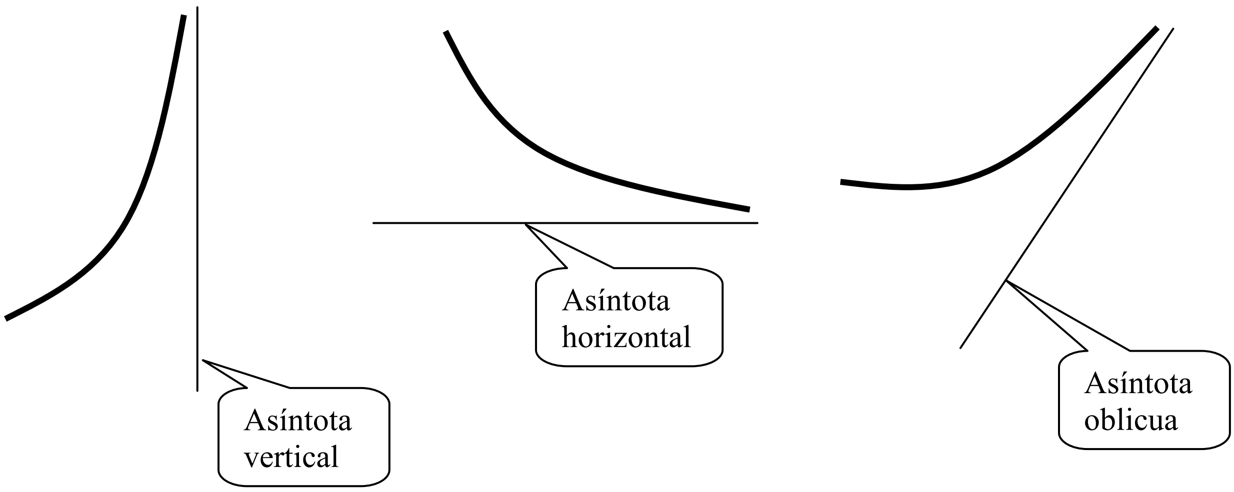
Condición Necesaria y Suficiente de existencia de Punto de Inflexión
(cuando existe f ’’(a))

$$\left.\begin{array}{r} f''\text{cambia de signo a la izquierda y derecha de x = a} \\ \text{y} \\ f''(a) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{f tiene un } \textit{punto de inflexión} \text{ en x = a}$$

ASÍNTOTA

Se llama *asíntota* de una función, a una **recta** tal que la distancia entre esta y un punto que se aleja infinitamente sobre la representación gráfica, tiende a cero.

La representación gráfica de una función puede presentar 3 tipos de asíntotas: **verticales, horizontales y oblicuas**.



Teoremas sobre Asíntotas

Asíntota Vertical

Uno o ambos límites laterales en x = a son infinitos $\Rightarrow$ La recta de ecuación **x = a** es *asíntota vertical*

Observación: Es decir que se cumple alguno de los siguientes casos:

$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Asíntota Horizontal

Uno o ambos límites en infinito son finitos (valor b) $\Rightarrow$ La recta de ecuación **y = b** es *asíntota horizontal*

Observación: Es decir que se cumple alguno de los siguientes casos:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad y/o \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

Asíntota Oblicua

Puede haber *asíntota oblicua* solo en el caso de que uno o ambos límites en infinito sean infinitos.

Observación: Es decir que se cumple alguno de los siguientes casos: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ $\quad$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Nótese que suceda esto **es necesario, pero no suficiente** para garantizar la presencia de una asíntota oblicua.

Si la asíntota oblicua existe, sea **y = mx + n** su ecuación ($m \in R \ y \ n \in R$).

Primer Teorema (cálculo de n)

La recta de ecuación y = mx + n es asíntota de f en ∞ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right) = n$

Demostración:

La recta de ecuación y = mx + n es asíntota de f en ∞ $\overset{\text{por def. de asíntota}}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - (mx + n) \right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right) - n = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right) = n$$

Segundo Teorema (cálculo de m)

La recta de ecuación y = mx + n es asíntota de f en ∞ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$

Demostración:

Aplicando el Directo del teorema anterior:
La recta de ecuación y = mx + n es asíntota de f en ∞ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right) = n$ (*)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{se resta y suma m}}{=} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m + m \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x) - mx}{x} + m \right) \overset{(*)}{=} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{n}{x} + m \right) = 0 + m = m$$

Observación: El recíproco no es cierto.

Resumiendo:

Sea **y = mx + n** la ecuación de la *asíntota oblicua*.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right)$$

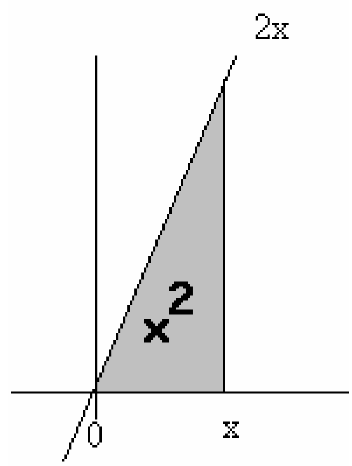
INTEGRAL

Introducción

En Matemáticas, la **integración** es la forma de resolver dos problemas clásicos del Análisis Matemático, estrechamente relacionados:

- El cálculo de **áreas y volúmenes** de figuras geométricas conocidas.
- La obtención de la **primitiva** de una función, esto es, aquella cuya derivada es la función dada, realizando la "operación inversa" a la derivación.

Los estudios de **Barrow, Newton y Leibniz** (1700 aprox.), desarrollaron e interconectaron el Cálculo Diferencial (derivadas) con el Cálculo Integral, estableciéndose una relación en la solución de ambos problemas mencionados anteriormente.



Ejemplo: $f(x) = 2x$

El área bajo f (hasta 0x) entre 0 y x es:

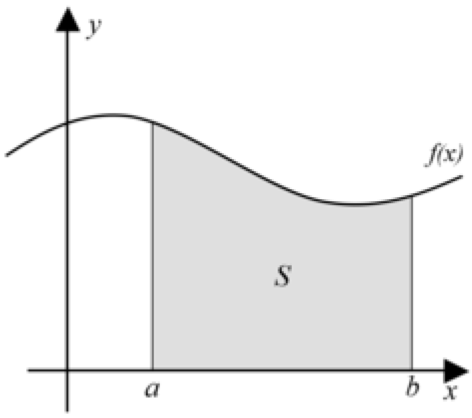
$$\frac{b.h}{2} = \frac{(x)(2x)}{2} = x^2$$

Nótese que... ¡ $2x$ es la derivada de la función x^2 !

Se denomina:

integración indefinida a la operación inversa de la derivación.
integración definida a la obtención del área bajo una curva.

Área por debajo de una curva



Sea f un función continua en [a,b] no negativa
($f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$).

Sea S la región sombreada, o sea la región limitada por la gráfica de f, el eje 0x y las rectas x = a y x = b. Al referirnos al área de dicha región (haciendo un abuso del lenguaje) se suele hablar del área “por debajo de la curva”.

Integral de una función en un intervalo

Definición: dada una función f continua en [a,b], se llama **integral de f entre a y b** a un número que simbolizaremos: $\int_a^b f$

Éste número está *relacionado con el área de la región S* de la siguiente manera:

- Si f es **no negativa en [a,b]**: $\int_a^b f = \acute{a}rea(S)$ Ejemplo: $\int_0^5 2 = 10$
- Si f es **no positiva en [a,b]**: $\int_a^b f = -\acute{a}rea(S)$ Ejemplo: $\int_0^5 (-2) = -10$

Observación: Si f es **positiva y negativa en [a,b]**: $\int_a^b f \neq \pm\, \acute{a}rea(S)$ Ejemplo: $\int_{-2}^2 x = 0$

Otra notación para la integral

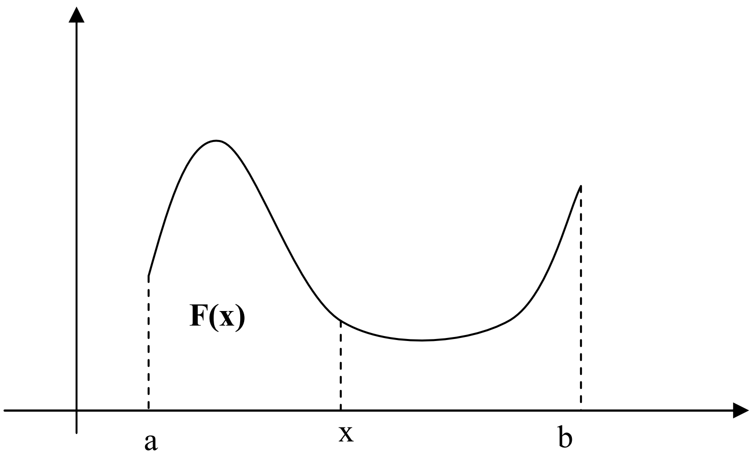
Además de la notación $\int_a^b f$ también se usa la notación $\int_a^b f(x)dx$ (donde "dx" se lee "diferencial x")

Función integral

Definición: dada f continua en [a,b], se llama **función integral** asociada a f en el intervalo [a,b] a la función F definida por:

$$\boxed{F:[a,b] \to R \,/\, F(x) = \int_a^x f}$$

Si f es no negativa, entonces la interpretación geométrica de la función integral F(x) es que para cada x, el valor de F(x) es el área "por debajo de la curva hasta la línea vertical de abscisa x".



Teorema Fundamental del Cálculo Integral

H) Sea f continua en [a, b] y F:[a, b]→ R la función definida por $F(x) = \int_a^x f$

T) F es derivable en [a, b] y $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in [a,b]$

Primitivas de una función

El TFCI nos garantiza que, dada una función f continua en [a,b], existe otra función (F) cuya derivada es f. Aparece de este modo un "proceso inverso" al de la derivación que da lugar a la siguiente...

Definición:

> Dada una función f continua en [a,b], se dice que una función **F** es una **primitiva** de f en [a,b] si y solo si se cumple que **F'(x) = f(x)** $\forall x \in [a,b]$

- Ejercicio: Sea $f(x) = x^2$. Hallar una primitiva de f.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \qquad \textit{porque} \qquad F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' = \frac{1}{\cancel{3}}\left(\cancel{3}x^2\right) = x^2 = f(x)$$

Podemos decir entonces que $\frac{x^3}{3}$ *es una primitiva de* x^2

- ¿Será esa la única primitiva de f ? Sea $G(x) = x^3 + 5$ ¿Es una primitiva de f ?

  Como la derivada de una constante es 0 , resulta que G(x) también es una primitiva de x^2 *.*

- ¿Qué se puede concluir?

  Que una primitiva cualquiera de f + una constante, también es una primitiva de f.
  Así que si f tiene una primitiva conocida F(x), entonces tiene infinitas primitivas de la forma:
  F(x) + k, siendo k un real cualquiera.

- ¿Cuál será una primitiva de $f(x) = x^4$? ¿Por qué?

$$F(x) = \frac{x^5}{5} \qquad \textit{porque} \qquad F'(x) = \left(\frac{x^5}{5}\right)' = \left(\frac{1}{5}x^5\right)' = \frac{1}{5}\left(x^5\right)' = \frac{1}{\cancel{5}}\left(\cancel{5}x^4\right) = x^4 = f(x)$$

- ¿Podemos generalizar lo que hemos visto a x^n ?

> *Una primitiva de* x^n *es* $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$

Regla de Barrow

H) f continua en [a, b] y F una primitiva cualquiera de f
T)

$$\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a)}$$

Observación: Para referirse a la diferencia que está en el lado derecho de la igualdad, se usa generalmente la notación $\left[F(x)\right]_a^b$

Ejemplos:

$$\int_2^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{3} = 39$$

$$\int_{-1}^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{27}{3} + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$$

$$\int_{-4}^{-2} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-4}^{-2} = \frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-4)^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{256}{4} = -\frac{240}{4} = -60$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}$$

<u>Propiedades de la integral indefinida</u>

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx \qquad k \ real$$

$$\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Propiedades de la integral definida

(se suponen todas las funciones integrables en el intervalo que corresponda)

Linealidad

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Aditividad de intervalos

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Definiciones

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Monotonía

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

$$a < b \quad \Rightarrow \quad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|dx$$

Teorema del valor medio

f continua en $[a,b]$ $\Rightarrow$ Existe al menos un real $c \in [a,b] / \int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$

***Ejercicios*:** Calcular las siguientes integrales definidas.

Sugerencia: Utilizar...

- Propiedad de Linealidad de la Integral Definida
- Tabla de Primitivas Elementales (ver Apéndice)
- Regla de Barrow

$$\int_{2}^{6} 3\,dx \qquad \int_{1}^{4} (-2)\,dx \qquad \int_{-1}^{2} x^3\,dx \qquad \int_{-3}^{1} (3x^2)\,dx$$

$$\int_{0}^{3} \left(5x+2\right)dx \qquad \int_{-4}^{-2} \left(-x+4\right)dx \qquad \int_{-3}^{3} \left(-2x^2+3x-5\right)dx$$

$$\int_{0}^{4} \sqrt{x}\,dx \qquad \int_{-2}^{2} \sqrt[3]{x}\,dx \qquad \int_{4}^{7.5} \sqrt[3]{x}\,dx$$

$$\int_{1}^{6} \frac{1}{x}\,dx \qquad \int_{-2}^{3} e^x\,dx \qquad \int_{1}^{5} \left(L\,x\right)dx$$

$$\int_{4}^{7} \left(-5\sqrt{x}+3x-4\right)dx \qquad \int_{3}^{4} \left(\frac{2}{x}-5e^x+3L\,x\right)dx$$

APÉNDICE

LÍMITES TIPO

Exponencial (con base genérica a > 0)

$$\boxed{\begin{array}{c} a^u - 1 \sim u\,L(a) \\ si\ u \to 0 \end{array}}$$

Exponencial (con base e)

$$\boxed{\begin{array}{c} e^u - 1 \sim u \\ si\ u \to 0 \end{array}}$$

Logarítmico

$$\boxed{\begin{array}{c} L(u) \sim u - 1 \\ si\ u \to 1 \end{array}}$$

Potencial

$$\boxed{\begin{array}{c} u^n - 1 \sim n(u-1) \\ si\ u \to 1 \end{array}}$$

Seno

$$\boxed{\begin{array}{c} sen(u) \sim u \\ si\ u \to 0 \end{array}}$$

Tangente

$$\boxed{\begin{array}{c} tg(u) \sim u \\ si\ u \to 0 \end{array}}$$

Coseno

$$\boxed{\begin{array}{c} 1 - \cos(u) \sim \dfrac{u^2}{2} \\ si\ u \to 0 \end{array}}$$

TABLA BÁSICA DE DERIVADAS

$(k.f)' = k.f'$
$(f+g)' = f' + g'$
$(f.g)' = f'g + f g'$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - f g'}{g^2}$

Casos Particulares		**Casos Generales** (u y v son funciones)	
f	**f '**	**f**	**f '**
k	0		
x	1		
x^n	$n\,x^{n-1}$	u^n	$n\,u^{n-1}\,u'$
a^x	$L(a).a^x$	a^u	$L(a).a^u.u'$
e^x	e^x	e^u	$u'.e^u$
		$v.e^u$	$e^u.(v'+v.u')$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\sqrt[3]{u}$	$\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{u}$	$\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$\log_a x$	$(\log_a e).\frac{1}{x}$	$\log_a u$	$(\log_a e).\frac{u'}{u}$
Lx L|x|	$\frac{1}{x}$	Lu L|u|	$\frac{u'}{u}$
sen x	cos x	sen u	u'.cos u
cos x	-sen x	cos u	- u'.sen u
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$ $1+tg^2 x$	tg u	$\frac{u'}{\cos^2 u}$ $u'(1+tg^2 u)$

TABLA COMPLETA DE DERIVADAS

$(k.f)' = k.f'$
$(f+g)' = f' + g'$
$(f.g)' = f'g + f g'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f g'}{g^2}$
Regla de la cadena $\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right).g'\left(x\right)$

Casos Particulares		**Casos Generales** (u y v son funciones)	
f	**f '**	**f**	**f '**
k	0		
x	1		
x^n	$n\,x^{n-1}$	u^n	$n\,u^{n-1}\,u'$
a^x	$L(a).a^x$	a^u	$L(a).a^u.u'$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$
		$v.e^u$	$e^u.(v'+v.u')$
x^x	$x^x\,(1 + Lx)$	u^v	$u^v\left(\frac{u'}{u}v + v'.L(u)\right)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\sqrt[3]{u}$	$\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{u}$	$\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$\log_a x$	$(\log_a e)\frac{1}{x}$	$\log_a u$	$(\log_a e).\frac{u'}{u}$
Lx $L\|x\|$	$\frac{1}{x}$	Lu $L\|u\|$	$\frac{u'}{u}$
sen x	cos x	sen u	u'.cos u
cos x	-sen x	cos u	- u'.sen u

tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$ $1+tg^2 x$	**tg u**	$\frac{u'}{\cos^2 u}$ $u'(1+tg^2 u)$
arcsen x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**arcsen u**	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
arccos x	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	**arccos u**	$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$	**arctg u**	$\frac{u'}{1+u^2}$
cotg x	$\frac{-1}{sen^2 x}$	**cotg u**	$\frac{-u'}{sen^2 u}$
sec x	$\frac{senx}{\cos^2 x}$	**sec u**	$\frac{sen\,u}{\cos^2 u}u'$
cosec x	$\frac{-\cos x}{sen^2 x}$	**cosec u**	$\frac{-\cos u}{sen^2 u}u'$
arccotg x	$\frac{-1}{1+x^2}$	**arccotg u**	$\frac{-u'}{1+u^2}$
arcsec x	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	**arcsec u**	$\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
arccosec x	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	**arccosec u**	$\frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
sh(x)	**ch(x)**	**sh(u)**	**u'ch(u)**
ch(x)	**sh(x)**	**ch(u)**	**u'sh(u)**
th(x)	$\frac{1}{ch^2(x)}$ $1-th^2(x)$	**th(u)**	$\frac{u'}{ch^2(u)}$ $u'(1-th^2(u))$
sg (x)	**0** $(\forall x \neq 0)$	**sg (u)**	**0** $(\forall u \neq 0)$
|x|	**sg (x)** $(\forall x \neq 0)$	**|u|**	**u' sg (u)** $(\forall u \neq 0)$

TABLA DE PRIMITIVAS ELEMENTALES

(no se indica la constante de integración C)

$$\int 1\,dx = x$$

$$\int k\,dx = k\,x \qquad (k \in R)$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \in R \;\; y \;\; n \neq -1)$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \qquad (x \geq 0)$$

$$\int \sqrt[n]{x}\,dx = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} \qquad (x \geq 0 \text{ si n es par} \,;\, n \neq 0 \;\; y \;\; n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = L|x| \qquad (x \neq 0)$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{L\,a} \qquad (a > 0 \;\; y \;\; a \neq 1)$$

$$\int (L\,x)\,dx = x(L\,x - 1) \qquad (x > 0)$$

$$\int (sen\,x)\,dx = -\cos x$$

$$\int (\cos x)\,dx = sen\,x$$

ESTUDIO ANALÍTICO DE UNA FUNCIÓN

1. Dominio

Es el conjunto de valores de x en los cuales la función está definida (existe).

Para determinarlo, buscar los valores de x en los cuales la función no está definida:

- Si hay **denominadores**: buscar sus raíces $\boxed{\frac{N}{D} \quad D \neq 0}$
- Si hay **raíces cuadradas, cuartas**, etc: buscar los valores de x en los cuales el signo del subradical es negativo. $\boxed{\sqrt{u}, \sqrt[4]{u}, etc. \quad u \geq 0}$
- Si hay **logaritmos**: buscar los valores de x en los cuales el signo del logaritmando es negativo o 0. $\boxed{\log_a u \quad u > 0}$

2. Ceros

Son los x de los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje 0x.
Hallarlos resolviendo la ecuación $\boxed{f(x) = 0}$

3. Signo

Realizar el estudio del signo de la función.

Tener en cuenta que en el signo de la función deben estar presentes...
- todos los **puntos e intervalos de no existencia** hallados en el paso 1.
- todos los **ceros** hallados en el paso 2.

4. Corte con el eje 0y

¿ 0 está en el dominio de la función ?
(ver en paso 1)

- Sí $\rightarrow$ evaluar la función en x = 0 (el corte con el eje 0y es en $\boxed{y = f(0)}$)
- No $\rightarrow$ la gráfica de la función NO CORTA al eje 0y

5. Límites Laterales

Hallar los límites laterales en:
- los valores de x en los que la función no está definida (ver Dominio)
- los extremos de los intervalos en los que la función está definida (ver Dominio)

6. Ramas Infinitas y Asíntotas

1º) Hallar $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x)}$ y $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x)}$

2º) Realizar el **Estudio de Asíntotas Horizontales y Oblicuas** (ver esquema en pág. siguiente)

Estudio de Asíntotas Horizontales y Oblicuas

$$\text{Si } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} \text{k (un número cualquiera)} \quad \Rightarrow \quad \text{Hay asíntota horizontal de ecuación } \boxed{\mathrm{y=k}} \\[2ex] \infty \quad \rightarrow \quad \text{Se halla } \boxed{\mathrm{m} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)} = \begin{cases} \infty \quad \Rightarrow \quad \text{No hay asíntota (la función tiene dirección asintótica vertical)} \\[1ex] 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No hay asíntota (la función tiene dirección asintótica horizontal)} \\[1ex] \text{núm. finito} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Se halla } \boxed{\mathrm{n} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - mx\right)} = \begin{cases} \infty \quad \Rightarrow \quad \text{No hay asíntota} \\ \quad \left(\begin{array}{l}\text{la función tiene dirección} \\ \text{asintótica de coeficiente m}\end{array}\right) \\[1ex] \text{núm. finito} \quad \Rightarrow \quad \text{Hay asíntota} \\ \text{oblicua de ecuación } \boxed{\mathrm{y=mx+n}} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

En general se procesan las asíntotas en -∞ y +∞ por separado.

7. Derivada Primera

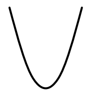
1º) Derivar la función $f(x)$: $f'(x)$
2º) Hallar el signo de $f'(x)$:

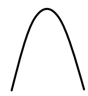
- Estudiar **Crecimiento / Decrecimiento**

```
         + + + + + +
sg(f ') ... --------------- ...     =>    f es creciente en esa zona
```
f es *creciente* en esa zona $\nearrow$

```
          - - - - - - - -
sg(f ') ... --------------- ...     =>    f es decreciente en esa zona
```
f es *decreciente* en esa zona $\searrow$

- Estudiar **Extremos Relativos** (máximos y mínimos)

```
       - - - -  0  + + +
sg(f ') ---------|---------     =>    f tiene un mínimo en a
                 a
```
f tiene un *mínimo* en a 

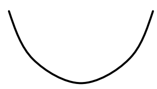
```
        + + + 0  - - - - -
sg(f ') ---------|---------     =>    f tiene un máximo en a
                 a
```
f tiene un *máximo* en a 

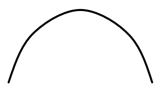
Hallar f(a). El mínimo o máximo está en el punto de coordenadas $\boxed{(a, f(a))}$

8. Derivada Segunda

1º) Derivar la función $f'(x)$: $f''(x)$
2º) Hallar el signo de $f''(x)$

- Estudiar **Concavidad**

```
          + + + + + +
sg(f '') ... --------------- ...     =>    f tiene concavidad positiva en esa zona
```
f tiene *concavidad positiva* en esa zona 

```
           - - - - - - - -
sg(f '') ... --------------- ...     =>    f tiene concavidad negativa en esa zona
```
f tiene *concavidad negativa* en esa zona 

- Estudiar **Puntos de Inflexión** (puntos en donde cambia el signo de la concavidad)

```
         - - - - - 0  + + + +                 + + +  0  - - - - -
sg(f '') ---------|-----------    o   sg(f '') ---------|-----------
                  a                                      a
```
$\Rightarrow$ f tiene un *punto de inflexión* en a

Hallar f(a). El punto de inflexión está en el punto de coordenadas $\boxed{(a, f(a))}$

Hallar la ecuación de la **recta tangente a la gráfica en ese punto**: $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$