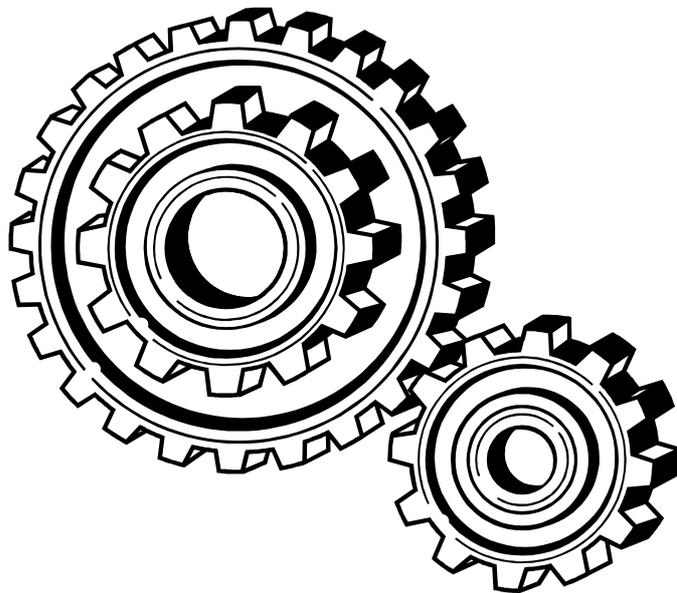


# MOMENTO DE INERCIA



Escrito por **Prof. A. Rodrigo Farinha**

Publicado en [Octubre de 2010] en mi sitio

[www.arfsoft.com.uy](http://www.arfsoft.com.uy)

*Queda absolutamente prohibido el uso total o parcial de este material sin dar crédito a su autor. Solamente se puede imprimir y sin modificación alguna.*

## ÍNDICE

Introducción.....	2
Energía Cinética de Rotación y Momento de Inercia.....	3
Momento de una Fuerza y Momento de Inercia.....	5
Teorema de Steiner (Teorema de los ejes paralelos).....	6
Teorema de los ejes perpendiculares.....	7
Momento de Inercia de cuerpos sólidos.....	8
Momentos de inercia de cuerpos uniformes de formas diversas.....	8
Varilla.....	9
Aro.....	10
Arandela.....	11
Cilindro hueco de pared delgada.....	12
Cilindro hueco con espesor.....	13
Disco.....	14
Cilindro sólido.....	15
Esfera hueca de pared delgada.....	16
Esfera sólida.....	17
Placa rectangular sólida.....	18
Paralelepípedo.....	20
Fórmula general para sólido de revolución engendrado por una placa....	21
Fórmula general para placa.....	24
Bibliografía consultada.....	27

## Introducción

El tema principal de este trabajo es la magnitud física *Momento de Inercia*.

En este trabajo pretendo llenar un vacío constatado en todos los libros de física superior y en artículos publicados en Internet: *No se mencionan ni se demuestran **todas** las situaciones estándar y fórmulas de momento de inercia. Tampoco hay una fórmula general para calcular el momento de inercia de placas y sólidos de revolución definidos mediante **funciones**.*

- *Por eso en este trabajo se demuestra, en forma exhaustiva y sistemática, las fórmulas de momento de inercia de todas las figuras y sólidos estándares, incluyendo sólidos y placas de interés no considerados en ningún libro, y momentos de inercia respecto a ejes tampoco considerados.*
- *Además está explicado el origen de esta magnitud, ya que es necesaria para el cálculo de otras dos magnitudes físicas: energía cinética rotacional y momento de una fuerza.*
- *Finalmente hallo una fórmula general de cálculo del momento de inercia con respecto al eje  $Ox$  de sólidos de revolución engendrados por cualquier placa uniforme definida mediante funciones.*
- *Y una fórmula general de cálculo del momento de inercia con respecto al eje  $Ox$  de placas uniformes definidas mediante funciones.*

## Energía Cinética de Rotación y Momento de Inercia

También llamada *energía rotacional*.

Sea un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje vertical fijo.

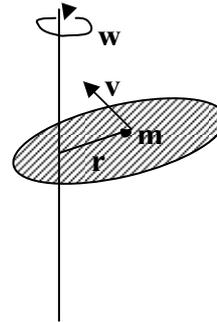
Consideremos al cuerpo como un conjunto de partículas. Por eso se analiza la rotación de una partícula sola: la partícula tiene masa  $m$  y está a una distancia  $r$  del eje de rotación, el cual gira con una velocidad angular  $w$ .

Velocidad tangencial de la partícula:  $v = rw$

Energía cinética de la partícula:

$$K_{particula} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(rw)^2 = \frac{1}{2}mr^2w^2$$

$$K_{total} = \sum K_{particula} = \sum \left( \frac{1}{2}m_i r_i^2 w^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \sum m_i r_i^2 \right) w^2$$



Se define **Momento de Inercia** de un sistema de partículas:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Entonces:

$$K_{total} = \frac{1}{2} I w^2$$

Esto significa que la energía cinética de rotación es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad angular.

Esta expresión es análoga a la de la energía cinética de traslación de un cuerpo:  $K = \frac{1}{2}mv^2$

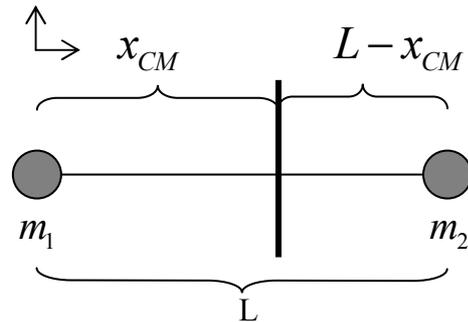
Hay una clara analogía entre la velocidad angular  $w$  y la velocidad lineal  $v$ ; y también entre el momento de inercia  $I$  y la masa  $m$ . Entonces se puede interpretar al momento de inercia como una “masa rotacional”. Cabe hacer una aclaración acerca de esa analogía: la “masa” del cuerpo es una magnitud propia del mismo, mientras que el momento de inercia no es una magnitud única, ya que depende de cuál eje de rotación se considere.

### Ejemplo de aplicación

Momento de inercia de un sistema de 2 partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas por una varilla rígida de longitud  $L$  y masa despreciable, respecto a un eje perpendicular a la varilla por su centro de masa.

Hallemos la coordenada  $x$  del centro de masa del sistema (CM):

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot L}{m_1 + m_2} = \frac{Lm_2}{m_1 + m_2}$$



Aplicando la fórmula hallada para calcular el momento de inercia se obtiene:

$$I_{CM} = m_1 x_{CM}^2 + m_2 (L - x_{CM})^2$$

Sustituyendo  $x_{CM}$  por la expresión hallada:

$$I_{CM} = m_1 \left( \frac{Lm_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left( L - \frac{Lm_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \dots = \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) L^2$$

## Momento de una Fuerza y Momento de Inercia

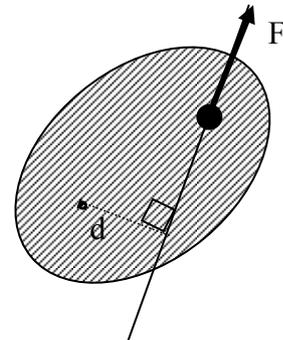
También llamado *Momento de torsión* o *Torque*.

Cuando se ejerce una fuerza sobre un objeto rígido que puede girar alrededor de un eje, el objeto tiende a girar en torno de ese eje.

La tendencia de una fuerza a hacer girar un objeto alrededor de cierto eje se mide por medio de una cantidad llamada **momento de torsión** ( $\tau$ ).

Se define como:  $\tau = Fd$

donde F es la fuerza que se aplica sobre la partícula y d es la distancia del eje de giro a la línea de acción de la fuerza.



Sea una partícula de masa m que gira en un círculo de radio r bajo la influencia de una fuerza tangencial  $F_t$ .

2º ley de Newton:  $F_t = ma_t$

Por definición:  $\tau_{partícula} = F_t r$

$\alpha$  es la aceleración angular de la rotación:  $a_t = r\alpha$

Por lo tanto:  $\tau_{partícula} = mr^2\alpha$

En un sistema de partículas:  $\tau_{neto} = \sum \tau_{partícula} = \sum (m_i r_i^2 \alpha) = \alpha \sum (m_i r_i^2)$

Se vio que  $\sum (m_i r_i^2)$  es el *momento de inercia* ( $I$ ) respecto del eje de rotación.

$$\tau_{neto} = I\alpha$$

Esto significa que el momento de fuerzas es directamente proporcional a la aceleración angular. Esta expresión es análoga a la 2º ley de Newton:  $F = Ma$

Hay una clara analogía entre la aceleración angular  $\alpha$  y la aceleración lineal a; y también entre el momento de inercia I y la masa M. Confirmándose la interpretación anteriormente realizada del momento de inercia como una “masa rotacional”.

## Teorema de Steiner (Teorema de los ejes paralelos)

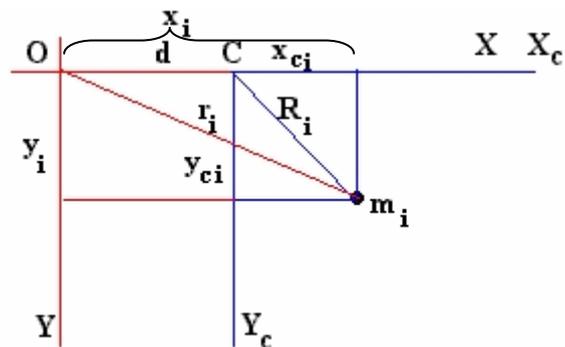
El teorema de Steiner es una fórmula que permite calcular el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje de rotación que pasa por un punto  $O$ , cuando se conoce el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de masa.

El momento de inercia del sólido respecto de un eje que pasa por  $O$  es:

$$I_O = \sum m_i r_i^2 \quad , \text{ siendo } m_i \text{ la masa de la partícula } i \text{ , } r_i \text{ la distancia de la partícula } i \text{ a } O$$

El momento de inercia respecto de un eje que pasa por  $C$  (centro de masa del sólido) es:

$$I_C = \sum m_i R_i^2 \quad , \text{ siendo } m_i \text{ la masa de la partícula } i \text{ , } R_i \text{ la distancia de la partícula } i \text{ a } C$$



Para relacionar  $I_O$  e  $I_C$  hay que relacionar  $r_i$  y  $R_i$ .

De la figura se deduce (teorema de Pitágoras):

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 = (d + x_{ci})^2 + y_{ci}^2 = d^2 + 2dx_{ci} + x_{ci}^2 + y_{ci}^2 = d^2 + 2dx_{ci} + R_i^2$$

Sustituyendo en la expresión de  $I_O$ :

$$I_O = \sum m_i (d^2 + 2dx_{ci} + R_i^2) = \sum m_i d^2 + \sum m_i 2dx_{ci} + \sum m_i R_i^2 = d^2 \sum m_i + 2d \sum m_i x_{ci} + \sum m_i R_i^2$$

Teniendo en cuenta que  $\sum m_i = M$  (masa del sólido) y que

$$\sum m_i x_{ci} = M \cdot X_{\text{centro de masa respecto a C}} = M \cdot 0 = 0 :$$

$$I_O = d^2 M + I_C$$

Resumiendo:

$$I = I_{CM} + Md^2$$

El momento de inercia de cualquier cuerpo en torno a un eje arbitrario es igual al momento de inercia alrededor de un eje paralelo que pase por el centro de masa más la masa total del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

## Teorema de los ejes perpendiculares

Se aplica solo a figuras planas.

Relaciona los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares contenidos en una figura plana con el momento de inercia alrededor de un tercer eje perpendicular a la misma.

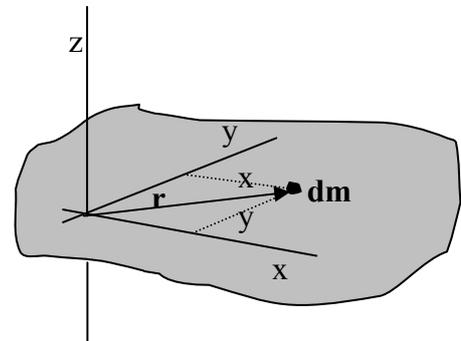
Si  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son ejes perpendiculares, en el caso de una figura que está contenida en el plano  $xy$  el teorema establece que el momento de inercia respecto de  $z$  es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a los ejes  $x$  e  $y$ .

$$I_x = \int y^2 dm$$

$$I_y = \int x^2 dm$$

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_y + I_x$$

$$I_z = I_x + I_y$$



## Momento de Inercia de cuerpos sólidos

Si se considera a un cuerpo como compuesto por partículas discretas, podemos calcular su momento de inercia en torno a cualquier eje a partir de la fórmula discreta.

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Si lo consideramos al cuerpo como una distribución continua de materia, se puede dividir en pequeños elementos de masa  $\delta m_i$ , donde cada  $\delta m_i$  está a una distancia  $r_i$  perpendicular al eje de rotación.

$$I = \lim_{\delta m_i \rightarrow 0} \sum r_i^2 \delta m_i$$

$$I = \int_{\text{cuerpo}} r^2 dm$$

*El momento de inercia depende de la distribución de masa del cuerpo respecto al eje de rotación considerado. Dicho de otra forma, es una propiedad del cuerpo y del eje de rotación en torno al cual esté girando. También es una medida de la resistencia del cuerpo a verificar cambios en su movimiento de rotación.*

## Momentos de inercia de cuerpos uniformes de formas diversas

*Consideración previa:*

Que un cuerpo o figura sea “uniforme” significa que su densidad  $\rho$  es constante en cualquiera de sus puntos. Aprovecharemos esto para hallar, en cada caso, una expresión para  $dm$ .

Cuando se trate de la masa en un *área*:  $\rho = \frac{M}{A} = \frac{dm}{dA} \Rightarrow \frac{dm}{M} = \frac{dA}{A}$

Cuando se trate de la masa en un *volumen*:  $\rho = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow \frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$

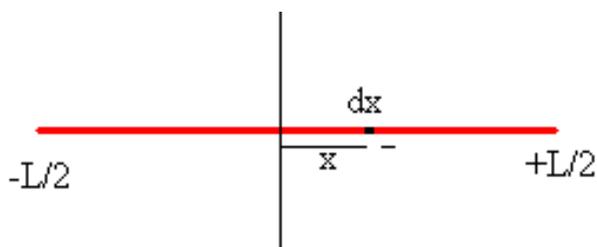
## Varilla

Debe ser rígida, sólida y delgada

masa  $M$

longitud  $L$

**Eje perpendicular a la varilla en su punto medio (centro de masa)**



La masa  $dm$  del elemento de longitud de la varilla comprendido entre  $x$  y  $x+dx$  es

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

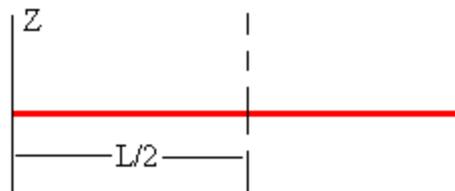
El momento de inercia de la varilla es

$$I_{CM} = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L} \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} ML^2$$

$$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$$

**Eje perpendicular a la varilla que pasa por uno de sus extremos**

Aplicamos el teorema de Steiner.



$$I = I_{CM} + M \left( \frac{L}{2} \right)^2$$

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

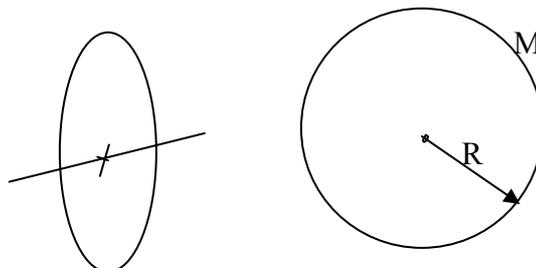
## Aro

masa M  
radio R

**Eje perpendicular al plano del aro y que pasa por su centro**

$$I = \int_{\text{Aro}} dm R^2 = R^2 \int_{\text{Aro}} dm = MR^2$$

$$I = MR^2$$



**Eje perpendicular al aro por un punto del aro**

Aplicamos teorema de Steiner:  $I = MR^2 + MR^2$

$$I = 2MR^2$$

**Eje por un diámetro del aro**

Aplicamos el teorema de los ejes perpendiculares: consideramos al aro en el plano xy con su centro en el origen.

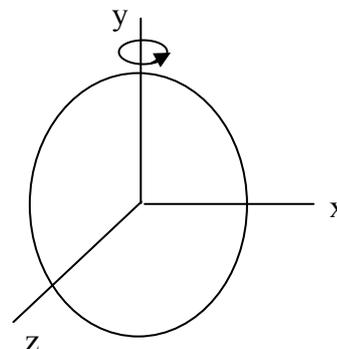
Por simetría se tiene que  $I_x = I_y$ .

Sabemos que  $I_z = MR^2$

Entonces  $I_z = I_x + I_y = 2I_x = MR^2$

Por lo tanto

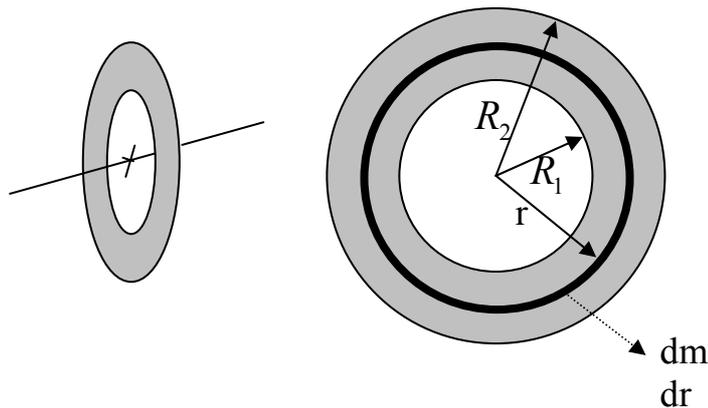
$$I_x = I_y = \frac{1}{2} MR^2$$



## Arandela

masa  $M$ radio interior  $R_1$ radio exterior  $R_2$ 

Eje perpendicular al plano de la arandela y que pasa por su centro

Consideremos que la arandela está compuesta por aros concéntricos de radio  $r$  y espesor  $dr$ .

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi r dr}{(R_2^2 - R_1^2)\pi} = \frac{2r dr}{R_2^2 - R_1^2} \Rightarrow dm = \frac{2Mr dr}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$I = \int dI_{Aro} = \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \frac{2Mr dr}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{M}{2(R_2^2 - R_1^2)} (R_2^4 - R_1^4)$$

Teniendo en cuenta que  $R_2^4 - R_1^4 = (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$ , se obtiene:

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

*Observaciones:*Si  $R_1 = 0$  obtenemos la fórmula del **disco**.Si  $R_1 = R_2$  obtenemos la fórmula del **aro**.

### Cilindro hueco de pared delgada

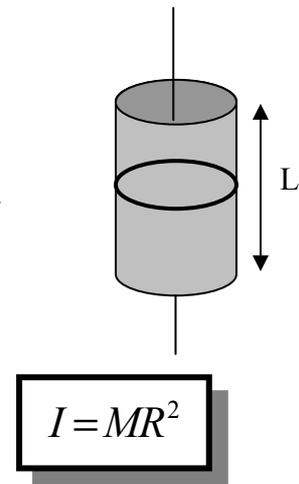
masa M  
radio R  
longitud L

#### Eje del cilindro

Consideremos que el cilindro hueco está compuesto por aros de radio R y espesor dl.

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi R dl}{2\pi RL} = \frac{dl}{L} \Rightarrow dm = \frac{M dl}{L}$$

$$I = \int dI_{Aro} = \int dm R^2 = \int_0^L \frac{M dl}{L} R^2 = \frac{MR^2}{L} \int_0^L dl = \frac{MR^2}{L} L = MR^2$$

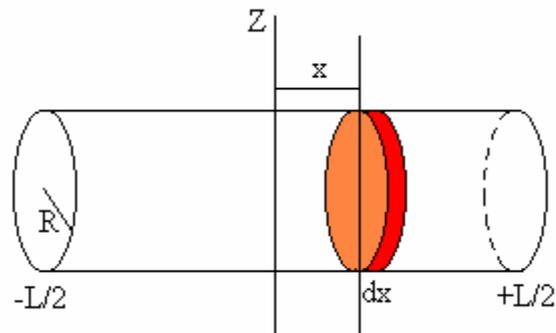


Observación: Coincide con el momento de inercia de un **aro**.

#### Eje por un diámetro que pasa por su centro de masa

Consideremos que el cilindro hueco está compuesto por aros de radio R y espesor dx.

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi R dx}{2\pi RL} = \frac{dx}{L} \Rightarrow dm = \frac{M}{L} dx$$



El momento de inercia de cada uno de los aros respecto de uno de sus diámetros es:

$$dI_{diám} = \frac{1}{2} R^2 dm$$

Aplicando el teorema de Steiner, calculamos el momento de inercia de este aro, respecto de un eje paralelo situado a una distancia x (el eje diametral que pasa por el centro del cilindro):

$$dI_z = dI_{diám} + dm x^2 = \frac{1}{2} R^2 dm + dm x^2 = \left( \frac{1}{2} R^2 + x^2 \right) dm = \left( \frac{1}{2} R^2 + x^2 \right) \frac{M}{L} dx$$

El momento de inercia del cilindro hueco es:

$$I = \int dI_z = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{1}{2} R^2 + x^2 \right) dx = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

### Cilindro hueco con espesor

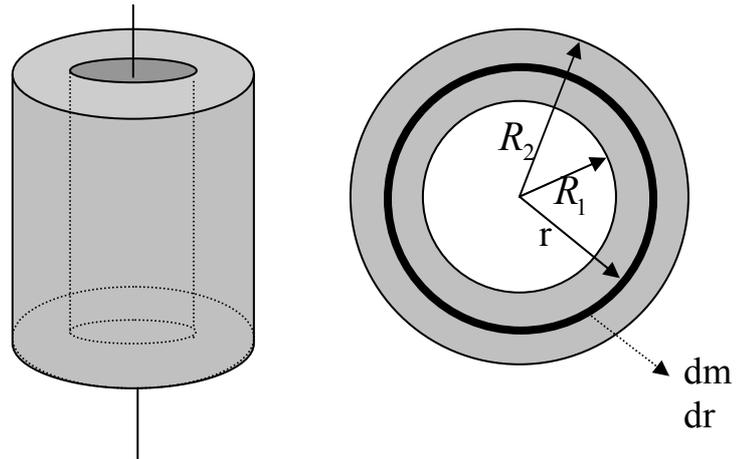
masa  $M$

radio interior  $R_1$

radio exterior  $R_2$

longitud  $L$

Eje del cilindro



Consideremos que el cilindro hueco con espesor está compuesto por cilindros huecos de pared delgada concéntricos de radio  $r$  y espesor  $dr$ .

$$\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V} = \frac{2\pi r dr L}{(R_2^2 - R_1^2)\pi L} = \frac{2r dr}{R_2^2 - R_1^2} \Rightarrow dm = \frac{2Mr dr}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$I = \int dI_{\text{cilindro hueco de pared delgada}} = \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \frac{2Mr dr}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{M}{2(R_2^2 - R_1^2)} (R_2^4 - R_1^4)$$

Teniendo en cuenta que  $R_2^4 - R_1^4 = (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$ , se obtiene:

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

*Observaciones:*

Si  $R_1 = 0$  obtenemos la fórmula del **cilindro sólido**.

Si  $R_1 = R_2$  obtenemos la fórmula del **cilindro hueco de pared delgada**.

Coincide con el momento de inercia de una **arandela**.

Disco

masa M  
radio R

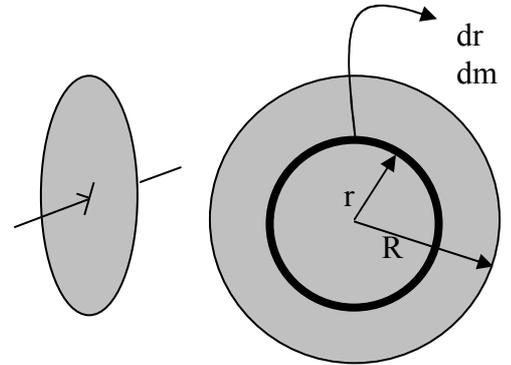
**Eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro**

Consideremos que el disco está compuesto por aros concéntricos de radio r y espesor dr.

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi r dr}{R^2 \pi} = \frac{2r dr}{R^2} \Rightarrow dm = \frac{M 2r dr}{R^2}$$

$$I = \int dI_{aro} = \int dm r^2 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



**Eje perpendicular al disco y que pasa por su borde**

Aplicamos el teorema de Steiner:  $I = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2$

$$I = \frac{3}{2} MR^2$$

**Eje por un diámetro del disco**

Aplicamos el teorema de los ejes perpendiculares: consideramos al disco en el plano xy con su centro en el origen.

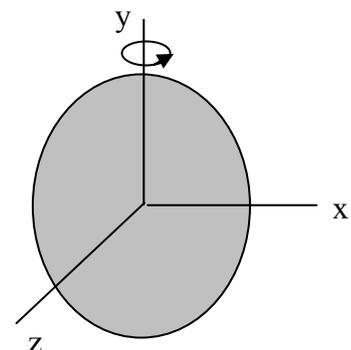
Por simetría se tiene que  $I_x = I_y$ .

Sabemos que  $I_z = \frac{1}{2} MR^2$

Entonces  $I_z = I_x + I_y = 2I_x = \frac{1}{2} MR^2$

Por lo tanto

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} MR^2$$



### Cilindro sólido

masa M  
radio R  
longitud L

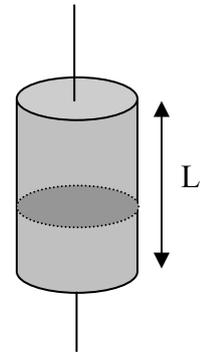
#### Eje del cilindro

Consideremos que el cilindro sólido está compuesto por discos de radio R y espesor dl.

$$\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V} = \frac{R^2 \pi dl}{R^2 \pi L} = \frac{dl}{L} \Rightarrow dm = \frac{M dl}{L}$$

$$I = \int dI_{Disco} = \int \frac{1}{2} dm R^2 = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M dl}{L} R^2 = \frac{MR^2}{2L} \int_0^L dl = \frac{MR^2}{2L} L = \frac{MR^2}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



Observación: Coincide con el momento de inercia de un **disco**.

#### Eje por el borde del cilindro

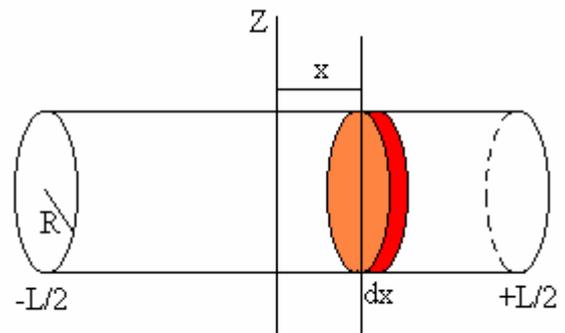
Aplicamos el teorema de Steiner:  $I = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2$

$$I = \frac{3}{2} MR^2$$

#### Eje por un diámetro que pasa por su centro de masa

Consideremos que el cilindro sólido está compuesto por discos de radio R y espesor dx.

$$\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V} = \frac{R^2 \pi dx}{R^2 \pi L} = \frac{dx}{L} \Rightarrow dm = \frac{M}{L} dx$$



El momento de inercia de cada uno de los discos respecto de uno de sus diámetros es:

$$dI_{diám} = \frac{1}{4} R^2 dm$$

Aplicando el teorema de Steiner, calculamos el momento de inercia de este disco, respecto de un eje paralelo situado a una distancia  $x$  (el eje diametral que pasa por el centro del cilindro):

$$dI_z = dI_{\text{diám}} + dm x^2 = \frac{1}{4} R^2 dm + dm x^2 = \left( \frac{1}{4} R^2 + x^2 \right) dm = \left( \frac{1}{4} R^2 + x^2 \right) \frac{M}{L} dx$$

El momento de inercia del cilindro sólido es:

$$I = \int dI_z = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{1}{4} R^2 + x^2 \right) dx = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

$$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

### *Esfera hueca de pared delgada*

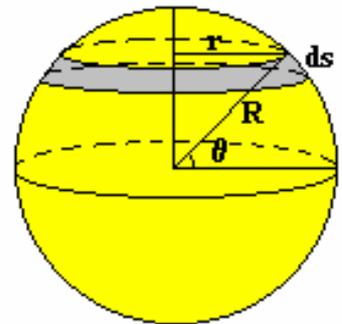
masa  $M$   
radio  $R$

**Eje es un diámetro cualquiera**

Consideremos que la esfera hueca está compuesta por aros de radio  $r$  y espesor  $ds$ .

Por conveniencia, trabajaremos en coordenadas esféricas.

$$r = R \cos \theta$$



$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi r ds}{4\pi R^2} = \frac{2\pi r R d\theta}{4\pi R^2} = \frac{rd\theta}{2R} \Rightarrow dm = \frac{Mr d\theta}{2R}$$

$$I = \int r^2 dm = \frac{M}{2R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3 d\theta = \frac{M}{2R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3 \cos^3 \theta d\theta = \frac{MR^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{MR^2}{2} \left[ \text{sen} \theta - \frac{\text{sen}^3 \theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3} MR^2$$

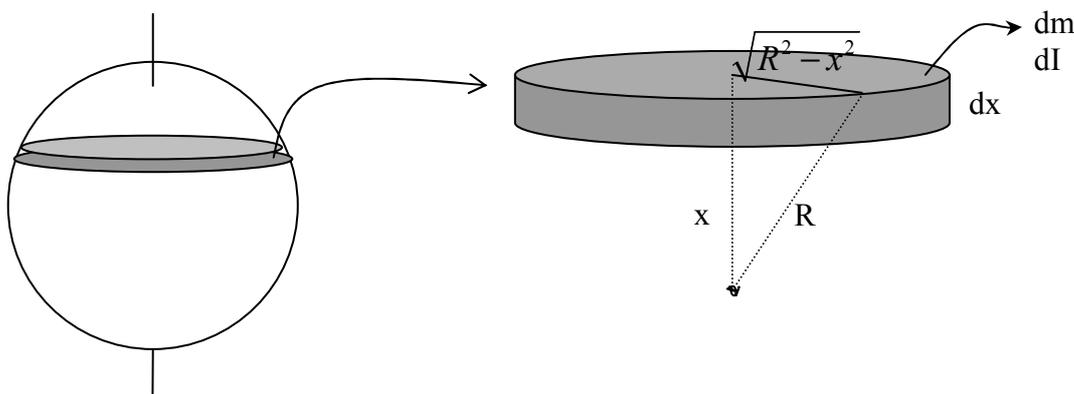
$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

## Esfera sólida

masa M  
radio R

**Eje es un diámetro cualquiera**

Consideremos que la esfera sólida está compuesta por discos de espesor  $dx$ .



$$\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V} = \frac{(R^2 - x^2)\pi dx}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3(R^2 - x^2) dx}{4R^3} \Rightarrow dm = \frac{3M(R^2 - x^2) dx}{4R^3}$$

$$dI_{\text{disco}} = \frac{1}{2} dmr^2 = \frac{1}{2} \frac{3M(R^2 - x^2) dx}{4R^3} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 = \frac{3M(R^2 - x^2)^2 dx}{8R^3}$$

$$I = \int dI = \int_{-R}^R \frac{3M(R^2 - x^2)^2 dx}{8R^3} = \frac{3M}{8R^3} \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^2 dx = \frac{2MR^2}{5}$$

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

## Placa rectangular sólida

masa  $M$   
 longitud  $a$   
 ancho  $b$

### Eje perpendicular a la placa por su centro

Consideremos que la placa está compuesta por varillas de longitud  $a$  y ancho  $dx$ .

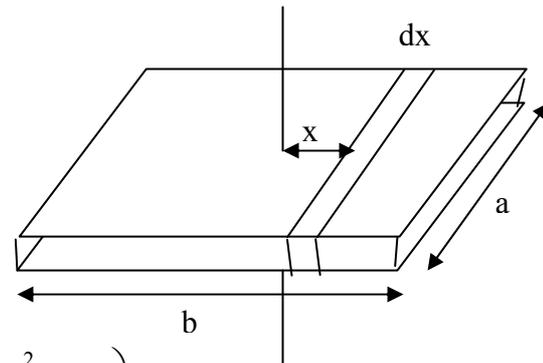
$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{adx}{ab} = \frac{dx}{b} \Rightarrow dm = \frac{M}{b} dx$$

Aplicamos el teorema de Steiner:

$$dI = dI_{CM} + dm x^2 = \frac{dm}{12} a^2 + dm x^2 = \frac{M}{b} dx \left( \frac{a^2}{12} + x^2 \right)$$

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} dI = \frac{M}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{a^2}{12} + x^2 \right) dx$$

$$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$



*Observaciones:*

- No depende del espesor de la placa.
- Depende de la diagonal, más que de  $a$  o  $b$  en particular.

### Eje perpendicular a la placa y pasa por un vértice

Aplicamos el teorema de Steiner

$$I = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) + M \left( \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right)$$

$$I = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2)$$

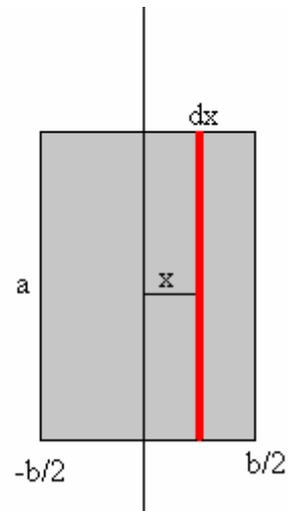
**Eje pasa por la mitad de la placa**

Consideremos que la placa está compuesta por varillas de largo  $a$  y ancho  $dx$  que distan  $x$  del eje de rotación.

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{adx}{ab} = \frac{dx}{b} \Rightarrow dm = \frac{Mdx}{b}$$

$$I = \int dmr^2 = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{Mdx x^2}{b} = \frac{M}{b} \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx = \frac{Mb^2}{12}$$

$$I = \frac{1}{12} Mb^2$$



*Observación:* Aplicando el teorema de los ejes perpendiculares tenemos que

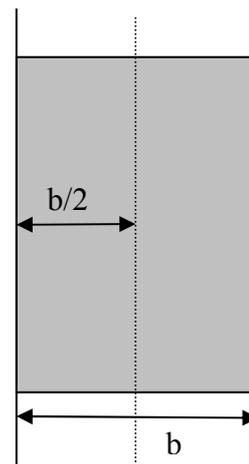
$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12} Ma^2 + \frac{1}{12} Mb^2 = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$  lo cual coincide con la fórmula de eje perpendicular a la placa por su centro.

**Eje pasa por un borde de la placa**

Aplicamos el teorema de Steiner

$$I = \frac{Mb^2}{12} + M \left( \frac{b}{2} \right)^2 = \frac{Mb^2}{12} + \frac{Mb^2}{4} = \frac{Mb^2}{3}$$

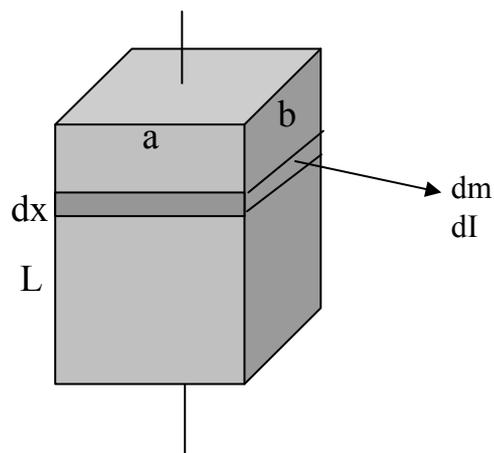
$$I = \frac{1}{3} Mb^2$$



## Paralelepípedo

masa  $M$   
 longitud  $a$   
 ancho  $b$   
 altura  $L$

Eje perpendicular a la base por su centro



Consideremos que el paralelepípedo está compuesto por placas rectangulares de largo  $a$ , ancho  $b$  y espesor  $dx$ .

$$\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V} = \frac{ab \, dx}{abL} = \frac{dx}{L} \Rightarrow dm = \frac{M \, dx}{L}$$

$$I = \int dI_{placa} = \int \frac{1}{12} dm (a^2 + b^2) = \int_0^L \frac{1}{12} \frac{M \, dx}{L} (a^2 + b^2) = \frac{M (a^2 + b^2)}{12L} \int_0^L dx = \frac{M (a^2 + b^2)}{12L} L = \frac{M (a^2 + b^2)}{12}$$

$$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

*Observación:* Coincide con el momento de inercia de una **placa rectangular**.

*Caso particular:* Momento de inercia de un **cubo** de arista  $c$ .

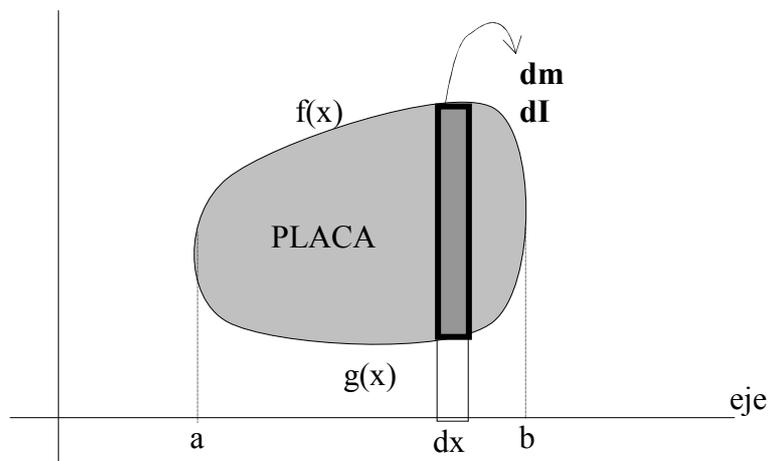
$$I = \frac{1}{6} M c^2$$

### Fórmula general para sólido de revolución engendrado por una placa

Lo que pretendo es hallar una fórmula general de cálculo del momento de inercia con respecto al eje Ox de cualquier sólido de revolución engendrado por una placa uniforme definida mediante funciones.

Consideremos que el sólido de revolución es uniforme y que es generado por la revolución de una placa alrededor del eje Ox. La placa estará determinada por las funciones f(x) y g(x) y estará comprendida entre a y b en x.

Para hallar el momento de inercia, consideremos que el sólido está compuesto por cilindros huecos con espesor, siendo g(x) el radio interior, f(x) el radio exterior y dx la altura del mismo.



Sea M la masa y V el volumen del sólido.

$$\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V} = \frac{(f^2 - g^2)\pi dx}{V} \Rightarrow dm = \frac{M(f^2 - g^2)\pi dx}{V}$$

$$I_{Ox} = \int dI_{\text{cilindro hueco con espesor}} = \int \frac{1}{2} dm (f^2 + g^2) = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{M(f^2 - g^2)\pi dx}{V} (f^2 + g^2) = \frac{M\pi}{2V} \int_a^b (f^4 - g^4) dx$$

$$I_{Ox} = \frac{M\pi}{2V} \int_a^b (f^4 - g^4) dx$$

*Observación:* En caso de no tener primitiva la cuarta potencia de f y/o g, se deberá recurrir a la integración numérica asistida por computadora.

Caso particular: g(x)=0

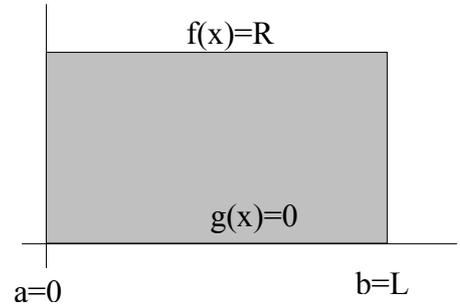
$$I_{Ox} = \frac{M\pi}{2V} \int_a^b f^4 dx$$

**Ejercicios para verificar y aplicar la fórmula hallada**

Cilindro sólido

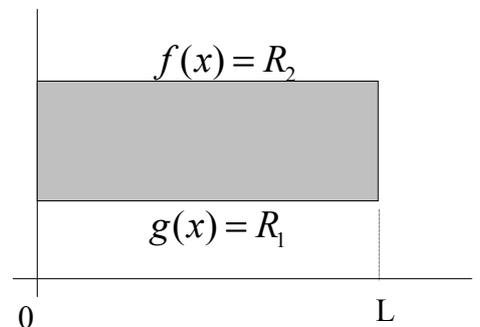
Es engendrado por una placa rectangular unida al eje.

$$I_{Ox} = \frac{M\pi}{2R^2\pi L} \int_0^L R^4 dx = \frac{MR^4}{2R^2L} \int_0^L dx = \frac{MR^2}{2L} L = \frac{MR^2}{2} \quad \text{Correcto}$$



Cilindro hueco de pared gruesa

Es engendrado por una placa rectangular con un lado paralelo al eje y separada de él.

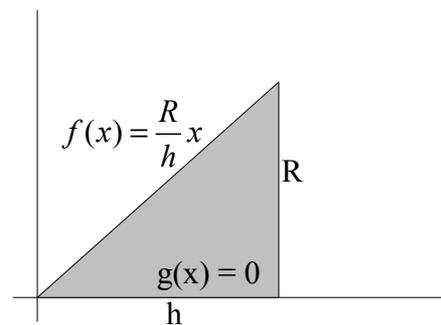


$$I_{Ox} = \frac{M\pi}{2(R_2^2 - R_1^2)\pi L} \int_0^L (R_2^4 - R_1^4) dx = \frac{M}{2(R_2^2 - R_1^2)L} (R_2^4 - R_1^4)L = \frac{M}{2(R_2^2 - R_1^2)} (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

$$I_{Ox} = \frac{1}{2} M (R_2^2 + R_1^2) \quad \text{Correcto}$$

Cono

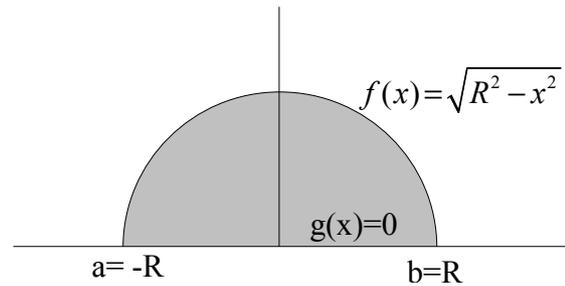
Es engendrado por una placa en forma de triángulo rectángulo con un cateto unido al eje.



$$I_{Ox} = \frac{M\pi}{2 \frac{R^2\pi h}{3}} \int_0^h \left(\frac{R}{h}x\right)^4 dx = \frac{3M}{2R^2h} \frac{R^4}{h^4} \int_0^h x^4 dx = \frac{3MR^2}{2h^5} \frac{h^5}{5} = \frac{3MR^2}{10} \quad \text{Correcto}$$

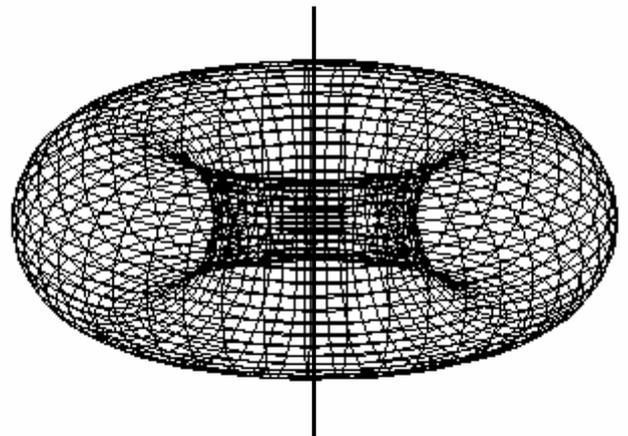
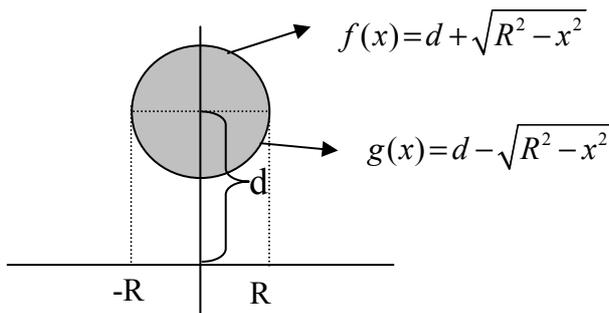
Esfera sólida

Es engendrada por una placa semicircular con el diámetro unido al eje.



$$I_{Ox} = \frac{M\pi}{2 \frac{4}{3} \pi R^3} \int_{-R}^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^4 dx = \frac{3M}{8R^3} \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^2 dx = \frac{2}{5} MR^2 \quad \text{Correcto}$$

Toro



Es engendrado por un círculo que está fuera del eje.

$$I_{Ox} = \frac{M\pi}{2(2\pi d R^2 \pi)} \int_{-R}^R \left[ \left(d + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^4 - \left(d - \sqrt{R^2 - x^2}\right)^4 \right] dx = \frac{M}{4\pi d R^2} \int_{-R}^R 8d \left[ d^2 \sqrt{R^2 - x^2} + (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right] dx$$

No hallada en tablas de integrales:  $\int (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{4} \left( \frac{5}{2} R^2 - x^2 \right) x \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{3}{8} R^4 \text{Arcsen} \left( \frac{x}{R} \right) + C$

Luego de integrar se obtiene

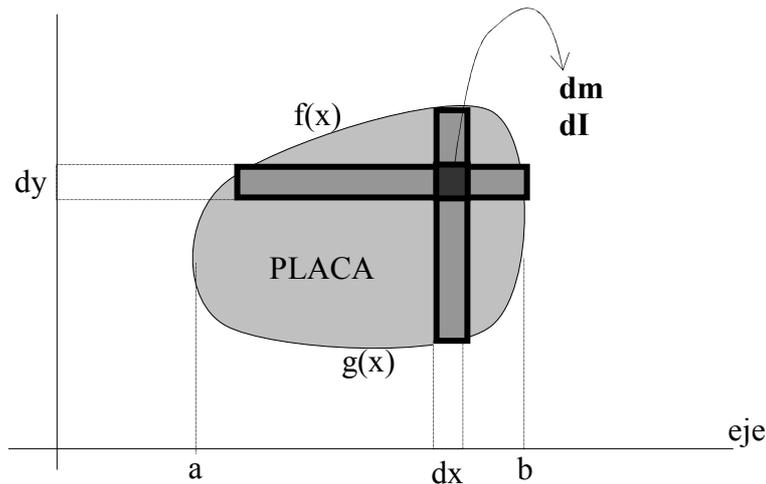
$$I_{Ox} = M \left( d^2 + \frac{3}{4} R^2 \right)$$

### Fórmula general para placa

Lo que pretendo es hallar una fórmula general de cálculo del momento de inercia con respecto al eje Ox de cualquier placa uniforme definida mediante funciones.

Consideremos que la placa es uniforme y que es girada alrededor del eje Ox. La placa estará determinada por las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  y estará comprendida entre  $a$  y  $b$  en  $x$ .

Para hallar el momento de inercia, consideremos que la placa está compuesta por pequeños rectángulos diferenciales de dimensiones  $dx$  y  $dy$ .



Sea  $M$  la masa y  $A$  el área de la placa.

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{dxdy}{A} \Rightarrow dm = \frac{Mdx dy}{A}$$

$$I_{Ox} = \int dI_{\text{rectángulo}} = \int dm y^2 = \frac{M}{A} \int y^2 dx dy = \frac{M}{A} \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} y^2 dy dx = \frac{M}{A} \int_a^b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{g(x)}^{f(x)} dx = \frac{M}{3A} \int_a^b [f^3(x) - g^3(x)] dx$$

$$I_{Ox} = \frac{M}{3A} \int_a^b (f^3 - g^3) dx$$

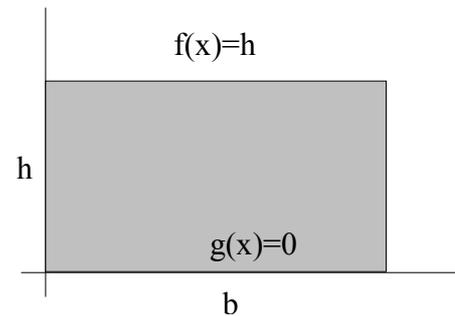
*Observación:* En caso de no tener primitiva la tercer potencia de  $f$  y/o  $g$ , se deberá recurrir a la integración numérica asistida por computadora.

$$I_{Ox} = \frac{M}{3A} \int_a^b f^3 dx$$

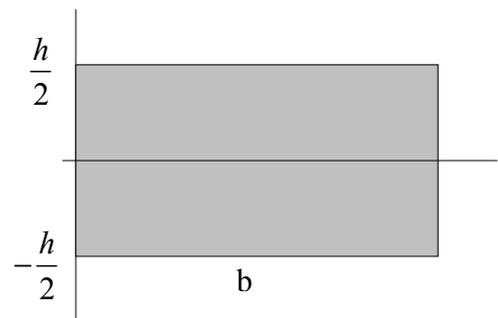
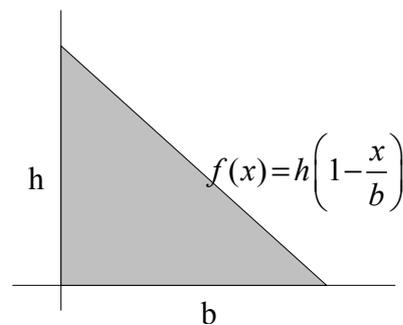
Caso particular:  $g(x)=0$

**Ejercicios para verificar y aplicar la fórmula hallada**Rectángulo

$$I_{Ox} = \frac{M}{3bh} \int_0^b h^3 dx = \frac{Mh^3}{3bh} \int_0^b dx = \frac{Mh^2}{3b} b = \frac{Mh^2}{3} \text{ Correcto}$$

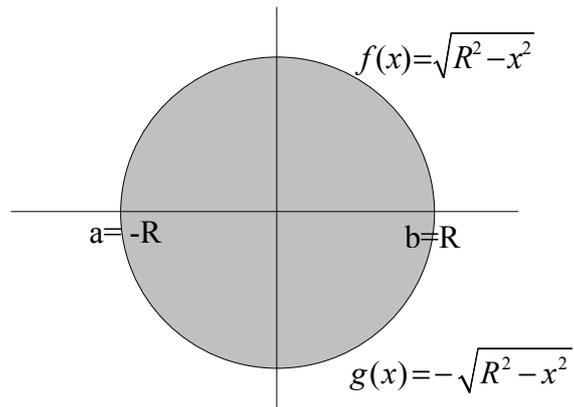
Rectángulo con eje por su línea media

$$I_{Ox} = \frac{M}{3bh} \int_0^b \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^3 - \left( -\frac{h}{2} \right)^3 \right] dx = \frac{M}{3bh} 2 \frac{h^3}{8} b = \frac{Mh^2}{12} \text{ Correcto}$$

Triángulo rectángulo

$$I_{Ox} = \frac{M}{3 \frac{bh}{2}} \int_0^b \left[ h \left( 1 - \frac{x}{b} \right) \right]^3 dx = \frac{2Mh^3}{3bh} \int_0^b \left( 1 - \frac{x}{b} \right)^3 dx = \frac{2Mh^2}{3b} \int_0^b \left( 1 - \frac{x}{b} \right)^3 dx = \frac{Mh^2}{6}$$

$$I_{Ox} = \frac{1}{6} Mh^2$$

Círculo

$$I_{Ox} = \frac{M}{3R^2\pi} \int_{-R}^R \left[ \left( \sqrt{R^2 - x^2} \right)^3 - \left( -\sqrt{R^2 - x^2} \right)^3 \right] dx = \frac{M}{3R^2\pi} 2 \int_0^R \left( R^2 - x^2 \right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{MR^2}{4} \quad \text{Correcto}$$

No hallada en tablas de integrales:

$$\int \left( R^2 - x^2 \right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{4} \left( \frac{5}{2} R^2 - x^2 \right) x \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{3}{8} R^4 \operatorname{Arcsen} \left( \frac{x}{R} \right) + C$$



## **Bibliografía consultada**

- Alonso, M. et al (1999) – “Física, Mecánica” [Volumen 1]  
Blatt, F. (1991) – “Fundamentos de Física”  
Feynman, R. Et al (1987) – “Física” [Volumen 1]  
French, A. (1978) – “Mecánica Newtoniana”  
Landau, L. & Lifshitz, E. (1994) – “Curso de Física Teórica, Mecánica”  
[Volumen 1]  
Larson, R. (2001) – “Cálculo” [Volumen 1 y 2]  
Marion, J. (1995) – “Dinámica clásica de las partículas y sistemas”  
McKelvey, J. & Grotch, H. (1980) – “Física para Ciencias e Ingeniería”  
[Tomo 1]  
Resnick, R. (1993) – “Física” [Volumen 1]  
Sears, F. Et al (1988) – “Física Universitaria”  
Serway, R. (1996) – “Física” [Tomo 1]  
Tipler, P. (1995) – “Física” [Tomo 1]  
Wilson, J. (1996) – “Física”