

**Números Primos**  
y la  
**Hipótesis de Riemann**

Leonardo Damian Cappelletti

2008

## Objetivo del texto

El objetivo de este breve texto es ser un nexo entre las muchas explicaciones elementales de la hipótesis de Riemann y los Números Primos, con los complejos y elaborados libros escritos por reconocidos matemáticos. Se ha intentado mantener una línea simple entre el concepto de número primo y los desarrollos realizados por Riemann hasta su conocida Hipótesis, y la consecuencia de ésta sobre la teoría de números. Para explicaciones más exhaustivas o desarrollos contemporáneos, se puede consultar la bibliografía citada al final del presente texto y a partir de éstas consultar otras que pueden proporcionar más claridad sobre el tema.

# Índice

<b>1</b>	Introducción a los Números Primos.....	4
<b>2</b>	La función Zeta y los Números Primos.....	6
<b>3</b>	La función Contadora de Primos y los Números Primos.....	11
<b>4</b>	La función Contadora de Primos y la función Zeta.....	18
<b>5</b>	La función Contadora de Primos de Riemann.....	22
<b>6</b>	Formas integrales de la función Zeta.....	20
<b>7</b>	La ecuación funcional.....	35
<b>8</b>	La función Xis.....	39
<b>9</b>	La función Xis y la representación en productos infinitos.....	43
<b>10</b>	Relación entre la ceros y la función Contadora de Primos.....	46
<b>11</b>	Determinación de los ceros no triviales de la función zeta.....	61
<b>12</b>	Comentarios finales.....	73

# Capítulo 1

## Introducción a los Números Primos

Desde hace 2500 años los números primos atraen la atención de matemáticos y aficionados de todo el mundo, se los califica de misteriosos e indomables ya que no parece existir alguna regla que determine sus ubicaciones entre los demás números naturales.

Se define un número primo como aquel número natural que es solo divisible por si mismo y por la unidad, por definición el número 1 no se considera número primo.

El concepto de número primo ya se conocía en la antigua Grecia en la escuela de Pitágoras (hace 2500 años) y un poco después en las obras de Euclides se incluye la demostración de la existencia de una cantidad infinita de estos números.

Un antiguo y efectivo método para hallar números primos es la criba de Eratóstenes, que consiste en una tabla de números naturales dispuestos en columnas, primero se tachan todos los múltiplos de 2, luego se tachan todos los múltiplos del siguiente número no tachado anteriormente y así sucesivamente, los números que quedan sin tachar son los números primos.

4	2	3	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>
11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	<del>15</del>	<del>16</del>	17	<del>18</del>	19	<del>20</del>
<del>24</del>	<del>22</del>	23	<del>24</del>	<del>25</del>	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	29	<del>30</del>
31	<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>	37	<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>
41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	<del>45</del>	<del>46</del>	47	<del>48</del>	49	<del>50</del>
<del>54</del>	<del>52</del>	53	<del>54</del>	<del>55</del>	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	59	<del>60</del>
61	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	<del>65</del>	<del>66</del>	67	<del>68</del>	<del>69</del>	<del>70</del>
71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	<del>77</del>	<del>78</del>	79	<del>80</del>
<del>84</del>	<del>82</del>	83	<del>84</del>	<del>85</del>	<del>86</del>	<del>87</del>	<del>88</del>	89	<del>90</del>
91	<del>92</del>	<del>93</del>	<del>94</del>	<del>95</del>	<del>96</del>	97	<del>98</del>	<del>99</del>	<del>100</del>

*Tabla 1:* Criba de Eratóstenes

Para saber si un número es primo basta dividirlo por todos los números naturales menores a la raíz cuadrada de dicho número y si no se encuentra ningún divisor entonces el número es primo. Si se encuentra un divisor o si el número es par y mayor que 2 se dice que es un número compuesto. Los números primos son importantes porque son los átomos de las matemáticas, ya que todos los demás números se construyen a partir de ellos en forma de productos.

144	2	600	2	1404	2
72	2	300	2	702	2
36	2	150	2	351	3
18	2	75	3	117	3
9	3	25	5	39	3
3	3	5	5	13	13
1		1		1	
$144 = 2^4 \cdot 3^2$		$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$		$1404 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 13$	

Figura 1: Ejemplo de factorización

A medida que avanzamos en la recta numérica los números primos son cada vez más escasos y la distancia entre primos consecutivos se va haciendo cada vez más grande, a estas distancias que son regiones libres de primos se las denomina lagunas o desiertos.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Tabla 2: Números primos entre el 1 y el 1000.

## Capítulo 2

### La función Zeta y los números primos

Fue Euler en su publicación de 1794 "Introductio in analysin infinitorum", quien demostró la relación entre la función zeta y los números primos, que más tarde se conocería como producto de Euler.

Se redefine la función zeta como la función armónica generalizada.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (2.1)$$

Expandiendo, nos queda la sumatoria infinita

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \dots \quad (2.2)$$

si se multiplican ambos miembros de (2.2) por  $1/2^s$  nos queda

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{12^s} + \dots \quad (2.3)$$

ahora si se resta (2.3) a (2.2)

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \dots \quad (2.4)$$

si repetimos el procedimiento de multiplicar ambos miembros de (2.4) por  $1/3^s$

$$\frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \frac{1}{33^s} + \frac{1}{39^s} + \dots \quad (2.5)$$

y de igual forma si se resta (2.5) a (2.4)

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \dots$$

Este procedimiento se puede seguir aplicando para los infinitos términos que nos van quedando y vemos que el término de la derecha se va cribando en los infinitos números primos.

$$\dots\dots\dots\left(1 - \frac{1}{17^s}\right)\left(1 - \frac{1}{13^s}\right)\left(1 - \frac{1}{11^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1$$

Finalmente despejando la función zeta nos queda

$$\zeta(s) = \frac{1}{\dots\dots\dots\left(1 - \frac{1}{17^s}\right)\left(1 - \frac{1}{13^s}\right)\left(1 - \frac{1}{11^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)}$$

Expresándolo en forma compacta, nos queda la relación entre la función zeta y los números primos.

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}} \quad (2.6)$$

El índice  $p$  bajo el símbolo multiplicatoria indica que esta última corre sobre los infinitos números primos.

Es notable que la función zeta expresada como una sumatoria sobre los números naturales pueda ser expresada como un producto sobre los números primos, igualando (2.1) con (2.6) nos queda

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}}$$

Otra forma de expresar la función zeta es teniendo en cuenta la serie convergente

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \frac{1}{p^{5s}} + \dots + \frac{1}{p^{ks}} + \dots = \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

que al reemplazarla en (2.6) queda representada como

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks}} \quad (2.7)$$

Cabe hacer notar que ya se conocían algunos valores particulares de la función zeta en términos de series, ya en el año 1350 Oresme demostró que la serie armónica  $\zeta(1) = \infty$  es divergente, con lo cual se confirma por el producto de Euler que existen infinitos números primos, y también el mismo Euler en 1737 demostró que la serie  $\zeta(2) = \pi^2/6$ .

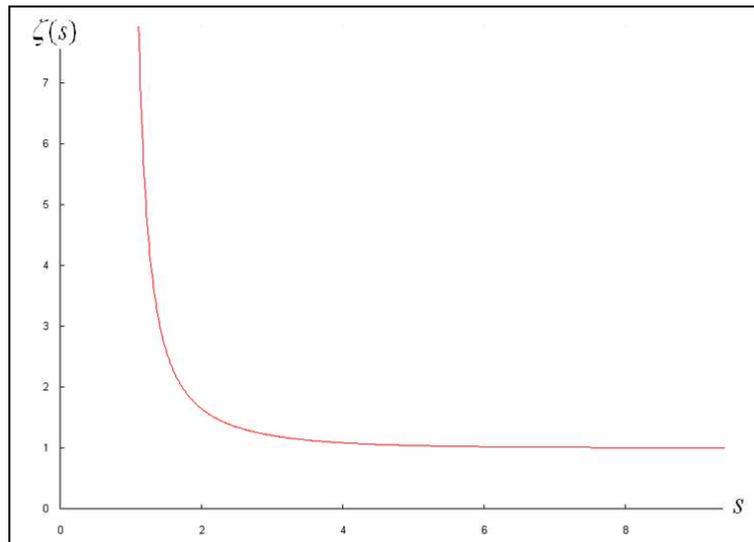


Figura 2: Representación de la función zeta para valores reales de  $s$ .

Pasaron más de 100 años hasta que Riemann se interesó por la función zeta, en ese entonces conocida como función zeta de Euler, y tuvo la idea de extender la función zeta a todo el plano complejo (excepto en el punto singular  $s = 1$ ) por lo cual obtuvo valores adicionales de la función y por medio de ellos intentó probar el teorema de los números primos en su manuscrito “Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen Grösse”, (Sobre el número de primos menores que una magnitud dada).

En dicho manuscrito Riemann determinó que la distribución de los números primos estaba íntimamente relacionada con la distribución de los ceros no triviales de la función zeta, y cuya localización se encuentra en la franja crítica comprendida entre  $0 < \text{Re}(s) < 1$ .

Riemann para avanzar en sus estudios conjetura que la parte no trivial de la función zeta es  $1/2$ , con lo cual los ceros no triviales deberían encontrarse en la línea crítica  $s = 1/2 + it$ , ya que no era esencial para el propósito de su estudio, Riemann no dio una demostración de la misma.

En 1896 Hadamard y de la Vallée Poussin probaron independientemente que ningún cero podía estar sobre la recta  $\text{Re}(s) = 1$ , esta y otras propiedades de los ceros no triviales demostradas por Riemann prueban que dichos ceros están dentro de la banda crítica.

En 1914 Hardy demuestra que existe un número infinito de ceros sobre la línea crítica con  $\text{Re}(s) = 1/2$ , sin embargo todavía es posible que exista un número infinito de ceros no triviales que se encuentren en algún otro lugar dentro de la banda crítica, posiblemente la mayoría de ellos.

En la *figura 3* se pueden apreciar dos ceros triviales sobre el eje  $\text{Re}(s)$  y 20 de los ceros no triviales sobre el eje  $\text{Im}(s)$ ; de estos últimos, 10 tienen parte imaginaria positiva y los otros 10 tienen parte imaginaria negativa, la distribución de los ceros no triviales en ambos cuadrantes es simétrica respecto al eje real.

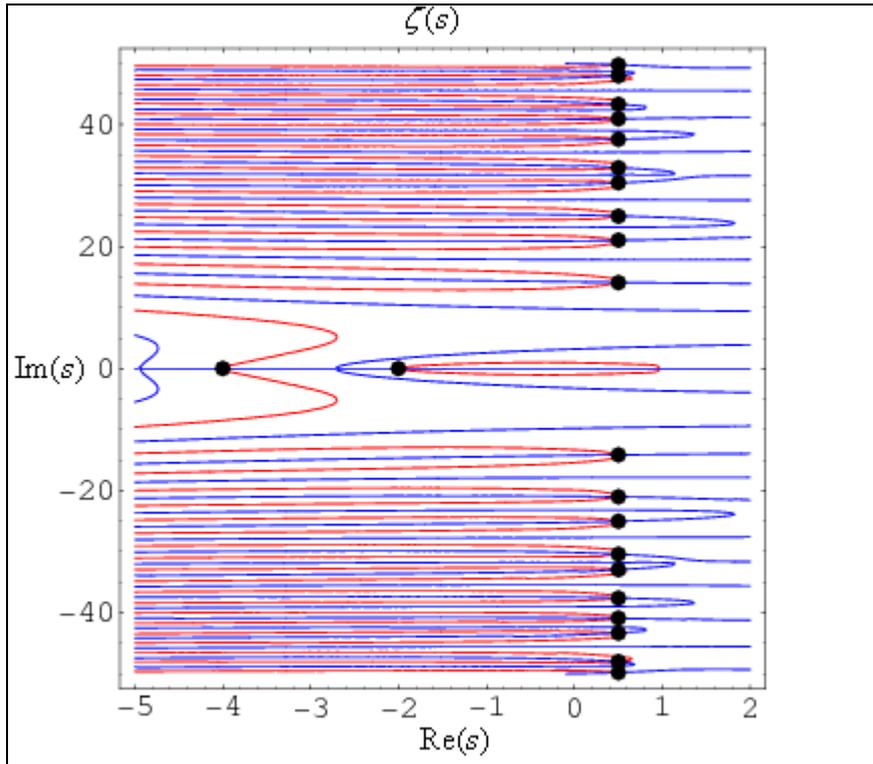


Figura 3: Representación de  $\zeta(s)$ .

**Ejemplo 1:** La función  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  es analítica en la región  $s : \text{Re}(s) > 1$

Sea  $f(x)$  definida para  $x > 0$  y siendo una función que nunca es creciente entonces se tiene

$$\int_{n-1}^n f(x) dx \geq f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x) dx$$

sumando se llega a

$$\int_1^N f(x) dx \geq \sum_{n=2}^N f(n) \geq \int_2^{N+1} f(x) dx$$

Si  $f(x) = x^{-a}$  siendo  $a$  un entero mayor que 1, al integrar se tiene

$$\left(\frac{1}{1-a}\right)\left(\frac{1}{N^{a-1}} - 1\right) \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^a} \geq \left(\frac{1}{1-a}\right)\left(\frac{1}{(N+1)^{a-1}} - \frac{1}{2^{a-1}}\right)$$

tomando límites cuando  $N \rightarrow \infty$ .

$$\left(\frac{1}{a-1}\right) \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a} \geq \left(\frac{1}{(a-1)2^{a-1}}\right)$$

Y sumando 1 en cada miembro nos queda

$$\left(1 + \frac{1}{a-1}\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \geq \left(1 + \frac{1}{(a-1)2^{a-1}}\right)$$

Para el caso de  $a = 2$  se tiene  $\zeta(2) = \pi^2/6$ , valor que queda acotado por la formula anterior entre

$$2 \geq \pi^2/6 \geq 1.5$$

para  $a = 4$  que tiene un valor de la función zeta  $\zeta(4) = \pi^4/90$

$$4/3 \geq \pi^4/90 \geq 25/24$$

Para el caso de  $f(x) = x^{-1}$  se tiene

$$(\ln N - \ln 1) \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} \geq (\ln(N+1) - \ln 2)$$

Tomando límite cuando  $N \rightarrow \infty$  y sumando 1 a cada miembro

$$(1 + \ln \infty) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq (1 + \ln \infty - \ln 2)$$

$$\infty \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \infty$$

por lo tanto

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Para  $\text{Re}(s) < -a < -1$  entonces  $|n^{-s}| = n^{-a} < n^{-r}$  de modo que por la prueba de Weierstrass  $\zeta(s)$  converge uniformemente.

De igual modo  $a < r < 1$ , la suma  $\sum |n^{-s}| > \sum n^{-r}$  diverge

## Capítulo 3

### La función Contadora de Primos y los Números Primos

Se define la función contadora de primos  $\pi(x)$  como:

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}, x \rightarrow \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \quad (3.1)$$

El índice  $p$  bajo el símbolo sumatoria indica que esta última corre sobre los infinitos números primos. También se puede definir en forma más compacta.

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} / p \leq x\}$$

En donde el símbolo  $\#$  significa “todos los números que cumplen con esa condición”. En definitiva  $\pi(x)$  es una función que cuenta todos los números primos menores o iguales a un determinado valor de  $x$ .

---

**Ejemplo 2:** Aplicando la definición dada en (3.1) calculamos los valores de la función contadora de primos para algunos números enteros.

$$\pi(10) = 4(p \leq 10 : 2, 3, 5, 7)$$

$$\pi(20) = 8(p \leq 20 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19)$$

$$\pi(50) = 15$$

$$\pi(100) = 25$$

$$\pi(10^3) = 168$$

$$\pi(10^4) = 1229$$

$$\pi(10^5) = 9592$$

$$\pi(10^6) = 78498$$

$$\pi(10^7) = 664579$$

$$\pi(10^8) = 5761455$$

$$\pi(10^9) = 50487534$$

$$\pi(10^{10}) = 455052511$$

Cabe destacar que a medida que aumentamos el valor de  $x$  sobre los números naturales, los números primos son cada vez más escasos y están más distanciados.

---

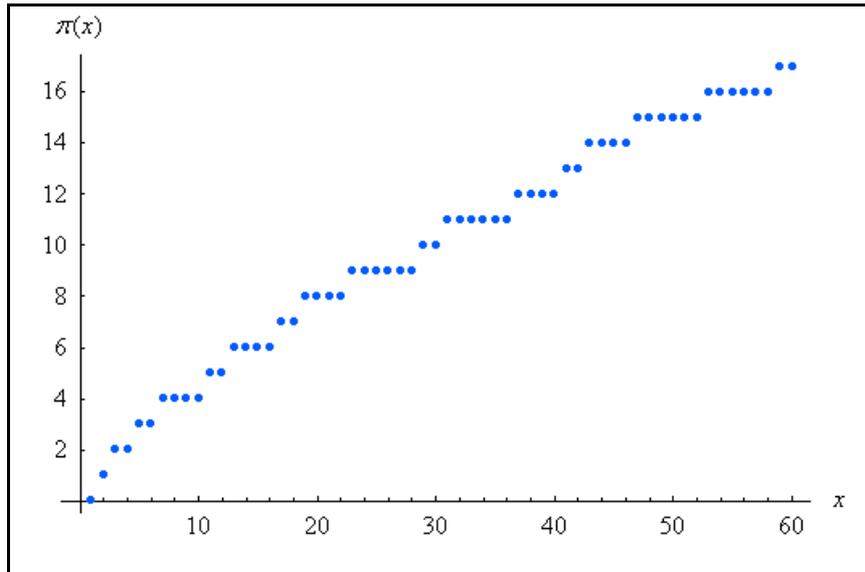


Figura 4: Representación de  $\pi(x)$  para valores enteros de  $x$

En 1792, Gauss se interesó en determinar la cantidad de números primos que hay en un intervalo dado, cambiando el enfoque que hasta ese tiempo se tenía de tratar de hallar una ecuación que describiera la irregular distribución de los números primos, y de forma independiente Legendre llegó a resultados semejantes a Gauss.

$$\pi(x) \approx \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \quad \text{Gauss} \quad (3.2)$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x} \quad \text{Legendre} \quad (3.3)$$

La forma integral es conocida como Integral Logarítmica  $Li(x)$ , la cual al integrarla por partes queda:

$$Li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} \approx \frac{x}{\ln x}$$

Entonces se establece

$$\pi(x) \approx Li(x)$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x} \quad \text{Cuando } x \rightarrow \infty$$

$x$	$\pi(x)$	$x/\ln x - \pi(x)$	$Li(x) - \pi(x)$
100000000	5761455	-332774	754
1000000000	50847534	-2592592	1701
10000000000	455052511	-20758030	3104
100000000000	4118054813	-169923160	11588
1000000000000	37607912018	-1,416706193	38263
10000000000000	346065536839	-11992858452	108971

Tabla 3: comparación entre  $x/\ln x$  y  $Li(x)$

En la *Tabla 3* se puede ver claramente que la ecuación para  $Li(x)$  da una mejor aproximación a la función contadora de primos que  $x/\ln x$ . En la *Figura 5* se puede apreciar que  $\pi(x)$  queda encerrada entre  $Li(x)$  superiormente y por  $x/\ln x$  en la parte inferior.

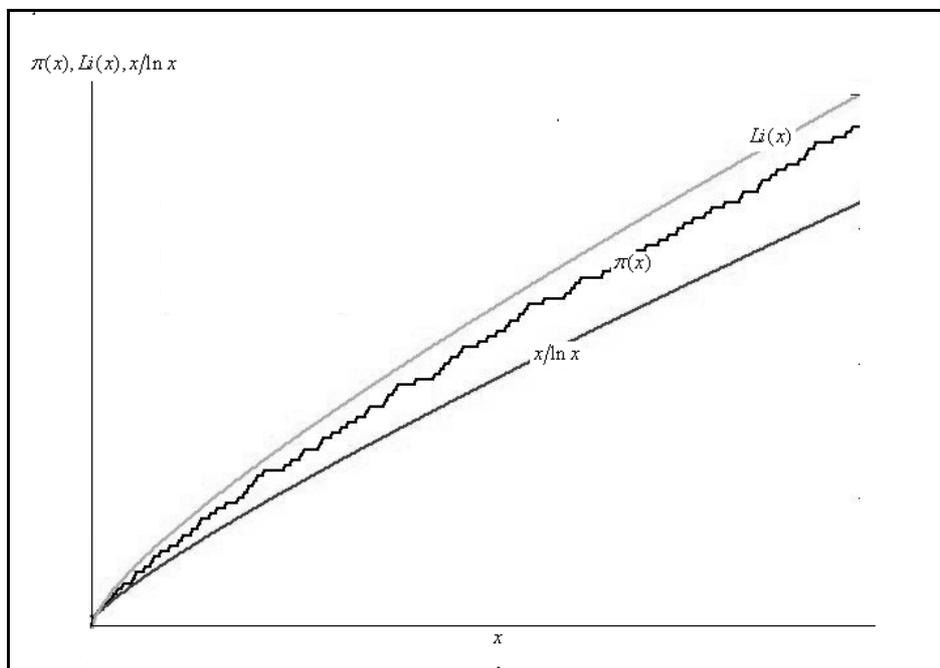


Figura 5: Gráfico de las funciones  $\pi(x)$ ,  $Li(x)$  y  $x/\ln x$ .

Fue Chebychev quien demostró la desigualdad  $0.92 \leq \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \leq 1.11$  y estableció que si

existe el límite cuando  $x \rightarrow \infty$  de la relación de  $\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$  esta debe ser la unidad, por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$$

Y se cumpliría la equivalencia asintótica siguiente  $\pi(x) \approx x/\ln x$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , esta conjetura es la que conocemos como el Teorema de los Números Primos, sobre la densidad de estos sobre los números naturales.

Con estos conceptos queda establecida la forma asintótica de la distribución de los números primos.

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

Por lo tanto queda un resto a determinar:  $R(x) = O(x/\ln x)$ , y fue Riemann quien determina que la diferencia  $\pi(x) - Li(x)$  depende de la ubicación de los ceros no triviales de la función zeta.

**Ejemplo 3:** Se quiere saber que cantidad de números primos aproximadamente hay en el intervalo  $10^7 - 10^6$ .

Usando la ecuación  $\pi(x) \approx x/\ln x$

$$\pi(10^7) \approx 6.204 \cdot 10^5, \quad \pi(10^6) \approx 7.238 \cdot 10^4$$

$$\Delta\pi \approx \pi(10^7) - \pi(10^6) \approx 5.48 \cdot 10^5$$

**Ejemplo 4:** Dado un número aleatorio en el intervalo  $10^7 - 10^6$  cuántos números enteros se deben recorrer hasta encontrar algún número primo.

La diferencia entre dos números consecutivos es  $\Delta\pi = 1$ , entonces si tomamos el límite superior del rango elegido hasta un número primo consecutivo tenemos que:

$$\Delta\pi \approx x_2/\ln x_2 - x_p/\ln x_p$$

Y para valores grandes  $\ln x_2 \approx \ln x_p$  con lo cual  $x_p \approx x_2 - \ln x_2$  por lo tanto el intervalo aproximado en que podemos encontrar algún número primo es

$$\Delta x \approx x_2 - x_p \approx \ln x_2$$

$$\Delta x \approx 16.118$$

Es decir si tenemos un primo  $p$  el siguiente aparecerá en una distancia aproximadamente de  $\ln p$ , en nuestro caso dado un número aleatorio deberemos recorrer aproximadamente 16 números enteros hasta encontrar algún número primo. Esta distancia deberá ser interpretada como una distancia promedio en el intervalo tomado ya que algunos primos se encontraran a una distancia menor y otros a una distancia mayor.

## Logaritmo integral

Se define la integral logarítmica como

$$Li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

Como la función  $1/\ln t$  tiene una singularidad en  $t = 1$  entonces la integral para  $x > 1$  debe ser interpretada utilizando el valor principal de Cauchy que permite asignar valores a determinadas integrales impropias que de lo contrario resultarían indefinidas.

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right)$$

operando sobre el primer término

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} &= \int_0^{1-\varepsilon} \left( \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(t-1)} \right) dt + \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{(t-1)} \\ &= \int_0^{1-\varepsilon} \left( \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(t-1)} \right) dt + [\ln(t-1)]_0^{1-\varepsilon} \\ &= \int_0^{1-\varepsilon} \left( \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(t-1)} \right) dt + \ln \varepsilon \end{aligned}$$

para el segundo término

$$\begin{aligned} \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\ln t} &= \int_{1+\varepsilon}^x \left( \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(t-1)} \right) dt + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{(t-1)} \\ &= \int_{1+\varepsilon}^x \left( \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(t-1)} \right) dt + [\ln(t-1)]_{1+\varepsilon}^x \\ &= \int_{1+\varepsilon}^x \left( \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(t-1)} \right) dt + \ln(x-1) - \ln \varepsilon \end{aligned}$$

Al sumar ambos términos nos queda

$$Li(x) = \ln(x-1) + \int_0^x \left( \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(t-1)} \right) dt$$

Se tiene que la relación  $\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(t-1)}$  no es tan problemática ya que cuando  $t$  esta próximo a 1, su valor es el mismo que cuando  $s$  esta próximo a cero de la función.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(1+s)} - \frac{1}{s} &= \frac{s - \ln(1+s)}{s \ln(1+s)} = \frac{s - (s - s^2/2 + s^3/3 - s^4/4 + \dots)}{s(s - s^2/2 + s^3/3 - s^4/4 + \dots)} \\ &= \frac{1/2 - s/3 + s^2/4 - \dots}{1 - s/2 + s^2/3 - \dots} \end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} Li(x) = \ln(0) + \frac{1}{2} = -\infty$$

Aplicando la regla de L'hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x/\ln x}{Li(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{\ln(x) - 1/\ln^2(x)}{1/\ln x} \right]}{1/\ln x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x) - 1}{\ln x} = 1$$

de la cual se deduce

$$Li(x) \simeq x/\ln x \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

También se suele dar una forma desplazada de la integral logarítmica para evitar la singularidad en el dominio de integración.

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = Li(x) - Li(2)$$

Como para  $x > 1$  la función  $Li(x)$  tiene derivadas positivas y es creciente, entonces recorre todos los valores enteros cuando  $x > 1$ , solo se anula una vez en ese intervalo y ocurre cuando  $x = \mu = 1.45136923488338\dots$  este numero es mas conocido como la constante de Ramanujan – Soldner, de modo que la expresión alternativa para el logaritmo integral es

$$Li(x) = \int_{\mu}^x \frac{dt}{\ln t}$$

y como resulta mas comodo integrar desde 2 .

$$Li(x) = \mu + \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

La expansión asintótica de  $Li(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$  es

$Li(x) = O(x/\ln x)$  la notación de Landau  $O$  representa la cota superior asintótica

La expansión asintótica completa es

$$Li(x) \approx x/\ln x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\ln x)^k} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{xk!}{(\ln x)^{k+1}}$$

escrito de otra forma

$$\frac{Li(x)}{x/\ln x} \approx 1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} + \frac{6}{(\ln x)^3} + \frac{12}{(\ln x)^4} + \dots$$

## Capítulo 4

### La función Contadora de Primos y la función Zeta

Riemann encontró la forma de relacionar la función contadora de primos con la función zeta y parte de la siguiente forma integral

$$\boxed{\int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx} \quad (4.1)$$

Que al descomponer la función  $\pi(x)$  conceptualmente en función de los números primos y operar algebraicamente da:

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{i}{x(x^s - 1)} dx = \sum_{i=1}^{\infty} i \int_{p_i}^{p_{i+1}} \left( \frac{x^{s-1}}{x^{s-1}} - \frac{1}{x} \right) dx = \sum_{i=1}^{\infty} i \left[ \frac{\ln(x^s - 1)}{s} - \ln x \right]_{p_i}^{p_{i+1}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i \left[ \frac{\ln(p_{i+1}^s - 1)}{s} - \ln(p_{i+1}) - \frac{\ln(p_i^s)}{s} + \ln(p_i) \right] \\ &= \left[ \frac{\ln(p_2^s - 1)}{s} - \ln(p_2) - \frac{\ln(p_1^s - 1)}{s} + \ln(p_1) \right] \\ &\quad + 2 \left[ \frac{\ln(p_3^s - 1)}{s} - \ln(p_3) - \frac{\ln(p_2^s)}{s} + \ln(p_2) \right] + \dots \\ &= \left[ \frac{-\ln(p_1^s - 1)}{s} - \ln(p_2) - \frac{\ln(p_2^s - 1)}{s} - \dots \right] + [\ln p_1 + \ln p_2 + \dots] \\ &= \left[ \frac{-\ln(p_1^s - 1)}{s} - \frac{\ln(p_2^s - 1)}{s} - \dots \right] + \left[ \frac{s \ln p_1}{s} + \frac{s \ln p_2}{s} + \dots \right] \\ &= \left[ \frac{-\ln(p_1^s - 1)}{s} - \frac{\ln(p_2^s - 1)}{s} - \dots \right] + \left[ \frac{\ln p_1^s}{s} + \ln p_2^s + \dots \right] \\ &= \left[ -\frac{\ln(p_1^s - 1)}{s} - \frac{\ln p_1^s}{s} - \dots \right] - \left[ \frac{\ln(p_2^s - 1)}{s} - \frac{\ln p_2^s}{s} - \dots \right] - \dots \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{s} \left[ \frac{\ln(p_1^s - 1)}{p_1^s} + \frac{\ln(p_2^s - 1)}{p_2^s} + \dots \right] = -\frac{1}{s} \sum_p \ln(1 - p^{-s})$$

quedando la relación entre la función contadora de primos y la función zeta como

$$\int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx = -\frac{1}{s} \sum_p \ln(1 - p^{-s})$$

al sacar logaritmo a la función zeta expresada en forma de productos infinitos queda expresada en forma de sumatoria sobre todos los números primos, es decir:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \ln \zeta(s) = -\sum_p \ln(1 - p^{-s})$$

$$\ln \zeta(s) = \ln\left(\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right) = -\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

relacionando términos

$$s \int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx = \ln \zeta(s)$$

finalmente

$$\boxed{\int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx = \frac{\ln \zeta(s)}{s}} \quad \text{Re}(s) > 1 \quad (4.2)$$

De esta manera el teorema de los números primos puede obtenerse invirtiendo esta relación para obtener  $\pi(x)$  como una integral sobre  $\ln \zeta(s)/s$ . Como esta integral es difícil de obtener, Riemann se basó en otra función que cuenta la potencia de los números primos, y es por medio de esta última que pudo invertir dicha relación y obtener la expresión para  $\pi(x)$ .

A esta misma relación podemos llegar utilizando la fórmula de sumación de Abel, que es una versión discreta de la integración por partes, y nos va a proporcionar una visión más integral de la función  $\zeta(s)$  en el semiplano  $\text{Re}(s) > 1$ .

Sea  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $f(t)$  una función con derivadas continuas y definidas en el intervalo

$[a, b]$ , entonces definiendo  $A(t) = \sum_{a < n \leq t} a(n)$  tendremos que:

$$\sum_{a < n \leq t} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_a^x A(t)f'(t)dt$$

Aplicado para nuestro caso particular

$$a(n) = \pi(n) - \pi(n-1) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Si  $n$  es primo entonces  $a(n) = 1$  y si  $n$  es no primo entonces  $a(n) = 0$ .

Haciendo  $a = m$  y  $f(x) = x^{-s}$  nos queda

$$A(x) = \sum_{m < n \leq x} a(n) = \pi(x) - \pi(m)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m < n \leq x} \frac{a(n)}{n^s} &= (\pi(x) - \pi(m))x^{-s} - \int_m^x (\pi(t) - \pi(m))(t^{-s})' dt \\ &= \pi(x)x^{-s} + s \int_m^x \pi(t)(t^{-s-1}) dt - \pi(m)m^{-s} \end{aligned}$$

Poniendo  $m = 1$  y tomando limites cuando  $x \rightarrow \infty$  se tiene

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = s \int_2^\infty \frac{\pi(t)}{t^{s+1}} dt$$

Como nos interesa relacionar el resultado anterior con la función zeta debemos convertir la suma de potencias en una suma de logaritmos para ello utilizamos el cambio de variable  $s = nz$  y multiplicamos ambos miembros por una sumatoria en  $n$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_p \frac{1}{p^{nz}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} nz \int_2^\infty \frac{\pi(t)}{t^{nz+1}} dt$$

$$\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{p^{nz}} = \int_2^\infty \sum_{n=1}^{\infty} z \frac{\pi(t)}{t^{nz+1}} dt$$

$$\sum_p \left( -\ln \left( 1 - \frac{1}{p^z} \right) \right) = z \int_2^\infty \frac{\pi(t)t^{-z}}{t(1-t^{-z})} dt$$

$$\ln \left( \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^z} \right)^{-1} \right) = z \int_2^\infty \frac{\pi(t)}{t(t^z - 1)} dt$$

Y como  $\zeta(z) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$  nos queda

$$\ln \zeta(z) = z \int_2^{\infty} \frac{\pi(t)}{t(t^z - 1)} dt \quad \text{expresión válida para } \operatorname{Re}(s) > 1$$

De manera semejante se pueden relacionar otras funciones aritméticas con la función  $\zeta(s)$ .

## Capítulo 5

### La función contadora de primos de Riemann

#### Relación entre $J(x)$ y $\pi(x)$

Para poder obtener  $\pi(x)$  como una integral sobre  $\ln \zeta(s)/s$ , Riemann definió una función aritmética que cuenta los números primos y sus potencias menores que un cierto valor dado, entonces esta función  $J(x)$  puede expresarse en términos de  $\pi(x)$  de la siguiente manera.

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n}$$

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \leq x^{1/n}} \frac{1}{n}$$

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \leq x^{1/n}} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{p \leq x^{1/n}} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(x^{1/n})$$

$$\boxed{J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(x^{1/n})} \quad (5.1)$$

La función  $\pi(x)$  puede expresarse en términos de  $J(x)$  utilizando la inversión de Möbius.

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \qquad f(n) = \sum_{d|n} g(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

En donde  $g(n)$  y  $f(n)$  son funciones aritméticas y las sumas se extienden para todos los divisores positivos de  $n$ .

Por lo cual queda

$$\boxed{\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{1/n})} \quad (5.2)$$

La función  $\mu(n)$  de Möbius es una función multiplicativa y está definida para todos los números naturales  $n$  y toma valores  $\{-1, 0, 1\}$ , dependiendo de la factorización de  $n$  en sus factores primos y se define como sigue:

- $\mu(n) = 1$  si  $n$  es libre de cuadrados y tiene un número par de factores primos distintos
- $\mu(n) = -1$  si  $n$  es libre de cuadrados y tiene un número impar de factores primos distintos
- $\mu(n) = 0$  si  $n$  es divisible por algún cuadrado

Solo cuando  $n$  es un número primo la función de Möbius da el valor de -1.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_i$	-	2	3	$2^2$	5	$2 \times 3$	7	$2^3$	$3^2$	$2 \times 5$
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Tabla 4: valores de la función de Möbius del 1 al 10.

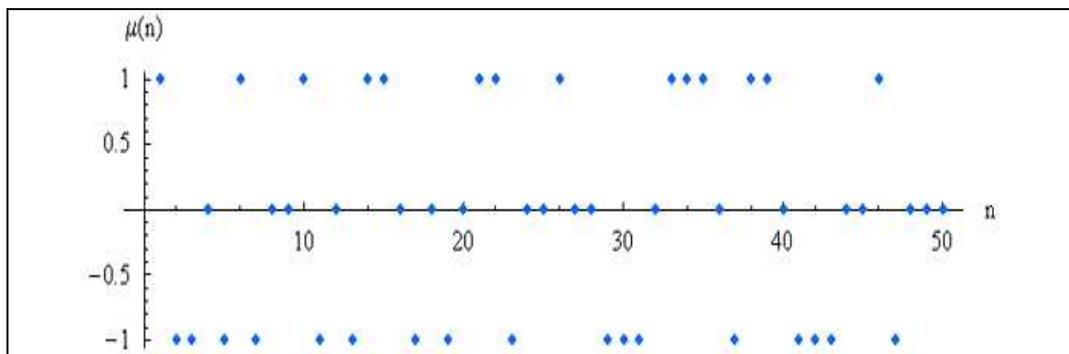


Figura 6: los 50 primeros valores de la función  $\mu(x)$ .

**Ejemplo 5:** Determinar el valor numérico de  $J(x)$  para  $x = 100$ .

De la definición de  $J(x)$  en función de  $\pi(x)$ , ecuación (5.1) y teniendo en cuenta que  $\pi(100) = 25$ , ya que existen 25 números primos antes que 100 (ver Tabla 2).

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(x^{\frac{1}{n}}) = \pi(x) + \frac{1}{2} \pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3} \pi(x^{1/3}) + \frac{1}{4} \pi(x^{1/4}) + \dots$$

$$J(100) = \pi(100) + \frac{1}{2}\pi(10) + \frac{1}{3}\pi(4.64) + \frac{1}{4}\pi(3.16) + \frac{1}{5}\pi(2.51) + \frac{1}{6}\pi(2.15) + \frac{1}{7}\pi(1.93)$$

$$J(100) = 25 + \frac{1}{2}4 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{5}1 + \frac{1}{6}1 + \frac{1}{7}0 = 28.533$$

**Ejemplo 6:** Determinar el valor numérico de  $\pi(x)$  en función de  $J(x)$  para  $x = 100$ .

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^n) = \mu(1)J(x) + \frac{\mu(2)}{2}J(x^{1/2}) + \frac{\mu(3)}{3}J(x^{1/3}) + \frac{\mu(4)}{4}J(x^{1/4}) + \dots$$

De la *figura 6* se pueden extraer valores de la función  $\mu(x)$ .

$$\pi(100) = J(100) - \frac{1}{2}J(10) - \frac{1}{3}J(4.64) - \frac{1}{5}J(2.51) + \frac{1}{6}J(2.15) - \frac{1}{7}J(1.93)$$

$$\pi(100) = 28.333 - \frac{1}{2}(5.33) - \frac{1}{3}(3) - \frac{1}{5}(2) + \frac{1}{6}(2) - \frac{1}{7}J(0) = 24.87$$

### Relación entre $J(x)$ y $\zeta(s)$

Partiendo de la definición de la función zeta y su forma logarítmica.

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \quad \Rightarrow \quad \ln \zeta(s) = -\sum_p \ln(1 - p^{-s})$$

y de la forma integral para un número primo elevado a una cierta potencia

$$p^{-ks} = s \int_{p^k}^{\infty} x^{-s-1} dx$$

Se tiene que:

$$\ln \zeta(s) = -\sum_p (1 - p^{-s}) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-ks}}{k} = s \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{p^k}^{\infty} x^{-s-1} dx$$

$$\ln \zeta(s) = s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_p \int_{p^k}^{\infty} x^{-s-1} dx = s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{p_i^k}^{\infty} x^{-s-1} dx$$

Si consideramos a  $J(x)$  uniforme y continua se cumple la siguiente propiedad en el cual ambos lados de la función convergen al mismo limite.

$$J(x) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{p^n < x} \frac{1}{n} + \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{2} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(x + \varepsilon) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(x - \varepsilon) \right]$$

de esta manera se puede considerar la relación entre  $\zeta(s)$  y  $J(x)$  de la siguiente manera

$$\ln \zeta(s) = s \int_0^{\infty} J(x) x^{-s-1} dx$$

Despejando finalmente nos queda

$$\boxed{\frac{\ln \zeta(s)}{s} = \int_0^{\infty} J(x) x^{-s-1} dx} \quad (5.3)$$

Quedando la función  $J(x)$  como una integral sobre  $\ln \zeta(s)/s$ . Riemann invirtió esta relación y obtuvo la expresión para  $\pi(x)$  la cual depende de la distribución de los ceros no triviales de la función zeta.

## Capítulo 6

### Formas integrales de la función Zeta

Si se utiliza la función gamma de Euler sobre la función zeta expresada en forma de sumatoria se puede expresar esta en forma de una integral que es más fácil de manejar.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad s > 1$$

La función gamma de Euler  $\Gamma(s)$  es una función meromorfa en  $\mathbb{C}$  cuyas propiedades pueden extenderse a todo el plano complejo por continuación analítica (exceptuando los puntos singulares), posee polos simples en  $s = 0, -1, -2, -3, -4, \dots$  y de residuo

$$\text{Res}(\Gamma(s), -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

$$\boxed{\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt} \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (6.1)$$

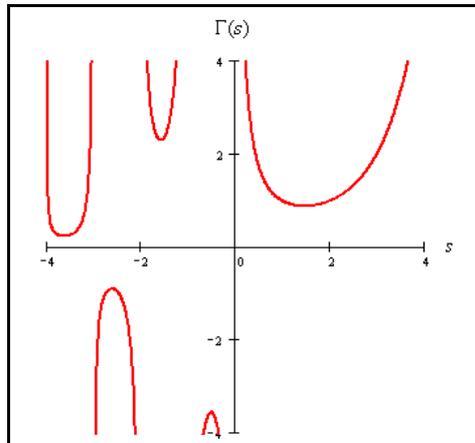


Figura 7: Función gamma de Euler.

multiplicando ambas funciones

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

reordenando términos

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^{s-1}}{n^{s-1}} \frac{dt}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{n}\right)^{s-1} \frac{dt}{n}$$

ahora debemos hacer un cambio de variable

$$\mu = \frac{t}{n} \Rightarrow d\mu = \frac{dt}{n} \Rightarrow dt = nd\mu$$

reemplazando

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-n\mu} \mu^{s-1} d\mu = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\mu} \mu^{s-1} d\mu$$

teniendo en cuenta la serie geométrica convergente

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow x = e^{-\mu} \Rightarrow \frac{1}{1-e^{-n\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\mu}$$

Como el índice de la sumatoria empieza desde 0 debemos expresarla en función de que comience desde 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu(n+1)} = e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\mu} = \frac{e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}} = \frac{1}{e^{\mu}-1}$$

reemplazando nos queda

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\mu}-1} \mu^{s-1} d\mu$$

la suma dentro de la integral es posible por el hecho de que  $e^{-n\mu} \mu^{s-1}$  converge absolutamente como suma en  $n$  y también como integral en  $\mu$ .

La integral converge cuando  $\text{Re}(s) > 1$  ya que  $\left| \frac{\mu^{s-1}}{e^{\mu}-1} \right|$  esta acotada por  $\left| \mu^{\text{Re}(s)-2} \right|$  cuando

$\mu$  es próxima a cero y por  $\left| \mu^{\text{Re}(s)-1} \right| e^{-x}$  cuando  $\mu$  es grande.

Despejando términos finalmente nos queda la función zeta expresada en forma de una integral impropia.

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{\mu^{s-1}}{e^{\mu}-1} d\mu} \quad (6.2)$$

La siguiente serie puede expresarse como

$$\frac{\mu}{e^{\mu}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\mu^n}{n!} \quad \text{si } |\mu| < 2\pi$$

En donde cada coeficiente  $B_n$ , de la serie de Taylor es el  $n$ -ésimo número de Bernoulli.

$$\frac{\mu}{e^{\mu}-1} = 1 - \frac{1}{2}\mu + B_1 \frac{\mu^2}{2!} - B_2 \frac{\mu^4}{4!} + \dots$$

Algunos valores de los números de Bernoulli

$$B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_3 = 0, B_4 = -1/30, B_5 = 0, B_6 = 1/42$$

$$B_7 = 0, B_8 = -1/30, B_9 = 0, B_{10} = 5/66, B_{11} = 0, B_{12} = -691/2730$$

Euler ya había encontrado algunos valores particulares de la función zeta en función de los números de Bernoulli.

Otra forma integral dada por Riemann parte de la siguiente expresión

$$\int \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

Si se deforman los límites de integración entre  $+\infty$  y  $+\infty$ , que puede expresarse como un recorrido de  $+\infty$  moviéndose hacia la izquierda por debajo del semieje positivo de las  $x$ , rodea el origen una vez en la dirección positiva y volviendo al eje positivo de las  $x$  va hacia  $+\infty$ . El término  $2\pi i$  es el promedio del valor de  $(-x)(e^x - 1)^{-1}$  en el círculo de  $|x| = \delta$  (porque  $id\theta = dx/x$ ), por lo tanto el término medio tiende a cero cuando  $\delta \rightarrow 0$  siempre que  $s > 1$  porque  $(-x)(e^x - 1)^{-1}$  es no singular alrededor de  $x = 0$ .

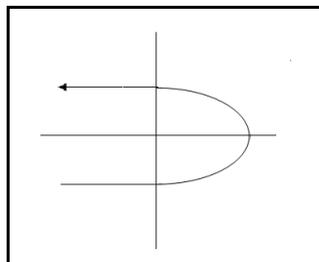


Figura 8: Recorrido de integración de  $\zeta(s)$

Reemplazando los límites de integración tenemos:

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} \quad (6.3)$$

Descomponiendo la trayectoria y teniendo en cuenta las propiedades antes mencionadas

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} + \int_{|x|=\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$$

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} \right)$$

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \int_{\infty}^0 \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} + \int_0^{\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$$

Ahora si se opera convenientemente el signo negativo en  $(-x)$ .

$$\int_0^{\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = (-1)^s \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = e^{i\pi s} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

$$\int_{\infty}^0 \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = -(-1)^{-s} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = -e^{-i\pi s} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

Reemplazando los términos

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = e^{i\pi s} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx - e^{-i\pi s} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (6.4)$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

$$\text{Teniendo en cuenta que } \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

Y el término fuera de la integral puede expresarse en la forma trigonométrica dada por Euler.

$$(e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) = (\cos(\pi s) + i\text{sen}(\pi s)) - (\cos(\pi s) - i\text{sen}(\pi s)) = 2i\text{sen}(\pi s)$$

Al reemplazar en (6.4) nos queda

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = 2i\text{sen}(\pi s)\zeta(s)\Gamma(s) \quad (6.5)$$

Usando la formula de reflexión de Euler para la función gamma se tiene:

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi s)} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(\pi s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)} \quad (6.6)$$

Reemplazando (6.6) en (6.5) y despejando el valor de  $\zeta(s)$  se tiene que

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}} \quad (6.7)$$

Esta ultima integral nos da el valor de la función  $\zeta(s)$  para todos los números complejos  $s$  y muestra que esta función es finita para valores finitos de  $s$  con la excepción de 1 y también que es 0 si  $s$  es igual a enteros negativos.

Si la parte real de  $s$  es negativa entonces a pesar de ser tomada en un sentido positivo alrededor del dominio especificado, esta integral también puede ser tomada en un sentido negativo alrededor de igual dominio conteniendo todos los complejos restantes.

**Ejemplo 7:** La función zeta sirve para regularizar series que en principio parecieran divergentes, un caso curioso es el de la serie para  $s = 0$ .

$$\zeta(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2}$$

Para poder resolver esta integral por medio del teorema de los residuos debemos considerar el desarrollo en series de Taylor y cambiar a variable compleja.

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \oint_c \frac{(-z)^s}{e^z - 1} \frac{dz}{z}$$

Sustituyendo por  $s = 0$  y teniendo en cuenta que  $\Gamma(1) = 1$

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= \frac{\Gamma(1)}{2\pi i} \oint_c \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2\pi i} \left\{ 2\pi i \left[ \sum_k \operatorname{Res}(f(z), z_k) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \left( 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n z^n}{(n)!} \right) \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \left( \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n z^{n-1}}{(n)!z} \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left\{ 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{d^2}{dz^2} \left( z^3 \frac{1}{z^3} \right) - \left( z \frac{1}{z} \right) + z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n z^{n-1}}{(n)!z} \right] \right\} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Es interesante destacar que la suma infinita de números 1 converge o se le puede asignar un número negativo.

**Ejemplo 8:** Otro caso particular es para la serie  $s = -1$ .

$$\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \oint_c \frac{(-z)^s}{e^z - 1} \frac{dz}{z}$$

Reemplazando para  $s = -1$  y recordando que  $\Gamma(2) = 1$

$$\begin{aligned}
\zeta(-1) &= \frac{\Gamma(2)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^{-1}}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \frac{(-1)^{-1}}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{e^z - 1} \frac{dz}{z^2} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_c \left( \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{B_2}{(2!)z} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{B_n z^{n-2}}{(n)!z} \right) dz \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \left\{ 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{d^2}{dz^2} \left( z^3 \frac{1}{z^3} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( z^2 \frac{1}{z^2} \right) + \frac{z B_2}{(2)!z} + z \sum_{n=3}^{\infty} \frac{B_n z^{n-2}}{(n)!z} \right] \right\} = -\frac{B_2}{2}
\end{aligned}$$

y como  $B_2 = 1/6$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

la sumatoria de todos los números naturales converge a un número negativo

De manera similar se pueden determinar valores para otras series como por ejemplo:

$$\zeta(-2n) = \frac{\Gamma(-2n+1)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^{-2n}}{e^x-1} \frac{dx}{x} = \frac{(2n)!}{2\pi i} 0 = 0$$

La serie  $\zeta(-2n)$  corresponde a los ceros triviales de la función zeta

$$\zeta(1-2n) = \frac{\Gamma(2n)!}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^{1-2n}}{e^x-1} \frac{dx}{x} = \frac{(2n-1)!(-1)^n 2\pi i B_n}{(2n)!} = \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!}$$

### Forma debida a Chebychev

En 1850 Chebychev publico el primer estudio de la función contadora de primos por métodos analíticos. El comenzó por tomar el logaritmo del producto de Euler obteniendo

$$-\sum_p \ln(1-p^{-s}) + \ln(s-1) = \ln(\zeta(s)(s-1))$$

de este punto partió para obtener la forma integral siguiente

$$\zeta(s) - 1 - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left( \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} \right) e^x x^{s-1} dx$$

A esta misma ecuación podemos llegar partiendo de la definición de la función zeta en forma de sumatoria

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \Rightarrow \quad \zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Multiplicando por la función gamma y teniendo en cuenta que la sumatoria no incluye el número 1 ya que se le resta la misma cantidad a la función zeta.

$$\Gamma(s)(\zeta(s) - 1) = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{s-1}}{n^s} dt = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{n}\right)^{s-1} \frac{dt}{n}$$

haciendo cambio de variables:  $x = \frac{t}{n} \Rightarrow dx = \frac{dt}{n}$

$$\Gamma(s)(\zeta(s)-1) = \int_0^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} e^{-nx} = e^{-2x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-2x}}{1-e^{-x}}$$

$$\Gamma(s)(\zeta(s)-1) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{1-e^{-x}} x^{s-1} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{e^x-1} x^{s-1} dx$$

$$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1) \quad \Rightarrow \quad (s-1)\Gamma(s-1) = \Gamma(s) \quad \Rightarrow \quad \Gamma(s-1) = \frac{\Gamma(s)}{(s-1)}$$

y sumando  $\Gamma(s-1)$  en ambos miembros

$$\Gamma(s)(\zeta(s)-1) - \frac{\Gamma(s)}{(s-1)} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{e^x-1} x^{s-1} dx - \Gamma(s-1)$$

$$\Gamma(s-1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^{s-1}}{x} dx$$

$$\Gamma(s)(\zeta(s)-1 - \frac{1}{s-1}) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{e^x-1} x^{s-1} dx - \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^{s-1}}{x} dx$$

quedando

$$\boxed{\zeta(s)-1 - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} \right) e^x x^{s-1} dx} \quad (6.8)$$

De esta ultima expresión dedujo que  $(s-1)\zeta(s)$  tiene limite 1 y también tiene derivadas finitas de algún orden, a medida que  $s \rightarrow 1$  desde la derecha. Chebychev observo que las derivadas de determinado orden pueden ser escritas como una fracción en el cual el numerador es un polinomio de las derivadas de  $(s-1)\zeta(s)$  y el denominador es una potencia entera de dicha derivada, desde la cual el demostró que el lado derecho de (6.8) tiene derivadas finitas de algún orden cuando  $s \rightarrow 0$  desde la derecha, por ello es posible que hay una formula asintótica para  $\pi(x)$  por medio de una suma finita  $\sum a_k x / (\ln x)^k$  hasta un orden  $O(x / (\ln x)^n)$ , entonces  $a_k = (k-1)!$  para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

Esta es precisamente la expansión asintótica de la función  $Li(x)$ , la cual reivindicaba la intuición de Gauss, y cuando  $x \rightarrow 0$  tenemos que  $Li(x) = O(x/\ln x)$ . La expansión asintótica completa para  $Li(x)$  es:

$$Li(x) \simeq x/\ln x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\ln x)^k} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{xk!}{(\ln x)^{k+1}}$$

## Capítulo 7

### La ecuación funcional

En función de las formas integrales, Riemann deduce la ecuación funcional de la cual extrae todas las propiedades de la función zeta para todo el plano complejo, partiendo de la definición de la función gamma.

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \quad \text{Valida para } \operatorname{Re}(s) > 0$$

La cual bajo el cambio de variable  $t = n^2 \pi x$ ,  $dt = n^2 \pi dx$  toma la forma

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} (n^2 \pi x)^{s-1} n^2 \pi dx$$

$$\Gamma(s) = \pi^s n^{2s} \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{s-1} dx$$

reagrupando términos

$$\frac{\Gamma(s)}{\pi^s n^{2s}} = \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{s-1} dx$$

si se hace la sustitución  $s \rightarrow \frac{s}{2}$  y despejando términos

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{n^s \pi^{s/2}} = \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{s/2-1} dx$$

sumando sobre ambos miembros sobre el índice  $n$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s}\right) \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{s/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{s/2-1} dx\right)$$

$$\zeta(s) \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{s/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{s/2-1} dx\right)$$

obtenemos la forma integral que es completamente convergente para la región  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

$$\zeta(s) \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{s/2}} = \int_0^{\infty} x^{s/2-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}\right) dx \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \quad (7.1)$$

Para resolver la sumatoria se utiliza la función Theta de Jacobi y sus propiedades

$$\boxed{\vartheta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}} \quad (7.2)$$

la cual tiene la siguiente propiedad de transformación

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x}}$$

por lo tanto

$$2\vartheta(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x}} \Rightarrow 2\vartheta(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[ 2\vartheta\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right]$$

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$$

reemplazando (7.2) en (7.1) tenemos

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{\infty} x^{s/2-1} \vartheta(x) dx \\ \pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^1 x^{s/2-1} \vartheta(x) dx + \int_1^{\infty} x^{s/2-1} \vartheta(x) dx \\ &= \int_0^1 \left( x^{s/2-3/2} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} x^{s/2-3/2} - \frac{1}{2} x^{s/2-1} \right) dx + \int_1^{\infty} x^{s/2-1} \vartheta(x) dx \\ &= \int_0^1 \left( x^{s/2-3/2} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{\infty} x^{s/2-1} \vartheta(x) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} \int_0^1 \left( x^{s/2-3/2} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx + \int_1^{\infty} x^{s/2-1} \vartheta(x) dx \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable  $y = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = -y^2 dy$  por lo tanto los nuevos límites serán,  $y = \infty$  cuando  $x = 0$ ,  $y = 1$  cuando  $x = 1$ .

$$\int_0^1 (x^{s/2-3/2} \vartheta(\frac{1}{x})) dx = \int_0^1 y^{(-s/2+3/2)} \vartheta(y) (-y^{-2}) dy = \int_1^\infty y^{(-s/2-1/2)} \vartheta(y) dy$$

$$\pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma(\frac{s}{2}) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{(-s/2-1/2)} \vartheta(x) dx + x^{\frac{1}{2}(s-1)} \vartheta(x)) dx$$

$$\pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma(\frac{s}{2}) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty [(x^{(-s/2-1/2)} + x^{(s/2-1)})] \vartheta(x) dx \quad (7.1)$$

se puede apreciar que el segundo miembro permanece invariante bajo la sustitución  $s \rightarrow (1-s)$  entonces el primer miembro también debe permanecer invariante bajo dicha sustitución

$$\boxed{\pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma(\frac{1-s}{2}) \zeta(1-s)} \quad (7.3)$$

esta última forma se la suele representar de la forma

$$\kappa(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$$

$$\kappa(s) \zeta(s) = \kappa(1-s) \zeta(1-s)$$

y se define la función zeta modificada como

$$\mathcal{E}(s) = \kappa(s) \zeta(s)$$

por lo que se aprecia el cambio invariante bajo la sustitución  $s \rightarrow (1-s)$ , que es la continuación meromorfa de  $\mathcal{E}(s)$  para todo el plano complejo y satisface dicha ecuación para  $s \in \mathbb{C}$ .

Se puede llegar a otra forma de la ecuación funcional teniendo en cuenta la siguiente propiedad de la función gamma

$$\Gamma(1 - \frac{s}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-s/2} dt$$

al multiplicar esta última en ambos miembros de la ecuación (7.3) nos queda

$$\pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \Gamma(1 - \frac{s}{2}) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma(\frac{1-s}{2}) \Gamma(1 - \frac{s}{2}) \zeta(1-s) \quad (7.4)$$

ahora debemos tener en cuenta la propiedad de reflexión de la función gamma dada por Euler.

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)} \quad \rightarrow \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\pi\frac{s}{2}\right)}$$

y la propiedad de duplicación

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s}\sqrt{\pi}\Gamma(2s) \quad \rightarrow \quad \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = 2^s\sqrt{\pi}\Gamma(1-s)$$

que al sustituirlas en (7.4) nos da

$$\pi^{-s/2+1} \frac{\zeta(s)}{\operatorname{sen}\left(\pi\frac{s}{2}\right)} = 2^s \pi^{-1/2+s/2+1/2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

Finalmente despejando términos

$$\boxed{\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)} \quad s < 0 \quad (7.5)$$

claramente se pueden ver los ceros triviales para los enteros negativos pares  $s = -2, -4, -6, -8, \dots$  dados por la función seno.

**Ejemplo 9:** para  $s = -1$ .

$$\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots$$

$$\zeta(-1) = 2^{-1} \pi^{-1-1} \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Gamma(1-(-1)) \zeta(1-(-1)) = 2^{-1} \pi^{-2} \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Gamma(2) \zeta(2)$$

Euler demostró que  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  y los demás valores son  $\Gamma(2) = 1$ ,  $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$$\zeta(-1) = 2^{-1} \pi^{-2} (-1) \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$$

El resultado concuerda con el *Ejemplo 8*.

## Capítulo 8

### La función $\xi$

En su ensayo Riemann introduce la función de variable compleja  $t$ , conocida como función  $\xi$  y definida por

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \quad (8.1)$$

y de las ecuaciones dadas en el capítulo anterior se deduce

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{s(s-1)}{2} \left[ \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left[ (x^{(s/2-1)} + x^{-(1/2+s/2)}) \right] \vartheta(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \left[ (x^{(s/2-1)} + x^{-(1/2+s/2)}) \right] \vartheta(x) dx \end{aligned}$$

y reemplazando  $s = 1/2 + it$

$$\begin{aligned} x^{(s/2-1)} + x^{-(1/2+s/2)} &= x^{-3/4} (x^{it/2} + x^{-it/2}) = x^{-3/4} (e^{it/2 \ln x} + e^{-it/2 \ln x}) \\ &= x^{-3/4} 2 \cos(t/2 \ln x) \end{aligned}$$

$$\frac{s(s-1)}{2} = \frac{1}{2} \left( -t^2 - \frac{1}{4} \right)$$

reemplazando nos queda la expresión dada por Riemann

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left( t^2 + \frac{1}{4} \right) \int_1^\infty \vartheta(x) x^{-3/4} x^{-3/4} \cos(t/2 \ln x) dx \quad (8.2)$$

Otra forma de esta ecuación y que le dio buenas conclusiones parte de

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \left[ (x^{(s/2-1)} + x^{-(1/2+s/2)}) \right] \vartheta(x) dx$$

Integrando por partes

$$\mu = \vartheta(x) \quad d\mu = \vartheta'(x) dx$$

$$dv = (x^{(s/2-1)} + x^{-(1/2+s/2)})dx \quad v = \frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2}$$

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \left\{ \vartheta(x) \left[ \frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2} \right] \right\}_1^\infty - \frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \vartheta'(x) \left[ \frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \frac{d}{dx} \left\{ \vartheta(x) \left[ \frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2} \right] \right\} dx - \frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \vartheta'(x) \left[ \frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2} \right] dx \end{aligned}$$

La función theta para  $x = \infty$  es cero por lo tanto

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \vartheta(1) \left[ \frac{2}{s} + \frac{2}{1-s} \right] - \frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \vartheta'(x) \left[ \frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} + \vartheta(1) + \int_1^\infty \vartheta'(x) \left[ (1-s)x^{s/2} + sx^{(1-s)/2} \right] dx \end{aligned}$$

Sacando factor común  $x^{3/2}$

$$= \frac{1}{2} + \vartheta(1) + \int_1^\infty \vartheta'(x) x^{3/2} \left[ (1-s)x^{[(s-1)/2]-1} + sx^{-(s/2)-1} \right] dx$$

Integrando por partes de igual forma

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} + \vartheta(1) + \int_1^\infty \frac{d}{dx} \left\{ \vartheta(x) x^{3/2} \left[ -2x^{(s-1)/2} - 2x^{-s/2} \right] \right\} dx \\ &\quad - \int_1^\infty \frac{d}{dx} \left[ \vartheta(x) x^{3/2} \right] \left[ -2x^{(s-1)/2} - 2x^{(s-1)/2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} + \vartheta(1) - \vartheta'(1) [-2 - 2] + \int_1^\infty \frac{d}{dx} \left[ \vartheta(x) x^{3/2} \right] \left[ 2x^{(s-1)/2} - 2x^{-s/2} \right] dx \end{aligned}$$

teniendo en cuenta las propiedades de la función Theta dada por el método de sumación de Poisson.

$$2\vartheta(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} [2\vartheta(1/x) + 1] \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} + \vartheta(1) + 4\vartheta'(1) = 0$$

Operando sobre el término

$$\begin{aligned} x^{(s-1)/2} + x^{-s/2} &= x^{-1/4} x^{1/4} (x^{(s/2)-(1/2)} + x^{-s/2}) = x^{-1/4} (x^{s/2-1/4} + x^{-s/2+1/4}) \\ &= x^{-1/4} (x^{1/2(s-(1/2))} + x^{-1/2(s-(1/2))}) \end{aligned}$$

multiplicando y dividiendo por dos y poniendo los términos en forma exponencial

$$= 2x^{-1/4} \frac{(e^{1/2(s-(1/2))\ln x} + e^{-1/2(s-(1/2))\ln x})}{2}$$

este último término toma la forma del coseno hiperbólico  $\cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  por lo tanto

$$= 2x^{-1/4} \cosh\left(\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)\ln x\right)$$

reemplazando términos tenemos

$$\xi(s) = 4 \int_1^\infty \frac{d}{dx} [x^{3/2} \mathcal{V}(x)] x^{-1/4} \cosh\left(\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)\ln x\right) dx$$

Si el coseno hiperbólico es expandido en forma de una serie de Taylor se tiene

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{por lo tanto}$$

$$\cosh\left(\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)\ln x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)\ln x\right]^{2n}}{(2n)!}$$

Reagrupando términos en función de  $x$  tenemos

$$a_{2n} = 4 \int_1^\infty \frac{d}{dx} [x^{3/2} \mathcal{V}(x)] x^{-1/4} \frac{(1/2 \ln x)^{2n}}{(2n)!} dx$$

Con lo cual queda expresada la función Xis en forma de serie

$$\boxed{\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2n}} \quad (8.3)$$

Para llegar a la forma que dio Riemann debemos tener en cuenta la expansión para el coseno hiperbólico y reemplazar  $s = 1/2 + it$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[ \frac{1}{2} \left( s - \frac{1}{2} \right) \ln x \right]^{2n}}{(2n)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + it - \frac{1}{2} \right) \ln x \right]^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{(t/2 \ln x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t/2 \ln x)^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Este último término corresponde a la expresión para el coseno expandido en forma de series de Taylor

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n}}{(2n)!}$$

al reemplazar nos queda

$$\boxed{\xi(t) = 4 \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[ x^{3/2} \mathcal{G}(x) \right] x^{-1/4} \cos(t/2 \ln x) dx} \quad (8.4)$$

Esta función es finita para valores finitos de  $t$  y puede ser desarrolladas en potencias de  $t^2$  dando una serie que converge rápidamente ,ya que para valores de  $s$  cuya parte real es mayor que 1 por lo que  $\ln \zeta(s) = \sum \ln(1 - p^{-s})$  permanece finito lo mismo sucede para el logaritmo de los factores de  $\xi(t)$ , esto viene de que esta función solo puede anularse si la parte imaginaria de  $t$  cae entre  $1/2i$  y  $-1/2i$ . El numero de raíces  $N(T)$  de la función  $\xi(t) = 0$  cuya parte real esta entre 0 y  $T$  es aproximadamente:

$N(T) \approx (T/2\pi) \ln(T/2\pi) - (T/2\pi)$  porque la integral  $\int d \ln \xi(t)$  tomada en un sentido positivo alrededor de la región consiste de los valores de  $t$  cuya parte imaginaria se halla entre  $1/2i$  y  $-1/2i$  y cuya parte real esta entre 0 y  $T$  (hasta un orden de magnitud de la cantidad  $T^{-1}$ ) y es igual a  $T(T/2\pi - T)i$ , esta integral es igual al número de raíces de  $\xi(t) = 0$  situada dentro de esta región y multiplicada por  $2\pi i$ , Riemann estableció que aproximadamente este número de raíces reales están dentro de esos limites y afirmo que no pudo obtener una prueba de ello y que temporalmente había desistido ya que no lo consideraba esencial para su investigación. Si se denota por  $\alpha$  a todas las raíces de la ecuación  $\xi(\alpha) = 0$  se puede expresar el  $\ln \xi(t)$  como:

$$\boxed{\ln \xi(t) = \ln \xi(0) + \sum_{\alpha} \left( 1 - t^2 / \alpha^2 \right)} \quad (8.5)$$

## Capítulo 9

### La función Xis y la representación en productos infinitos

Riemann dio una forma de expresar la función zeta en forma de productos que dependen de los ceros no triviales y se basó en que la función zeta tiene infinitos ceros complejos que están en la banda crítica y que son simétricos respecto a la recta  $\text{Re}(s) = 1/2$ ,  $\text{Im}(s) = 1/2$ .

Si denotamos por  $N(T)$  el número de ceros complejos que están en la banda crítica  $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$  y con  $0 \leq \text{Im}(s) \leq T$  entonces dedujo que

$$N(T) = (T/2\pi)\ln(T/2\pi) - (T/2\pi) + O(\ln T)$$

Y que la serie  $\sum |\rho|^{-2}$  converge mientras que la serie  $\sum |\rho|^{-1}$  es divergente, teniendo en cuenta que la sumatoria se extiende a todos los números complejos define la función entera Xis de la forma:

$$\xi(t) = \xi(0) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) \quad (9.1)$$

en donde  $\alpha$  representa la parte imaginaria de los ceros no triviales, ahora si tenemos en cuenta que esta función está dada para  $s = 1/2 + it$  podemos generalizarla de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \xi(1/2 + it) &= \xi(1/2) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) \\ &= \xi(1/2) \prod_{\alpha} \frac{(\alpha - t)(\alpha + t)}{\alpha^2} = \xi(1/2) \prod_{\alpha} \left(1 + \frac{it}{i\alpha}\right) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) \\ &= \xi(0) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{1/2}{1/2 + i\alpha}\right) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right) = \xi(0) \prod_{\alpha} \left(\frac{i\alpha}{1/2 + i\alpha}\right) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{it}{i\alpha}\right) \\ &= \xi(0) \prod_{\alpha} \left(\frac{i\alpha - it}{1/2 + i\alpha}\right) = \xi(0) \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{1/2 + it}{1/2 + i\alpha}\right) \end{aligned}$$

Y como los ceros no triviales están definidos como  $\rho = 1/2 + i\alpha$

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \quad (9.2)$$

recordando  $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$  y la relación  $s/2\Gamma(s/2) = \Gamma(s/2+1)$

Al combinarlas con (8.2) podemos despejar  $\zeta(s)$  en función de los ceros no triviales.

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}\xi(0)}{(s-1)\Gamma(1+s/2)} \prod_{\rho} (1-s/\rho)}$$
 (9.3)

De esta forma se puede observar el polo simple para  $s = 1$  en el denominador, los ceros triviales dados por  $\Gamma(1+s/2)$  y los ceros no triviales dados cuando  $s = \rho$ .

Hadamard dio una demostración del producto llegando a una expresión similar de  $\zeta(s)$

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{e^{(\ln(2\pi)-1-(\gamma/2))}}{2(s-1)\Gamma(1+s/2)} \prod_{\rho} (1-s/\rho)e^{s/\rho}}$$
 (9.4)

donde  $\gamma$  es la constante de Euler – Mascheroni y vale,  $\gamma = 0.577216649015328\dots$

**Ejemplo 10:** Si queremos explicitar los ceros no triviales y los triviales de la función zeta

$$\xi(s) = \Gamma(s/2+1)\pi^{-s/2}(s-1)\zeta(s)$$

$$\xi(s) = s/2\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}(s-1)\zeta(s)$$

$$s/2\Gamma(s/2) = \Gamma(s/2+1)$$

$$\zeta(s) = \frac{2\pi^{s/2}\xi(s)}{s/2\Gamma(s/2)(s-1)}$$

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

Multiplicando y dividiendo por  $\Gamma(1-s/2)$  y reemplazando  $\xi(s)$

$$\zeta(s) = \frac{2\pi^{s/2}}{s/2\Gamma(s/2)(s-1)} \frac{\Gamma(1-s/2)}{\Gamma(1-s/2)} \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

Ahora tenemos en cuenta la siguiente propiedad de la función gamma.

$$\Gamma(s/2)\Gamma(1-s/2) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi s/2)}$$

$$\zeta(s) = \frac{2\pi^{s/2-1}\xi(0)}{s(s-1)}\Gamma(1-s/2)\text{sen}(\pi s/2)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)$$

en el denominador existe un único polo cuando  $s = 1$ , pero cuando  $s = 0$  se tiene que es indeterminado, esto se resuelve aplicando la regla de L'hospital.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen}(\pi s/2)}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{d}{ds}(\text{sen}(\pi s/2))}{\frac{d}{ds}(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{2} \cos(\pi s/2) \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\xi(0) = -\zeta(0) = \frac{1}{2}$$

reemplazando y reordenando términos queda finalmente

$$\zeta(s) = e^{\left(\frac{s}{2}-1\right)\ln \pi - \ln s} \frac{\Gamma(1-s/2)}{(s-1)} \text{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)$$

en donde podemos ver más claramente el polo simple los ceros triviales y los ceros no triviales

---

## Capítulo 10

### Relación entre la ceros y la función contadora de primos

La relación entre la función Zeta y la función contadora de primos de Riemann quedo definida como

$$\boxed{\frac{\ln \zeta(s)}{s} = \int_0^{\infty} J(x)x^{-s-1} dx} \quad (10.1)$$

Para expresar  $J(x)$  en función de  $\ln \zeta(s)/s$ , se aplica el teorema de inversión de Fourier, cuyas ecuaciones en forma generalizada son:

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda) e^{i(x-\lambda)\mu} d\lambda \right) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu) e^{i\mu x} d\mu$$

$$\phi(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda) e^{-i\lambda\mu} d\lambda$$

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu) e^{i\mu\lambda} d\mu$$

definiendo términos

$$s = a + i\mu \quad \text{y si } a = \text{cte}, \quad \lambda = \ln x \Rightarrow x = e^{\lambda} \Rightarrow d\lambda = \frac{dx}{x}$$

Y considerando los términos particulares

$$J(x)x^{-s} = J(e^{\lambda})e^{-\lambda a} e^{-i\lambda\mu} = \phi(\lambda)e^{-i\lambda\mu}$$

$$\lambda \geq 0 \Rightarrow \phi(\lambda)e^{-i\lambda\mu} \quad \lambda < 0 \Rightarrow \phi(\lambda) = 0$$

$$\phi(\lambda) = J(e^{\lambda})e^{-a\lambda}$$

$$\frac{\ln \zeta(a + i\mu)}{a + i\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} J(e^{\lambda})e^{-(a+i\mu)\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda)e^{-i\lambda\mu} d\lambda$$

$$\phi(\mu) = \frac{\ln \zeta(a + i\mu)}{a + i\mu}$$

reemplazando para el valor de  $\lambda$

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu) e^{i\mu\lambda} d\mu$$

$$J(e^y) e^{-a\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \zeta(a+i\mu)}{a+i\mu} e^{i\mu\lambda} d\mu$$

$$J(e^y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \zeta(a+i\mu)}{a+i\mu} e^{(a+i\mu)\lambda} d\mu$$

reemplazando para,  $x = e^\lambda$ ,  $s = a + i\mu$ ,  $ds = id\mu$ , y el limite superior de integración por  $\mu = \infty \rightarrow s = a + i\infty$ , y el inferior  $\mu = -\infty \rightarrow s = a - i\infty$

$$\boxed{J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln \zeta(s)}{s} x^s ds} \quad (10.2)$$

para resolver esta última integral se deriva por partes

$$u = \ln \zeta(s) \quad , \quad du = \left[ \frac{\ln \zeta(s)}{s} \right] ds \quad , \quad dv = x^s ds \quad , \quad v = \frac{x^s}{\ln x}$$

quedando

$$J(x) = \left[ \frac{\ln \zeta(s)}{s} x^s \right]_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\ln \zeta(s)}{s} \right] x^s ds$$

una propiedad muy útil es que el primer término es nulo al tomar límites cuando  $T \rightarrow \infty$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln \zeta(a \pm iT)}{a \pm iT} x^{a \pm iT} \right) = 0$$

Por lo cual nos queda la forma integral original como la integral de una derivada

$$\boxed{J(x) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left( \frac{\ln \zeta(s)}{s} \right) x^s ds} \quad (10.3)$$

Sacando logaritmo a la ecuación (9.3) obtenemos  $\ln \zeta(s)$  en función de los siguientes términos:

$$\ln \zeta(s) = \ln \xi(0) + \frac{s}{2} \ln \pi - \ln \Gamma(1 + s/2) - \ln(s-1) + \sum_{\rho} \ln(1 - s/\rho)$$

Y según el termino a integrar si converge o no elegiremos la forma (10.2) o (10.3) para la integración de cada uno de ellos.

El termino principal,  $-\ln(s-1)$

Para resolver esta integral adoptamos la forma dada en (10.3) y teniendo en cuenta el signo negativo nos queda

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\ln(s-1)}{s} \right] x^s ds \quad a > 1$$

Riemann mostró que para  $x > 1$  el valor de esta integral definida es el logaritmo integral

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right)$$

La función  $1/\ln t$  tiene una singularidad en  $t = 1$  y la integral para  $x > 1$  debe ser interpretada utilizando el valor principal de Cauchy que permite asignar valores a determinadas integrales impropias que de lo contrario resultarían indefinidas.

El valor principal dado por la integral divergente es  $\int_0^x dt/\ln t$  que sale de aplicar el teorema de Cauchy y el fundamento es el siguiente.

Si fijo  $x > 1$  y considero la función  $\beta$  definida de la siguiente forma:

$$F(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\ln(s/\beta-1)}{s} \right] x^s ds$$

Así que el número a determinar es  $F(1)$ , la definición de  $F(\beta)$  se puede extender a todo número real o complejo de  $\beta$  menos para  $\beta \leq 0$  y con  $a > \text{Re}(\beta)$  y definiendo la expresión  $\ln[(s/\beta)-1]$  que sea  $\ln(s-\beta) - \ln \beta$  en el cual  $\ln z$  es definida para todo  $z$  y que la parte real sea  $z > 0$ . Entonces la integral  $F(\beta)$  converge absolutamente.

$$\left| \frac{d}{ds} \left\{ \frac{\ln(s/\beta-1)}{s} \right\} \right| \leq \frac{|\ln(s/\beta-1)|}{s^2} + \frac{1}{|s(s-\beta)|}$$

es integrable mientras  $x$  oscila entre la línea de integración porque:

$$\frac{d}{d\beta} \left[ \frac{\ln(s/\beta - 1)}{s} \right] = \frac{1}{(\beta - s)\beta}$$

diferenciando bajo el signo integral e integrando por partes

$$F'(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{(\beta - s)\beta} \right] x^s ds = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{(\beta - s)\beta} ds$$

Para resolver esta integral de una forma general debemos tener en cuenta que tiene un polo o punto singular en  $s = \beta$ , por lo cual vamos a elegir un circuito cerrado  $C$  en el plano complejo que rodee dicha singularidad. Por el teorema de Cauchy tenemos

$$\oint_C \frac{x^s}{(\beta - s)\beta} ds = 0$$

El circuito de integración esta constituido por los tramos  $C = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$ , y si consideramos  $s = Re^{i\vartheta}$ ,  $ds = iRe^{i\vartheta} d\vartheta$ , siendo  $\vartheta_0$  el argumento para  $s = a + iR$  y  $s = a - iR$ , y  $\vartheta$  va desde  $\vartheta_0$  a  $\pi$  y de  $\pi$  a  $2\pi - \vartheta_0$ . También  $\varepsilon$  es el radio de un círculo que rodea el punto singular y cuyo argumento es  $\phi$  y va desde  $\pi$  a  $-\pi$  por lo que  $\beta - s = \varepsilon e^{i\phi}$ ,  $ds = -i\varepsilon e^{i\phi} d\phi$ . Debemos considerar dos tramos iguales pero de distinto sentido que caen en el eje real y conectan el círculo mayor de radio  $R$  y el menor de radio  $\varepsilon$  que rodea el punto singular, definiendo para un tramo  $\beta - s = \mu e^{\pi i} = -\mu$  y para el otro tramo de distinto sentido  $\beta - s = \mu e^{-\pi i} = -\mu$ , en ambos casos  $s = \beta - \mu$ ,  $ds = -d\mu$ . Reemplazando tenemos

$$\int_{a-iR}^{a+iR} \frac{x^s}{(\beta - s)\beta} ds + \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{x^{Re^{i\vartheta}}}{(\beta - Re^{i\vartheta})\beta} iRe^{i\vartheta} d\vartheta + \int_{R-\beta}^{\varepsilon} \frac{x^{\beta-\mu}}{\mu\beta} d\mu + \int_{\pi}^{-\pi} \frac{x^{\beta-\varepsilon e^{i\phi}}}{\varepsilon e^{i\phi}\beta} (-i\varepsilon e^{i\phi}) d\phi +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{R-\beta} \frac{x^{\beta-\mu}}{\mu\beta} d\mu + \int_{\pi}^{2\pi-\vartheta_0} \frac{x^{Re^{i\vartheta}}}{(\beta - Re^{i\vartheta})\beta} iRe^{i\vartheta} d\vartheta = 0$$

Tomando limites cuando  $R \rightarrow \infty$  y  $\varepsilon \rightarrow 0$  la segunda y sexta integrales tienden a 0 cuando  $R \rightarrow \infty$  y la tercera y quinta integrales se anulan por ser de signos opuestos, por lo cual queda.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{a-iR}^{a+iR} \frac{x^s}{(\beta - s)\beta} ds - i \int_{\pi}^{-\pi} \frac{x^{\beta-\varepsilon e^{i\phi}}}{\varepsilon e^{i\phi}\beta} (-i\varepsilon e^{i\phi}) d\phi \right) = 0$$

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{(\beta-s)\beta} ds = i \int_{\pi}^{-\pi} \frac{x^\beta}{\beta} d\phi$$

$$= -2\pi i \frac{x^\beta}{\beta}$$

Despejando términos

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{(\beta-s)\beta} ds = \frac{x^\beta}{\beta} \quad \Rightarrow \quad F'(\beta) = \frac{x^\beta}{\beta}$$

Otra forma de resolver esta integral de una forma particular es aplicando la inversión de Fourier, operando sobre los términos se tiene

$$\beta F'(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{(s-\beta)} ds$$

Y reemplazando  $x = e^\lambda$ ,  $s = a + i\mu$ ,  $ds = i d\mu$

$$\beta F'(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{a\lambda} e^{i\lambda\mu}}{(a+i\mu-\beta)} d\mu$$

$$\phi(\lambda) = \beta F'(\beta) e^{-a\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda\mu}}{(a+i\mu-\beta)} d\mu$$

Ahora debemos determinar el valor de  $\phi(\mu)$

$$\left(\frac{1}{s-\beta}\right) = \int_1^\infty x^{-s} x^{\beta-1} dx \quad \text{Valida para } \operatorname{Re}(s-\beta) > 0$$

$$\left(\frac{1}{a+i\mu-\beta}\right) = \int_0^\infty e^{\lambda(\beta-a)} e^{-i\lambda\mu} d\lambda \quad \text{Valida para } a > \operatorname{Re}(\beta)$$

Y dependiendo de si la variable x es mayor o menor que cero se obtendrán dos resultados.

$$\text{Si } \phi(\mu) = \left(\frac{1}{a+i\mu-\beta}\right) \quad \text{y} \quad \phi(\lambda) = e^{\lambda(\beta-a)}$$

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a+i\mu-\beta}\right) e^{i\mu\lambda} d\mu$$

$$e^{\lambda\beta} e^{-a\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{a+i\mu-\beta} \right) e^{i\mu\lambda} d\mu$$

$$e^{\lambda\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(a+i\mu)\lambda}}{(a+i\mu-\beta)} d\mu$$

Reemplazando por  $x = e^\lambda$ ,  $s = a + i\mu$ ,  $ds = id\mu$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a+i\mu-\beta} e^{i\mu x} d\mu = \begin{cases} 2\pi e^{x(\beta-a)} & \leftarrow x > 0 \\ 0 & \leftarrow x < 0 \end{cases}$$

De la cual se deduce

$$x^\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{(s-\beta)} ds$$

Esta ultima ecuación puede tener dos soluciones dependiendo del valor de  $x$

$$x > 1 \Rightarrow x^\beta, \quad x < 1 \Rightarrow x^\beta = 0$$

Teniendo en cuenta que  $a > \text{Re}(\beta)$  y que  $x > 1$  se asume que esta toma el siguiente valor

$$\beta F'(\beta) = x^\beta$$

despejando

$$F'(\beta) = \frac{x^\beta}{\beta}$$

Si  $C^+$  denota el contorno en el plano complejo  $t$  el cual consiste de la línea segmento desde 0 a  $1 - \varepsilon$ , (donde  $\varepsilon$  es un pequeño número positivo), seguido de un semicírculo en la mitad superior del plano complejo  $\text{Im}(t) \geq 0$  y desde  $1 - \varepsilon$  a  $1 + \varepsilon$  seguido de la línea segmento de  $1 + \varepsilon$  a  $x$ , dejando la siguiente expresión:

$$G(\beta) = \int_{C^+} \frac{t^{\beta-1}}{\ln t} dt$$

Entonces la derivada es

$$G'(\beta) = \int_{C^+} t^{\beta-1} dt = \left[ \frac{t^\beta}{\beta} \right]_0^x = F'(\beta)$$

ahora  $G(\beta)$  es definida y analítica para  $\text{Re}(\beta) > 0$ , si  $\text{Re}(\beta) < 0$  entonces la integral que define  $G$  diverge en  $t = 0$ , como es  $F(\beta)$  de aquí esta difiere de una constante la cual depende de  $x$  aunque  $\text{Re}(\beta) > 0$ , Riemann establece que esta constante puede ser evaluada manteniendo  $\text{Re}(\beta)$  fijo y dejando  $\text{Im}(\beta) \rightarrow +\infty$  en ambos  $F(\beta)$  y  $G(\beta)$ , pero el no llevo a cabo esta evaluación.

Para evaluar el limite de  $G(\beta)$  se toma como  $\beta = \sigma + i\tau$ , donde  $\sigma$  es fijo y  $\tau \rightarrow \infty$ , el cambio de variable es  $t = e^\mu$  y por lo tanto  $\mu = \ln t$  por lo  $G(\beta)$  queda de la forma

$$G(\beta) = \int_{i\delta-\infty}^{i\delta+\ln x} \frac{e^{\beta\mu}}{\mu} d\mu + \int_{i\delta+\ln x}^{\ln x} \frac{e^{\beta\mu}}{\mu} d\mu$$

El camino de integración ha sido alterado ligeramente usando el teorema de Cauchy, y el cambio de variables es  $\mu = i\delta + \nu$  en la primera integral y  $\mu = \ln x + iw$  para la segunda

$$G(\beta) = e^{i\delta\sigma} e^{-\delta\tau} \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^{\sigma\nu}}{i\delta + \nu} e^{i\tau\nu} d\nu - ix^\beta \int_0^\delta \frac{e^{-\tau w} e^{\sigma iw}}{\ln x + iw} dw$$

Ambas integrales se acercan a cero cuando  $\tau \rightarrow \infty$ , la primera porque  $e^{-\delta\tau} \rightarrow 0$  y la segunda porque  $e^{-\tau w} \rightarrow 0$  excepto en  $w = 0$ , de esta forma el limite de  $G(\beta)$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$  es cero. Este argumento no seria valido si  $C^+$  fuera cambiado siguiendo el semicírculo inferior porque entonces  $e^{-\delta\tau}$  debiera ser reemplazado por  $e^{\delta\tau}$  y  $e^{-\tau w}$  por  $e^{\tau w}$ . Para evaluar el límite  $F(\beta)$  se define

$$H(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\ln[1-(s/\beta)]}{s} \right] x^s ds$$

Donde  $a > \text{Re}(\beta)$  y donde  $\ln[1-(s/\beta)]$  es definido para todo número complejo  $\beta$  siempre que  $\beta \geq 0$ , y se puede expresar la siguiente relación  $\ln(s - \beta) - \ln(-\beta)$  para poder obtener la diferencia  $H(\beta) - F(\beta)$  definida para todo número complejo  $\beta$  sobre el eje real y sobre el semiplano superior es decir  $\text{Im}(\beta) > 0$ .

$$H(\beta) - F(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\ln(\beta) - \ln(-\beta)}{s} \right] x^s ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[ \frac{i\pi}{s} \right] x^s ds$$

La cual se puede resolver utilizando la inversión de Fourier.

$$H(\beta) - F(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{i\pi}{s} x^s ds = -i\pi$$

Para el caso de  $\beta > 0$  se obtiene  $F(\beta) = H(\beta) + i\pi$  que corresponde a la mitad del semiplano y es suficiente para evaluar el limite de  $H(\beta)$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$  para  $\beta = \sigma + i\tau$  si  $1 - (s/\beta) \rightarrow 1$  de aquí el logaritmo tiende a cero y que  $H(\beta)$  también tienda a cero.

$$\frac{d}{ds} \left\{ \frac{\ln[1 - (s/\beta)]}{s} \right\} = -\frac{\ln[1 - (s/\beta)]}{s^2} + \frac{1}{s(s - \beta)} = -\frac{\ln[1 - (s/\beta)]}{s^2} + \frac{1}{\beta(s - \beta)} - \frac{1}{\beta s}$$

Multiplicando por  $x^s ds/2\pi i$  e integrando desde  $a - i\infty$  a  $a + i\infty$  en el usual sentido se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{x^\beta}{\beta} - \frac{x^0}{\beta} = \frac{(x^\beta - 1)}{\beta}$$

Entonces cuando  $|\beta| \rightarrow 0$  la función  $H(\beta)$  se aproxima a cero, por lo que se puede deducir  $H(\beta) \equiv G(\beta)$ .

$$F(\beta) = G(\beta) + i\pi \quad \text{Valida para el semiplano } \text{Re}(\beta) > 0$$

Entonces el número deseado  $F(1)$  es:

$$F(1) = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{(t-1)}{\ln t} \frac{dt}{(t-1)} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\ln t} + i\pi$$

Como  $\varepsilon \rightarrow 0$  el termino  $\frac{(t-1)}{\ln t} \rightarrow 1$  y la siguiente integral es  $\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{dt}{(t-1)} = -i\pi$  entonces el limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  de la formula para  $F(1)$  queda

$$F(1) = Li(x)$$

por lo cual

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\ln(s-1)}{s} \right] x^s ds = Li(x)} \quad (10.4)$$

El término envolviendo las raíces,  $\sum \ln[1 - (s/\rho)]$

El término envolviendo los ceros no triviales de la función zeta puede resolverse de manera similar pero teniendo en cuenta algunas particularidades

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{\sum \ln[1-(s/\beta)]}{s} \right\} x^s ds$$

De manera similar se define la función  $-\sum H(\rho)$  la cual se relaciona de la forma  $H(\rho) \equiv G(\rho)$  y para  $\rho$  en el primer cuadrante  $\text{Re}(\rho) > 0$ ,  $\text{Im}(\rho) > 0$  y de la misma forma  $\rho$  en el cuarto cuadrante.

$$-\sum_{\text{Im} \rho > 0} \left( \int_{C^+} \frac{t^{\rho-1}}{\ln t} dt + \int_{C^+} \frac{t^\rho}{\ln t} dt \right)$$

Si  $\beta$  es real y positivo y haciendo el cambio de variable  $t = \ln \mu / \beta$ ,  $dt/t = d\mu / \mu\beta$

$$\int_{C^+} \frac{t^{\beta-1}}{\ln t} dt = \int_0^{x^\beta} \frac{d\mu}{\ln \mu} = Li(x^\beta - i\pi)$$

Para la segunda integral el camino de integración es sobre la singularidad en  $\mu = 1$  y esta integral converge a través del semiplano  $\text{Re}(\beta) > 0$  y da la continuación analítica de

$Li(x^\beta)$  en ese semiplano cuando  $x$  es un número fijo y cumple con  $x > 0$ . Con igual criterio obtenemos el valor para el cuarto cuadrante.

$$\int_{C^-} \frac{t^{\beta-1}}{\ln t} dt = Li(x^\beta) + i\pi$$

al reemplazar el valor de  $\beta$  según el cuadrante nos queda

$$-\sum_{\text{Im} \rho > 0} \left( \int_{C^+} \frac{t^{\rho-1}}{\ln t} dt + \int_{C^+} \frac{t^\rho}{\ln t} dt \right) = -\sum_{\text{Im} \rho > 0} \left[ Li(x^\rho) + Li(x^{1-\rho}) \right]$$

recordando que los ceros no triviales son simétricos en la línea recta  $\text{Re}(s) = 1/2$ .

$$\rho = 1/2 + i\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - \rho = 1 - (1/2 + i\alpha) = 1/2 - i\alpha$$

$$\sum_{\rho} Li(x^\rho) = \sum_{\text{Im} \rho > 0} \left[ Li(x^\rho) + Li(x^{1-\rho}) \right]$$

donde  $\rho$  son los ceros no triviales de la función zeta, y la sumatoria no es totalmente convergente.

$$\boxed{-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{\sum \ln[1-(s/\beta)]}{s} \right\} x^s ds = \sum_{\rho} Li(x^\rho)} \quad (10.5)$$

El termino,  $\ln \Gamma(s/2 + 1)$

El termino que envuelve la función gamma esta dado por

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left( \frac{\ln \Gamma(s/2 + 1)}{s} \right) x^s ds$$

Para resolver esta integral partimos de las propiedades de la función gamma

$$s\Gamma(s) = \Gamma(s + 1)$$

y utilizamos la definición de la función Gamma en forma de productos infinitos dada por Euler y Weierstrass, que vale para todo complejo que no sea entero negativo.

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - s/n)^{-1} e^{s/n}$$

$$s\Gamma(s) = \Gamma(s + 1) = e^{-\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - s/n)^{-1} e^{s/n}$$

$$\ln \Gamma(s + 1) = -\gamma s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{s}{n})$$

Sustituyendo  $s \rightarrow s/2$

$$\ln \Gamma(s/2 + 1) = -\gamma s/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{s}{2n})$$

Teniendo presente la propiedad dada en la integración por partes nos conviene utilizar la forma que contiene la derivada bajo el símbolo integral.

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln \Gamma(s/2 + 1)}{s} x^s ds = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left( \frac{\ln \Gamma(s/2 + 1)}{s} \right) x^s ds$$

Derivando los términos

$$\frac{d}{ds} \left( -\frac{s\gamma}{2s} \right) = 0 \quad , \quad \frac{d}{ds} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{2ns} \right) = 0 \quad , \quad \frac{d}{ds} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{s}{2n}) \right) \neq 0$$

se puede expresar de la siguiente manera

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{\ln[1-(s/2n)]}{s} \right\} x^s ds = -\sum_{n=1}^{\infty} H(-2n)$$

Pero como  $H(\beta)$  se aplica para  $\beta > 0$  entonces para  $\beta < 0$  se tiene que

$$E(\beta) = -\int_x^{\infty} \frac{t^{\beta-1}}{\ln t} dt$$

Entonces  $E(\beta) \equiv H(\beta)$

$$E'(\beta) = -\int_x^{\infty} t^{\beta-1} dt = \frac{x^{\beta}}{\beta} = F'(\beta) = H'(\beta)$$

Y al reemplazar  $\beta = (-2n)$

$$E(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{t^{-2n-1}}{\ln t} dt = \int_x^{\infty} \frac{t^{-3}}{\ln t} \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^{-2n} \right) dt = \int_x^{\infty} \frac{t^{-3}}{\ln t} \left( \frac{1}{1-t^{-2}} \right) dt = \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln \Gamma(s/2+1)}{s} x^s ds = \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}} \quad (10.6)$$

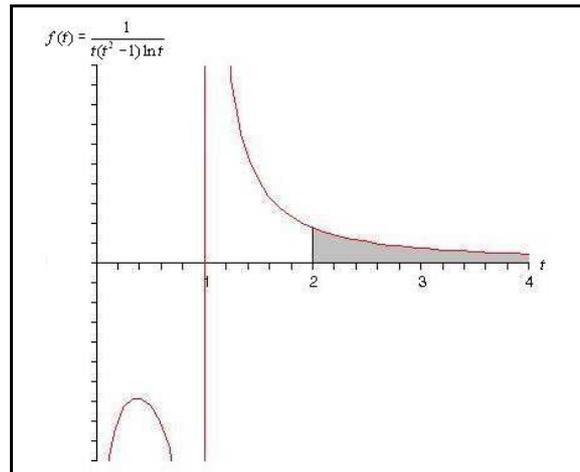


Figura 9: Grafico de  $f(t)$  en función de  $t$

El termino,  $\ln \xi(0)$

Aplicando la inversión de Fourier se puede determinar el valor de la integral

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{\ln \xi(0)}{s} \right\} x^s ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln \xi(0)}{s} x^s ds = \ln \xi(0)$$

definimos los términos para aplicar el teorema de inversión de Fourier

$$x = e^\lambda, \quad s = a + i\mu, \quad ds = i d\mu$$

$$F(e^\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln \xi(0)}{s} x^s ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \xi(0)}{a + i\mu} e^{a\lambda} e^{i\mu\lambda} d\mu$$

$$\phi(\lambda) = \frac{F(e^\lambda) e^{-a\lambda}}{\ln \xi(0)}$$

$$\frac{1}{s} = \int_0^\infty x^{-s-1} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a + i\mu} = \int_{-\infty}^\infty e^{-a\lambda} e^{-i\lambda\mu} d\lambda$$

$$\phi(\lambda) = e^{-a\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\lambda\mu}}{(a + i\mu)} d\mu$$

Igualando términos tenemos para  $\phi(\lambda)$

$$F(e^\lambda) = F(x) = \ln \xi(0)$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln \xi(0)}{s} x^s ds = \ln \xi(0)} \quad (10.7)$$

El termino,  $s/2\ln \pi$

Al elegir la forma dada en (10.3) rápidamente se ve que la integral es cero.

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left( \frac{s/2\ln \pi}{s} \right) x^s ds$$

Por lo que la derivada da cero

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{s/2 \ln \pi}{s} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\ln \pi}{2} \right) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left( \frac{s \ln \pi}{2} \right) x^s ds = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left( \frac{s/2 \ln \pi}{s} \right) x^s ds = 0} \quad (10.8)$$

Una vez establecidos los términos nos resta reemplazar cada uno de ellos para la ecuación de  $J(x)$  dada en (10.2)

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\text{Im } \rho > 0} \left[ Li(x^\rho) + Li(x^{1-\rho}) \right] + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t} + \ln \xi(0) \quad (x > 1)$$

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^\rho) - \ln 2 + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}$$

Y la formula para  $\pi(x)$  se obtiene aplicando la formula de inversión de Möbius dada en (5.2)

$$\boxed{\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \left[ Li(x^{1/n}) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho/n}) + \ln \xi(0) + \int_{x^{1/n}}^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t} \right]} \quad (10.9)$$

desarrollando los términos y reagrupándolos

$$\begin{aligned} \pi(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^\rho) - \ln 2 + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t} \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \left[ Li(x^{1/n}) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho/n}) - \ln 2 + \int_{x^{1/n}}^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t} \right] \end{aligned}$$

En la última expresión nos queda un término error a determinar  $E(x)$ , por lo tanto en forma más compacta podemos expresar la función contadora de primos como:

$$\pi(x) = Li(x) + E(x)$$

Si uno restringe la  $\sum_{\alpha}$  a un numero finito de términos se deriva la expresión para  $J(x)$ , sabiendo que una parte disminuye muy rápidamente con el incremento de  $x$  la siguiente

expresión  $\frac{1}{\ln x} - 2 \sum_{\alpha} \frac{\cos(\alpha \ln(x))}{\ln x} x^{-1/2}$  da una aproximación para la densidad de los números primos mas la mitad de la densidad de la raíz de los números primos mas un tercio de la densidad del cubo de los números primos , etc , en una magnitud  $x$  . La conocida expresión que da una aproximación para la función contadora de primos es  $\pi(x) \approx Li(x)$  , es por lo tanto valida para cantidades de un orden  $x^{-1/2}$  y da un cierto valor porque los términos no periódicos en la expresión para  $\pi(x)$  provienen de cantidades que no se vuelven infinitas con  $x$  .

$$Li(x) - 1/2 Li(x^{1/2}) - 1/3 Li(x^{1/3}) - 1/5 Li(x^{1/5}) + 1/6 Li(x^{1/6}) - 1/7 Li(x^{1/7}) + \dots$$

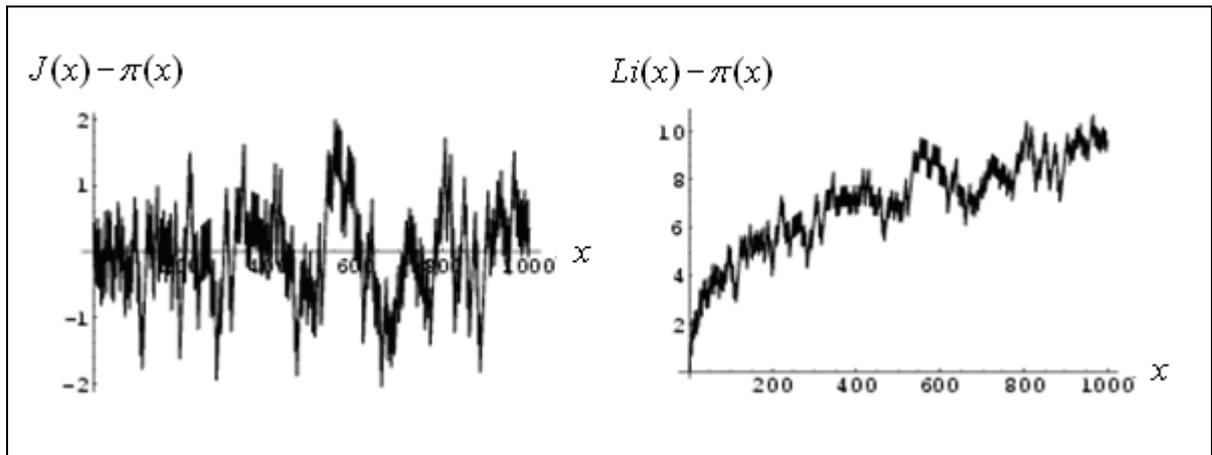
En la comparación de  $Li(x)$  con el numero de primos menores que una cantidad  $x$  dados por Gauss , esta ultima expresión puede presentar fluctuaciones graduales con  $x$  ,entonces se puede dar una aproximación a la función contadora de primos de la siguiente forma.

$$\pi(x) \approx Li(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} Li(x^{1/n})$$

x	Riemann error	Gauss error
1000000	30	130
2000000	-9	122
3000000	0	155
4000000	33	206
5000000	-64	125
6000000	24	228
7000000	-38	179
8000000	-6	223
9000000	-53	187
10000000	88	339

Tabla 5: Errores al calcular  $\pi(x)$  por medio de las ecuaciones dadas por Riemann y Gauss

En la figura 10 se grafican oscilaciones entre  $Li(x)$  y  $\pi(x)$  debidas a aproximaciones dadas por las ecuaciones de Riemann.



*Figura 10:* Comparación de fluctuaciones entre  $J(x)$ ,  $Li(x)$  y  $\pi(x)$

La hipótesis de Riemann es equivalente a determinar  $\pi(x) = Li(x) + O(x^{1/2+\varepsilon})$ .

## Capítulo 11

### Determinación de los ceros no triviales de la función zeta

La formula Riemann-Siegel fue descubierta por Riemann pero no publicada por el, fue descubierta entre los papeles de Riemann por Siegel y publicada en 1931. La forma para determinar los valores de los ceros no triviales de la función zeta esta basado en el método del punto silla para la evaluación de integrales. Los ceros de la función de Riemann-Siegel corresponden a la parte imaginaria de los ceros no triviales de la función zeta sobre la línea crítica y se basa en el hecho de que ambas funciones son holomorfas sobre dicha línea.

Partiendo de la definición de la función Xis

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)\pi^{-s/2}(s-1)\zeta(s) \\ &= \left(\int_0^\infty x^{s/2} e^{-x} dx\right)\pi^{-s/2}(s-1)\zeta(s) = \frac{s}{2}\left(\int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-x} dx\right)\pi^{-s/2}(s-1)\zeta(s)\end{aligned}$$

la cual puede reescribirse como

$$\xi(s) = \frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}(s-1)\zeta(s)$$

Ahora teniendo en cuenta el valor para  $s = \frac{1}{2} + it$  siendo la parte imaginaria positiva queda

$$\begin{aligned}\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) &= e^{\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\pi^{-s/2}\frac{s(s-1)}{2}\zeta(s) = e^{\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+it\right)}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + it\right)\left(\frac{1}{2} + it - 1\right)\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \\ &= e^{R_e \ln\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\pi^{-\frac{1}{4}\left(\frac{-4t^2 - 1}{8}\right)}\left(e^{iI_m \ln\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\pi^{-\frac{it}{2}}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right)\end{aligned}$$

la cual nos queda expresada en una parte real y otra parte imaginaria, reagrupando términos podemos definir una función que de números reales en función de la parte imaginaria.

$$\boxed{Z(t) = e^{i\Theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)} \quad (11.1)$$

En donde  $\Theta(t)$  es definida como

$$\Theta(t) = I_m \left\{ \ln \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{t}{2}\right) \right\} + \frac{t}{2} \ln \pi$$

recordando que Riemann derivó una fórmula válida para todo  $s$

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s dx}{e^x - 1} \frac{1}{x}$$

cuya trayectoria de integración es una curva que rodea el origen y tiene una singularidad, al tener en cuenta la siguiente relación

$$\frac{e^{-Nx}}{e^x - 1} = \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-nx} \quad \Leftarrow \quad \frac{e^x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

podemos obtener una definición alternativa

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N n^{-s} + \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{e^{-Nx} (-x)^s dx}{e^x - 1} \frac{1}{x}$$

si cambiamos los contornos de integración a una curva  $C(M)$  cuyos círculos en los polos  $\pm 2\pi im$  con  $1 \leq m \leq M$  y  $m \in \mathbb{N}$ , se puede aplicar el teorema de los residuos de Cauchy quedando la siguiente expresión.

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1} 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \sum_{n=1}^M n^{-(1-s)} + \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{C(M)} \frac{(-x)^s dx}{e^x - 1} \frac{1}{x}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N n^{-s} + 2\Gamma(-s-1)(2\pi)^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \sum_{n=1}^M n^{s-1} + \frac{\Gamma(-s-1)}{2\pi i} \int_{C(M)} \frac{e^{-Nx} (-x)^s dx}{e^x - 1} \frac{1}{x}$$

recordando la simetría de la ecuación funcional al multiplicar ambos miembros por  $1/2 s(s-1)\kappa(s)$  obtenemos otra ecuación simétrica para  $\xi(s)$ .

$$\begin{aligned} \xi(s) &= (s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)\pi^{-s/2} \sum_{n=1}^N n^{-s} + (-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2} + 1\right)\pi^{-(1-s)/2} \sum_{n=1}^M n^{-(1-s)} \\ &\quad + \frac{(-s)\Gamma\left(2 - \frac{s}{2}\right)}{4\pi i (2\pi)^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)} \int_{C(M)} \frac{e^{-Nx} (-x)^s dx}{e^x - 1} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Como nos interesa el caso en donde  $s$  cae en la línea  $s = 1/2 + it$  para  $t \in \mathbb{R}$  entonces observando los dos primeros términos y teniendo en cuenta la simetría  $s \rightarrow (1-s)$  se deduce que  $N = M$ . Poniendo los términos como:

$$\phi(t) = \left(-\frac{1}{2} + it\right) \Gamma\left(\frac{1/2 + it}{2} + 1\right) \pi^{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + it)}$$

Se puede reescribir la formula

$$\begin{aligned} \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) &= \phi(t) \sum_{n=1}^N n^{-\frac{1}{2} - it} + \phi(-t) \sum_{n=1}^N n^{-\frac{1}{2} + it} \\ &+ \frac{\phi(-t)}{2i(2\pi)^{\frac{1}{2} + it} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + it\right)\right]} \int_{C(N)} \frac{e^{-Nx} (-1)(-x)^{-\frac{1}{2} + it}}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

Nos queda expresada en los términos anteriormente definidos

$$\xi(1/2 + it) = r(t)Z(t)$$

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{[R_e \ln \Gamma(s/2)]} \pi^{-1/4} \left(\frac{-4t^2 - 1}{8}\right) \\ &= e^{[R_e \ln \Gamma(s/2)]} \pi^{-\frac{1}{4}} s \left(\frac{s-1}{2}\right) e^{[-iI_m \ln \Gamma(s/2)]} \\ &= \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\Theta(t)} \pi^{-\frac{i}{2}t} = \phi(t) e^{-i\Theta(t)} \end{aligned}$$

Poniendo el término  $r(t) = \phi(t) e^{i\Theta(t)}$  en la ecuación  $\xi(s) = r(t)Z(t)$  podemos cancelar el término  $r(t) = r(-t)$  para obtener la expresión

$$\begin{aligned} Z(t) &= e^{i\Theta(t)} \sum_{n=1}^N n^{-\frac{1}{2} - it} + e^{i\Theta(-t)} \sum_{n=1}^N n^{-\frac{1}{2} + it} \\ &+ \frac{e^{i\Theta(-t)}}{2i(2\pi)^{\frac{1}{2} + it} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + it\right)\right]} \int_{C(M)} \frac{e^{-Nx} (-1)(-x)^{-\frac{1}{2} + it}}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

ahora vamos a realizar la siguiente simplificación

$$\begin{aligned}
 2i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) &= e^{\frac{i\pi s}{2}} - e^{-\frac{i\pi s}{2}} = e^{\frac{i\pi s}{2}} (e^{i\pi s} - 1) = e^{-\frac{i\pi s}{2}(\frac{1}{2}+it)} (e^{i\pi s(\frac{1}{2}+it)} - 1) \\
 &= e^{\frac{-i\pi}{4} \frac{i\pi}{2} \frac{i\pi}{2}} (e^{\frac{i\pi}{2} e^{-t\pi}} - 1) = -e^{\frac{-i\pi}{4} \frac{i\pi}{2}} (1 - e^{-t\pi} i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)) = -e^{\frac{-i\pi}{4} \frac{i\pi}{2}} (1 - i e^{-t\pi})
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la siguiente propiedad de los números complejos conjugados

$$\ln \Gamma(\bar{Z}) = \overline{\ln \Gamma(Z)}$$

podemos escribir la siguiente relación para  $\Theta(t)$

$$\begin{aligned}
 \Theta(t) &= I_m \left\{ \ln \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{t}{2}\right) \right\} + \frac{t}{2} \ln \pi \\
 &= I_m \left\{ \overline{\ln \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{t}{2}\right)} \right\} + \frac{t}{2} \ln \pi = I_m \left\{ \ln \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{t}{2}\right) \right\} + \frac{t}{2} \ln \pi \\
 &= I_m \left\{ \ln \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right) \right\} - \frac{t}{2} \ln \pi = -\Theta(t)
 \end{aligned}$$

Si consideramos el siguiente número complejo  $z = a + ib$  se puede expresar la siguiente propiedad de los complejos conjugados

$$I_m(\bar{z}) = I_m(a - ib) = -ib = -I_m(z)$$

Por lo que se pueden reagrupar los términos para  $Z(t)$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 e^{i\Theta(t)} \sum_{n=1}^N n^{-1/2-it} + e^{i\Theta(-t)} \sum_{n=1}^N n^{-1/2+it} &= e^{i\Theta(t)} \sum_{n=1}^N n^{-1/2} n^{-it} + e^{-i\Theta(t)} \sum_{n=1}^N n^{-1/2} n^{it} \\
 &= \sum_{n=1}^N n^{-1/2} (e^{i\Theta(t)} e^{-it \ln n}) + \sum_{n=1}^N n^{-1/2} (e^{-i\Theta(t)} e^{it \ln n})
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^N n^{-1/2} \left[ e^{i\Theta(t)-t \ln n} + e^{-i\Theta(t)-t \ln n} \right] = 2 \sum_{n=1}^N n^{-1/2} \cos[\Theta(t) - t \ln n]$$

Y el ultimo termino de  $Z(t)$  como

$$\begin{aligned} & \frac{e^{i\Theta(-t)}}{2i(2\pi)^{\frac{1}{2}+it} \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} + it \right) \right]} \int_{C(N)} \frac{e^{-Nx} (-1)(-x)^{-\frac{1}{2}+it}}{e^x - 1} dx = \\ & = \frac{e^{-i\Theta(t)}}{-(2\pi)^{\frac{1}{2}+it} \left[ e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{\frac{t\pi}{2}} (1 - ie^{-t\pi}) \right]} \int_{C(N)} \frac{e^{-Nx} (-1)(-x)^{-\frac{1}{2}+it}}{e^x - 1} dx \\ & = \frac{e^{-i\Theta(t)} e^{-t\pi/2}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}+it} \left[ e^{-\frac{i\pi}{4}} (1 - ie^{-t\pi}) \right]} \int_{C(N)} \frac{e^{-Nx} (-1)(-x)^{-\frac{1}{2}+it}}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

quedando finalmente la expresión total de la forma:

$$\begin{aligned} Z(t) = & 2 \sum_{n=1}^N n^{-1/2} \cos[\Theta(t) - t \ln n] \\ & + \frac{e^{-i\Theta(t)} e^{-t\pi/2}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}+it} \left[ e^{-\frac{i\pi}{4}} (1 - ie^{-t\pi}) \right]} \int_{C(N)} \frac{e^{-Nx} (-1)(-x)^{-\frac{1}{2}+it}}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

(11.2)

de una forma mas compacta puede ser expresada

$$Z(t) = 2 \sum_{n=1}^N n^{-1/2} \cos[\Theta(t) - t \ln n] + R(t) \quad t \in \mathbb{R} \quad (11.3)$$

El termino menor  $R(t)$  desafortunadamente diverge cuando  $N \rightarrow \infty$ , pero los términos de esta decrecen en tamaño por lo cual se puede hacer una aproximación de  $Z(t)$  en la siguiente forma

$$Z(t) \approx 2 \sum_{n=1}^N n^{-1/2} \cos[\Theta(t) - t \ln n] \quad (11.4)$$

### Determinación de $\Theta(t)$

Para la determinación de la parte imaginaria de  $\Theta(t)$  partimos de la definición de la función Gamma en forma de productos infinitos dada por Euler y Weierstrass, y que vale para todo complejo que no sea entero negativo.

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - s/n)^{-1} e^{s/n}$$

en donde  $\gamma$  es la constante de Euler- Mascheroni

Sacando logaritmo a  $\Gamma(s)$

$$\ln \Gamma(s) = -\gamma s - \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{s}{n} - \ln \left( 1 + \frac{s}{n} \right) \right]$$

y expresando el numero complejo en la forma exponencial de Euler que tiene en cuenta su modulo y argumento

$$s = |s| e^{iw} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{4} + i \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad |s| = \sqrt{(1/4)^2 + (t/2)^2}$$

Siendo  $w$  el argumento

$$\ln s = \ln(|s| e^{iw}) = \ln |s| + iw = \ln |s| + i \arctan(w)$$

$$\tan w = \frac{t/2}{1/4} = 2t \quad \Rightarrow \quad w = \arctan(2t)$$

$$\ln s = \ln(|s|e^{iw}) = \ln|s| + iw = \ln|s| + i \arctan(2t)$$

$$\tan w = \frac{t/2}{1/4+n} = \frac{2t}{4n+1} \quad \Rightarrow \quad w = \arctan\left(\frac{2t}{4n+1}\right)$$

Desarrollando el término  $\ln\left(1 + \frac{s}{n}\right)$  se tiene

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{s}{n}\right) &= \ln(n+s) - \ln n = \ln\left[\left(\frac{1}{4} + n\right) + i\frac{t}{2}\right] - \ln n \\ &= \ln\left|\left(\frac{1}{4} + n\right) + i\frac{t}{2}\right| + i \arctan\left(\frac{2t}{4n+1}\right) - \ln n \end{aligned}$$

Juntando los términos queda

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(s) &= -\frac{\gamma}{4} + \ln|s| + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{4} + n\right) + i\frac{t}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \\ &\quad + i \left[ -\frac{\gamma}{2}t - \arctan(2t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2t}{4n+1}\right) \right] \end{aligned}$$

y como solo nos interesa la parte imaginaria

$$I_m \left\{ \ln \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{t}{2}\right) \right\} = \left[ -\frac{\gamma}{2}t - \arctan(2t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2t}{4n+1}\right) \right]$$

Que al reemplazarla en  $\Theta(t)$  finalmente nos queda

$$\boxed{\Theta(t) = -\left(\frac{\gamma + \ln \pi}{2}\right)t - \arctan(2t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{2n} - \arctan\left(\frac{2t}{4n+1}\right)\right)} \quad (11.5)$$

Esta función se puede representar en forma de expansión asintótica, y da una buena aproximación para  $t \gg 1$

$$\Theta(t) = \frac{t}{2} \ln\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48t} + \frac{7}{5750t^3} + \dots + \dots \quad (11.6)$$

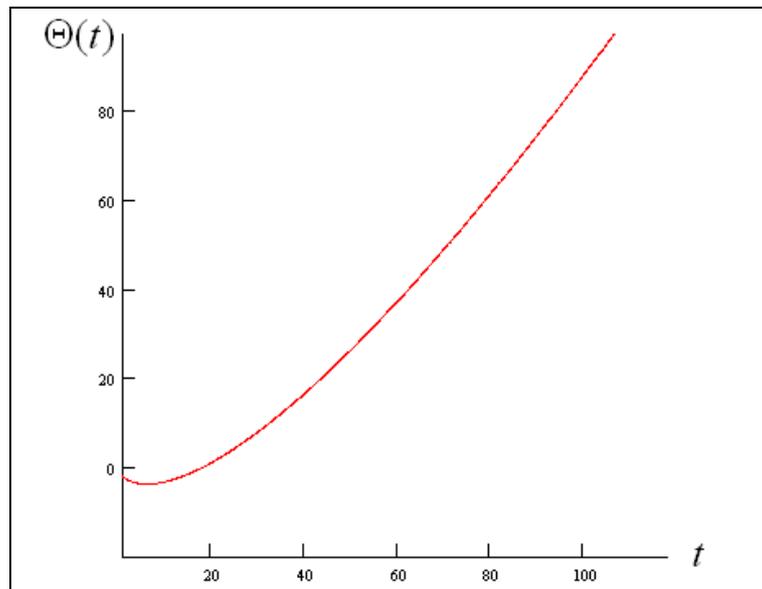


Figura 11: Grafica de la función theta de Riemann-Siegel

### Determinación de $R(t)$

Para determinar el término remanente se utiliza el método del punto silla que sirve para la aproximación de integrales y para encontrar formulas asintóticas que representen una determinada función para valores grandes de la variable que la define. Entonces para  $R(t)$  y cuando  $N \rightarrow \infty$ .

$$R(t) = \frac{e^{-i\Theta(t)} e^{-t\pi/2}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}+it} \left[ e^{-\frac{i\pi}{4}} (1 - ie^{-t\pi}) \right]} \int_{C(N)} \frac{e^{-Nx} (-1)(-x)^{-\frac{1}{2}+it}}{e^x - 1} dx$$

$$R(t) = \frac{e^{-i\Theta(t)} e^{-t\pi/2}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}+it} \left[ e^{-\frac{i\pi}{4}} (1 - ie^{-t\pi}) \right]} \int_{C(N)} \frac{e^{-Nx} (-1)(-x)^{-\frac{1}{2}+it}}{e^x - 1} dx$$

Se puede obtener una solución de la forma

$$R(t) \approx (-1)^{N-1} (t/2\pi)^{-1/4} \left[ c_0 + c_1 (t/2\pi)^{-1/2} + c_2 (t/2\pi)^{-2/2} + c_3 (t/2\pi)^{-3/2} + c_4 (t/2\pi)^{-4/2} \right]$$

y definiendo la función

$$\Psi(p) = \frac{e^{i\pi/8} e^{-2\pi i p^2}}{2\pi i} \int_r \frac{e^{iu^2/4\pi} e^{2pu}}{e^u - 1} du = \frac{\cos(2\pi(p^2 - p - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi p)}$$

Donde  $r$  es un segmento que va desde  $0$  a  $2\pi i$ .

los coeficientes vienen dados por

$$c_0 = \Psi(p) = \frac{\cos(2\pi(p^2 - p - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi p)}$$

$$c_1 = \frac{1}{96\pi^2} \frac{d^3\Psi(p)}{dp^3}$$

$$c_2 = \frac{1}{18432\pi^4} \frac{d^6\Psi(p)}{dp^6} + \frac{1}{64\pi^2} \frac{d^2\Psi(p)}{dp^2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{5308416\pi^6} \frac{d^9\Psi(p)}{dp^9} - \frac{1}{3840\pi^4} \frac{d^5\Psi(p)}{dp^5} - \frac{1}{64\pi^2} \frac{d\Psi(p)}{dp}$$

$$c_4 = \frac{1}{2038431744\pi^8} \frac{d^{12}\Psi(p)}{dp^{12}} - \frac{11}{5898240\pi^6} \frac{d^8\Psi(p)}{dp^8} + \frac{19}{24576\pi^4} \frac{d\Psi^4(p)}{dp^4} + \frac{1}{128\pi^2} \Psi(p)$$

Y se puede hacer una aproximación del término remanente de la forma

$$\boxed{R(t) \approx (-1)^{N-1} (t/2\pi)^{-1/4} \left( \frac{\cos(2\pi(p^2 - p - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi p)} \right)} \quad (11.7)$$

Finalmente  $Z(t)$  puede ser aproximado por la formula que tiene en cuenta la suma de dos términos.

$$Z(t) \approx 2 \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{\cos[\Theta(t) - t \ln n]}{\sqrt{n}} \cos[\Theta(t) - t \ln n] + R(t) \quad (11.8)$$

**Ejemplo 11:** Para determinar la parte imaginaria de la raíces debemos recurrir a algún tipo de algoritmo ya que no se pueden calcular directamente en forma algebraica, a continuación daremos un ejemplo para determinar el primer valor de la parte imaginaria de  $t$ .

$$x = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \quad N \text{ (Parte entera de } x) \quad p \text{ (Parte fraccional de } x)$$

Usando las ecuaciones que nos dan una aproximación de  $Z(t)$

$$Z(t) \approx 2 \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{\cos[\Theta(t) - t \ln n]}{\sqrt{n}} \cos[\Theta(t) - t \ln n] + R(t)$$

$$\Theta(t) = \frac{t}{2} \ln\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48t} + \frac{7}{5750t^3} + \dots + \dots$$

$$R(t) \approx (-1)^{N-1} (t/2\pi)^{-1/4} \left[ \frac{\cos(2\pi(p^2 - p - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi p)} \right]$$

Partiendo de un valor aleatorio de  $x$  debemos ir calculando valores de  $Z(t)$  hasta que cambie de signo justo cuando cambia el signo se encuentra un valor de  $t$  que hace cero a  $Z(t)$  y justamente ese valor de  $t$  corresponde a un cero de la función zeta de Riemann.

$t = 14.13$	$x = 1.4996$	$N = 1$	$n = 1$
$p = 0.4996$	$\Theta(14.13) = -1.73053$	$R(14.13) = 0.31250$	$Z(14.13) = -0.0056$

Tabla 6: Valores para calcular  $Z(t)$  cuando  $t = 14.13$

$t = 14.14$	$x = 1.50015$	$N = 1$	$n = 1$
$p = 0.50015$	$\Theta(14.14) = -1.72653$	$R(14.14) = 0.31244$	$Z(14.14) = 0.00224$

*Tabla 7:* Valores para calcular  $Z(t)$  cuando  $t = 14.14$

Como  $Z(14.13) = -0.0056$  es negativa y  $Z(14.14) = 0.00224$  es positiva se sabe que entre ambos valores existe un cero de la función zeta de Riemann entre  $t = 14.13$  y  $t = 14.14$ , para ser mas precisos se usan mas términos en  $\Theta(t)$  o mayores términos en la serie para  $R(t)$ , usando mayor precisión el primer cero se da en  $Z(14.134725142) = 0$  es decir el primer cero de la función zeta es  $s = (1/2 + i14.134725142)$ .

---

De igual manera se pueden ir calculando los siguientes valores de  $t$  por medio de algún algoritmo que sistematice el proceso de cálculo. En la *Tabla 8* se dan los primeros 50 valores de los ceros no triviales con 6 dígitos decimales en forma creciente de izquierda a derecha.

14.134725	21.022039	25.010857	30.424876	32.935061
37.586178	40.918719	43.327073	48.005150	49.773832
52.970321	56.446247	59.347044	60.831778	65.112544
67.079810	69.546401	72.067157	75.704690	77.144840
79.337375	82.910380	84.735492	87.425274	88.809111
92.491899	94.651344	95.870634	98.831194	101.317851
103.725538	105.446623	107.168611	111.029535	111.874659
114.320220	116.226680	118.790782	121.370125	122.946829
124.256818	127.516683	129.578704	131.087688	133.497737
134.756509	138.116042	139.736208	141.123707	143.111845

*Tabla 8:* Los 50 primeros valores de la parte imaginaria de los ceros no triviales.

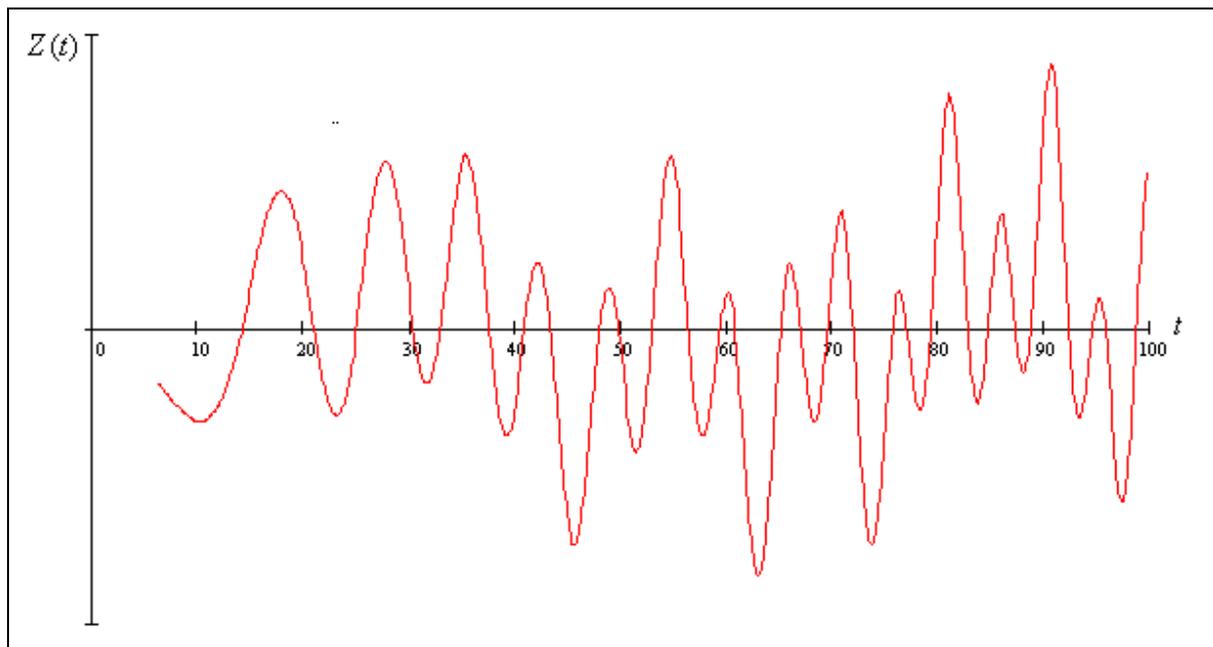


Figura 12: Grafico de  $Z(t)$  en función de  $t$

### Intervalos entre ceros consecutivos

Una de las cuestiones que se plantean es como están distribuidas las partes imaginarias de los ceros en la línea  $s = 1/2 + it$  con  $t \in \mathbb{R}$ , para ello se busca estimar la diferencia entre las partes imaginarias de los ceros consecutivos en dicha recta.

Sea  $t_n$  la parte imaginaria del  $n$ -ésimo cero de la función  $\zeta(s)$  de la forma  $1/2 + it$  con  $t > 0$ , de forma tal que  $0 < t_1 \leq t_2$

$$t_{n+1} - t_n < t_n^\theta$$

Hardy dio una estimación con  $\theta = 1/4$ , otra estimación mejor fue dada por Ivic y vale  $\theta \leq 0.15594583 < 5/32$ . Los ceros de alejan y acercan dentro de un cierto rango máximo y mínimo.

### Hipótesis de los números primos consecutivos

Para intervalos entre dos números primos consecutivos se obtienen estimaciones asintóticas del tipo

$$p_{n+1} - p_n \ll p_n^\alpha (\ln p_n)^\beta$$

con  $0 < \alpha < 1$  y  $\beta \geq 0$

Si la hipótesis de Riemann es cierta se verifica la estimación

$$p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2} \ln p_n$$

## Capítulo 12

### Comentarios finales

Si bien el breve ensayo que Riemann escribió en 1859 fue la gran obra maestra sobre la distribución de los números primos, al utilizar la variable compleja y relacionar la función contadora de primos y el producto de Euler de la cual deduce una fórmula para  $\pi(x)$  cuyo término principal es  $Li(x)$ , pero no se puede afirmar que Riemann probase el teorema de los números primos ya que en su escrito enuncia varias propiedades que no demuestra, tampoco dejó muy en claro que el término  $Li(x)$  dominase sobre el resto y tampoco que tenga mucho sentido por algunos problemas de convergencia, a pesar de ello Riemann marco el camino para desarrollos posteriores y fue en 1896 que Hadamard y de la Vallée Poussin consiguieron independientemente una demostración completa de dicho teorema.

En 1944 Selberg y Erdos desarrollaron una demostración elemental del teorema de los números primos. También existen pruebas que esta más cerca del análisis real que del complejo.

Lo que si queda claro es que si se quiere estudiar el término error en el teorema de los números primos, se debe enfrentar a los misteriosos ceros no triviales de cierta función compleja. El mejor resultado en la teoría de números se obtendría si se resolviese la famosa "Hipótesis de Riemann" la cual sigue sin probarse a pesar del esfuerzo de los mejores matemáticos del mundo durante más de 145 años.

## Bibliografía

- [1] Riemann, George F , “Ueber die anzahl der primzahlem unter einer gegebenen Grösse”, Manuscrito original de Riemann, 1859.
- [2] H. M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Academic Press, 1974.
- [3] Sarah L. Johnson, Riemann Zeta and the Prime Numbers, 2007
- [4] Marcus Du Sautoy, The Music of the Primes, Harper Perennial, New Ed, 2004
- [5] E.C.Titchmarsh, The zeros of the Riemann zeta-function, Proc.Roy.Soc.Ser, 1935
- [6] A. Ivic, The Riemann zeta-function: the theory of the Riemann zeta-function with applications, 1985.

Espero que el lector sepa disculpar los posibles errores no detectados, en este sentido cualquier indicación al respecto será tenida en cuenta y bien aceptada.

numerosprimos@live.com.ar