

PROYECTO PARA ENMENDAR A LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Autor: Lcdo. Dimas Herrera

1. INTRODUCCIÓN

No cabe duda que la “*Teoría de Conjuntos*” de *G. Cantor* es la candidata a ser el pilar fundamental de la matemática. Sin embargo, el fundamento de una disciplina como la matemática no debe poseer errores en su seno. Por ello, el objetivo principal de este trabajo es tratar de subsanar algunos errores que, desde su creación, han permanecido ocultos en tan hermosa teoría.

El primer error que se va a considerar es el de llamar *conjunto a la reunión de varios conjuntos*. En efecto, si decimos que

Conjunto: *es una colección de objetos bien determinados (obd).*

Entonces, una agrupación de conjuntos no puede ser un conjunto. Aceptar que un grupo de conjuntos es un conjunto conduce a barbaridades cuando efectuamos operaciones con ellos; como veremos más adelante. Por otra parte, podemos efectuar operaciones entre conjuntos (unión, intersección, etc.) pero no podemos efectuar operaciones entre los objetos que forman a dichos conjuntos; como por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$, no se debe efectuar la operación: $a \cup b = c$. Es decir, no debemos inferir que la unión de dos sillas es una silla; o que la unión de dos estudiantes es un estudiante; o que la intersección de dos personas es una persona; etc.

El segundo error que se considerará es la veracidad de la comúnmente llamada *hipótesis del continuo*, la cual nos dice que N , Z y Q tienen la misma cardinalidad, lo cual probaremos que no es cierto. La mencionada hipótesis es una camisa de fuerza que no permite a los matemáticos descubrir la verdadera naturaleza del número real. Otro aspecto que no queda claro, por culpa de la bendita hipótesis del continuo, es la correcta definición de cardinalidad de un conjunto.

Algunos matemáticos, los topólogos más que todos, dicen que aun cuando Z y N tienen la misma cardinalidad, no tienen la misma cantidad de elementos. Otros, en cambio, dicen que existen tantos naturales como enteros, es decir, que N y Z tienen igual cantidad de elementos. Ahora bien, si N y Z tienen igual cardinalidad pero diferente cantidad de elementos, ¿qué se entiende entonces por cardinal de un conjunto infinito? Sin entrar en detalles y discusiones estériles, la demostración formal de que dicha hipótesis es falsa pone fin a este caos, pues al demostrarse que $\#N < \#Z < \#R$, se estará demostrando que Z tiene más elementos que N ; que es lo correcto. Veamos entonces un intento de proyecto el cual persigue corregir los errores, arriba esbozados, de esta hermosa teoría de conjuntos. Se supone conocidos por el lector todos los conceptos y definiciones concernientes a dicha teoría.

2. LOS CONJUNTOS DE CONJUNTOS Y SUS OPERACIONES

Un conjunto de conjuntos es una colección, no de objetos bien determinados, sino de conjuntos. Veamos algunas barbaridades al tomarlas como conjuntos. Sean

$$A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}; B = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4\}\}, P(N), P(Z), \text{ etc.}$$

1) Si los conjuntos anteriores son aceptados como conjuntos normales, entonces ellos aceptan las operaciones corrientes entre dos conjuntos cualesquiera. En particular, existirá una biyección entre A y B por ser equipotentes, ya que $\#A = 4 = \#B$. Esto es así, porque la definición de equipotencia nos dice que dos conjuntos son equipotentes si, y sólo si, existe entre ellos al menos una biyección. Pero entre los conjuntos A y B dados no es posible hallar una biyección que no nos conduzca a una barbaridad. Veamos una posible biyección entre A y B y analicemos sólo una de las cuatro posibles imágenes.

$$\text{Sea } f: A \rightarrow B / f(\{1\}) = \{1, 2\}. \quad (1)$$

Como la imagen de un conjunto es el conjunto formado por las imágenes de sus elementos, entonces

$$f(\{1\}) = \{f(1)\}. \quad (2)$$

Ahora, por (1) y (2) se tiene el absurdo (un conjunto unitario igual a un binario)

$$\{f(1)\} = \{1, 2\}. \quad \text{¿?}$$

2) Veamos otra barbaridad ocasionada por la existencia de conjuntos de conjuntos y las operaciones con ellos.

$$\text{Sea } f: P(N) \rightarrow N / \forall A \in P(N), f(A) = \text{mín.}(A). \quad (1)$$

Por (1) se tiene que

$$f(\{1, 3\}) = 1; f(\{1\}) = 1; f(\{3\}) = 3. \quad (2)$$

Además

$$f(\{1, 3\}) = f(\{1\} \cup \{3\}) = f(\{1\}) \cup f(\{3\}). \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3) se tiene la barbaridad

$$1 = 1 \cup 3. \quad (4)$$

Según (4), 1 y 3 son conjuntos y, según las propiedades de la unión, 3 es subconjunto de 1 ($3 \subset 1$); lo cual es un perfecto disparate.

3) Veamos ahora una barbaridad ocasionada por la definición de equipotencia de conjuntos. Si $A = \{\{0\}, \{0, 3\}\}$ y $B = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$ son conjuntos, entonces entre ellos existe una biyección por ser equipotentes ($\#A = \#B = 2$). Ahora bien, entre estos dos conjuntos no puede existir una biyección. Expliquemos por qué.

Si existe $f: A \rightarrow B$, no puede ser $f(\{0\}) = \{1, 2\}$ porque ocurriría que un conjunto unitario es igual a uno binario; como vimos anteriormente. Por lo tanto, tiene que ser

$$f(\{0\}) = \{0\} \text{ y } f(\{0, 3\}) = \{1, 2\}. \quad (1)$$

De donde se obtiene

$$f(\{0\}) = \{f(0)\} = \{0\} \text{ y } f(\{0, 3\}) = \{f(0), f(3)\} = \{1, 2\}. \quad (2)$$

Por (2) se tiene

$$f(0) = 0 \text{ y } f(0) = 1 \text{ ó } f(0) = 2. \quad (3)$$

Y por (3) se tiene la barbaridad

$$0 = 1 \text{ ó } 0 = 2 \quad \text{¿?}$$

4) Veamos una cuarta y última barbaridad. Sean los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3\}; B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$$

Los elementos del conjunto A son objetos bien determinados (en este caso números). Por otra parte, los elementos de B son conjuntos. Pero como A y B son dos conjuntos cualesquiera, se puede efectuar la unión de ellos y se obtiene la siguiente mutación

$$A \cup B = C = \{1, 2, 3, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

La pregunta ahora es ¿qué cosas son los elementos del conjunto C? ¿Son objetos bien determinados? ¿Son conjuntos? O ¿acaso C es un mutante? Sabemos que C es la unión de dos conjuntos, pero no sabemos qué cosas son sus elementos. No son objetos bien determinados (*obd*) porque $\{1\}$ y $\{1, 2\}$ no son *obd* sino conjuntos. Tampoco son conjuntos porque 1, 2 y 3 no son conjuntos. En consecuencia, C no es un conjunto.

Reflexionemos un poco sobre todo lo anterior. ¿Cómo se pueden subsanar las barbaridades halladas anteriormente? Como opinión muy particular del autor, lo más sabio y sensato sería no tomar como conjuntos a los *conjuntos de conjuntos*, sino llamarlos simplemente agrupaciones de conjuntos (AC). Así, la definición de tales agrupaciones sería: *Una agrupación de conjuntos (AC) es un grupo cuyos elementos son conjuntos* y su nomenclatura podría ser $A_{(AC)} = \{\{\dots\}\}$; $B_{(AC)} = \{\{\dots\}, \{\dots\}\}$, etc.

3. CARACTERÍSTICAS DE UNA AGRUPACIÓN DE CONJUNTOS (AC)

Veamos cuáles serían las características de cada agrupación de conjuntos y cómo serían las operaciones entre ellos así como la aplicación de funciones.

- 1) Cada $A_{(AC)}$ es una partición de algún conjunto, y se podría llamar A al conjunto mínimo-genérico (término del autor). Ejemplo: Si $A_{(AC)} = \{\{0\}, \{1\}, \{1, 2\}\}$, entonces su mínimo-genérico (*m-g*) es: $m-g(A_{(AC)}) = A = \{0, 1, 2\}$. Se tendrá así, $A_{(AC)} \subset P(A)$ y la agrupación de partes $P(A)$ es la partición completa de A.

Observe que se ha llamado mínimo-genérico al conjunto A , porque cualquier otro conjunto que contenga a A es un generador de $A_{(AC)}$.

- 2) Dos AC, $A_{(AC)}$ y $B_{(AC)}$, son equipárticas (término inventado por el autor) si tienen la misma cantidad de conjuntos n -arios. Ejemplo: $A_{(AC)} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 4\}\}$ y $B_{(AC)} = \{\{0\}, \{2\}, \{4\}, \{0, 2\}\}$. Acá, ambas agrupaciones tienen tres conjuntos unitarios y uno binario, luego son equipárticas.
- 3) Entre las agrupaciones de conjuntos se pueden efectuar las operaciones usuales que se dan entre conjuntos (unión, intersección, diferencia, etc.). Y se cumplen algunas propiedades tales como: *el m -g de una intersección es subconjunto de la intersección de los m -g*. Ejemplo: Si $A_{(AC)} \cap B_{(AC)} = D_{(AC)}$, entonces, por las propiedades de la intersección se tiene, $D_{(AC)} \subset A_{(AC)}$ y $D_{(AC)} \subset B_{(AC)}$. Por lo tanto, $D \subset A$ y $D \subset B$ y, en consecuencia, $D \subset A \cap B$. También, la unión de los m -g es subconjunto del m -g de una unión. Es decir, si $A_{(AC)} \cup B_{(AC)} = D_{(AC)}$, entonces, $A_{(AC)} \subset D_{(AC)}$ y $B_{(AC)} \subset D_{(AC)}$. Por lo tanto, $A \subset D$ y $B \subset D$, luego, $A \cup B \subset D$. Encuentre el lector otras propiedades. Observe que se cumple: $D_{(AC)} \subset A_{(AC)}$, entonces, $D \subset A$. Pero lo contrario no siempre es cierto (compruébelo).
- 4) Si entre dos AC existe una función, éstas se pueden llamar *co-funcionales* (término del autor). Sin embargo, no siempre existe una biyección entre dos AC. Como ejemplo se pueden tomar $A_{(AC)} = \{\{0\}, \{0, 3\}\}$ y $B_{(AC)} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Estas dos agrupaciones son *co-funcionales* pero no son biyectables porque, aun cuando siempre podemos hallar $f: B_{(AC)} \rightarrow A_{(AC)}$, nunca podremos encontrar una función $f: A_{(AC)} \rightarrow B_{(AC)}$, puesto que $f(\{0\})$ sólo puede ser $\{0\}$, de donde se tendrá $\{f(0)\} = \{0\}$ (I). Pero $f(\{0, 3\})$ no puede ser ni $\{0\}$ ni $\{1, 2\}$. Si fuese $\{0\}$ se tendría $f(\{0, 3\}) = \{0\} \rightarrow \{f(0), f(3)\} = \{0\}$ (un conjunto binario igual a un unitario ¿?). Por otra parte, si fuese $f(\{0, 3\}) = \{1, 2\} \rightarrow \{f(0), f(3)\} = \{1, 2\}$ y de aquí se tiene que $f(0) = 1$ ó $f(0) = 2$. Pero por (I) $f(0) = 0$, por lo que tendríamos un absurdo. En consecuencia, no existe $f: A_{(AC)} \rightarrow B_{(AC)}$.

A hora bien, si existe $f: A_{(AC)} \rightarrow B_{(AC)}$, siempre existirá $f: A \rightarrow B$. En efecto, sabemos que

$$f(A_{(AC)}) = \{f(\{a, \dots\}) / \{a, \dots\} \in A_{(AC)}\} = \{\{f(a), \dots\} / \{f(a), \dots\} \in B_{(AC)}\}.$$

Pero si $\{f(a), \dots\} \in B_{(AC)}$, entonces, $f(a) \in B$. Y como igualmente $f(a) \in f(A)$, entonces, $\exists f: A \rightarrow B$. Sin embargo, lo contrario no siempre es cierto.

- 5) Si dos agrupaciones son tales que una posee sólo conjuntos de cardinal n y la otra sólo conjuntos de cardinal m , con $n \neq m$, entonces, entre dichas agrupaciones no existe ninguna función y se les puede llamar *no co-funcionales*. Ejemplo: sean las agrupaciones $A_{(AC)} = \{\{0\}, \{1\}\}$ y $B_{(AC)} = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$. Estas dos agrupaciones son equipotentes ($\#A_{(AC)} = \#B_{(AC)}$) pero, como la imagen de un conjunto unitario no puede ser un conjunto binario o viceversa, entonces entre ellas no puede existir ninguna función. Esto también vale para dos agrupaciones donde una posea sólo conjuntos de cardinales n ó m ($m \neq n$) y la otra sólo conjuntos de cardinales m ó r ($m \neq r$), con $n \neq r$ (compruébelo). Esta es una de las principales causas por la cual las agrupaciones de conjuntos no pueden ser conjuntos. Pues, de serlo, existirían conjuntos equipotentes para los cuales no existe ninguna biyección y el bello paraíso de *Cantor* sufriría un serio descalabro.
- 6) Para las agrupaciones de partes, si A es infinito entonces la única biyección de $P(A)$ en sí mismo es la función $f: A \rightarrow A / f(x) = x$. Expliquemos por qué. Observe que: $\forall X \in P(A), X \subset f(X)$. Sin embargo, para una biyección cualquiera $f: A \rightarrow A$, nunca podremos demostrar que no existen muchos $X \in P(A)$ para los cuales se cumple que $X \not\subset f(X)$ y muchos $Y \in P(A)$ para los que se cumple que $Y \subset f(Y)$. Por lo tanto, si hacemos $B = \bigcup_{X \in P(A)} X / X \not\subset f(X)$, existe un $C \in P(A) / f(C) = B$. Si no es $B = A$, entonces, puede suceder que $C \not\subset f(C) = B$ y $B = \bigcup_{X \in P(A)} X / X \not\subset f(X)$. En consecuencia, $C \subset B$, lo que es una contradicción. Para evitar tal contradicción, la única biyección posible de $P(A)$ en sí mismo es $f: A \rightarrow A / f(x) = x$.

Observe el lector (o lectora) la gran cantidad de errores que aparecen al operar con las agrupaciones de conjuntos como si fuesen conjuntos. Esto es lo que se pretende enmendar con la idea que se presenta acá, la cual es incipiente. Por ello, queda para los investigadores y doctos en esta teoría mucha tela aún por cortar. Sin embargo, todo lo anterior no es más que la humilde propuesta de un principiante en esta hermosa teoría de conjuntos. Será la comunidad de matemáticos la encargada de evaluar todo lo acá propuesto y decidir si se

acepta o no dicha idea.

4. ¿POR QUÉ APARECIÓ LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO (HC)?

No se entrará en discusión sobre a quien se debe el descubrimiento de la función

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} / f(n) = \{(n+1)/2 \text{ si } n \text{ es impar}; -n/2 \text{ si } n \text{ es par o cero}\}.$$

Pero se debe reconocer que esta *función* unida al nefasto término denominado *infinito* fueron las causas originales de que **G. Cantor** y continuadores de su teoría llegaran a introducir, sin ninguna intención por ninguno de ellos, los errores que subyacen en la mencionada teoría de conjuntos. Antes de analizar la **no sobreyectividad** de esta función, veamos cómo es la prueba de su sobreyectividad. Usemos sólo la parte positiva.

Sea $z \in \mathbb{Z}$ un entero positivo cualquiera, entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(n + 1) / 2 = z. \quad (1)$$

De (1) se tiene que

$$n = 2z - 1. \quad (2)$$

Al sustituir (2) en $f(n) = (n + 1) / 2$ se obtiene que $f(n) = z$ y así f es sobreyectiva en su parte positiva. Análogamente se procede con la parte negativa.

Sin embargo, la forma anterior de demostrar la sobreyectividad de la mencionada función es errónea; como podremos comprobar más adelante (sección 5). Analicemos detalladamente a dicha función y comprobemos que no es sobreyectiva. Para ello utilicemos la siguiente tabla donde sólo analizaremos la parte positiva ($f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{Z}_+^*$).

$\mathbb{I} \subset \mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+^*$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	...	∞
\mathbb{Z}_+^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...	∞

En esta tabla apliquemos la máxima “*divide y vencerás*”. Si truncamos el proceso en 3, obtenemos los siguientes conjuntos: Dominio = {1, 3} y Rango = {1, 2}, donde un elemento (el 3) no está en el rango, es decir $D_f \not\subset R_f$. Igualmente sucede si truncamos en 5. Se tiene $D_f = \{1, 3, 5\}$ y $R_f = \{1, 2, 3\}$. Un elemento de D_f no está en R_f . De igual manera, si

truncamos en 7 o 9, se tendrá en D_f dos elementos que no están en R_f . Si lo hacemos en 11 o 13, se tendrán tres elementos (9, 11 y 13) de D_f que no están en R_f . En general, se tiene:

Truncamiento: $2n + 1$ ó $2n + 3$ ($n = 1, 3, 5$, etc.)

Consecuencias: $2n + 1 > n$. (1) y $2n + 3 > n + 2$. (2)

Nota: En el renglón **consecuencias**, las desigualdades (1) y (2) se dan por lo siguiente: $n + 2$ es la imagen de $2n + 3$ y, como n es impar, $n + 2$ es impar. Por otra parte, la imagen de $2n + 1$ es $n + 1$, pero $n + 1$ no es impar. Como el impar que está detrás de $n + 1$ es n , se usan n y $n + 2$ (por ser impares consecutivos) como segundos miembros de las desigualdades. Ahora bien, para formar la imagen de $2n + 1$ y de $2n + 3$ se debe sumar 1 y luego dividir por 2 a ambos impares consecutivos. Por lo tanto, para mantener la desigualdad, esto también se hace con los segundos miembros y se obtiene

$$\frac{2n+1+1}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{2n+3+1}{2} - \frac{n+2+1}{2} = \frac{n+1}{2} \text{ (diferencia creciente en } n\text{)}.$$

Lo anterior nos dice que al truncar en $2n + 1$ ó $2n + 3$ (n impar) siempre se tendrá que el conjunto Dominio tiene $\frac{n+1}{2}$ elementos que no están en el conjunto Rango (R_f). Es decir, a medida que se incrementa el número de elementos en el dominio, también se incrementa el número de elementos de éste que no están en el rango. En consecuencia, cuando hayamos recorrido todo el dominio I , tendremos un número infinito de elementos de dicho dominio que no están en el rango. Ahora bien, si se cumple que $I \subset R_f$, será porque la diferencia en cuestión se convierte en cero. Es decir, se debe tener que $\frac{\infty+1}{2} = 0$, lo cual es absurdo y, por tanto, el conjunto Dominio nunca es subconjunto del Rango.

Por todo lo anterior, f genera a un conjunto $R_f \neq \mathbb{Z}_+^*$, a partir de I y, por consiguiente, no es sobreyectiva. Análogamente se procede con el caso cuando n es par. Queda así comprobado que no hay sobreyección en la función dada. En el apartado 6.2 se dará, no una comprobación, sino una demostración de que la función en cuestión no es sobreyectiva.

La pregunta ahora es ¿por qué se aceptó que la función en cuestión era sobreyectiva? La respuesta es: “*el dejar que el aciago término denominado **infinito** nos arregle, por obra y gracia del Espíritu Santo, las cosas por allá en lo infinito o en lo transfinito*”. Ese fue el

error que *Cantor* y todos los matemáticos del pasado cometieron. ¿Debemos seguir, vez tras vez, cometiendo el mismo error? La respuesta la tiene la *comunidad de matemáticos*.

5. LA HC ES FALSA. $\#N < \#Z < \#R$

La hipótesis del continuo (HC) asegura que no existe un cardinal transfinito x el cual cumpla la siguiente desigualdad: $\#N < x < \#R$. Esta hipótesis es falsa, pero la imposibilidad de demostrarla ha dado cabida a muchos estudios sobre cardinalidad, los cuales tendrán que ser revisados minuciosamente. Para la demostración de la falsedad de esta hipótesis de *G. Cantor*, se mostrará un ejemplo muy sencillo con conjuntos finitos y luego se dará una incuestionable demostración para dos conjuntos infinitos cualesquiera.

5.1. LA FUNCIÓN VINCULANTE

Cada vez que entre dos conjuntos equipotentes, A y B , existe una función inyectiva f , dicha función es una biyección y, si los conjuntos son infinitos, la sobreyectividad de f se puede probar con base en una función h que vincula a f con cualquier otra función biyectiva que exista entre A y B . Como los conjuntos, A y B , son equipotentes ($\#A = \#B$), siempre existirá al menos una biyección entre ambos. Veamos un ejemplo sencillo.

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$; $B = \{1, 2, 3\}$ y $f: A \rightarrow B$ tal que

$$f(a_1) = 2; f(a_2) = 3 \text{ y } f(a_3) = 1. \quad (1)$$

Sea $g: A \rightarrow B$ tal que g es biyectiva y $g(a_i) = i$. Entonces

$$g(a_1) = 1, g(a_2) = 2, g(a_3) = 3. \quad (2)$$

Ahora, existe una función $h: A \rightarrow A$ que convierte a a_n en a_m cada vez que se tiene $g(a_n) = f(a_m)$. Es decir

$$h: A \rightarrow A / h(a_1) = a_3; h(a_2) = a_1 \text{ y } h(a_3) = a_2. \quad (3)$$

Por (1), (2) y (3) se tiene

$$f(h(a_1)) = f(a_3) = g(a_1) = 1, f(h(a_2)) = g(a_2) = 2, f(h(a_3)) = g(a_3) = 3. \quad (4)$$

Y por (4)

$$g = f \circ h. \quad (5)$$

Nótese que f , g y h se pueden definir de la siguiente manera

$$f(a_i) = \{i + 1, \text{ si } i < 3; i - 2, \text{ si } i = 3 \ (i \in \mathbb{N}^*)\}.$$

$$g(a_i) = i \ (1 \leq i \leq 3, i \in \mathbb{N}^*).$$

$$h(a_i) = \{a_{i+2}, \text{ si } i = 1; a_{i-1}, \text{ si } 2 \leq i \leq 3 \ (i \in \mathbb{N}^*)\}.$$

Así, h es la biyección que vincula a f y g en la forma $g = f \circ h$ y $f = g \circ h^{-1}$. Probaremos ahora que esto vale para A y B conjuntos infinitos cualesquiera.

5.2. TEOREMA 1 (DE LA EQUIPOTENCIA Y LAS INYECCIONES)

Si $\#A = \#B$ y $f: A \rightarrow B$ es inyectiva, entonces f es sobreyectiva.

Demostración

Por hipótesis

$$f: A \rightarrow B \wedge f \text{ inyectiva.} \quad (1)$$

Como $\#A = \#B$ (A y B equipotentes), existe una biyección de A en B . Es decir

$$\exists g: A \rightarrow B / g(A) = B \wedge g \text{ inyectiva.} \quad (2)$$

Ahora, denotaremos por x_g a un elemento cualquiera de A al cual se aplica g , y por x_f al que se le aplique f . Como $f(A) \subseteq g(A) = B$, entonces (acá “ $\exists!$ ” Se lee “existe un único”)

$$\forall x_f \in A, f(x_f) = x_B \in B \wedge \exists! x_g \in A / g(x_g) = x_B. \quad (3)$$

Por (3) se tiene que

$$f(x_f) = g(x_g), \forall x_f \in A. \quad (4)$$

Sea $h: A \rightarrow A$ la función que convierte a cada x_g en x_f cuando $g(x_g) = f(x_f)$. Es decir

$$h: A \rightarrow A / h(x_g) = x_f \Leftrightarrow g(x_g) = f(x_f). \quad (5)$$

Por la inyectividad de f , h está bien definida como función. En efecto, si se cumpliera

que $h(x_g) = x_f$ y $h(x_g) = y_f$ con $x_f \neq y_f$, por lo cual h no sería función, entonces se tendría que $g(x_g) = f(x_f) = f(y_f)$ y f no sería inyectiva. Por lo tanto, h es una función. Veamos que esta h es una biyección.

Sobreyectividad

$$\begin{aligned} \forall x_f \in A, f(x_f) = x_B \in B \wedge \exists! x_g \in A / g(x_g) = x_B &\rightarrow g(x_g) = f(x_f) \\ &\rightarrow h(x_g) = x_f \text{ (por (5)).} \end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\forall x_f \in A, \exists! x_g \in A \text{ y } h(x_g) = x_f. \quad (6)$$

Inyectividad (ya por si misma (6) nos dice que h también es inyectiva)

Sean $x_g, y_g \in A$ con $h(x_g) = x_f$ y $h(y_g) = y_f$.

Si $h(x_g) = h(y_g) \rightarrow x_f = y_f$

$$\begin{aligned} &\rightarrow f(x_f) = f(y_f) \text{ (porque } f \text{ es función)} \\ &\rightarrow g(x_g) = g(y_g) \text{ (por (5))} \\ &\rightarrow x_g = y_g \text{ (porque } g \text{ es inyectiva)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Por (6) y (7), h es **biyectiva** y existe $h^{-1}: A \rightarrow A$ tal que

$$h^{-1}(x_f) = x_g, \forall x_g, x_f \in A \wedge g(x_g) = f(x_f). \quad (8)$$

Aplicando g a ambos miembros de (8), se tiene

$$g(h^{-1}(x_f)) = g(x_g) = f(x_f), \forall x_f \in A. \quad (9)$$

Por (9), ser $g \circ h^{-1}: A \rightarrow B$ y $f: A \rightarrow B$, se tiene

$$f(x_f) = g \circ h^{-1}(x_f), \forall x_f \in A. \quad (10)$$

Por (10), f es la compuesta de dos funciones sobreyectivas y, por teoremas ya demostrados en teoría de conjuntos (note que $f(A) = g(h^{-1}(A)) = g(A) = B$)

f es sobreyectiva. ♦

Antes de demostrar el teorema 2, demos los siguientes lemas opcionales. Opcionales porque son proposiciones ya demostradas por diferentes autores.

Lema 1 (opcional)

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces $A - B = A \cap B^C$.

Demostración

En efecto, sabemos que: $A - B = \{x \in A / x \notin B\}$, luego

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^C \Leftrightarrow x \in (A \cap B^C). \quad (1)$$

Por (1)

$$A - B = A \cap B^C. \quad \diamond$$

Lema 2 (opcional)

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces, $(A \cup B) - B = A$

Demostración

$$A - A \cap B = A \cap (A \cap B)^C \text{ (lema 1).}$$

$$= A \cap (A^C \cup B^C) \text{ (leyes de De Morgan)}$$

$$= (A \cap A^C) \cup (A \cap B^C) \text{ (distributividad)}$$

$$= \emptyset \cup (A - B) \text{ (propiedades y lema 1)}$$

$$= A - B. \quad (1)$$

Por otra parte

$$(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B^C \text{ (lema 1)}$$

$$= (A \cap B^C) \cup (B \cap B^C) \text{ (distributividad)}$$

$$= (A - B) \cup \emptyset \text{ (lema 1 y propiedades)}$$

$$= A - B. \quad (2)$$

Por (1) y (2)

$$(A \cup B) - B = A - A \cap B. \quad (3)$$

Por (3) y ser $A \cap B = \emptyset$, así como $A - \emptyset = A$, se tiene

$$(A \cup B) - B = A \text{ (si } A \cap B = \emptyset\text{)}. \quad \blacklozenge$$

5.3 TEOREMA 2 (DE LA EQUIPOTENCIA Y LAS SOBREYECCIONES)

Si $\#A = \#B$ y $f:A \rightarrow B$ es sobreyectiva ($f(A) = B$), entonces f es inyectiva.

Demostración

Como $\#A = \#B$, entonces, por equipotencia de conjuntos

$$\exists g:A \rightarrow B / g(A) = B \wedge g \text{ es inyectiva.} \quad (1)$$

Supongamos, como *hipótesis temporal*, que f no es inyectiva. Es decir

$$\#A = \#B, f:A \rightarrow B, f(A) = B \wedge f \text{ no es inyectiva.} \quad (2)$$

Como f no es inyectiva en A , entonces A se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos, A' y C , tales que f es inyectiva en A' , y C contiene a todos los elementos de A que generan las mismas imágenes que algunos (o todos los) elementos de A' . Es decir, si existen pares, tríadas, etc., de elementos de A que generan la misma imagen en B , dejamos uno de ellos en A' y los otros en C . Así, $f(C) \subset f(A')$ y $\forall x, y \in A'$, si $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$.
Luego

$$A = A' \cup C \text{ (} C \neq \emptyset \text{, supuesto)}. \quad (3)$$

Por (3)

$$g(A) = g(A' \cup C) = g(A') \cup g(C) = B. \quad (4)$$

Como $g(C) \neq \emptyset$ y $g(C) \subset B$, entonces, por (4)

$$g(A') \cup g(C) - g(C) = B - g(C) \neq B. \quad (5)$$

Por (5) y ser $g(A') \cap g(C) = \emptyset$ (porque $A' \cap C = \emptyset$ y g es inyectiva), al aplicar el lema 2 se tiene

$$g(A') \neq B. \quad (6)$$

Por otra parte, al aplicar f en (3), se tiene

$$f(A) = f(A') \cup f(C) = B. \quad (7)$$

Como $f(C) \subset f(A')$, entonces, $f(A') \cup f(C) = f(A')$. Luego, por (7)

$$f(A) = f(A') = B. \quad (8)$$

Al aplicar $f: A' \rightarrow B$ y usando (8), se tiene (ahora $\forall x, y \in A'$ si $x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$)

$$f: A' \rightarrow B, f(A') = B \text{ y } f \text{ es inyectiva en } A'. \quad (9)$$

Por (9), f es **biyectiva** en A' . Luego, $\#A' = \#B$ y, por tanto, al aplicar $g: A' \rightarrow B$ se tiene

$$\#A' = \#B, g: A' \rightarrow B \text{ y } g \text{ es inyectiva.} \quad (10)$$

Ahora, las igualdades (10) y (6) contradicen al teorema 1. Como esta contradicción se generó por la hipótesis temporal (2), donde se supone a f no inyectiva, se concluye que esto es falso y, por lo tanto

f es inyectiva. ♦

Nota: Por los teoremas 1 y 2, se puede inferir que: *para dos conjuntos equipotentes, A y B , cualesquiera, $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si, y sólo si, es sobreyectiva.* Ya esto nos permite demostrar con facilidad que la HC es falsa.

5.4. TEOREMA 3 (DEL CARDINAL MENOR)

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera tales que: $\# A < \# B$ y $f: A \rightarrow B$ es una función cualquiera, entonces $f(A) \neq B$.

Demostración

Por propiedades del conjunto $f(A)$

$$\# f(A) \leq \# A. \quad (1)$$

Y por hipótesis

$$\# A < \# B. \quad (2)$$

Por (1) y (2) no puede ser: $f(A) = B$ porque sería $\#f(A) = \#B$ y se tendría

$$\#B = \#f(A) \leq \#A < \#B. \quad (3)$$

Como (3) es absurdo, entonces

$$f(A) \neq B. \quad \blacklozenge$$

5.5. TEOREMA 4 (DE LAS SOBREYECCIONES NO INYECTIVAS)

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Si existe una función $f:A \rightarrow B$ la cual es sobreyectiva, es decir, $f(A) = B$, y f es **no inyectiva**, entonces $\# A > \# B$.

Demostración:

Sea $f:A \rightarrow B / f(A) = B$ y f es **no inyectiva**.

La cardinalidad de A , con respecto a la de B , puede ser:

i) $\# A = \# B$; ii) $\# A < \# B$ ó iii) $\# A > \# B$.

Si sucede i, entonces, como $f(A) = B$, por el teorema 2, f es inyectiva; lo que contradice a la hipótesis. Luego, no puede suceder i. Si sucede ii, el teorema 3 nos asegura que, para toda función f de A en B , $f(A) \neq B$; y esto también contradice a la hipótesis. Por lo tanto, no puede suceder ii. Como únicamente queda la posibilidad iii, se concluye que

$$\# A > \# B. \quad \blacklozenge$$

5.6. TEOREMA 5 (DE LOS CARDINALES DE Z Y N)

El cardinal de Z es mayor que el de N

Demostración

Sea la función $f: Z \rightarrow N$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n \geq 0 \\ -n, & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Esta función así definida es sobreyectiva ($f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$) pero no es inyectiva, ya que se tiene: $f(n) = f(-n) \forall n \in \mathbb{Z}^*$. Por el teorema anterior

$$\#\mathbb{Z} > \#\mathbb{N}.$$



5.7. TEOREMA 6 (DE LOS CARDINALES DE R Y Z)

El cardinal de R es mayor que el de Z

Demostración

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es entero} \\ [x], & \text{si } x \text{ no es entero} \end{cases}$$

Donde $[x]$ es el entero inmediatamente menor que x (parte entera).

Esta función así definida es sobreyectiva ($f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$) pero no es inyectiva, porque se tiene, por ejemplo, $f(2) = 2$ y $f(2,5) = 2$, etc. Por el teorema 4

$$\#\mathbb{R} > \#\mathbb{Z}.$$



Los teoremas 5 y 6 nos dicen que $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{Z} < \#\mathbb{R}$ y, en consecuencia, la HC es falsa.

6. SOBREYECTIVIDAD DE UNA FUNCIÓN DE DOMINIO INFINITO

Una vez que se ha demostrado que la hipótesis de Cantor (HC) es falsa, ha quedado claro que la forma de demostrar la sobreyectividad de la función vista en la sección 3 es una forma errónea, al menos para demostrar sobreyectividad en conjuntos numéricos infinitos. Para establecer un método incuestionable de demostración de sobreyectividad de funciones en conjuntos infinitos se necesita el teorema que sigue.

6.1. TEOREMA 7 (DE LOS CARDINALES DE N Y N*)

El Cardinal de N es mayor que el de N*.

Demostración

Sea la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n > 0 \\ 1, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Esta f así definida es sobreyectiva ($f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$) pero no inyectiva ($f(1) = f(0) = 1$). Por el teorema 4

$$\#\mathbb{N} > \#\mathbb{N}^*.$$



Ahora bien, el único elemento de \mathbb{N} que no está en \mathbb{N}^* es el cero. Por lo tanto, si a $\#\mathbb{N}^*$ le sumamos 1 (el cero), se obtiene

$$\#(\mathbb{N}^* \cup \{0\}) = \#\mathbb{N}$$

$$\#\mathbb{N}^* + 1 = \#\mathbb{N}$$

$$\#\mathbb{N}^* = \#\mathbb{N} - 1$$

$$\#\mathbb{N}^* = \aleph_0 - 1$$

Donde $\aleph_0 - 1$ es el último natural o entero positivo. Si a este último natural lo llamamos ω , entonces $\#\mathbb{N}^* = \omega$.

Una vez que podemos darle un símbolo al último natural, entonces podemos crear un método para demostrar las sobreyectividades en funciones numéricas de dominio infinito como la función vista en la sección 3.

6.2 MÉTODO PARA DEMOSTRAR LA SOBREYECTIVIDAD

Para probar que una función como la analizada en la sección 3 no es sobreyectiva, se puede proceder, para la parte positiva, de la siguiente manera:

$$f(n) = \frac{n+1}{2} \text{ (n impar)}. \tag{1}$$

Como el rango se supone que es \mathbb{Z}_+^* y f es creciente en $[1, \omega]$, entonces la imagen del último natural impar debe ser ω , porque ω es el último entero positivo. Sea α este último natural impar, entonces

$$f(\alpha) = \frac{\alpha+1}{2} = \omega. \quad (2)$$

Pero de (2) se tiene que

$$\alpha = 2\omega - 1 > \omega. \quad (3)$$

Ahora (3) nos dice que el último natural impar es mayor que el último natural, lo cual es un absurdo ($2\omega - 1 \notin \mathbb{N}$). En consecuencia, f no es sobreyectiva en la parte positiva. De igual manera se demuestra que no es sobreyectiva en la parte negativa. Por lo tanto, la función dada no es una sobreyección.

Otra forma de probar sobreyectividades es tomar el último elemento del dominio, siempre que sea conocido, y encontrar su imagen por f . Para la función cuestionada anteriormente se tendría, si ω fuese impar

$$f(\omega) = \frac{\omega+1}{2}$$

Pero $\frac{\omega+1}{2} < \omega - n$ para todo n finito. Por lo tanto, existen en el conjunto \mathbb{Z}_+^* una gran cantidad de elementos que no son imagen de ningún impar, lo que nos vuelve a decir que f no es sobreyectiva en su parte positiva y, por ende, no es sobreyectiva.

En resumen, si tenemos funciones de la forma $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ o $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, la sobreyectividad o la no sobreyectividad se puede probar calculando la imagen del último elemento del dominio, o encontrando un elemento del dominio que tenga como imagen al último elemento del conjunto de llegada.

Nota: en el libro EL CÁLCULO MODERNO (del autor) se podrá apreciar cómo influye todo lo anterior en las funciones reales y cómo nada de esto perjudica a la teoría de conjuntos cuando se aplica en funciones con el continuo.

7. A MANERA DE CONCLUSIÓN

Para finalizar este pequeño trabajo debemos hacer hincapié en lo siguiente:

- 1) Es muy fácil que el término denominado infinito nos haga caer en laberintos de

donde es muy difícil escapar. Pero si aceptamos que todo conjunto numérico tiene un comienzo y un final (en lo infinito o en lo transfinito) es fácil evitar tal caída.

- 2) Es necesario aprender a no dejar que dicho término (el infinito) sea el encargado de arreglar las cosas que parecen no encajar bien. Debemos ser nosotros quienes las arreglemos.
- 3) Hacer matemáticas no es sólo investigar las ramas más sofisticadas de dicha disciplina. Es comprobar, también, el funcionamiento de lo descubierto en casos sencillos como los vistos en la sección 2. Pues, es muy común que en los casos que parecen fútiles e inofensivos se oculten grandes y peligrosos reptiles.