Razones de cambio y limites

Rapidez promedio y rapidez instantánea

La rapidez promedio de un cuerpo en movimiento durante cierto intervalo de tiempo se determina dividiendo la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido. La unidad de medida es unidad de longitud/unidad de tiempo (kilómetros/hora. Pies/segundo, o lo que sea adecuado para el problema en cuestión).

Ejemplo 1 DETERMINACIÒN DE UNA RAPIDEZ PROMEDIO

Una roca se desprende de lo alto de un acantilado. ¿Cuál es su rapidez promedio durante los primeros dos segundos de la caída?

SOLUCIÒN los experimentos muestran que un objeto denso y solido, en caída libre de la superficie de la tierra caerá

$$Y = 16t^2$$

Pies durante los primeros t segundos partiendo del reposo. La rapidez promedio de la roca en cualquier intervalo de tiempo es la distancia recorrida, Δ y, dividida entre la longitud del intervalo Δ t. para los primeros dos segundos de caída, de t= 0 a t = 2, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2 - 16(0)^2}{2 - 0} = 32 \text{ pies/s}$$

Ejemplo 2 DETERMINACIÓN DE UNA RAPIDEZ INSTANTANEA

Determinar la rapidez de la roca del ejemplo 1 en el instante t = 2.

Solución

Solución numérica

Podemos calcular la rapidez promedio de la roca en el intervalo que va del instante t = 2 a un instante posterior t = 2 + h como

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2+h)^2 - 16(2)^2}{h}$$

No podemos utilizar esta fórmula para calcular la rapidez en el instante exacto t = 2, pues tendríamos que considerar h = 0, y 0/0 está indefinido. Sin embargo podemos hacernos una

idea de lo que ocurre en t = 2 evaluando la formula en valores de h tiende a 0, la rapidez promedio se acerca al valor limite 64 pies/segundo.
Confirmación algebraica

Si desarrollamos al numerador de la ecuación 1 y simplificamos, vemos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2+h)^2 - 16(2)^2}{h} = \frac{16(4+4h+h^2) - 64}{h} = \frac{64h + 16h^2}{h} = 64 + 6h$$

Para valores de h distintos de 0, las expresiones de la derecha y de la izquierda son equivalentes, y la velocidad promedio es 64 + 16h pies/segundo. Ahora podemos ver por qué la rapidez promedio tiene el valor limite 64 + 16(0) = 64 pies/segundo h tiende a 0.

Definición de límite

Los límites nos proporcionan un lenguaje para describir el comportamiento de las salidas de una función cuando las entradas tienden a un valor particular. En el ejemplo 2, la rapidez promedio no estaba definida eb h = 0, pero tendía al límite 64 cuando h tendía a 0. Pudimos ver esto en forma numérica y confirmarlo en forma algebraica eliminando h del denominador. Pero no siempre podemos hacer esto. Por ejemplo, podemos ver grafica y numéricamente (figura 2.1) que los valores de f(x) = (sen x)/x tienden a 1 cuando x tiende a 0.

Figura 2.1 (a) una grafica y (b) una tabla de valores para f (x) = (sen x)/x, las cuales sugieren

***Definición** límite*

*Sean c y L números reales. La función f tiene límite L cuando x **tiende a c** si, dado cualquier número positivo ε, existe un numero positivo δ tal que para toda x,*

$$0 < |x - c| < \delta \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

quel el limite de f cuando x tiende a 0 es 1

La expresión $\lim_{x \to c} f(x) = L$ se lee " el limite de *f* de x cuando x tiende a *c* es igual a L". la notación indica que los valores *f (x)* de la función *f tienden o son iguales a L* cuando los valores de x tienden (pero no son iguales a) c. el apendice 3 proporciona cierta práctica en la aplicación de esta definición. En el ejemplo 2 vimos que $\lim_{h \to 0} (64 + 16h) = 64$.

Como surge la figura 2.1,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen } x}{x} = 1$$

propiedades de los limites

al aplicar seis propiedades básicas de los limites, podemos calcular muchos limites poco familiares partiendo de otros ya conocidos. Por ejemplo, al saber que

$\lim_{x \to 1} (k) = k$ limite de la función con valor constante k

$\lim_{x \to c} (x) = c,$ limite de la función identidad en x = c

podemos calcular los limites de todas las funciones polinomiales y racionales. Los hechos se enumeran en el teorema 1.

Teorema 1 propiedades de los limites

Si L, M, c y k son números reales y

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim g(x) = M$, entonces

1. Regla de la suma: $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

   El limite de la suma de dos funciones es la suma de sus limites.

2. Regla de la resta: $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

   El limite de la resta de dos funciones es la resta de sus limites

3. Regla del producto: $\lim_{x \to c} (f(x) \bullet g(x)) = L \bullet M$

   El limite de una constante por una función es la constante por el limite de la función

4. Regla del múltiplo de una función: $\lim_{x \to c} (k \bullet f(x)) = k \bullet L$

   El limite de una constante por una función es la constante por el limite de la función.

5. Regla del cociente: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ $M \neq 0$

   El limite del cociente de dos funciones es el cociente de sus limites, siempre que el mite del denominador sea diferente de cero

6. Regla de la potencia: si *r* y *s* son enteros s ‡ 0, entonces

   $$\lim_{x \to c} (f(x))^{r/s} = L^{R/S}$$

   Siempre que $L^{r/s}$ sea un número real.
   El limite de una potencia racional de una función es la
   Potencia racional del limite de la función, siempre que

Limites laterales y bilaterales

A veces, los valores de una función *f* tienden a límites distintos cuando x tiende a un número c por lados opuestos. Cuando esto ocurre, llamamos **límite por la Derecha límite** al límite de *f* cuando x tiende a c por la izquierda y **limite por la izquierda** al límite de *f* cuando x tiende a c por la izquierda. Utilizaremos la siguiente notación:

Por la derecha $\lim_{x \to c^+} f(x)$ El limite de f cuando x tiende a c por la derecha

por la izquierda $\lim_{x \to c} f(x)$ El limite de f cuando x tiende a c por la izquierda

Ejemplo VALORES DE UNA FUNCIÓN QUE SE APROXIMAN A DOS NÚMEROS

La función mayor entero f(x) = [[x]] tiene límites por la derecha y por izquierda distintos en cada entero, como vemos en la figura 2.5. por ejemplo

$$\lim_{x \to 3+} [[x]] = 3 \quad y \quad \lim_{x \to 3-} [[x]] = 2.$$

El límite de [x] cuando x tiende a un entero n por la derecha es n, mientras que el límite cuando x tiende a n por la izquierda es n – 1.

A veces $\lim_{x \to c} f(x)$ se llama el límite bilateral de f en c, para distinguirlo de los límites laterales por la derecha y por la izquierda de f en c. El teorema 3 muestra la Relación entre estos límites.

Teorema del sándwich

Si no podemos determinar un límite en forma directa, tal vez podríamos determinarlo de manera indirecta con el teorema del sándwich. Este teorema se refiere A una función f cuyos valores están entre los valores de otras dos funciones, g y h tienen el mismo límite cuando $x \to c$ entonces f tambien tiene límite, como sugiere la figura 2.7.

Teorema teorema del sándwich

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda $x \neq c$ en algún intervalo en torno de c, y

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Limites que implican al infinito

Limites finitos cunado $x \to \pm\infty$ • Revisión del teorema del sandwich • Limites infinitos cuando $x \to a$ •Modelos de comportamiento en los extremos
• "vissión" de los limites cuando $x \to \pm\infty$

Limites finitos cuando $x \to \pm\infty$

El simbolo de infinito (∞) no representa un número real. Lo utilizamos para describir eñl comportamiento de una función cuando los valores de su dominio o rango rebasan toda cota finita. por ejemplo, cuando decimos "el limite de f cuando x tiende a infinito", nos referimos al limite de f cuando x aumenta cada vez más hacia la derecha de la recta númerica. Cuando decimos "el limite de f cuando x tiende a menos infinito ($-\infty$)" nos referimos al limite de f cuando x se mueve cada vez más hacia la izquierda de la recta númerica. (en cada caso, el limite puede o no existir.)

Si analizamos $f(x) = 1/x$ (figura 2.9), observamos que

(a) Cuando $x \to \infty$, $(1/x) \to 0$ y escribimos $\lim_{x \to \infty} (1/x) = 0$

(b) Cuando $x \to \infty$, $(1/x) \to 0$ y escribimos $\lim_{x \to \infty} (1/x) = 0$

ejemplo 1 BUSQUEDA DE ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Analizar la grafica de $f(x) = x/x^2 + 1$.
Solución

Resolviendo graficamente

La figura 2.10a muestra la grafica para $-10 \leq x \leq 10$. La grafica con rapidez hacia la recta $y = 1$ cuando x se aleja del origen hacia la derecha. En la pantalla de nuestra calculadora, la grafica se vuelve indistinguible de la recta rapidamente. De manera similar, cuando x se aleja del origen hacia la izquierda, la grafica baja con rapidez hacia la recta $y = -1$ y parece sobreponerse a ella.

Confirmación numerica

La tabla de la figura 2.0b confirma el rápido acercamiento de f(x) hacia 1 cuando $x \to \infty$, como f es una función impar de x, podemos esperar que sus valores tiendan a -1 de una manera similar, cuando $x \to -\infty$

Teorema 5 propiedades de los limites cuando $x \to \pm\infty$

Si L, M y k son números reales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = M, \text{ entonces}$$

1. Regla de la suma: $\lim_{x\to\infty} f(x) + g(x)) = L + M$
2. Regla de la resta: $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x)) = L - M$
3. Regla del producto: $\lim_{x\to\infty} f(x) \bullet g(x)) = L \bullet M$
4. Regla del mútiplo de una constante: $\lim_{x\to\infty} (k \bullet f(x)) = k \bullet L$
5. Regla del cociente: $\text{Lím}_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad M \neq 0$
6. Regla de la potencia: si r y s son enteros, $s \neq 0$, entonces
$$\lim_{x\to\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$
siempre que $L^{r/s}$ sea un número real.

Limites infinitos cuando x→a

Si los valores de una función f(x) rebasan cualquier cota positiva x tiende a un número finito a, decimos que $\lim_{x\to a} fx \infty$, si los valores de f rebasan cualquier cota negativa cuando x→a, decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x\to c} 1/x = \infty \quad y \quad \lim_{x\to c} 1/x = -\infty$$

definición asíntota vertical

la recta x = a es una asíntota vertical de la grafica de una función y = f(x) si ocurre que
l cociente de las dos funciones cuando

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

modelos de comportamiento en los extremos

para valores muy grandes de x, a veces podemos modelar el comportamiento de una función compleja mediante otra más sencilla que actúe casi de la misma forma.

Ejemplo MODELOS DE FUNCIONES PARA X GRANDE

SEAN $F(X) = 3X^4 - 2X^{3+}3X^2 - 5X + 6$ Y $G(X) = 3X^4$. Mostrar que aunque f y g son distintas para valores pequeños de x, son casi identicas para x grande.

Soluciòn

Resolviendo graficamente

Las graficas de f y g (figura 2.1.3ª), algo distintas cerca del origen, son casi idénticas en una escala mayor (figura 2.13b).

Confirmación analitica

Podemos verificar la afirmación de que g modela a f para valores grandes de x examinado el cociente de las dos funciones cuando x→±∞. tenemos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6}{3x^4}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{3x^3} + \frac{2}{x^4} \right) = 1,$$

lo que es una evidensia convicente de que f y g se comportan de manera semejante para |x|grande