

EL CÁLCULO MODERNO

De una y varias variables,

CON LA RAZÓN DE CONTINUIDAD (©)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{f(x+n\textcircled{c}, y) - f(x, y)}{n\textcircled{c}}$$

$$\nabla f(\mathbf{x})\mathbf{u} = (f_x, f_y) \cdot \mathbf{u}$$

Dimas Herrera

DEDICATORIA

A mi esposa:

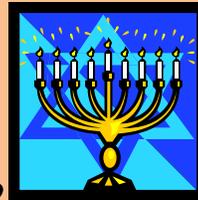
ANA LUISA

A mis hijos:

CAROLINA, IBRAHIM, JOHANA Y DIANEL

A la memoria de mis padres:

JUSTA MARÍA Y SILVINO



PRÓLOGO

Estimado(a) lector(a), el libro que en este momento se está poniendo en sus manos no está pensado para enseñarle CÁLCULO. Está pensado para que usted, como matemático, tenga una idea de cómo sería la enseñanza del nuevo cálculo, o CÁLCULO MODERNO, con la razón de continuidad. Dicha razón tendrá, por el momento, el símbolo prestado del copyright, ©. Se ha tomado este símbolo, momentáneamente, por ser muy parecido a un cero y, además, tiene una *c* en su interior; por lo que lo podemos llamar: *el cero (0) de la continuidad (c)* o, por darle un nombre momentáneo, *grillete* o *eslabón*. Ahora bien, ¿cuáles son las razones para enseñar el cálculo con un número que alguien pudiera pensar que no existe en la realidad? Estas razones se explican a continuación.

En primer lugar, este número sí existe y su demostración de existencia es muy sencilla; claro está, una vez que ha sido rota la camisa de fuerza que significaba la *hipótesis del continuo* del gran *George Cantor*. Ya que al demostrarse que el conjunto \mathbb{N} tiene más elementos que \mathbb{N}^* , entonces podemos darle un símbolo al último natural; al igual que se ha hecho con el primer *transfinito*. No obstante, si alguien pretendiera imponer la idea de que es imposible darle un símbolo al último natural porque éste no existe, entonces tampoco se le debe dar un símbolo al primer transfinito, porque dicho número es mayor que todo natural. Y si no existe el último natural (en lo infinito), tampoco existirá un número que es mayor que éste.

En segundo lugar, si este número (razón de continuidad) no existiera, sería imaginario, tal como lo es el número $i = \sqrt{-1}$. Y ya conocemos la impresionante teoría de números complejos que dio como resultado aceptar al número i , el cual no existe sino en la abstracción del matemático; otro tanto sucedería con el número ©.

Ahora bien, alguien se podría preguntar ¿qué pasó, entonces, con las demostraciones de *Godel* y *Cohen* sobre la hipótesis del continuo? La respuesta no la sé, pero, podría ser muy simple: *ese término denominado infinito*. En efecto, cada

vez que se trabaja con una operación cuyos pasos son numerables, ésta se termina en el infinito; cuando n toma su máximo valor, el cual, en este texto, se denota por ω ($\omega = \aleph_0 - 1$). Sin embargo, al no conocer esto, decimos que dicha operación continúa indefinidamente (sin fin) y que, por tanto, contiene a todos los pasos posibles. Este es el error que todos cometemos por culpa del bendito término *infinito*. Y de eso no escapó **K. Godel** en su demostración sobre la hipótesis del continuo. Sea el motivo que fuere, Godel hizo algo y ya está hecho. Describamos ahora, grosso modo, los beneficios que la razón de continuidad le proporciona al *Cálculo diferencial e integral*.

En lo que concierne a la teoría de límites, la razón de continuidad nos permite calcular, con relativa facilidad, el límite de algunas indeterminaciones sin recurrir a la derivación. Asimismo, permite demostrar las fórmulas de L’hopital con mucha sencillez.

En la teoría de la derivación, nos permite prescindir del engorroso límite cuando Δx tiende a cero, puesto que Δx no se convierte en cero sino en \odot , o en $n\odot$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Por otra parte, las fórmulas de las derivadas se deducen con mucha sencillez sin apelar a la teoría de límite. No queriendo decir con esto que ya la teoría de límites no deba estudiarse, sino que no se necesita en gran medida en la derivación.

En cuanto a la integración, nos permite prescindir de las fastidiosas particiones de conjuntos, las cuales involucran a la demostración de igualdad de las sumas, inferior y superior, de **Rieman**.

Todo lo anterior, visto en conjunto, es ya una buena justificación para inferir que dicha razón de continuidad es sumamente útil en la enseñanza del Cálculo. Sin embargo, uno de los mayores beneficios de dicho número es que ya no será necesario que el autor de un texto, del referido tema, necesite mandar al lector a consultar la demostración de tal o cual teorema en un libro de cálculo avanzado. Pues, los

teoremas de más difícil demostración, como lo son el de la *función implícita*, de la *función inversa*, de las *parciales mixtas*, entre otros, se hacen sumamente fáciles de demostrar con el descrito número.

El libro se ha estructurado en ocho capítulos y un apéndice y uno de sus objetivos principales es corregir algunas fallas presentadas en el anterior libro “***Hacia una matemáticas sin contradicciones***” el cual se publicó en la página web *monografías.com*. El primer capítulo se ha titulado “los ceros residuales y la razón de continuidad”. En éste se trata a la hipótesis del continuo y se demuestra su falsedad. Aquí, conviene hacer la siguiente consideración: si dos conjuntos cualesquiera tienen igual cardinalidad, entonces tienen igual número de elementos. Es decir, si N y Z tienen, según Cantor, igual cardinalidad, entonces existen tantos naturales como enteros; o lo que es lo mismo, N y Z tienen la misma cantidad de elementos (¿?). No es posible decir que dos conjuntos infinitos tienen igual cardinalidad pero que uno tiene más elementos que el otro. Sin embargo, en los teoremas de este capítulo I se usará la cardinalidad sin importar el número de elementos. Hechas estas dos consideraciones, cabría preguntarse ¿qué pasa con la función

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ definida por } f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

con la cual se asegura que $\#Z = \#N$? La respuesta es que, aunque usted no lo crea, esta función no es sobreyectiva; la demostración está en el apartado 1.1.14 del capítulo I. Ahora bien, amigo lector, si en este momento usted se está diciendo que todo esto debe ser una locura, porque los matemáticos del pasado no se pueden haber equivocado, sepa y entienda que ellos no eran dioses sino personas como usted y yo. Pero, ¿por qué sucedió esto y no lo vimos? Sencillamente, porque a nadie se le ocurre objetar lo que un matemático brillante y connotado nos presenta. Por lo tanto, llenémonos de humildad y modestia y tratemos de seguir adelante aceptando la realidad aunque sea triste.

Del capítulo dos al capítulo seis se muestra la parte correspondiente al cálculo diferencial e integral. Y, por no ser un libro para el aprendizaje, como se dijo al comienzo, no se presentan problemas ni ejercicios para su resolución; sólo se calculan algunos límites de indeterminaciones para comprobar la utilidad de nuestro número \mathcal{C} .

El capítulo siete se destina a poner en evidencia cómo el número \mathcal{C} ocasiona lo que acá se ha llamado “*el caos geométrico-algebraico*”. Se corrige un error presentado en un trabajo anterior sobre *la trisección geométrica de un ángulo cualquiera*, el cual se presentó en la página web *monografías.com*, y se demuestra por qué estos tres problemas clásicos no son resolubles con la regla y el compás.

El capítulo ocho se ha llamado *fin de las geometrías no euclidianas* porque en éste se demuestra la unicidad de la recta que pasa por dos puntos distintos con base en los *postulados de incidencia*, y se demuestra el *postulado de las paralelas*.

En el apéndice se dan a conocer los demás detalles correspondientes a la influencia de la razón de continuidad en la matemática; como lo son, entre otras cosas, la *racionalidad de todos los números reales*, la *división por cero* y el porqué de la existencia de *indeterminaciones*.

Pero, además de la nueva forma de estudiar el cálculo, en este trabajo se corrigen algunas contradicciones que presenta nuestra matemática. Ejemplo, ¿qué piensa usted como matemático cuando ha aprendido que un grupo con infinitos elementos, como $(\mathbb{Q}, +)$, es cerrado, es decir, cada vez que sume dos racionales obtendrá un racional, y sin embargo, en una suma infinita como, $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$, cuando las a_i son cifras que no se repiten periódicamente, el resultado es irracional? Evidentemente que le tiene que parecer algo extraño, pues, si $(\mathbb{Q}, +)$ es cerrado, la suma anterior tiene que ser racional aun cuando hayan infinitos términos. Y esto es así porque al sumar los primeros dos racionales obtendrá un racional, este

racional se lo suma al tercer racional y obtiene otro racional. Este a su vez se lo suma al cuarto racional y obtiene otro racional. Continuando esto infinitamente siempre tendrá un racional. Pero si en un determinado momento se consigue con un irracional, es porque existen dos racionales cuya suma es irracional, lo que es absurdo por la definición de $(\mathbb{Q}, +)$. De tal manera que la suma en cuestión tiene forzosamente que ser racional; como sucede en el caso en que las a_i se repiten periódicamente. Ahora bien, si las cifras se repiten periódicamente, el período tendrá un número n de cifras. Pero, ¿qué sucede cuando este número de cifras se hace infinito? La respuesta está en el apéndice de este trabajo, donde se prueba que la suma anterior es racional (apartado A.3.8) aun cuando las cifras no se repitan periódicamente (*se repiten, pero en el infinito*).

Pero, como consecuencia de todo lo anterior, usted se preguntará: si un número, como $\sqrt{2}$, por ejemplo, es racional, ¿por qué se demuestra que es irracional? ¿Está errada nuestra matemática? La respuesta es no, no está errada nuestra matemática. Quienes estamos errados en nuestra forma de proceder somos nosotros. La explicación del porqué está en el apéndice, sección A.6.

Otra cosa que le debe llamar la atención a un matemático son las indeterminaciones. ¿Por qué existen? ¿Porqué 1^∞ es una indeterminación? ¿Porqué $0/0$ es algunas veces igual a 1 y otras veces no? La verdadera causa por la que existen las indeterminaciones quedará despejada en el apéndice, sección A.5.

Estimado(a) lector(a), los descubridores del cálculo lo hicieron rompiendo una de las paredes del aposento donde éste descansaba. Hoy, usted lo hará por la puerta de entrada; por donde debieron llegar los primeros descubridores de este tópico. Además, también usted podrá descubrir en este trabajo el tan buscado *buen orden* de los números reales. Todo esto sin necesidad de una matemática tan sofisticada. Pero, más aún, si usted ha estudiado los últimos avances de la física moderna, sabrá algo sobre los *quarks* y sobre el *bosón de Higgs*. ¿Qué tal si un número de la forma $n \odot$ es

la masa de un quark? Significa que nunca se podrá observar su masa y por eso su masa es cero. Además, una cantidad de *quarks* como $\varepsilon 2^0 \cdot \odot = \varepsilon > 0$ le dará masa a alguna partícula y, por tanto, éste sería el número del *bosón de Higgs*. Es decir, habrá infinitos bosones de Higgs los cuales serán muy difíciles de observar. Pero esto no es más que mera especulación del autor.

Una advertencia al matemático que lea este trabajo. Todo buen matemático debe estar siempre abierto a los posibles cambios de las matemáticas. Es decir, no debemos ser *matemáticos de libros*. Entendiéndose como matemáticos de libros aquellos para los cuales la matemática es como la aprendieron en un libro, porque es así como lo dejaron escrito los matemáticos del pasado. Por ello, he acá una pequeña exhortación: al comenzar a leer el capítulo I todo será normal, pero cuando ya esté finalizando este capítulo (a partir de la sección 1.2), tal vez sienta deseos de no continuar porque le parecerá algo fantasioso. Sin embargo, después de leer los capítulos II y III, estoy seguro que volverá a sentir deseos de seguir leyendo este pequeño pero muy instructivo trabajo. Por ello, le exhorto a continuar su lectura hasta finalizar el apéndice. Seguro que le gustará.

Para finalizar este prólogo, y porque no soy más que un aprendiz de matemática (*que nunca llegará aprender bien*), debo decir, parodiando a Newton: *si logré ver más lejos que Cantor, fue porque me subí sobre sus hombros*.

El Autor

Tabla de Contenido

PRÓLOGO.....	5
1. LOS CEROS RESIDUALES Y LA RAZÓN DE CONTINUIDAD.....	17
1.1. Falsedad de la Hipótesis del Continuo.....	17
1.1.1. El Cardinal de un Conjunto A.....	17
1.1.2. Propiedades de los Conjuntos Iguales.....	17
1.1.3. Equipotencia de Conjuntos.....	17
1.1.4. El Conjunto $f(A)$	18
1.1.5. Sobre los Conjuntos de Conjuntos.....	18
1.1.6. Propiedades Intrínsecas del Conjunto $f(A)$	19
1.1.7. Propiedad de las Biyecciones de un Conjunto A en Sí Mismo.....	20
1.1.8. Teorema 1.1 (equipotencia e inyecciones).....	28
1.1.9. Teorema 1.2 (equipotencia y sobreyecciones).....	32
1.1.10. Teorema 1.3 (de los cardinales diferentes).....	33
1.1.11. Teorema 1.4 (de las sobreyecciones no inyectivas).....	34
1.1.12. Teorema 1.5 (de los cardinales de Z y N).....	34
1.1.13. Teorema 1.6 (de los cardinales de R y Z).....	35
1.1.14. Teorema 1.7 (de los cardinales de N y N^*).....	36
1.1.15. La Aparente Biyección Entre N y Z.....	36
1.2. La Razón de Continuidad.....	39
1.2.1. Teorema 1.8 (existencia de enteros infinitos).....	39
1.2.2. Enteros Infinitos Consecutivos.....	40
1.2.3. El Número: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/2^n)$	41
1.2.4. Los Símbolos ∞ y ω	42
1.2.5. Definición de Cero Residual.....	43
1.2.6. Teorema 1.9 (del último cero residual o razón de continuidad).....	44
1.2.7. Necesidad del Número \mathcal{C} para R.....	46
1.2.8. La Respuesta a Peirce.....	48
1.2.9. El Porqué el Cero Absoluto No es Razón de Continuidad.....	48
2. EL NÚMERO \mathcal{C} EN LAS FUNCIONES REALES.....	51

2.1. Propiedades del Número \mathbb{C}	51
2.1.1. Múltiplos y Divisores de \mathbb{C}	51
2.1.2. El Cociente \mathbb{C}/\mathbb{C}	52
2.1.3. Sobre el Cociente $0/\mathbb{C}$	52
2.1.4. La Potencia $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$	53
2.1.5. Valores de $\sin \mathbb{C}$, $\cos \mathbb{C}$ y $\tan \mathbb{C}$	53
2.1.6. Valores de $\ln(1+k\mathbb{C})$ y de $e^{\mathbb{C}}$	54
2.1.7. Las Potencias $(1+k\mathbb{C})^{1/\mathbb{C}}$ y e^k	56
2.1.8. Sumatoria de n Partes de \mathbb{C}	57
2.1.9. Propiedad del Cero $(\mathbb{C})^2$	57
2.2. Aplicación del Número \mathbb{C}	57
2.2.1. Definición de Crecimiento y Decrecimiento.....	58
2.2.2. Máximo o Mínimo Relativo de una Función.....	58
2.2.3. Teorema 2.1 (del máximo y el mínimo relativo de f).....	58
2.2.4. Teorema 2.2 (del Valor Intermedio).....	60
2.2.5. Teorema 2.3 (cociente de funciones que se anulan en un punto).....	61
2.2.6. Ejercicios con Indeterminaciones.....	53
3. EL NÚMERO \mathbb{C} EN LA DERIVACIÓN	69
3.1. La Derivada de una Función de una Variable Real.....	69
3.1.1. La Derivada de $f(x)$ a Ambos Lados de x	70
3.1.2. Teorema 3.1 (de la derivabilidad de f).....	70
3.1.3. Teorema 3.2 (derivada en un entorno de x).....	71
3.1.4. Teorema 3.3 (de la derivabilidad y la continuidad).....	73
3.2. Algunas Fórmulas para Derivar.....	73
3.3. Derivadas de Algunas Funciones Elementales.....	77
3.4. La Recta Tangente en un Punto Cualquiera de f	81
3.4.1. Teorema 3.4 (de la ecuación de la tangente).....	81
4. TEOREMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN UNA VARIABLE	83
4.1. Los puntos Críticos. Máximos y Mínimos.....	83
4.1.1. Teorema 4.1 (de los puntos críticos).....	83

4.1.2. Teorema 4.2 (de Rolle).....	85
4.1.3. Teorema 4.3 (del valor medio).....	85
4.1.4. Teorema 4.4 (crecimiento y decrecimiento de f).....	86
4.1.5. Teorema 4.5 (criterio de f' para máximos y mínimos).....	87
4.2. Derivadas de Orden Superior a Uno.....	88
4.2.1. Teorema 4.6 (crecimiento y decrecimiento de f'').....	88
4.2.2. Teorema 4.7 (criterio de f'' para máximos y mínimos).....	89
4.2.3. Estudio de la Concavidad de Funciones.....	89
4.2.4. Teorema 4.8 (de la concavidad en $I \subset \mathbb{R}$).....	90
4.2.5. Teorema 4.9 (Concavidad y crecimiento o decrecimiento de f'').....	91
4.2.6. Definición de Puntos de Inflexión.....	92
4.2.7. Teorema 4.10 (de f'' y el punto de inflexión).....	92
4.2.8. Teorema 4.11 (criterio de f'' para concavidad).....	93
4.3. Las Fórmulas de L'hospital.....	93
4.3.1. Teorema 4.12 (de L'hospital para $0/0$).....	93
4.3.2. Teorema 4.13 (de L'hospital para ∞/∞).....	94
4.4. Inyectividad y Sobreyectividad.....	95
4.4.1. Teorema 4.14 (criterio de inyectividad total).....	99
4.4.2. Continuidad Uniforme.....	97
4.4.3. Teorema 4.15 (de la continuidad uniforme).....	97
4.4.4. Sobreyectividad Finita y Total.....	90
4.4.5. Teorema 4.16 (de la sobreyectividad total).....	100
4.5. La Diferencial df	101
5. LA DERIVACIÓN EN VARIAS VARIABLES.....	105
5.1. Derivación Parcial.....	105
5.1.1. Derivadas Parciales de f	105
5.1.2. Derivadas Direccionales. Gradiente de f	106
5.1.3. Diferenciabilidad.....	108
5.1.4. Teorema 5.1 (del valor medio en varias variables).....	108
5.1.5. Teorema 5.2 (de la continuidad total).....	109
5.1.6. Parciales de Orden Superior a Uno.....	110

5.1.7. Teorema 5.3 (igualdad de las parciales mixtas).....	110
5.1.8. La Diferencial de f (df).....	111
5.1.9. La Matriz Jacobiana.....	113
5.1.10. Algo Sobre Funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	114
5.2. Funciones Compuestas. Regla de la Cadena.....	115
5.2.1. Teorema 5.4 (la regla de la cadena).....	115
5.2.2. Teorema 5.5 (regla de la cadena en general).....	117
5.3. Funciones Implícitas e Inversas.....	118
5.3.1. Teorema 5.6 (de las parciales en el entorno de un cero de F).....	119
5.3.2. Teorema 5.7 (de la función implícita).....	120
5.3.3. Teorema 5.8 (de las n funciones implícitas).....	122
5.3.4. La Función Inversa.....	125
5.4. Extremos de Funciones de Varias Variables.....	126
5.4.1. Teorema 5.9 (del máximo y el mínimo valor de F).....	127
5.4.2. Definición de Punto Crítico.....	129
5.4.3. Teorema 5.10 (criterio del máximo y el mínimo).....	130
6. EL NÚMERO @EN LA INTEGRACIÓN.....	133
6.1. Integración y Derivación.....	133
6.1.1. Teorema 6.1 (teorema fundamental del cálculo).....	133
6.1.2. Teorema 6.2 (subdivisión del intervalo de integración).....	135
6.1.3. Integración Como Opuesto de Derivación.....	135
6.2. Propiedades de la Integral Definida.....	136
6.2.1. Propiedad de Linealidad.....	136
6.3. Aplicación de la Integral Definida.....	137
6.3.1. La Integral Como un Área.....	137
6.3.2. Volumen de un Sólido de Revolución.....	138
6.3.3. Sólidos de Secciones Transversales Paralelas.....	138
6.3.4. Longitud de un Arco de Curva Plana.....	139
6.4. Integrales en Más de una Variable.....	140
6.4.1. Integración Iterada.....	141
7. EL NÚMERO @EN LA GEOMETRÍA.....	143

7.1. El Caos Geométrico-Algebraico.....	143
7.1.1. Potencias Pares Geométricas y Algebraicas.....	143
7.1.2. Teorema 7.1 (sobre las potencias geométricas impares).....	145
7.2. El Método para la Potenciación Geométrica.....	146
7.3. Duplicación, Cuadratura y Trisección.....	148
7.3.1. Imposibilidad de la Duplicación.....	148
7.3.2. Imposibilidad de la Cuadratura.....	149
7.3.3. Imposibilidad de la Trisección.....	151
8. FIN DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS.....	155
8.1. Unicidad de la Recta que Pasa por Dos Puntos.....	155
8.1.1. Postulados de Incidencias.....	155
8.1.2. Teorema 8.1 (del plano que contiene a r y no a s).....	156
8.1.3. Teorema 8.2 (intersección de dos rectas).....	157
8.1.4. Consecuencias del Teorema 8.2.....	159
8.2. El Teorema de las paralelas.....	159
8.2.1. Teorema 8.3 (perpendicular no común a dos rectas).....	160
8.2.2. Teorema 8.4 (rectas sin perpendicular común).....	161
8.2.3. Teorema 8.5 (de la perpendicular común).....	162
8.2.4. Teorema 8.6 (secante a dos paralelas).....	163
8.2.5. Teorema 8.7 (los ángulos internos de un triángulo).....	163
8.2.6. Consecuencias del Teorema de las Paralelas.....	164
8.3. El Verdadero Plano Euclidiano.....	165
8.3.1. Teorema 8.8 (paralelas secantes en el infinito).....	165
A. CONSECUENCIAS DEL NÚMERO @.....	167
A.1. Propiedad de Dilatación y Contracción de los Puntos.....	167
A.1.1. Teorema A.1 (de los segmentos no congruentes).....	167
A.1.2. La Unidad a Diferentes Escalas.....	168
A.2. Dilatación y Contracción de los Puntos en Funciones Reales.....	170
A.2.1. Ubicación de los $f(x)$ en el eje Y	170
A.2.2. Demostraciones Erróneas del Teorema del Valor Intermedio.....	171
A.2.3. Funciones Discretas y Continuas.....	172

A.3. Lo Contradictorio del Número Irracional.....	173
A.3.1. Teorema A.2 (composición de infinitos elementos de un grupo).....	174
A.3.2. Dos Expresiones Contradictorias.....	175
A.3.3. Sobre la Fracción Infinita de $\sqrt{2}$	175
A.3.4. Teorema A.3 (semisumas de a y b que tienden a a).....	177
A.3.5. Teorema A.4 (de las semisumas mixtas).....	178
A.3.6. El Número e Como un Racional.....	180
A.3.7. En el Proceso de Semisumas en $[a, b]$ no Quedan Huecos.....	180
A.3.8. Teorema A.5 (inexistencia de irracionales).....	181
A.3.9. Un Racional Mal Llamado Irracional.....	183
A.3.10. El Número 2^{ω} es Múltiplo de Todo Natural Finito.....	184
A.4. La Definición Correcta de \mathbb{Q} (= \mathbb{R}).....	186
A.4.1. El Conjunto T_0	186
A.4.2. Deducción del Cardinal de \mathbb{R}	187
A.4.3. Dos Demostraciones de Irracionalidad Erróneas.....	188
A.5. El Número \mathcal{O} y las Indeterminaciones.....	191
A.5.1. La División por Cero.....	191
A.5.2. Las Indeterminaciones $0 / 0$ y $0_{(res)} / 0_{(res)}$	192
A.5.3. Las Indeterminaciones $0_{(res)} / 0$, $0 / 0_{(res)}$, $\mathcal{O} / 0$ y $0 / \mathcal{O}$	193
A.5.4. La Indeterminación ∞ / ∞	194
A.5.5. La Indeterminación $0 \cdot \infty$	194
A.5.6. La Indeterminación ∞^0	194
A.5.7. La Indeterminación 0^0	195
A.5.8. La Indeterminación 1^∞	196
A.5.9. La Indeterminación $\infty - \infty$	197
A.6. Los Enteros Infinitos y sus Factores Primos.....	197
A.7. Una Reflexión para los Algebristas.....	198

CAPÍTULO I

1. LOS CEROS RESIDUALES Y LA RAZÓN DE CONTINUIDAD

1.1. Falsedad de la Hipótesis del Continuo

Se presentará en esta primera sección del capítulo I la demostración de la falsedad de la hipótesis del continuo. Esto permite demostrar que el cardinal de \aleph_0^* es $\aleph_0 - 1$ y aseverar que existe, en el infinito, el último número natural al cual se le dará, en este trabajo, el símbolo: ω . Es decir, $\omega = \aleph_0 - 1$. Se supone conocido por el lector todo lo concerniente a la teoría de conjuntos.

1.1.1. El Cardinal de un Conjunto A

El cardinal de un conjunto A (finito o infinito) es el número de elementos que posee y se denotará por: $\#A$. Esta definición se justifica con los teoremas 1.1 al 1.6.

1.1.2. Propiedades de los Conjuntos Iguales

De la definición de conjuntos iguales se pueden extraer dos propiedades interesantes, las cuales son:

P₁) Conjuntos iguales implican cardinales iguales

Si $A = B$, entonces, $\#A = \#B$.

P₂) Cardinales diferentes implican conjuntos diferentes

Si $\#A \neq \#B$, entonces, $A \neq B$.

1.1.3. Equipotencia de Conjuntos

Sabemos que dos conjuntos A y B se dice que son equipotentes cuando tienen igual potencia. Como la potencia de A es $2^{\#A}$ y la de B es $2^{\#B}$, entonces, al ser $2^{\#A} = 2^{\#B}$, se tiene que $\#A = \#B$. Luego, se puede inferir la siguiente definición de equipotencia de conjuntos:

Dos conjuntos son equipotentes si tienen igual cardinal (número de elementos).

De las definiciones de biyectividad y equipotencia de conjuntos se obtiene esta otra definición equivalente:

Dos conjuntos son equipotentes si, y sólo si, existe entre ellos al menos una biyección.

1.1.4. El Conjunto $f(A)$

Si entre dos conjuntos cualesquiera A y B existe $f: A \rightarrow B$, el conjunto $f(A)$ está formado por todos los elementos de B que son imágenes de algún elemento de A y se denota por

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\} \subseteq B.$$

Observe que, por la definición de $f(A)$, $\forall A' \subset A$, entonces, si $f(x) \in f(A')$ no implica necesariamente que $x \in A'$, ya que puede ser $x \in A$ pero $x \notin A'$. Sin embargo, para todo el conjunto A (conjunto mayor), si $f(x) \in f(A)$, entonces $x \in A$.

1.1.5. Sobre los Conjuntos de Conjuntos

Con respecto a los conjuntos de conjuntos demostraremos acá que no deben llamarse conjuntos sino, por darles un nombre, agrupaciones de conjuntos. Veamos las razones.

- 1) Para que una función pueda ser aplicada en un conjunto cualquiera A no vacío, lo único que se exige es que pueda ser aplicada a cada uno de sus elementos y que produzca una sola imagen de cada elemento al cual se aplica. Por ello la definición de $f(A)$ anterior.
- 2) Si existe f la cual se aplica en un conjunto A y $f(A) = B$, entonces existe $f: A \rightarrow B$, la cual es sobreyectiva y, por tanto, $B = \{f(x) / x \in A\}$.

Con las dos razones anteriores es suficiente para demostrar que los conjuntos de

conjuntos no deben ser llamados conjuntos sino agrupaciones de conjuntos. En efecto, sean las agrupaciones

$$AC_A = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\} \text{ y } AC_B = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}. \quad (I)$$

Las dos agrupaciones anteriores son equipotentes porque tienen igual cardinal (ambos tienen tres elementos). Si dichas agrupaciones fuesen dos conjuntos, entonces, existiría una biyección entre ellos; puesto que dos conjuntos son equipotentes si, y sólo si, existe entre ellos al menos una biyección. Sin embargo, aun cuando la imagen de un conjunto binario puede ser un conjunto unitario, nunca se puede tener que la imagen de un conjunto unitario sea un conjunto binario. Por ejemplo, $f(\{0\}) = \{0, 1\}$. Pues, por las razones anteriores, se tendría $\{f(0)\} = \{0, 1\}$ y, por lo tanto, $\#\{f(0)\} = \#\{0, 1\}$ (si dos conjuntos son iguales, tienen los mismos elementos y son equipotentes). Es decir, $1 = 2$. Lo cual es absurdo. Así, queda probado que las agrupaciones de conjuntos no se deben llamar conjuntos.

Por todo lo anterior, podemos decir que dos conjuntos son equipotentes si, y sólo si, existe entre ellos al menos una biyección. Pero no debemos decir lo mismo para dos agrupaciones equipotentes. De esta manera, podremos efectuar las operaciones (unión, intersección, etc.) entre agrupaciones con agrupaciones y entre conjuntos con conjuntos, pero nunca entre agrupaciones con conjuntos o viceversa. En consecuencia, el axioma de elección vale sólo para conjuntos y no para agrupaciones de conjuntos.

1.1.6. Propiedades Intrínsecas del Conjunto $f(A)$

Para dos conjuntos cualesquiera A y B, si existe $f: A \rightarrow B$, el conjunto $f(A)$ posee dos propiedades interesantes las cuales son

P_1) $f(A)$ Nunca puede poseer más elementos que A.

Esto se deduce de la misma definición de f y $f(A)$, ya que

$$\forall f(x) \in f(A) \rightarrow x \in A.$$

Y también

$$\forall f(x), f(y) \in f(A) / f(x) \neq f(y) \rightarrow x, y \in A \text{ y } x \neq y.$$

Por otra parte, el número máximo de imágenes que puede formar f a partir de A es $\#A$ y, por tanto, el número máximo de imágenes en $f(A)$ será $\#A$. Como $f(A)$ puede tener, 1, 2, etc., imágenes, entonces $\#f(A) \leq \#A$.

P_2) f siempre es una sobreyección de A en $f(A)$.

Esto es así porque todo elemento de $f(A)$ es imagen de algún elemento de A .

1.1.7. Propiedad de las Biyecciones de un Conjunto A en Sí Mismo

Para los científicos, ninguna ciencia está completamente terminada. Si lo aplicamos a la matemática, podemos decir que siempre habrá algo nuevo por descubrir en alguna de las ramas de esta disciplina. Por ello, en este apartado veremos que existe una aplicación de un conjunto A en sí mismo que, por sus características, la podemos llamar función; ya que cumple con todas las propiedades substanciales de una biyección, es decir, es inyectiva, sobreyectiva y posee la aplicación inversa que deshace su obra.

Para que el lector o lectora de este trabajo pueda comprender mejor lo expuesto, primero veremos cómo opera esta singular aplicación en algunos conjuntos finitos y luego la aplicaremos en conjuntos infinitos. Una vez que tengamos dominio de lo que es en verdad nuestra nueva aplicación, veremos que parece como un jueguito de niños sin ninguna consecuencia importante en la matemática. Pero nada más lejos de la realidad, pues, mediante esta sencilla aplicación lograremos demostrar que ningún subconjunto propio de A puede generarlo mediante alguna función. Es decir, si X es un subconjunto propio de A , no existe ninguna función $f: X \rightarrow A$ tal que $f(X) = A$.

Para definir la aplicación referida anteriormente, que llamaremos *ordenadora*,

necesitaremos un conjunto, A , cualquiera y una función $f: X \subseteq A \rightarrow A$ la cual debe ser una biyección. Nótese que f debe ser, forzosamente, una biyección. Ya explicaremos la razón.

Operando con la Aplicación Ordenadora

Vamos a explicar con algunos ejemplos cómo opera la aplicación ordenadora cuando existe $f: X \subseteq A \rightarrow A$ y f es una biyección.

Sea el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f: X \subseteq A \rightarrow A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Observemos que $f(X) = A$, es decir

$$f(1) = 3, f(2) = 4, f(3) = 1 \text{ y } f(4) = 2.$$

Coloquemos el conjunto X (dominio) frente al conjunto A (rango) en forma de tabla y de manera que cada elemento del dominio esté frente a su imagen. Ver tabla

Dominio = X	Rango = A
1	3
2	4
3	1
4	2

Tabla 1.

Ahora, sea $h: A \rightarrow A$ la aplicación que denominaremos *ordenadora* la cual se aplicará de la siguiente manera: si en el rango no está el 1 frente al 1 del dominio, entonces h llevará al elemento que está frente al 1 (en este caso es el 3) hasta donde está el 1 y el 1 lo llevará y lo colocará frente al 1 del dominio. De esta forma lo que hace la aplicación h es permutar dos elementos; el 1 y el 3. Al hacer la misma operación con cada uno de los demás elementos del rango se obtiene a dicho conjunto con el mismo orden que hay en el dominio, es decir, el elemento x del rango frente al elemento x del dominio; quedando ahora la tabla de la siguiente manera:

Tabla 2.

Dominio = X	Rango permutado = A
1	1
2	2
3	3
4	4

Veamos la secuencia de pasos que da la aplicación h para efectuar su trabajo. Primero hemos de tener presente que todo conjunto es bien ordenado, es decir, tiene un elemento mínimo que lo llamaremos primer elemento. La aplicación en cuestión comienza en 1 y, como $f(1) = 3$, el elemento que está frente al 1 del dominio es el 3. Por lo tanto, h lleva al 3 hasta donde está el 1, en este caso hasta frente al 3 ($f(3) = 1$), y al 1 lo lleva y lo coloca frente al 1. Así, el 1 del rango queda frente al 1 del dominio. El 3 del rango quedó frente al 3 del dominio y, por tanto, cuando h se aplica al elemento 3 (fila donde está el 3 en el dominio) lo que hace es permutar éste consigo mismo. Cuando h se aplica a la fila donde está el 2 del dominio se consigue con el elemento 4, por tanto, lleva al 4 hasta donde está el 2 (en este caso hasta el 4), lo deja allí y al 2 lo lleva frente al 2 del dominio. Así, el 4 del rango también queda frente al 4 del dominio y, cuando h llega a la fila del 4, lo que hace es permutar a éste consigo mismo. Veamos en la tabla 3 la secuencia anterior. En las columnas grises aparecen entre paréntesis los elementos que se han permutado. En la columna 3ra está el resultado de la primera permutación. En la columna 5ta se observa cómo quedó todo después de finalizar las permutaciones.

Tabla 3.

Dominio = X	Pasos h			
1	(3) 1	1	1	1
2	4	4	(4) 2	2
3	(1) 3	3	3	3
4	2	2	(2) 4	4

Ahora bien, el elemento que guía a h para que efectúe su operación es el x del dominio. Por lo tanto, la ley de formación de h se debe denotar por: $h_x(f(x)) = x$. Donde se entenderá que h cambia a $f(x)$ por x . Sin embargo, algunas veces, por causa de las permutaciones que efectúa h , frente a un elemento z del dominio puede quedar

otro elemento que no es $f(z)$ sino $f(\lambda)$, por ejemplo. Así, cuando h se aplique al elemento z , cambiará a $f(\lambda)$ por z . En consecuencia, se tiene $h_z(f(\lambda)) = z$. Pudiéndose usar las dos notaciones, $h_x(f(x)) = x$ o $h_x(f(\lambda)) = x$, donde se puede dar que $\lambda = x$, indistintamente. Veamos otro ejemplo sólo en forma de tabla, donde existe una biyección $f: X \subseteq A \rightarrow A$ y hemos empleado la aplicación h .

Tabla 4.

X	A	Pasos de h_x					A permutado
1	4	(4) 1	1	1	1	1	$h_1(f(1)=4) = 1$
2	5	5	(5) 2	2	2	2	$h_2(f(2)=5) = 2$
3	1	(1) 4	4	(4) 3	3	3	$h_3(f(1)=4) = 3$
4	2	2	(2) 5	5	(5) 4	4	$h_4(f(2)=5) = 4$
5	3	3	3	(3) 4	(4) 5	(5) 5	$h_5(f(2)=5) = 5$

En la tabla anterior la permutación de h_1 fue el 4 por el 1. En h_2 fue el 5 por el 2. En h_3 fue el 4 (que había sido colocado frente al 3) por el 3. En h_4 fue el 5 (que había sido colocado frente al 4) por el 4. Finalmente, en h_5 el 5 se permutó consigo mismo, pues ya había sido colocado el 5 frente al 5. Esto se ve en la última columna, donde podemos observar que cada $x \in A$ (A permutado) es un $h_x(f(\lambda))$.

Condiciones para Poder Usar la Aplicación Ordenadora

En las operaciones anteriores se observa que h se aplica en cada fila una sola vez. Esto, porque cuando h_x coloca a x del rango frente al x del dominio, ya no vuelve a encontrarse en su camino al elemento x . Por otra parte, para que se pueda aplicar h_x (x del dominio), x debe tener una imagen, $f(x)$, en el rango. Por lo tanto, f tiene que ser sobreyectiva. Además, si f no es inyectiva, se tendrá que $f(x) = f(z) = w$, con $x \neq z$. Como debe ser, forzosamente, $w \neq x$ o $w \neq z$, entonces h no sabrá qué hacer, pues debe colocar a x frente a x y z frente a z en la misma operación. De manera que f debe ser también inyectiva. Esta es la explicación por la que f debe ser, necesariamente, una biyección y, además, todo $x \in X$ debe estar en A .

Supongamos ahora que, dada la función $f: X \rightarrow A$, se usó $h: A \rightarrow A$ tal que h es la

aplicación ordenadora. Como $h_x(f(\lambda)) = x$, $\forall x \in X$ y $\forall f(\lambda) \in A$, entonces, a cada $x \in X$ h lo encontró en A frente a un $f(\lambda)$ y efectuó la permutación en cada $f(\lambda) \in A$. En consecuencia, $X \subseteq A$ y, además, f es biyectiva.

De los dos párrafos anteriores deducimos que las condiciones necesarias y suficientes para poder emplear la aplicación ordenadora, dada una función $f: X \rightarrow A$, son:

- 1) Que X esté contenido en A ($X \subseteq A$).
- 2) Que f sea una biyección.

La Inversa de la Aplicación Ordenadora

Ahora, veamos cómo opera la función inversa $h_x^{-1}(x) = f(x)$. Obsérvese, primero, que, sea cual sea la notación de la aplicación h ($h_x(f(x)) = x$ o $h_x(f(\lambda)) = x$), la notación de la aplicación inversa será $h_x^{-1}(x) = f(x)$, puesto que esta es la ley que deshace el trabajo de h . Para visualizar la operación de h_x^{-1} usemos la función f de la tabla 4 anterior.

Tabla 5.

Dominio X	Rango A	A permutado ($h_x(f(\lambda))$)	Pasos de $h_x^{-1}(x) = f(x)$				
1	4	1	(1) 4	4	4	4	4
2	5	2	2	(2) 5	5	5	5
3	1	3	3	3	(3) 1	1	1
4	2	4	(4) 1	1	(1) 3	(3) 2	2
5	3	5	5	(5) 2	2	(2) 3	(3) 3

Veamos la secuencia de $h_x^{-1}(x)$. En las columnas grises están los cinco pasos o permutaciones de h_x^{-1} . Como $h_1^{-1}(1) = f(1) = 4$, el 1 fue llevado frente al 4 y el 4 fue traído frente al 1. Observe que el 1 quedó frente al 4 del dominio. Para el 2, $h_2^{-1}(2) = f(2) = 5$. Por lo tanto, el 2 fue llevado frente al 5 y el 5 traído frente al 2 del dominio. Para el 3, $h_3^{-1}(3) = f(3) = 1$. El 3 fue llevado donde estaba el 1, en este caso había quedado frente al 4, quedando el 3 frente al 4 y el 1 fue llevado frente al 3 del

dominio. Para 4, $h_4^{-1}(4) = f(4) = 2$. Como frente al 4 estaba el 3, éste fue llevado donde estaba el 2 (estaba frente al 5) y el 2 fue llevado frente al 4. Así quedó el 2 frente al 4 y el 3 frente al 5. Para $h_5^{-1}(5) = f(5) = 3$. Como el 3 ya estaba frente al 5, éste se permutó consigo mismo. Así, $h_x^{-1}(x)$ volvió a colocar el orden original del rango. Luego, llamando el orden original del dominio *orden a* y el del rango *orden b*, h_x pasó del *orden b* al *orden a* y h_x^{-1} pasó del *orden a* al *orden b*.

La Aplicación Ordenadora Vista como una Biyección

De todo lo anterior, a la aplicación $h:A \rightarrow A$ la podemos tratar como una biyección de A en sí mismo. Para ello, vamos a deducir la inyectividad y la sobreyectividad cuando A es un conjunto cualquiera.

Inyectividad: Si $x, y \in A$ y $x \neq y$, entonces la permutación de x con $f(\lambda)$ será distinta a la de y con $f(\rho)$, aún cuando sea $\lambda = \rho$. Además, cuando h haya colocado a x del rango frente a x del dominio, ya no volverá a encontrarse con el elemento x nunca más. Es decir, si x (del rango) ya fue puesto frente a x (del dominio), para el elemento que viene en el orden, digamos $z \neq x$, h tendrá que buscarlo en los restantes elementos que falten por ordenar, pues, en los elementos ya ordenados nunca estará z , ya que A no tiene elementos repetidos. Por lo tanto, h es inyectiva.

Sobreyectividad: Por otra parte, $\forall x \in X \subseteq A$ (dominio), entonces, $x, f(x) \in A$ (rango). Por lo que h siempre podrá encontrar a x en el rango y colocarlo frente a x del dominio. Aclaremos un poco más esto. Supongamos por un momento que el conjunto A es infinito. Aceptemos también que en algún momento no se cumple que $h_u(f(\rho)) = u$ para un determinado u de X . Entonces, esto significa que h no puede permutar a $f(\rho)$ y u . Como esto sólo puede suceder si u no está en A (porque $f(\rho)$ sí está), entonces $X \not\subseteq A$, en contra de lo supuesto. Pero como $X \subseteq A$, esto nos asegura que siempre se cumplirá que $h_x(f(\lambda)) = x, \forall f(\lambda) \in A$, ya que todo $x \in X$ siempre estará frente a un $f(\lambda) \in A$ y, por tanto, h se aplica en todo A . Como lo que hace h es

permutar todos los elementos del conjunto A y esto no altera a dicho conjunto, entonces $h(A) = A$. Por lo que h es sobreyectiva.

Finalmente, como existe la aplicación inversa que deshace el trabajo de h , entonces a dicha aplicación se le puede tratar como una biyección $h:A \rightarrow A$. Sin embargo, tal vez alguien se resista a ver a la referida aplicación como una función. Esto no impide que dicha aplicación se pueda emplear cada vez que tengamos una biyección $f:X \subseteq A \rightarrow A$.

Usemos la aplicación h en la función

$$f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} / f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{si } n \text{ es par ó } 0 \\ n - 1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

En esta función la imagen de cada par es un impar y la de cada impar es un par. Es fácil verificar que f es inyectiva y también sobreyectiva, por lo que h siempre podrá colocar a cada n del rango frente a cada n del dominio. Esto, porque $\forall n \in \mathbb{N}$ (dominio), entonces, $n, f(n) \in \mathbb{N}$ (rango). Acá h lleva al 1 donde está el 0 (está frente al 1) y trae al 0 y lo coloca frente al 0 del dominio. Una permutación igual es posible con cada columna donde está n . En consecuencia, siempre se tiene que $h_n(f(m)) = n$. Ver tabla 6.

Dominio = \mathbb{N}	Rango = \mathbb{N}	Rango permutado = \mathbb{N}
0	1	$0 = h_0(f(0))$
1	0	$1 = h_1(f(1))$
2	3	$2 = h_2(f(2))$
3	2	$3 = h_3(f(3))$
4	5	$4 = h_4(f(4))$
5	4	$5 = h_5(f(5))$
·	·	·
·	·	·
·	·	·

Tabla 6.

Teorema de las Biyecciones de un Conjunto A en Sí Mismo

Sea A un conjunto cualquiera y $X \subseteq A$. Sea $f: X \rightarrow A$ tal que f es biyectiva. Entonces $X = A$.

Para demostrar esto sólo debemos emplear la aplicación *ordenadora* con el conjunto A y luego, mediante otra función, probar que $A \subseteq X$. Nótese que aunque la aplicación ordenadora no se pueda tomar como función, siempre podrá ser aplicada.

Para $x \in X \rightarrow x, f(x) \in A$. Además, f es una función biyectiva. Luego, podemos aplicar $h: A \rightarrow A$ tal que $h_x(f(\lambda)) = x$. Como esta aplicación ordenadora se puede ver como una biyección, entonces tenemos $f: X \rightarrow A$ y $h: A \rightarrow A$. Como $\forall x \in A$ (A permutado) lo podemos ver como un $h_x(f(\lambda))$, podemos formar una función $g: A \rightarrow X$ definida de la siguiente manera

$$g: A \rightarrow X / g(h_x(f(\lambda))) = x. \quad (1)$$

Como

$$h_x(f(\lambda)) = x. \quad (2)$$

Entonces, por (1) y (2)

$$g(x) = x. \quad (3)$$

Por (2) y (3), es fácil verificar que g es inyectiva. Veamos que también es sobreyectiva. En efecto $\forall \alpha \in X$, α siempre estará al frente de un elemento de A que llamaremos $f(w)$ (porque $A = f(X)$). Por lo tanto

$$\forall \alpha \in X, h_\alpha(f(w)) = \alpha. \quad (4)$$

Por (1), (2), (3) y (4) se tiene que

$$g(h_\alpha(f(w))) = g(\alpha) = \alpha. \quad (5)$$

Por (4) y (5) g es sobreyectiva y, por tanto, una biyección de A en X . Nos falta verificar que se aplica en todo A y no en un subconjunto de éste. Veamos

Por (1), cuando f recorre todos los x de X y sabiendo que $f(X) = A$, $h_x(A) = A$ y al recorrer todos los $x \in X$ obtenemos el conjunto X , se tiene

$$g(h_x(f(X))) = g(h_x(A)) = g(A) = X. \quad (6)$$

Por (6), g se aplica en todo A y, por tanto

$$\forall \beta \in A \rightarrow g(\beta) = \beta \in X. \quad (7)$$

Por (7), todo elemento de A está en X . En consecuencia

$$A \subseteq X. \quad (8)$$

Por (8) y ser $X \subseteq A$ se tiene que

$$X = A. \quad \blacklozenge$$

Veamos ahora una serie de teoremas sencillos que nos demuestran que la conjetura de Cantor, conocida como **hipótesis del continuo**, es falsa. En dicha hipótesis se asegura que no existe un cardinal transfinito x tal que $\# N < x < \# R$. Las demostraciones acá son valideras tanto para conjuntos discretos como para conjuntos continuos. Al final de cada demostración se usará el símbolo \blacklozenge el cual nos indica que la demostración concluyó. En cada teorema, A y B son conjuntos cualesquiera.

1.1.8. Teorema 1.1 (equipotencia e inyecciones)

Si $\#A = \#B$ y $f: A \rightarrow B$ es inyectiva, entonces f es sobreyectiva.

Demostración

Por hipótesis

$$f: A \rightarrow B \wedge f \text{ inyectiva.} \quad (1)$$

Como $\#A = \#B$ (A y B equipotentes), existe una biyección de A en B. Es decir

$$\exists g: A \rightarrow B / g(A) = B \wedge g \text{ inyectiva.} \quad (2)$$

Ahora, denotaremos por x_g a un elemento cualquiera de A al cual se aplica g, y por x_f al que se le aplique f. Como $f(A) \subseteq g(A) = B$, entonces (acá “ $\exists!$ ” Se lee “existe un único”)

$$\text{Si } x_f \in A, f(x_f) = x_B \in B \wedge \exists! x_g \in A / g(x_g) = x_B. \quad (3)$$

Por (3) se tiene que

$$f(x_f) = g(x_g) = x_B \in B. \quad (4)$$

Sea $h: X \subseteq A \rightarrow A$ la función que convierte a cada x_g en x_f cuando $g(x_g) = f(x_f)$. X es el conjunto tal que si $g(x_g) = f(x_f)$, entonces, $x_g \in X$. Es decir

$$h: X \subseteq A \rightarrow A / h(x_g) = x_f \Leftrightarrow g(x_g) = f(x_f). \quad (5)$$

Por la inyectividad de f, h es una función. En efecto, si fuese $h(x_g) = x_f$ y $h(x_g) = y_f$ con $x_f \neq y_f$, por lo cual h no sería una función, entonces $g(x_g) = f(x_f) = f(y_f)$ y f no sería inyectiva. Luego, h es una función. Veamos que esta h es biyectiva.

Prueba de la Sobreyectividad

$$\text{Si } x_f \in A, f(x_f) = x_B \in B \wedge \exists! x_g \in A / g(x_g) = x_B \rightarrow g(x_g) = f(x_f) \rightarrow x_g \in X$$

$$\rightarrow h(x_g) = x_f \text{ (por (5)). (6)}$$

Prueba de la Inyectividad

$$\text{Sean } x_g, y_g \in X \subseteq A \text{ con } h(x_g) = x_f \text{ y } h(y_g) = y_f. \text{ Si } h(x_g) = h(y_g) \rightarrow x_f = y_f \text{ (por (5))}$$

$$\rightarrow f(x_f) = f(y_f) \text{ (porque } f \text{ es función)}$$

$$\rightarrow g(x_g) = g(y_g) \text{ (por (5))}$$

$$\rightarrow x_g = y_g \text{ (porque } g \text{ es inyectiva). (7)}$$

Por (6) y (7), h es biyectiva y, por 1.1.7, $X = A$. Luego, existe h^{-1} tal que

$$h^{-1}(x_f) = x_g, \forall x_g, x_f \in A \wedge g(x_g) = f(x_f). \quad (8)$$

Aplicando g a ambos miembros de (8), se tiene

$$g(h^{-1}(x_f)) = g(x_g) = f(x_f), \forall x_f \in A. \quad (9)$$

Por (9), ser $g \circ h^{-1}: A \rightarrow B$ y $f: A \rightarrow B$, se tiene

$$f(x_f) = g \circ h^{-1}(x_f), \forall x_f \in A. \quad (10)$$

Como $g(A) = B$ y $h^{-1}(A) = A$ (por ser h biyección y por 1.1.7) entonces

$$f(A) = g(h^{-1}(A)) = g(A) = B. \quad (11)$$

Por (11) y ser $f: A \rightarrow B$

f es sobreyectiva. ♦

Antes de demostrar el teorema 1.2, demostremos los siguientes lemas opcionales, los cuales son proposiciones ya demostradas por diferentes autores.

Lema 1 (opcional)

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces $A - B = A \cap B^C$.

Demostración

En efecto, sabemos que: $A - B = \{x \in A / x \notin B\}$, luego

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^C \Leftrightarrow x \in (A \cap B^C). \quad (1)$$

Por (1)

$$A - B = A \cap B^C.$$

◆

Lema 2 (opcional)

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces, $(A \cup B) - B = A$

Demostración

$$A - A \cap B = A \cap (A \cap B)^C \text{ (lema 1).}$$

$$= A \cap (A^C \cup B^C) \text{ (leyes de De Morgan)}$$

$$= (A \cap A^C) \cup (A \cap B^C) \text{ (distributividad)}$$

$$= \emptyset \cup (A - B) \text{ (propiedades y lema 1)}$$

$$= A - B. \tag{1}$$

Por otra parte

$$(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B^C \text{ (lema 1)}$$

$$= (A \cap B^C) \cup (B \cap B^C) \text{ (distributividad)}$$

$$= (A - B) \cup \emptyset \text{ (lema 1 y propiedades)}$$

$$= A - B. \tag{2}$$

Por (1) y (2)

$$(A \cup B) - B = A - A \cap B. \tag{3}$$

Por (3) y ser $A \cap B = \emptyset$, así como $A - \emptyset = A$, se tiene

$$(A \cup B) - B = A.$$

◆

1.1.9. Teorema 1.2 (equipotencia y sobreyecciones)

Si $\#A = \#B$ y $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva ($f(A) = B$), entonces f es inyectiva.

Demostración

Como $\#A = \#B$, entonces, por equipotencia de conjuntos

$$\exists g: A \rightarrow B / g(A) = B \wedge g \text{ es inyectiva.} \quad (1)$$

Supongamos, como *hipótesis temporal*, que f no es inyectiva. Es decir

$$\#A = \#B, f: A \rightarrow B, f(A) = B \wedge f \text{ no es inyectiva.} \quad (2)$$

Como f no es inyectiva en A , A se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos, A' y C , tales que f es inyectiva en A' , y C contiene a todos los elementos de A que generan las mismas imágenes que algunos (o todos los) elementos de A' . Es decir, si existen pares, tríadas, etc., de elementos de A que generan la misma imagen en B , dejamos (suponemos) uno de ellos en A' y los otros en C . Así, $f(C) \subset f(A')$ y $\forall x, y \in A'$, si se tiene que $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$. Luego

$$A = A' \cup C \quad (C \neq \emptyset, \text{ supuesto}). \quad (3)$$

Por (3)

$$g(A) = g(A' \cup C) = g(A') \cup g(C) = B. \quad (4)$$

Como $g(C) \neq \emptyset$ y $g(C) \subset B$, entonces, por (4)

$$g(A') \cup g(C) - g(C) = B - g(C) \neq B. \quad (5)$$

Por (5) y ser $g(A') \cap g(C) = \emptyset$ (porque $A' \cap C = \emptyset$ y g es inyectiva), al aplicar el lema 2 se tiene

$$g(A') \neq B. \quad (6)$$

Por otra parte, al aplicar f en (3), se tiene

$$f(A) = f(A') \cup f(C) = B. \quad (7)$$

Como $f(C) \subset f(A')$, entonces, $f(A') \cup f(C) = f(A')$. Luego, por (7)

$$f(A) = f(A') = B. \quad (8)$$

Al aplicar $f: A' \rightarrow B$ y usando (8), se tiene (ahora $\forall x, y \in A'$, si $x \neq y$ también será $f(x) \neq f(y)$)

$$f: A' \rightarrow B, f(A') = B \text{ y } f \text{ es inyectiva en } A'. \quad (9)$$

Por (9), f es **biyectiva** en A' . Luego, $\#A' = \#B$ y, por tanto, al aplicar $g: A' \rightarrow B$ se tiene

$$\#A' = \#B, g: A' \rightarrow B \text{ y } g \text{ es inyectiva.} \quad (10)$$

Ahora las igualdades (10) y (6) contradicen al teorema 1.1. Como esta contradicción la generó la hipótesis temporal (2), donde se supone a f no inyectiva, se concluye que esto es falso y, por tanto

$$f \text{ es inyectiva.} \quad \blacklozenge$$

Nótese que, por los teoremas 1.1 y 1.2, se debe inferir que “*para dos conjuntos equipotentes cualesquiera, A y B, $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si, y sólo si, es sobreyectiva*”.

1.1.10. Teorema 1.3 (del cardinal menor)

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera tales que $\#A < \#B$ y $f: A \rightarrow B$ es una función cualquiera, entonces $f(A) \neq B$.

Demostración

Por P_1 de 1.1.6 se tiene

$$\#f(A) \leq \#A. \quad (1)$$

Y por hipótesis

$$\# A < \# B. \quad (2)$$

Por (1) y (2) no puede ser: $f(A) = B$ porque sería $\#f(A) = \#B$ y se tendría

$$\#B = \#f(A) \leq \#A < \#B. \quad (3)$$

Como (3) es absurdo, entonces

$$f(A) \neq B. \quad \blacklozenge$$

1.1.11. Teorema 1.4 (de las sobreyecciones no inyectivas)

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Si existe una función $f: A \rightarrow B$ la cual es sobreyectiva, es decir, $f(A) = B$, y f es **no inyectiva**, entonces $\# A > \# B$.

Demostración:

Sea $f: A \rightarrow B / f(A) = B$ y f es **no inyectiva**.

La cardinalidad de A , con respecto a la de B , puede ser:

i) $\# A = \# B$; ii) $\# A < \# B$ ó iii) $\# A > \# B$.

Si sucede i, entonces, como $f(A) = B$, por el teorema 1.2, f es inyectiva; lo que contradice a la hipótesis. Luego, no puede suceder i. Si sucede ii, el teorema 1.3 nos asegura que, para toda función f de A en B , $f(A) \neq B$; y esto también contradice a la hipótesis. Por lo tanto, no puede suceder ii. Como únicamente queda la posibilidad iii, se concluye entonces que $\# A > \# B$. \blacklozenge

1.1.12. Teorema 1.5 (de los cardinales de \mathbb{Z} y \mathbb{N})

El cardinal de \mathbb{Z} es mayor que el de \mathbb{N}

Demostración:

Sea la función $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n \geq 0 \\ -n, & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

En esta función se tiene que $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$, por tanto, es una función sobreyectiva y, como $f(n) = f(-n)$ siendo $n \neq -n, \forall n \neq 0$, dicha función es no inyectiva. Por el teorema anterior se tiene que $\# \mathbb{Z} > \# \mathbb{N}$. ♦

1.1.13. Teorema 1.6 (de los cardinales de \mathbb{R} y \mathbb{Z})

El cardinal de \mathbb{R} es mayor que el de \mathbb{Z}

Demostración:

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es entero} \\ [x], & \text{si } x \text{ no es entero} \end{cases}$$

Donde $[x]$ es el entero inmediatamente menor que x (parte entera de x).

Acá $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ y f es no inyectiva. Luego, por el teorema 1.4, $\# \mathbb{R} > \# \mathbb{Z}$. ♦

Así, de una manera sencilla se ha demostrado que la hipótesis del continuo es falsa, pues, hemos probado que $\# \mathbb{N} < \# \mathbb{Z} < \# \mathbb{R}$, sólo usando cardinalidad y la teoría de Cantor.

Se puede demostrar muy fácilmente, con base en los teoremas anteriores, que para dos conjuntos cualesquiera, A y B , si uno es subconjunto propio del otro, no existe ninguna biyección entre ellos. En efecto, supongamos que $A \subset B$ y $B \not\subset A$. Entonces, $\exists x \in B$ y $x \notin A$. Si definimos $f: B \rightarrow A$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in A \\ a \in A, & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (a \text{ es un elemento fijo de } A)$$

Entonces, la función anterior es sobreyectiva, es decir, $f(B) = A$, pero no es inyectiva porque para el elemento a de A y $z \notin A$ se tiene

$$f(a) = f(z) = a \text{ y } a \neq z$$

Así, la igualdad anterior unida al teorema 1.4 nos dice que $\#B > \#A$. Por lo tanto, no podrá ser $\#A = \#B$ y nunca existirá una biyección entre A y B.

1.1.14. Teorema 1.7 (de los cardinales de \mathbb{N} y \mathbb{N}^*)

El cardinal de \mathbb{N} es mayor que el de \mathbb{N}^* .

Demostración

Sea la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n > 0 \\ 1, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Esta función así definida es sobreyectiva pero no inyectiva ($f(0) = f(1) = 1$). Por el teorema 1.4 se tiene que $\#\mathbb{N} > \#\mathbb{N}^*$. ♦

Como \mathbb{N} sólo posee un elemento que no está en \mathbb{N}^* (el cero), entonces, el cardinal de \mathbb{N}^* será: $\#\mathbb{N}^* = \aleph_0 - 1 = \omega$ y se cumple que $\aleph_0 > \aleph_0 - 1 = \omega$ (ω , último natural).

Una vez aceptada la existencia, en el infinito, del último natural, entonces todo proceso numerable finaliza cuando terminan los naturales (en el infinito).

1.1.15. La Aparente Biyección Entre \mathbb{N} y \mathbb{Z}

Sea la función entre \mathbb{N} y \mathbb{Z} definida de la siguiente manera

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} / f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar.} \\ -\frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Esta función así definida es la pretendida biyección entre \mathbb{N} y \mathbb{Z} con la cual se asegura que estos conjuntos tienen igual cardinalidad. Ahora bien, el teorema 1.4 nos asegura que entre \mathbb{N} y \mathbb{Z} no puede existir ninguna biyección, pues se tendría el

absurdo: $\#Z = \#N$ y también $\#Z > \#N$. Como esta función es inyectiva, entonces no es sobreyectiva.

Analicemos la **no sobreyectividad** en la tabla siguiente tomando subconjuntos.

$I \subset Z_+^*$	1		3		5		7		9		11	...	∞
Z_+^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	∞

En la tabla anterior se tiene a las preimágenes en la parte superior y a sus imágenes en la parte inferior. Veamos lo que sucede si truncamos el proceso en un determinado n de I . Si truncamos el proceso en el 5 de I , notamos que el 5 también está en Z_+^* , por lo que el 4 y el 5 no tienen contraimagen. Si el proceso lo truncamos en 9, por ejemplo, entonces quedan sin contraimagen los números 6, 7, 8 y 9. En general, si el proceso es truncado en un número n cualquiera, entonces quedan sin contraimagen una cantidad de elementos que está dada por: $n - \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2}$ (*diferencia creciente en n*). En conclusión, si f genera a Z_+^* a partir de I , será porque la diferencia anteriormente obtenida se convierte en cero. Es decir, cuando n es infinito se tiene que $\frac{\infty-1}{2} = 0$, de donde $\infty = 1$, lo cual es absurdo.

Otra forma de disponer la tabla anterior es la siguiente

$I \subset Z_+^*$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	...	∞
Z_+^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...	∞

Otra vez apliquemos la máxima: **divide y vencerás**. Si truncamos el proceso en 3, obtenemos los siguientes conjuntos: Dominio = $\{1, 3\}$ y Rango = $\{1, 2\}$, donde un elemento (el 3) no está en el rango, es decir $D \not\subset R_f$. Igualmente sucede si truncamos en 5. Se tiene $D = \{1, 3, 5\}$ y $R_f = \{1, 2, 3\}$. Un elemento de D no está en R_f . De igual manera, si truncamos en 7 o 9, se tendrá en D dos elementos que no están en R_f . Si lo hacemos en 11 o 13, se tendrán tres elementos (9, 11 y 13) de D que no están en R_f . En general, se tiene:

Truncamiento: $2n + 1$ ó $2n + 3$ ($n = 1, 3, 5, \text{etc.}$)

Consecuencias: $2n + 1 > n$. (1) y $2n + 3 > n + 2$. (2)

Nota: En el renglón **consecuencias**, las desigualdades (1) y (2) se dan por lo siguiente: $n + 2$ es la imagen de $2n + 3$ y, como n es impar, $n + 2$ es impar. Por otra parte, la imagen de $2n + 1$ es $n + 1$, pero $n + 1$ no es impar. Como el impar que está detrás de $n + 1$ es n , se usan n y $n + 2$ (por ser impares consecutivos) como segundos miembros de las desigualdades; esto, con el fin de restar sólo los impares. Ahora bien, para formar la imagen de $2n + 1$ y de $2n + 3$ se debe sumar 1 y luego dividir por 2 a ambos impares consecutivos. Por lo tanto, para mantener las desigualdades, esto también se hace con los segundos miembros y se obtiene

$$\frac{2n+1+1}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{2n+3+1}{2} - \frac{n+2+1}{2} = \frac{n+1}{2} > 0 (\text{diferencia creciente en } n).$$

Lo anterior nos dice que al truncar en $2n + 1$ ó $2n + 3$ (n impar) siempre se tendrá que el conjunto Dominio tiene $\frac{n+1}{2}$ elementos que no están en el conjunto Rango (R_f). En consecuencia, si f genera a Z^*_+ a partir de I , para que se pueda cumplir que $I \subset R_f$, esta diferencia se debe convertir en cero. Es decir, cuando n es impar infinito, se debe tener que $\frac{\infty+1}{2} = 0$, lo cual es absurdo y, por tanto, el conjunto Dominio nunca es subconjunto del Rango.

Por todo lo anterior, f genera a un conjunto $R_f \neq Z^*_+$, a partir de I y, por consiguiente, no es sobreyectiva. Análogamente se procede con el caso cuando n es par. Queda así comprobado que no hay sobreyección en la función dada.

Otra forma (además de la dada en 1.1.7), no de comprobar sino, de probar que la biyección en cuestión no es tal, es la siguiente.

$$\text{Si } n = \omega, \text{ entonces } f(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega+1}{2}, \text{ si } \omega \text{ es impar (a)} \\ -\frac{\omega}{2}, \text{ si } \omega \text{ es par (b)} \end{array} \right\}$$

Si se da (a), entonces, $\frac{\omega+1}{2} < \omega - n$, para todo n finito (porque $\omega - 2n > 1$ para todo n finito). Por lo tanto, el intervalo natural de Z^*_+ , $[\omega - n, \omega]$, no posee contraimagen por medio de f^{-1} en el conjunto I . Con parecido razonamiento se puede probar que f no es sobreyectiva si sucede (b). En conclusión, la función en cuestión no es sobreyectiva.

Nota: Al ser $\#N^* = \aleph_0 - 1 = \omega$, entonces, $\#Z = 2\aleph_0 - 1$ (compruébelo).

1.2. La Razón de Continuidad

Antes de deducir la razón de continuidad de R , veamos que en el conjunto Z de enteros existen números que poseen una cantidad infinita de cifras sin que por ello dejen de ser enteros. En efecto, como el conjunto Z dotado de la adición es un grupo infinito, entonces, al sumar una cantidad infinita de elementos distintos de Z nos aparecerá un elemento de Z que posee un número infinito de cifras. Esto lo demuestra el siguiente teorema.

1.2.1. Teorema 1.8 (existencia de enteros infinitos)

“Existen enteros que poseen un número infinito de cifras”.

Demostración:

Supongamos por un momento que el último de los enteros positivos (o último natural) tiene una cantidad finita n de cifras.

Se tendrá entonces que la expresión dada a continuación es un entero

$$999\dots(n \text{ nueves}). \quad (1)$$

Sumando en (1) el entero 1 se tiene

$$1000\dots(n+1 \text{ cifras}). \quad (2)$$

La expresión (2) tiene $n + 1$ cifras por tener n ceros más la cifra 1.

Entonces, la expresión (2) no es un entero porque tiene $n + 1$ cifras.

Pero esto contradice la definición del grupo $(\mathbb{Z}, +)$, pues, a un entero finito le hemos sumado un entero finito y se obtuvo un número no entero. Como esta contradicción provino de suponer que el último entero positivo tiene una cantidad n finita de cifras, se concluye que esto es falso y, por tanto, existen enteros con infinitas cifras. ♦

A los enteros que tienen una cantidad infinita de cifras se les llamará *enteros infinitos* y se les denotará por $a(i)$, $b(i)$, etc., y $a(i)$, $b(i) \in \mathbb{Z}$. De esta manera, el conjunto \mathbb{Z} es

$$\mathbb{Z} = \{-\omega, \dots, -a(i), \dots, -1, 0, 1, \dots, a(i), \dots, \omega\}.$$

1.2.2. Enteros Infinitos Consecutivos

Veamos cómo se obtienen enteros infinitos que difieran en una unidad. Sabemos que si se tiene, por ejemplo

$$3 < 4.$$

Entonces colocando la misma cifra (natural) x a la derecha de cada número se tiene

$$3x < 4x \text{ (por ejemplo, } 37 < 47)$$

Cuando se hayan colocado una cantidad infinita de cifras a la derecha de cada número se tendrá que sigue siendo

$$3xyz\dots = a(i) < 4xyz\dots = b(i)$$

Ahora coloquemosle cifras a los mismos números 3 y 4 pero por la izquierda. Se tendrá entonces

$$3 < 4.$$

$$x3 < x4 \text{ (por ejemplo } 23 < 24)$$

$$xyz3 < xyz4 \text{ (por ejemplo } 9723 < 9724)$$

Obsérvese que siempre se tiene la cantidad de la derecha mayor en una unidad que la de la izquierda.

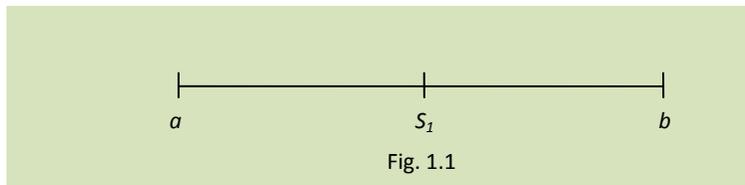
Cuando se hayan colocado la misma cantidad infinita de cifras a la izquierda de cada uno de estos números, tendremos dos enteros infinitos que difieren en una unidad, es decir, el de la izquierda será $a(i)$ y el de la derecha será $a(i) + 1$. Teniéndose que siempre será

$$a(i) < a(i) + 1.$$

1.2.3. El Número: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/2^n)$

Se demostrará ahora que el número $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/2^n)$ no es el cero absoluto, como se ha creído siempre, sino un cero que acá se llamará cero residual y se denotará por $0(res)$.

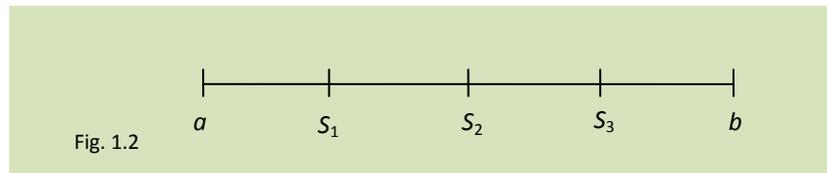
Sea $[a, b]$ un intervalo real de longitud unidad, es decir, $b = a + 1$. Sabemos que la semisuma de a y b es también un número real y está exactamente en el punto medio del segmento \overline{ab} . Es decir, $b - S_1 = S_1 - a$. Al aplicar semisuma por primera vez a los números a y b se tienen los dos intervalos que vemos en la figura 1.1.



La distancia o longitud de cada uno de estos dos intervalos es $d_1 = \frac{1}{2}$.

Si a cada uno de los dos intervalos obtenidos anteriormente le aplicamos nuevamente semisumas, obtendremos dos nuevos números reales y cuatro intervalos

cada uno de ellos de longitud $d_2 = \frac{1}{2^2}$ (fig. 1.2).



Si aplicamos semisumas nuevamente (por tercera vez) a cada uno de los cuatro intervalos, obtenemos ocho nuevos intervalos cada cual de longitud $d_3 = \frac{1}{2^3}$. Cuando el mismo procedimiento se ha efectuado n veces, se habrán obtenido 2^n intervalos cada cual de longitud $d_n = \frac{1}{2^n}$. Ahora bien, sabemos que todas las semisumas que van apareciendo en cada nueva operación son números reales distintos. En consecuencia, cuando el mismo procedimiento se ha efectuado una cantidad infinita de veces, habremos obtenido una cantidad infinita de números reales distintos y una cantidad infinita de intervalos cada uno de longitud $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)$. Como cada uno de esos números reales son semisumas distintas, entonces, para la semisuma i -ésima, S_i , y la siguiente S_{i+1} , se tiene que $S_{i+1} - S_i \neq 0(abs)$, pues, si la diferencia de ellas fuese el cero absoluto (neutro de la adición en \mathbb{R}) serían todos ellos números reales iguales, y sabemos que esto no es así. Ahora bien, cuando n tiende a infinito, la distancia entre dos semisumas consecutivas es: $S_{i+1} - S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) (\forall i \in \mathbb{N})$. Así, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \neq 0(abs). \quad \blacklozenge$$

1.2.4. Los Símbolos ∞ y ω

El símbolo ∞ (lemniscata) se usa para indicar que alguna operación continúa indefinidamente o que algún conjunto es infinito. Acá se usará para indicar que un número es entero infinito de la forma $a(i)$, $b(i)$, etc., mientras que en los conjuntos \mathbb{N} y \mathbb{Z} se usará ω .

Así, una operación, como por ejemplo, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n$, será $2^\infty = 2^{a(i)} = b(i)$ (entero

infinito), mientras que 2^ω no es entero infinito sino transfinito, por ser $2^\omega > \aleph_0$.

Veamos que $2^\omega > \aleph_0^n$ para todo n finito.

En efecto, haciendo $n \rightarrow \aleph_0$, por inducción completa se puede probar que

$$2^{n-1} > n^2 \quad \forall n \geq 7 \rightarrow 2^\omega > \aleph_0^2.$$

$$2^{n-1} > n^3 \quad \forall n \geq 12 \rightarrow 2^\omega > \aleph_0^3.$$

$$2^{n-1} > n^4 \quad \forall n \geq 18 \rightarrow 2^\omega > \aleph_0^4.$$

$$2^{n-1} > n^5 \quad \forall n \geq 24 \rightarrow 2^\omega > \aleph_0^5, \text{ etc.}$$

1.2.5. Definición de Cero Residual

Sabemos que el cero absoluto, que se denotará como siempre por 0, es el neutro para la adición en \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{R} . Por lo demostrado en el apartado 1.2.3, sabemos que $\frac{1}{2^\infty} \neq 0$, siendo ∞ un entero infinito cualquiera. En consecuencia, se tiene que

$$\frac{1}{2^{a(i)}} = 0(\text{res}).$$

Además, también se cumple, para todo a finito y no nulo, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = \frac{a}{\infty} = 0(\text{res}) \neq 0.$$

Entonces, podemos definir **cero residual** como:

“La cantidad que tiene como parte entera cero, infinitos ceros después de la coma y un residuo no nulo en el infinito”.

Y como toda cantidad que tenga cero como parte entera y luego infinitos ceros después de la coma es para nosotros un cero, al no ser el cero absoluto, lo llamaremos cero residual; éstos no son otra cosa que los infinitésimos con los cuales siempre se ha operado en el cálculo.

De esta manera, es un *cerro residual* cualquier número finito dividido entre un entero infinito. Ahora bien, supongamos la relación

$$a(i) < b(i) < c(i) < d(i) < \dots < \omega < \dots < 2^\omega. \quad (1)$$

De dicha relación se tiene que

$$\frac{1}{a(i)} > \frac{1}{b(i)} > \frac{1}{c(i)} > \frac{1}{d(i)} > \dots > \frac{1}{\omega} > \dots \quad (2)$$

Por (2), y para todo $k \in \mathbb{N}^*$ y finito, se tiene

$$\frac{k}{a(i)} > \frac{k}{b(i)} > \frac{k}{c(i)} > \frac{k}{d(i)} > \dots > \frac{k}{\omega} > \dots \quad (3)$$

Entonces, por (1) y (3), podemos inferir que existen infinitos (transfinitos) cerros residuales. De manera que debe existir un cerro residual el cual será el último de todos ellos sin ser el cerro absoluto. Esto lo prueba el siguiente teorema.

1.2.6. Teorema 1.9 (del último cerro residual o razón de continuidad)

“El último cerro residual, o razón de continuidad, es: $\frac{1}{2^\omega}$ ”.

Demostración:

Sea $[a, b]$ un intervalo real de longitud unidad ($b - a = 1$). En el apartado 1.2.3, vimos que, al aplicar semisumas infinitamente a dicho intervalo, se obtuvo

$$S_{i+1} - S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \neq 0. \quad (1)$$

Como en el proceso de aplicar semisumas al intervalo en cuestión siempre se tiene

$$S_i \leq \frac{S_{i+1} + S_i}{2} < S_{i+1}. \quad (2)$$

Entonces, (2) nos dice que este proceso parece no terminar nunca. Pero, como dicho proceso es numerable, entonces éste termina cuando se nos terminan los

naturales, es decir, cuando $n = \omega$. En consecuencia, por (1) se tiene, al finalizar el proceso

$$S_{i+1} - S_i = \frac{1}{2^\omega}. \quad (3)$$

Por (3) se tiene

$$S_{i+1} = S_i + \frac{1}{2^\omega}. \quad (4)$$

Ahora bien, una vez que el proceso de semisumas ha terminado, significa que la semisuma nueva de S_{i+1} y S_i debe valer S_i o S_{i+1} , de lo contrario, el proceso no ha terminado.

Por (4), la semisuma de S_{i+1} y S_i nos da

$$\frac{S_{i+1} + S_i}{2} = S_i + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^\omega} \right). \quad (5)$$

El segundo miembro de (5) no puede ser S_{i+1} , pues de ser así se tendría

$$S_{i+1} = S_i + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^\omega} \right). \quad (6)$$

Y por (6) y (4) tendríamos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^\omega} \right) = \frac{1}{2^\omega}. \quad (7)$$

De (7) se tendría, al multiplicar a (7) por 2 un número ω de veces

$$1/2 = 1 \quad \text{y} \quad 2^{\omega+1} = 2^\omega \text{ con } \omega + 1 > \omega. \quad (8)$$

Pero (8) es absurdo, por tanto, (5) no puede ser S_{i+1} y, en consecuencia, es S_i .

Así, se tiene que

$$S_i + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^\omega} \right) = S_i. \quad (9)$$

Y por (9)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^\omega} \right) = 0. \quad (10)$$

La igualdad (10) nos dice que al multiplicar al cero residual $1/2^\omega$ por un número positivo menor que la unidad lo convertimos en el cero absoluto. En consecuencia, dicho número es el último cero residual. ♦

Observación: El que al número $\frac{1}{2^\omega}$ se le convierta en cero absoluto al multiplicarlo por un número positivo menor que uno es lo normal, ya que cualquier número positivo y menor que uno lo hace más pequeño en valor absoluto; pero el número más pequeño en valor absoluto que el último cero residual, es el cero. En consecuencia, $\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2^\omega} = 0$ si $|k| > 1$. En lo adelante, al número $\frac{1}{2^\omega}$ se le denotará por el símbolo (prestado del **copyright**), ©, que, por darle un nombre momentáneo, podemos llamarlo *grillete (o eslabón)*, y será desde ahora la razón de continuidad del conjunto R (el cero de la continuidad), es decir, el número que se le suma a otro real, r , para obtener el siguiente de r . Por lo tanto, si r' es el siguiente de r se tiene que

$$r' = r + ©(r + \text{eslabón}).$$

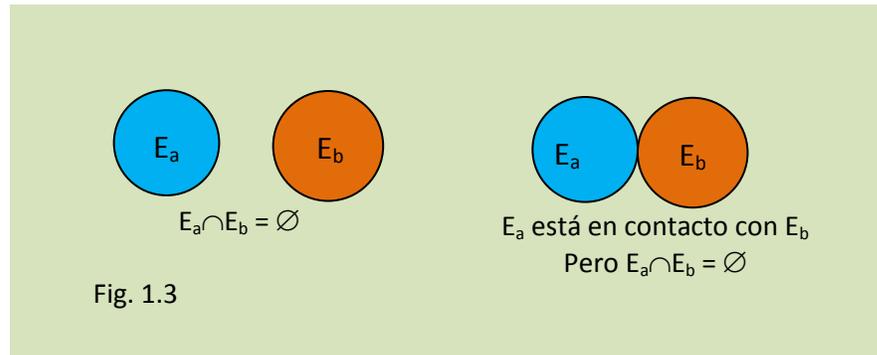
Nota: en el apéndice, al final del libro, se demostrará que el número transfinito 2^ω es múltiplo de cualquier $n \in \mathbb{N}^*$ finito y que, además, el último real positivo es $\frac{\aleph_0 2^\omega - 1}{2^\omega}$.

1.2.7. Necesidad del Número © para R

Para tener una idea de la necesidad que el conjunto R posea un número diferente de cero y que pueda llamarse razón de continuidad, veamos el siguiente ejemplo práctico que deja en evidencia tal insuficiencia.

Ilustremos el ejemplo con dos esferitas (canicas) distintas, E_a y E_b (figura 1.3)

Dichas esferas como conjuntos de puntos son disjuntas. En consecuencia, si A y B son dos puntos de E_a y E_b respectivamente, se tiene



$$A \neq B, \forall A \in E_a \wedge \forall B \in E_b. \quad (1)$$

Cuando a E_a y E_b se las ponen en contacto (E_a toca a E_b) el punto A toca al punto B . En ese momento no existe ningún otro punto entre A y B . La pregunta es ¿qué distancia separa al punto A del punto B ? Si decimos que la distancia que los separa es cero, entonces, como dos puntos que estén separados por una distancia igual a cero son iguales, se tiene

$$A = B. \quad (2)$$

Como (2) contradice a (1), la distancia entre A y B no puede ser cero. Pero entre A y B ya no entra ningún otro punto (están en contacto). Por consiguiente, existe, forzosamente, un número real no nulo que representa a dicha distancia. Ese número no es otro que la razón de continuidad. Luego, a un número real r le sigue otro real r' tal que $r \neq r'$ y entre r y r' no existe ningún otro real. Así, $r' - r = \epsilon \neq 0$.

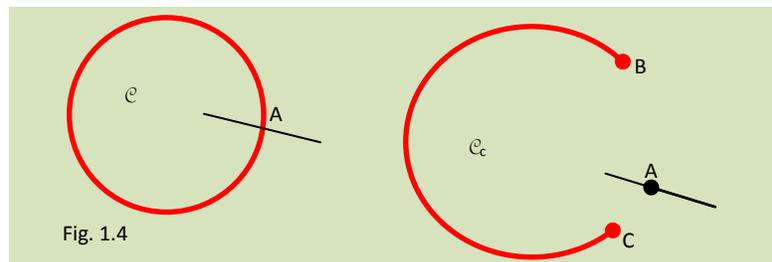
De lo anterior se tiene que el axioma: “entre dos puntos distintos A y B siempre existe otro punto C distinto a ambos”, deja de cumplirse para dos reales consecutivos. En consecuencia, el enunciado de dicho axioma, al igual que la definición de puntos consecutivos, deberá ser de la siguiente manera:

Puntos consecutivos: Aquellos que están separados por una distancia igual a la razón de continuidad de los números reales. Es decir, los puntos A y B son consecutivos si, y sólo si, están en contacto.

Axioma de continuidad: “Entre dos puntos distintos *no consecutivos* A y B, siempre existe otro punto C distinto a ambos”.

1.2.8. La Respuesta a Peirce

Lo anterior nos permite responder adecuadamente a la pregunta del matemático *Charles Sanders Peirce* (USA / 1836 – 1914) sobre qué se hace el punto A en la circunferencia C donde se ha hecho un corte precisamente en dicho punto A (figura 1.4).



En la figura 1.4 se tiene la circunferencia C con el corte en A y la circunferencia C_c , donde se ha hecho la separación en el corte. El punto A ha quedado en el segmento que sirve de corte, y en los extremos del corte están los puntos B y C los cuales estaban en contacto con A; uno a cada lado. Por los tres puntos A, B y C, siempre pasa un plano. Luego, el punto A está en dicho plano (recuerde, un punto es *nada*).

1.2.9. El Porqué el Cero Absoluto no es Razón de Continuidad.

Al no conocer la existencia del número \mathcal{O} , se acepta sin demostración el siguiente hecho: *al sumarle una cantidad infinita de ceros a un número real cualquiera, r, da como resultado el número real que sigue*. Se demostrará acá que esto es falso.

Sea r un real cualquiera y admitamos que el siguiente real r' es tal que

$$r' = r + 0.\infty. \quad (1)$$

Entonces, para el real que le sigue a r' , que denotaremos por r'' , se tiene

$$r'' = r' + 0.\infty. \quad (2)$$

Por (1) y (2), entre r'' y r sólo está el real r' . Por lo tanto, se tiene

$$\frac{r'' + r}{2} = r'. \quad (3)$$

Por (3) se tiene que

$$r'' - r' = r' - r = 0.\infty. \quad (4)$$

Como (4) vale para tres números reales consecutivos cualesquiera, se tiene que dos reales consecutivos están separados por la siguiente razón de continuidad

$$\textcircled{c} = 0.\infty. \quad (5)$$

Pero (5) nos dice que $0.\infty$ es un número real determinado, lo cual es absurdo, puesto que dicha expresión es una indeterminación y vale cualquier real. Como la contradicción anterior provino de aceptar que la razón de continuidad es consecuencia de sumar infinitos ceros, se concluye que el cero absoluto, sumado una cantidad infinita de veces, no es razón de continuidad. ♦

CAPÍTULO II

2. EL NÚMERO \mathcal{C} EN LAS FUNCIONES REALES

2.1. Propiedades del Número \mathcal{C}

Comenzaremos este segundo capítulo estudiando las propiedades más importantes del número \mathcal{C} , pues, siendo este número el último cero residual, se comporta algunas veces como el cero absoluto sin serlo. No obstante, teniendo el cuidado preciso al manipularlo, dicho número es muy eficiente en las operaciones matemáticas.

2.1.1. Múltiplos y Divisores de \mathcal{C}

Todo múltiplo de \mathcal{C} es otro cero residual de mayor magnitud que éste; donde se ha llamado magnitud de un cero residual al grado de cercanía al cero absoluto, es decir, mientras más cerca esté, positivamente, del cero absoluto, menor será su magnitud. En efecto, sea n cualquier natural mayor que la unidad. Entonces se tiene

$$n \cdot \mathcal{C} = 0(\text{res}) > \mathcal{C}. \quad \blacklozenge(\text{A})$$

Lo anterior se ha deducido para múltiplos positivos. Esto se debe a que lo que sucede para los positivos también sucede para los negativos, pues, al alejarse de cero negativamente, se hace menor en su magnitud real.

Todo entero de valor absoluto mayor que 1 convierte a \mathcal{C} en cero al dividirlo. En efecto, si n es un natural mayor que la unidad, se tiene

$$\frac{\mathcal{C}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \mathcal{C} = 0, \text{ por ser } 1/n < 1. \quad \blacklozenge(\text{B})$$

De los cierres (A) y (B) se tiene que todos los múltiplos de \mathcal{C} son ceros residuales y todos los divisores lo convierten en el cero absoluto. Además, $0 \cdot \mathcal{C} = 0$, porque $0 < 1$.

2.1.2. El Cociente $\textcircled{c} / \textcircled{c}$

A pesar de ser $\frac{0}{0}$ una indeterminación, el cociente $\frac{\textcircled{c}}{\textcircled{c}}$ no es indeterminación y su valor es la unidad (lo cual es normal por ser $\textcircled{c} \in \mathbb{R}$ y $\textcircled{c} > 0$)

Demostración:

$$\frac{\textcircled{c}}{\textcircled{c}} = \frac{1/2^\omega}{1/2^\omega} = \frac{2^\omega}{2^\omega}. \quad (1)$$

Como

$$\frac{2^\omega}{2^\omega} = 1. \quad (2)$$

Por (1) y (2)

$$\frac{\textcircled{c}}{\textcircled{c}} = 1. \quad \blacklozenge$$

2.1.3 Sobre el Cociente $0 / \textcircled{c}$

El cociente $\frac{0}{\textcircled{c}}$ es una indeterminación (ver Apéndice al final del libro). Sin embargo, en igualdades como

$$a(x)\textcircled{c} + b(x)\textcircled{c} = 0 \text{ (idénticamente)}. \quad (1)$$

Si $a(x)$ y $b(x)$ toman infinitos valores en un determinado dominio, entonces el primer miembro de (1) es siempre nulo aun cuando $a(x) + b(x) > 1$. En consecuencia, el número $a(x)$ es siempre el opuesto de $b(x)$ y, por tanto, la igualdad (1) será de la forma

$$a(x)\textcircled{c} - a(x)\textcircled{c} = 0. \quad (2)$$

Al multiplicar por $1/\textcircled{c}$ en ambos miembros de (1) y aplicar (2), se tiene que la indeterminación $0/\textcircled{c}$ toma el valor 0. En conclusión, toda igualdad como en (1) se puede dividir por \textcircled{c} .

No obstante, si tenemos una igualdad como $n \odot = m \odot$ siendo n y m números reales fijos, entonces no es aplicable la ley de cancelación por $1/\odot$; ya que puede suceder que sea $n \neq m$. Como un ejemplo de esto tenemos

$$(4/3)\odot = \odot + (1/3)\odot.$$

Como

$$(1/3)\odot = 0, (1/3) \neq 0 \text{ y } \odot \neq 0$$

Entonces, *el conjunto R tiene divisores de cero en $(-1, 1)$* . Así se tiene que

$$(4/3)\odot = 1 \odot \text{ y } (4/3) \neq 1.$$

Lo anterior nos dice que $(4/3)\odot$ y \odot tienen la misma representación en la recta real, sin embargo, $(4/3)\odot$ y \odot tienen valores reales distintos, ya que $(4/3)\odot + (8/3)\odot = 4\odot$; pero $\odot + (8/3)\odot = 3\odot$. Asimismo, en $(1/3)\odot = 0$, no se revierte la operación multiplicando por 3, ya que $3 \cdot 0 = 0$. Luego, \odot no es despejable en igualdades como $(a/b)\odot = 0$ (a y b fijos).

2.1.4. La potencia $(\odot)^\odot$

La potencia $\odot^\odot = 1$.

Demostración:

$$\odot^\odot = \left(\frac{1}{2^\omega}\right)^{\frac{1}{2^\omega}} = \frac{1}{2^{\omega/2^\omega}}.$$

Pero $\frac{\omega}{2^\omega}$ es un cero residual, por tanto

$$\odot^\odot = \frac{1}{2^{\omega/2^\omega}} = \frac{1}{2^0} = 1. \quad \blacklozenge$$

2.1.5. Valores de Sin \odot , Cos \odot y Tan \odot

Se deducirá ahora que $\sin \odot = \odot$, $\cos \odot = 1$ y $\tan \odot = \odot$. En efecto, sabemos

que

$$\sin(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}_+. \quad (1)$$

Además

$$\sin(0) = 0. \quad (2)$$

Por (1) se tiene

$$\sin(\vartheta) \leq \vartheta. \quad (3)$$

Pero, sabemos que

$$0 < \vartheta. \quad (4)$$

Por (2), (3) y (4) se tiene

$$0 < \sin(\vartheta) \leq \vartheta. \quad (5)$$

Como no existe ningún número real entre 0 y ϑ , Entonces, por (3), (4) y (5) se tiene

$$\sin(\vartheta) = \vartheta. \quad \blacklozenge A$$

Ahora, aplicando la identidad trigonométrica fundamental, se obtiene que

$$\cos(\vartheta) = 1. \quad \blacklozenge B$$

Y por los cierres $\blacklozenge A$ y $\blacklozenge B$ se tiene

$$\tan(\vartheta) = \vartheta. \quad \blacklozenge C$$

2.1.6. Valores de $\ln(1 + \vartheta)$ y de e^ϑ

Se demostrará que $\ln(1 + \vartheta) = \vartheta$. Pero para ello, primero se debe probar que $1 + x \leq e^x$, para todo x real del intervalo $[0,1]$.

En efecto, sabemos que

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \leq e^k, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

En consecuencia

$$\left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{n+1} \leq e^k, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

De (2) se obtiene

$$1 + \frac{k}{n+1} \leq e^{k/(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3)$$

Por (3) se tiene que $1 + x \leq e^x$ en el intervalo $[0,1]$, pues al ser cierto para todo n natural, también lo es para todo x en dicho intervalo, ya que todo x de ese intervalo estará entre $\frac{k}{n+1}$ y $\frac{k}{n}$ y, por tanto, se tendrá que $e^{k/(n+1)} < e^x < e^{k/n}$.

Como $\mathcal{C} \in (0,1)$, entonces, por (3)

$$1 + \mathcal{C} \leq e^{\mathcal{C}}. \quad (4)$$

Y por (4)

$$\ln(1 + \mathcal{C}) \leq \mathcal{C}. \quad (5)$$

Por otra parte

$$1 < 1 + \mathcal{C}. \quad (6)$$

Entonces, por (6) y (5)

$$0 = \ln(1) < \ln(1 + \mathcal{C}) \leq \mathcal{C}. \quad (7)$$

Como no existe ningún otro real entre 0 y \mathcal{C} , se tiene que

$$\ln(1 + \mathcal{C}) = \mathcal{C}. \quad \blacklozenge A$$

Del cierre $\blacklozenge A$ se tiene que

$$1 + \textcircled{\circ} = e^{\textcircled{\circ}}. \quad \blacklozenge B$$

2.1.7. Las Potencias $(1 + k\textcircled{\circ})^{1/\textcircled{\circ}}$ y e^k

La potencia $(1 + k\textcircled{\circ})^{1/\textcircled{\circ}}$ es igual a e^k para todo k real. Para demostrar esto, veamos que

$(1 + \textcircled{\circ})^n = 1 + n\textcircled{\circ} + \text{términos con } (\textcircled{\circ})^n \text{ siendo } n \geq 2$, los cuales se anulan. Por tanto

$$(1 + \textcircled{\circ})^n = 1 + n\textcircled{\circ}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Por (1) y el cierre $\blacklozenge B$ de 2.1.6., se tiene

$$1 + n\textcircled{\circ} = e^{n\textcircled{\circ}}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Pero (2) también vale para todo x menor que la unidad, porque la igualdad se convierte en $1 = 1$.

Entonces

$$1 + k\textcircled{\circ} = e^{k\textcircled{\circ}}, \forall k \in \mathbb{R}_+. \quad (3)$$

Como $k = k\textcircled{\circ}(1/\textcircled{\circ})$, entonces, $e^k = (e^{k\textcircled{\circ}})^{1/\textcircled{\circ}} = (1 + k\textcircled{\circ})^{1/\textcircled{\circ}}$. Por lo tanto

$$(1 + k\textcircled{\circ})^{1/\textcircled{\circ}} = e^k, \forall k \in \mathbb{R}_+. \quad \blacklozenge A$$

Por otra parte, $(1 + k\textcircled{\circ})(1 - k\textcircled{\circ}) = 1$, entonces, $(1 - k\textcircled{\circ}) = \frac{1}{1+k\textcircled{\circ}} = \frac{1}{e^{k\textcircled{\circ}}} = e^{-k\textcircled{\circ}}$. Y por tanto, (3) y $\blacklozenge A$ se cumplen para todos los k reales. En consecuencia, se tiene

$1 + \textcircled{\circ} = e^{\textcircled{\circ}}$ (1) y $1 - \textcircled{\circ} = e^{-\textcircled{\circ}}$ (2). Al sumar y restar (1) y (2) se tiene

$$e^{\textcircled{\circ}} + e^{-\textcircled{\circ}} = 2 \text{ y } e^{\textcircled{\circ}} - e^{-\textcircled{\circ}} = 2\textcircled{\circ}. \quad \blacklozenge B$$

2.1.8. Sumatoria de n Partes de \mathcal{O}

Si se desea sumar n partes de \mathcal{O} , primero se deben juntar todas las n partes y luego, si es necesario, anular. Veamos.

Sea la suma

$$\frac{2}{3} \mathcal{O} + \frac{4}{5} \mathcal{O} + \frac{1}{4} \mathcal{O}. \quad (1)$$

Si en (1) anulamos antes de sumar se tiene que

$$\frac{2}{3} \mathcal{O} + \frac{4}{5} \mathcal{O} + \frac{1}{4} \mathcal{O} = 0. \quad (2)$$

Si en cambio en (1) sumamos primero y luego anulamos se tiene

$$\frac{2}{3} \mathcal{O} + \frac{4}{5} \mathcal{O} + \frac{1}{4} \mathcal{O} = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{4}\right) \mathcal{O} = \left(1 + \frac{43}{60}\right) \mathcal{O} = \mathcal{O}. \quad (3)$$

De (2) y (3) se tiene que, en (1), se debe primero sumar todas las partes y luego anular.

2.1.9. Propiedad del Cero: $(\mathcal{O})^2$

La siguiente propiedad que se dará acá del número \mathcal{O} se le ha llamado, por el momento, propiedad del cero $(\mathcal{O})^2$. Esta consiste en lo siguiente.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si se cumple que $\frac{a}{\mathcal{O}} = b\mathcal{O}$, entonces, a es infinitésimo o $a = 0$.

En efecto, al multiplicar por $\frac{1}{\mathcal{O}} \neq 0$ a la expresión dada se tiene: $\frac{a}{(\mathcal{O})^2} = b$. Como a y b son reales, entonces, de no ser a un infinitésimo o cero, sería b transfinito, lo que contradice la suposición de ser $b \in \mathbb{R}$. En consecuencia, a es un infinitésimo o bien $a = 0$. ♦

2.2. Aplicación del Número \mathcal{O}

La teoría de límites se seguirá presentando como hasta ahora, con la teoría del ε, δ , en la forma dada por **Cauchy-Weierstras**. En esta sección veremos cómo el

número \odot nos permite resolver algunas indeterminaciones sin recurrir a las reglas de L'hospital. Esto es posible gracias al teorema *del cociente de funciones que se anulan*, que veremos más adelante, del cual dichas reglas son una consecuencia.

Por otra parte, de la teoría de funciones sólo veremos el crecimiento o el decrecimiento, el valor intermedio y el máximo o el mínimo valor relativo. Todo lo demás se estudia como siempre se ha hecho (forma tradicional).

2.2.1. Definición de Crecimiento o Decrecimiento

Sea f una función cualquiera continua en algún intervalo I . Se dice que f es

Creciente en el intervalo I si, y sólo si, para dos valores cualesquiera x_1, x_2 de I , se tiene que: si $x_2 > x_1$, entonces $f(x_2) > f(x_1)$.

Decreciente en I , si y sólo si, para dos valores cualesquiera x_1, x_2 de I , si se tiene que $x_2 > x_1$, entonces $f(x_2) < f(x_1)$.

Haciendo uso de la definición anterior y de la razón de continuidad de los reales, podemos formular el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente manera

- a) Si $f(x + n\odot) < f(x) < f(x - n\odot)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $\forall x \in (a, b)$, f es decreciente en $[a, b]$.
- b) Si $f(x - n\odot) < f(x) < f(x + n\odot)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $\forall x \in (a, b)$, f es creciente en $[a, b]$.

Por medio de a) y b), podemos probar que, para una función continua en un intervalo (a, b) , si f es primero creciente y luego decreciente en todo (a, b) , entonces f alcanza un valor máximo en (a, b) . Si por el contrario, f es primero decreciente y luego creciente en todo (a, b) , entonces f alcanza un valor mínimo en (a, b) .

2.2.2. Máximo o Mínimo Relativo de una Función

Sea f una función cualquiera continua en un intervalo (a, b) . La función f posee un máximo local o relativo en $x \in (a, b)$ si, y sólo si, $f(x) \geq f(x \pm n\odot)$ ($n \in \mathbb{N}$). Por otra parte, f posee un mínimo local o relativo en $x \in (a, b)$ si, y sólo si, $f(x) \leq f(x \pm n\odot)$

$(n \in \mathbb{N})$.

De esta definición se observa que si, para un $x \in (a, b)$, $f(x)$ es el valor máximo de f en (a, b) , entonces $f(x) \geq f(x + n\epsilon)$ y también $f(x) \geq f(x - n\epsilon)$. Si por el contrario, $f(x)$ es el valor mínimo, entonces $f(x) \leq f(x + n\epsilon)$ y también $f(x) \leq f(x - n\epsilon)$.

2.2.3. Teorema 2.1 (del máximo o el mínimo relativo de f)

Sea f una función cualquiera continua en (a, b) . Si f es primero creciente y luego decreciente en todo (a, b) , entonces f alcanza un máximo relativo en (a, b) . Si, por el contrario, es primero decreciente y luego creciente, entonces alcanza un mínimo relativo en (a, b) .

Demostración

Supongamos que f es primero decreciente y luego creciente; el otro caso es análogo. Entonces existe un $k \in (a, b)$ tal que f decrece en $(a, k]$ y luego crece en $[k, b)$. Como f es continua en k , al ser $k - n\epsilon < k$ y f decreciente en $(a, k]$, entonces, por definición de decrecimiento

$$f(k - n\epsilon) \geq f(k). \quad (1)$$

Y al ser f creciente en $[k, b)$ y $k < k + n\epsilon$, entonces, por definición de crecimiento

$$f(k) \leq f(k + n\epsilon). \quad (2)$$

Por (1) y (2)

$$f(k) \leq f(k \pm n\epsilon). \quad (3)$$

Y por (3) y definición de mínimo

$$f(k) \text{ es un mínimo en } (a, b). \quad \blacklozenge$$

Observación Importante: Si f es sólo creciente en (a, b) , entonces su valor mínimo es $f(a + \textcircled{c})$ y su valor máximo es $f(b - \textcircled{c})$. Esto es así, porque todo intervalo abierto (a, b) es equivalente al intervalo cerrado $[a + \textcircled{c}, b - \textcircled{c}]$ y, al ser f creciente en dicho intervalo, se tiene que $f(a + \textcircled{c}) < f(a + n\textcircled{c}) < \dots < f(b - n\textcircled{c}) < f(b - \textcircled{c})$. Si, por el contrario, f es sólo decreciente, entonces los valores en la desigualdad anterior se invierten y $f(a + \textcircled{c})$ es el máximo y, por tanto, $f(b - \textcircled{c})$ es el mínimo (valores máximo o mínimo relativos al intervalo).

2.2.4. Teorema 2.2 (del Valor Intermedio)

Sea f una función cualquiera continua en (a, b) . Si d es un número que está entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número $c \in (a, b)$ para el cual $f(c) = d = d \pm k\textcircled{c}$, $k \in \mathbb{N}$, es decir, k puede ser nulo. Si k es nulo, entonces $f(c) = d$. Si no lo es, entonces $d = d \pm k\textcircled{c}$. Es decir, d ocupa el mismo lugar que $d + k\textcircled{c}$, o el mismo lugar que $d - k\textcircled{c}$, en la recta real. En el apéndice del libro se hará ver que las demostraciones conocidas de este teorema son erróneas.

Demostración

Supongamos que f es creciente en (a, b) (si es decreciente la demostración es análoga). Entonces, $f(a) < d < f(b)$. Sea $f(x) < d$, $\forall x \in (a, c)$, y $f(x) > d$, $\forall x \in (c, b)$. Como c está en el intervalo $[c - n\textcircled{c}, c + m\textcircled{c}]$, entonces $d \in [f(c - n\textcircled{c}), f(c + m\textcircled{c})]$ ($n, m \in \mathbb{N}^*$). Así tenemos

$$f(c - n\textcircled{c}) < d < f(c + m\textcircled{c}). \quad (1)$$

Como f es creciente en (a, b) , entonces

$$f(c - n\textcircled{c}) < f(c) < f(c + m\textcircled{c}). \quad (2)$$

Por (2), podemos ver a f como $f: [c - n\textcircled{c}, c + m\textcircled{c}] \rightarrow [f(c - n\textcircled{c}), f(c + m\textcircled{c})]$. Trasladando el intervalo $[f(c - n\textcircled{c}), f(c + m\textcircled{c})]$ al eje X y usando la inversa de f , f^{-1} ,

con dominio el intervalo $[f(c - n\odot), f(c + m\odot)]$, entonces f^{-1} le da, forzosamente, una imagen a d y ésta sólo puede ser

$$f^{-1}(d) = c - n\odot. \quad (3)$$

$$f^{-1}(d) = c + m\odot. \quad (4)$$

$$f^{-1}(d) = c. \quad (5)$$

Si sucede (3), se tiene que $d = f(c - n\odot)$, lo cual contradice a (1). Si sucede (4), entonces $d = f(c + m\odot)$, lo cual también contradice a (1). Como no puede suceder (3) ni (4), entonces sucede (5) y por tanto

$$d = f(c). \quad \blacklozenge$$

Observe que puede suceder que sea $f(c) = d = d \pm k\odot$ ($k \in \mathbb{N}$), porque existen valores reales que, siendo diferentes, ocupan la misma posición en el eje real.

Ahora veremos uno de los teoremas más importantes, en la teoría de límites, que proporciona la razón de continuidad.

2.2.5. Teorema 2.3 (cociente de funciones que se anulan en un punto)

Si f y g son funciones reales continuas en c tales que $f(x) \rightarrow 0$ y $g(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow c$, entonces, si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x \pm n\odot)}{g(x \pm n\odot)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) existe, se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x \pm n\odot)}{g(x \pm n\odot)}.$$

Demostración:

Se demostrará, en primer lugar, que para toda función real $f(x)$ continua en un punto c , si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$, entonces, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x \pm n\odot) = f(c \pm n\odot)$ ($n \in \mathbb{N}$).

Sea, pues

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \quad (1)$$

Entonces,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \text{si } |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon. \quad (2)$$

De la relación $|x - c| < \delta$, en (2), tenemos que, para $x - c$ infinitamente cerca de cero, se tiene, para $x - c$ positivo, $x - c = n\odot$ ($n \in \mathbb{N}$). Y al ser $|x - c| < \delta$, entonces, $\delta \geq (n + 1)\odot$. Por lo tanto, $x - c < (n + 1)\odot$ y, así, $x - (c + n\odot) = 0 < \odot < \delta$ y $x - (c + n\odot) = 0 > -\delta$.

De manera que

$$|x - (c + n\odot)| < \delta. \quad (3)$$

Ahora, para $x - c$ negativo, se tiene que $x - c = -n\odot$. Y al ser $|x - c| < \delta$, entonces, el valor de δ es: $\delta \geq (n + 1)\odot$. De manera que $x - c + n\odot = 0 > -\odot > -\delta$. En consecuencia, siempre será

$$|x - (c - n\odot)| < \delta. \quad (4)$$

De (2), (3) y (4) se tiene

$$|x - c| < \delta \quad \text{y} \quad |x - (c \pm n\odot)| < \delta. \quad (5)$$

Y por (5) y (2)

$$|f(x) - f(c \pm n\odot)| < \varepsilon. \quad (6)$$

Por (5), (6) y definición de límite

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c \pm n\odot) = \lim_{x \rightarrow c} f(x \pm n\odot). \quad (7)$$

Ahora, sean f y g funciones reales continuas en c , tales que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{0}{0} \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x \pm n\odot)}{g(x \pm n\odot)} = k \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

Entonces, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\text{Si } |x - c| < \delta \rightarrow \left| \frac{f(x \pm n\odot)}{g(x \pm n\odot)} - \frac{f(c \pm n\odot)}{g(c \pm n\odot)} \right| < \varepsilon. \quad (9)$$

Por (9) y (7)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c \pm n\odot)}{g(c \pm n\odot)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x \pm n\odot)}{g(x \pm n\odot)} = k. \quad \blacklozenge$$

2.2.6. Ejercicios con Indeterminaciones

Una vez conocidas las propiedades de \odot , y apoyados en el teorema 2.3, y porque, además, es fácil demostrar con base en las propiedades de \odot que toda indeterminación es equivalente a la indeterminación $\frac{0}{0}$ (ver Apéndice, sección A.5), se pueden calcular los límites de algunas de estas indeterminaciones en forma muy sencilla, sin necesidad de recurrir al teorema de L'hospital; para el cual se precisa de la derivación.

Lo anterior no quiere decir que todos los límites de cocientes que originan alguna indeterminación se pueden calcular aplicando el teorema 2.3. Algunas veces dicho teorema, lejos de simplificar el cálculo, lo complicará. En este caso, será el método de L'hospital el más apropiado para resolver el problema en cuestión. Sin embargo, en aquellos casos donde se puedan aplicar ambos métodos es, la mayoría de las veces, preferible el método que nos proporciona este teorema 2.3.

Ejercicio 1 con Indeterminación $\frac{0}{0}$

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}.$$

Resolución:

Por el teorema 2.3 se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\odot)}{x+\odot} = \frac{\sin(\odot)}{\odot} = \frac{\odot}{\odot} = 1.$$

Ejercicio 2 con Indeterminación $\frac{0}{0}$

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \frac{0}{0}.$$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\odot} - e^{-(x+\odot)}}{\sin(x+\odot)} = \frac{e^{\odot} - e^{-\odot}}{\odot} = \frac{1+\odot - (1-\odot)}{\odot} = 2.$$

Ejercicio 3 con Indeterminación $\infty \cdot 0$

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(x+1)}{m} \right] = \infty \cdot 0, (m \in \mathbb{R}^*).$$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(x+1)}{m} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x+\odot} \cdot \frac{\ln(x+\odot+1)}{m} \right] = \frac{1}{\odot} \cdot \frac{\ln(1+\odot)}{m} = \frac{\odot}{m\odot} = \frac{1}{m}.$$

Ejercicio 4 con Indeterminación $\infty \cdot 0$

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\tan(x)}{\pi} \right] = \infty \cdot 0$$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \frac{\tan(x)}{\pi} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x + \odot} \frac{\tan(x + \odot)}{\pi} \right] = \frac{\tan \odot}{\pi \odot} = \frac{1}{\pi}.$$

Ejercicio 5 con Indeterminación 0^0

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\tan(x)]^{\text{sen}(x)} = 0^0.$$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\tan(x)]^{\text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} [\tan(x + \odot)]^{\text{sen}(x + \odot)} = \odot^{\odot} = 1.$$

Ejercicio 6 con Indeterminación 0^0

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen } x)^x = 0^0.$$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{sen } x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} [\text{sen}(x + \odot)]^{x + \odot} = \odot^{\odot} = 1.$$

Ejercicio 7 con Indeterminación 1^∞

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{1/(x-1)} = 1^\infty.$$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{1/(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + \odot)^{1/(x + \odot - 1)} = (1 + \odot)^{1/\odot} = (e^\odot)^{1/\odot} = e.$$

Ejercicio 8 con Indeterminación 1^∞

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x+1} \right]^{1/(e^x-1)} = 1^\infty.$$

Resolución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x+1} \right]^{1/(e^x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x+\odot+1} \right]^{1/(e^{x+\odot}-1)} = \left[\frac{1}{1+\odot} \right]^{1/(e^\odot-1)} = [e^{-\odot}]^{1/\odot} = \\ &= e^{-1}. \end{aligned}$$

Ejercicio 9 con Indeterminación $\infty - \infty$

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{\text{sen}(x)} \right] = \infty - \infty.$$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{\text{sen}(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\tan(x+\odot)} - \frac{1}{\text{sen}(x+\odot)} \right] = \frac{1}{\odot} - \frac{1}{\odot} = 0.$$

Ejercicio 10 con Indeterminación $\infty - \infty$

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right] = \infty - \infty.$$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x+\odot+1)} - \frac{1}{x+\odot} \right] = \frac{1}{\odot} - \frac{1}{\odot} = 0.$$

Ejercicio 11 con Indeterminación $0/0$ y $\sqrt{h(x)}$

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \frac{0}{0}.$$

Resolución:

El artificio acá es el siguiente:

Cuando $x = 0$, $\sqrt{x+9} = 3$. Como el real que quita la indeterminación es el siguiente de 3, $3 + \textcircled{c}$, entonces, para saber cuál es el x que en $\sqrt{x+9}$ nos da $3 + \textcircled{c}$, lo elevamos al cuadrado y obtenemos $(3 + \textcircled{c})^2 = 9 + 6\textcircled{c}$. En consecuencia, la cantidad subradical inicial debe ser igual a $9 + 6\textcircled{c}$.

Se tiene entonces que

$$x + 9 = 9 + 6\textcircled{c},$$

De donde

$$x = 6\textcircled{c}.$$

Luego, el cambio a efectuar es x por $6\textcircled{c}$. Teniéndose así

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6\textcircled{c}+9}-3}{6\textcircled{c}} = \frac{3+\textcircled{c}-3}{6\textcircled{c}} = \frac{1}{6}.$$

Ejercicio 12 con Indeterminación 0/0 y $\sqrt{h(x)}$

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{x-5} = \frac{0}{0}.$$

Resolución:

Cuando $x = 5$, se tiene que $\sqrt{3x+1} = 4$. El siguiente de 4 es $4 + \textcircled{c}$, cuyo cuadrado es $16 + 8\textcircled{c}$. Debemos resolver: $3x + 1 = 16 + 8\textcircled{c}$, cuya solución es $x = 5 + (8/3)\textcircled{c}$. Pero, no podemos tomar del eje X el número $5 + (8/3)\textcircled{c}$, puesto que $(8/3)\textcircled{c}$ ocupa el mismo lugar que $2\textcircled{c}$. Esto nos dice que el número $4 + \textcircled{c}$ no tiene contraimagen en la función $\sqrt{3x+1}$. Si probamos con $4 + 2\textcircled{c}$, encontraremos que $x = 5 + (16/3)\textcircled{c}$. Como $(16/3)\textcircled{c}$ ocupa el lugar de $5\textcircled{c}$, entonces $4 + 2\textcircled{c}$ tampoco tiene

contraimagen en $\sqrt{3x+1}$. Al probar con el número $4 + 3\omega$, encontramos que $x = 5 + 8\omega$ y, como este número si lo podemos tomar del eje X, hacemos el cambio de x por $5 + 8\omega$ en la expresión dada y se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{16+24\omega}-4}{5+8\omega-5} = \frac{4+3\omega-4}{8\omega} = \frac{3}{8}.$$

Nota: No a todas las funciones dentro del radical será sencillo hallarle la sustitución adecuada. En esos casos es mejor aplicar L'hospital. Por otra parte, el hecho de no tomar el siguiente de 0 en el ejercicio 11 es debido a que con dicho número sigue existiendo la indeterminación, pues, la raíz de $9 + \omega$ es el mismo 3 y quedaría la indeterminación $0 / \omega$. Como el número que quita la indeterminación es el siguiente de 3, se usó dicho número. De la misma manera se hizo en el ejercicio 12 donde el número que quita la indeterminación y que, además, tiene contraimagen por la función $\sqrt{3x+1}$ en el eje X, es $4 + 3\omega$. Sin embargo, el límite en el ejercicio 12 lo podemos encontrar con la sustitución de x por uno cualquiera de los valores encontrado, para $4 + \omega$ o para $4 + 2\omega$ (por el teorema 2.3). No queriendo decir con esto que $4 + \omega$ y $4 + 2\omega$ tienen contraimagen por la función $\sqrt{3x+1}$.

Observación Importante: Si queremos pasar de 0 a un número $\frac{a}{b}$, se suma k veces la razón ω al cero, donde $k = \frac{a}{b} 2^\omega$. Así se tendrá: $0 + \frac{a}{b} 2^\omega \omega = \frac{a}{b}$. Si a y b son enteros finitos, el número $\frac{a}{b} 2^\omega$ es un entero infinito o transfinito, porque 2^ω siempre es divisible por cualquier entero finito. Por otra parte, todo número de la forma $n\omega$ ($n \in \mathbb{N}^*$) es lo que se conoce como un infinitésimo ε ó δ .

CAPÍTULO III

3. EL NÚMERO \odot EN LA DERIVACIÓN

3.1. La Derivada de una Función en una Variable Real

La derivada de una función real f , si existe, es otra función real que se obtiene de hallar la razón entre el incremento que toma la función f , cuando x toma su menor incremento, y dicho menor incremento. Ahora bien, el menor incremento que puede tomar x es \odot . En consecuencia, el menor incremento que toma f es: $f(x + \odot) - f(x)$. A este incremento es costumbre denotarlo por df o dy . Si al número \odot en el eje x lo denotamos por dx , se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + \odot) - f(x)}{\odot}. \quad (1)$$

Y al cociente anterior, si existe, se le llama derivada de f en el punto x .

Si en (1) hacemos

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \quad (2)$$

Entonces, por (1) y (2) se tiene que el incremento de f , df , es

$$df = dy = f(x + \odot) - f(x) = f'(x)\odot. \quad (3)$$

De (3) se tiene que

$$f(x + \odot) = f(x) + f'(x)\odot. \quad (4)$$

Por (4) vemos que para obtener la imagen del siguiente de x , $f(x + \odot)$, debemos sumarle $f'(x)$ veces la razón de continuidad a $f(x)$. Lo que nos indica que $f(x + \odot)$ y $f(x)$, son consecutivos sólo si $|f'(x)| = 1$. En lo adelante, esta igualdad (4) será una de las herramientas más poderosas en la demostración de los teoremas que involucran

derivadas.

3.1.1. La Derivada de $f(x)$ a Ambos Lados de x

La derivada, si existe, de f en un punto dado de su dominio, que no sean los extremos, se calcula tanto con el real posterior como con el anterior a x . Para demostrar esto, veamos que x está entre $x - \odot$ y $x + \odot$, cuyas imágenes son $f(x - \odot)$ y $f(x + \odot)$. En consecuencia, para el intervalo $[x - \odot, x + \odot]$ sólo existen tres imágenes que son $f(x - \odot)$, $f(x)$ y $f(x + \odot)$. Al calcular la semisuma de $f(x - \odot)$ y $f(x + \odot)$ se tiene

$$f(x) = \frac{f(x+\odot)+f(x-\odot)}{2}. \quad (1)$$

De (1) se obtiene

$$f(x) - f(x - \odot) = f(x + \odot) - f(x). \quad (2)$$

Multiplicando ambos lados de (2) por $1/\odot$, se tiene

$$\frac{f(x) - f(x - \odot)}{\odot} = \frac{f(x + \odot) - f(x)}{\odot} = f'(x). \quad (3)$$

Y de (3)

$$f(x) = f(x - \odot) + f'(x)\odot. \quad (4)$$

Las igualdades (4) de este apartado y del anterior demuestran el siguiente teorema.

3.1.2. Teorema 3.1 (de la derivabilidad de f)

Una función f es derivable en un punto x de su dominio, y que no sea uno de los extremos, si, y sólo si, existe en \mathbb{R} el cociente

$$\frac{f(x) - f(x - \odot)}{\odot} = \frac{f(x + \odot) - f(x)}{\odot}. \quad (I)$$

El teorema anterior nos permite demostrar otro importante teorema el cual se

enuncia de la siguiente manera

3.1.3. Teorema 3.2 (derivada en un entorno de x)

Si f es derivable en un punto $x \in (a, b)$, entonces, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f(x \pm n \odot) = f(x) \pm f'(x)n \odot.$$

Demostración

Analicemos las siguientes igualdades

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x - \odot) = \frac{f(x-\odot)-f(x-2\odot)}{\odot} \dots \dots (a), \text{ por la izquierda de } x - \odot \\ f'(x - \odot) = \frac{f(x)-f(x-\odot)}{\odot} \dots \dots \dots (b), \text{ por la derecha de } x - \odot \end{array} \right\}. \quad \text{(I)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \frac{f(x)-f(x-\odot)}{\odot} \dots \dots \dots (a), \text{ por la izquierda de } x \\ f'(x) = \frac{f(x+\odot)-f(x)}{\odot} \dots \dots \dots (b), \text{ por la derecha de } x \end{array} \right\}. \quad \text{(II)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x + \odot) = \frac{f(x+\odot)-f(x)}{\odot} \dots \dots \dots (a), \text{ por la izquierda de } x + \odot \\ f'(x + \odot) = \frac{f(x+2\odot)-f(x+\odot)}{\odot} \dots \dots (b), \text{ por la derecha de } x + \odot \end{array} \right\}. \quad \text{(III)}$$

.

.

.

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x + n \odot) = \frac{f(x+n\odot)-f(x+(n-1)\odot)}{\odot} \dots \dots (a), \text{ por la izquierda de } x + n \odot \\ f'(x + n \odot) = \frac{f(x+(n+1)\odot)-f(x+n\odot)}{\odot} \dots \dots (b), \text{ por la derecha de } x + n \odot \end{array} \right\}. \quad \text{(IV)}$$

De b de (I) y a de (II), de b de (II) y a de (III), etc., se tiene la siguiente secuencia de ceros residuales (o infinitésimos) equivalentes

$$f'(x - \odot)\odot = f'(x)\odot = f'(x + \odot)\odot = f'(x + 2\odot)\odot = \dots = f'(x + n\odot)\odot = \dots \quad (1)$$

Observación: la secuencia anterior no significa que $f'(x) = f'(x + n\odot)$, pues debemos recordar que en 2.1.3 vimos que $(4/3)\odot = \odot$ y, sin embargo, $(4/3) \neq 1$.

De (4) de 3.1 y (4) de 3.1.1 se tiene

$$f(x + \odot) = f(x) + f'(x)\odot. \quad (2)$$

$$f(x + 2\odot) = f(x + \odot) + f'(x + \odot)\odot. \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3) y aplicando (1) se tiene

$$f(x + 2\odot) = f(x) + f'(x)2\odot. \quad (4)$$

Por otra parte

$$f(x + 3\odot) = f(x + 2\odot) + f'(x + 2\odot)\odot. \quad (5)$$

Sustituyendo (4) en (5) y aplicando (1) se obtiene

$$f(x + 3\odot) = f(x) + f'(x)3\odot. \quad (6)$$

Continuando este proceso se obtiene

$$f(x + n\odot) = f(x) + f'(x)n\odot. \quad (7)$$

Procediendo análogamente con la igualdad $f(x - \odot) = f(x) - f'(x - \odot)\odot$ y siempre aplicando (1) se obtiene

$$f(x - n\odot) = f(x) - f'(x)n\odot. \quad (8)$$

Y por (7) y (8)

$$f(x \pm n\odot) = f(x) \pm f'(x)n\odot. \quad \blacklozenge$$

El teorema anterior nos permite escribir

$$f'(x) = \frac{f(x+n\odot) - f(x)}{n\odot} = \frac{f(x) - f(x-n\odot)}{n\odot}.$$

De manera que, para aquellas funciones donde se tenga que $|f'(x)| < 1$, se tendrá que $f(x + \odot) = f(x)$. Sin embargo, siempre existirá un número entero k , finito, infinito o transfinito, para el cual se cumple que $f(x + k\odot) \neq f(x)$.

Un ejemplo de lo anterior es la función

$$f(x) = x^2 - x.$$

Para la cual $f(1/4) = -3/4$; $f(1/4 + \odot) = -3/4$; $f(1/4 + 2\odot) = -3/4 - \odot$ y se cumple que

$$f(1/4 + 2\odot) = f(1/4) + f'(1/4).2\odot \text{ (compruébelo).}$$

Ahora, como una aplicación inmediata del teorema anterior se tiene el importante siguiente teorema

3.1.4. Teorema 3.3 (de la derivabilidad y la continuidad)

Si f es derivable en todo punto de (a, b) , entonces es continua en $[a, b]$.

Demostración

En efecto, al ser derivable en todo x del intervalo (a, b) , entonces existen todos los valores $f(x - n\odot)$, $f(x)$ y $f(x + n\odot)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), lo que nos dice que f es continua en $x \in [a, b]$. ♦

Como los reales anterior a a ($a - \odot$) y posterior a b ($b + \odot$) no están en el intervalo dominio, entonces no se exige que f sea derivable por ambos lados en a y b .

3.2. Algunas Fórmulas para Derivar

Veamos, a continuación, la sencillez con la cual se deducen las fórmulas para derivar, utilizando la razón de continuidad. Dedución que se hará apoyado en las propiedades del número \odot , en la fórmula $f(x + \odot) = f(x) + f'(x)\odot$ (para una f

derivable), en la equivalencia $f(x + \odot) \odot = f(x) \odot$ y sin recurrir a la teoría de límites como en el caso tradicional.

DERIVADA DE UNA SUMA

Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo (a, b) . Entonces, $(f + g)(x)$ también es derivable en (a, b) y su derivada viene dada por

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Demostración

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \frac{[f+g](x+\odot) - [f+g](x)}{\odot} \\ &= \frac{f(x+\odot) + g(x+\odot) - f(x) - g(x)}{\odot} \\ &= \frac{f(x+\odot) - f(x)}{\odot} + \frac{g(x+\odot) - g(x)}{\odot} \\ &= f'(x) + g'(x). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

DERIVADA DE UN PRODUCTO

Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo (a, b) . Entonces, el producto $f \cdot g(x)$ es también derivable en (a, b) y su derivada viene dada por

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

Demostración

$$(f \cdot g)'(x) = \frac{f(x+\odot) \cdot g(x+\odot) - f(x) \cdot g(x)}{\odot}. \quad (1)$$

Sustituyendo $f(x + \odot)$ por $[f(x) + f'(x)\odot]$ y a $g(x + \odot)$ por $[g(x) + g'(x)\odot]$ en (1) (f y g son derivables en (a, b)), se obtiene al operar y simplificar (recordar que $(\odot)^n = 0$ si $n \geq 2$).

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x). \quad \blacklozenge$$

DERIVADA DE UN RECÍPROCO

Sea f una función derivable en todo punto de su dominio y tal que $f(x) \neq 0$. Entonces, el recíproco $\frac{1}{f(x)}$ es derivable y su derivada viene dada por

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Demostración

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{1}{\mathcal{O}} \left[\frac{1}{f(x+\mathcal{O})} - \frac{1}{f(x)} \right] = -\frac{f(x+\mathcal{O}) - f(x)}{\mathcal{O}f(x+\mathcal{O})f(x)}. \quad (1)$$

Haciendo en (1) $f(x + \mathcal{O}) = f(x) + f'(x)\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}f(x + \mathcal{O}) = \mathcal{O}f(x)$ (infinitésimos equivalentes) se obtiene, al simplificar

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}. \quad \blacklozenge$$

DERIVADA DE UN COCIENTE

Sean f y g funciones derivables en un dominio común y tal que $g(x) \neq 0$. Entonces el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ es derivable en dicho dominio y su derivada es

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demostración

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{1}{\mathcal{O}} \left[\frac{f(x+\mathcal{O})}{g(x+\mathcal{O})} - \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f(x+\mathcal{O})g(x) - f(x)g(x+\mathcal{O})}{\mathcal{O}g(x+\mathcal{O})g(x)}. \quad (1)$$

Haciendo en (1) la misma sustitución de los casos anteriores, se obtiene, después de operar y simplificar, que

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \quad \blacklozenge$$

DERIVADA DE UNA COMPUESTA (REGLA DE LA CADENA)

Sea la función compuesta $f \circ g(x)$. Si g es derivable en todo punto c de (a, b) y f lo es en todo $g(c)$ del rango de g , entonces, la compuesta $f(g(x))$ es derivable en todo c de (a, b) y su derivada es

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Demostración

Como g es derivable en (a, b) , entonces, para cada punto x de dicho intervalo

$$g(x + \odot) = g(x) + g'(x)\odot. \quad (1)$$

Ahora en (1) $g(x)$ es la variable y $g'(x)\odot$ es el incremento. Haciendo

$$g(x) = u \text{ y } g'(x)\odot = du. \quad (2)$$

Se tiene por (1), (2) y ser f derivable en todo el rango de g

$$f(g(x + \odot)) = f(u + du) = f(u) + f'(u)du. \quad (3)$$

Por (3) y (2)

$$f(g(x + \odot)) = f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)\odot. \quad (4)$$

De (4) se obtiene

$$\frac{f(g(x+\odot))-f(g(x))}{\odot} = f'(g(x))g'(x). \quad (5)$$

Y por (5)

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x). \quad \blacklozenge$$

3.3. Derivada de Algunas Funciones Elementales

Vistas las principales fórmulas para derivar, veamos la derivada de algunas funciones elementales y lo sencillo de su deducción al usar las propiedades del número \odot .

DERIVADA DE UNA CONSTANTE

Si $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$), para todo x del dominio de f , su derivada es cero.

Demostración:

Como $f(x + \odot) = f(x) = c$, entonces

$$f'(x) = \frac{f(x+\odot) - f(x)}{\odot} = \frac{c-c}{\odot} = \frac{c}{\odot} - \frac{c}{\odot} = 0. \quad \blacklozenge$$

En este momento, y con respecto a la demostración anterior, conviene hacer la siguiente **observación**: aunque $\frac{0}{n\odot}$ es una indeterminación, la derivada anterior (de una constante) vale también si $c = 0$, pues, si $f(x) = f(x \pm n\odot) = 0$, como $0 = \frac{1}{\rho 2^\omega}$ ($\rho > 1$), entonces

$$f'(x) = \frac{f(x+\odot) - f(x)}{\odot} = \frac{0-0}{\odot} = \frac{\frac{1}{\rho 2^\omega}}{\frac{1}{2^\omega}} - \frac{\frac{1}{\rho 2^\omega}}{\frac{1}{2^\omega}} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} = 0.$$

DERIVADA DE LA IDENTIDAD

Si $f(x) = x$ para todo x del dominio de f , su derivada es 1.

Demostración

Se tiene que

$$f(x + \odot) = x + \odot \text{ y } f(x) = x. \text{ Luego}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+\odot) - f(x)}{\odot} = \frac{x+\odot - x}{\odot} = 1. \quad \blacklozenge$$

DERIVADA DE UNA POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL

Si $f(x) = x^n$ siendo n un natural, su derivada es

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Demostración:

Como $(x + \odot)^n = x^n + nx^{n-1}\odot$. (Porque $(\odot)^n = 0$, si $n \geq 2$), entonces

$$f'(x) = \frac{f(x+\odot) - f(x)}{\odot} = \frac{x^n + nx^{n-1}\odot - x^n}{\odot} = nx^{n-1}. \quad \blacklozenge$$

DERIVADA DEL LOGARITMO DE BASE A

Si $f(x) = \log_A x$ para todo x real positivo, su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_A e.$$

Demostración

$$f'(x) = \frac{f(x+\odot) - f(x)}{\odot} = \frac{1}{\odot} [\log_A(x + \odot) - \log_A x]. \quad (1)$$

Por (1) se tiene al aplicar logaritmo de una diferencia

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\odot} \log_A \left(1 + \frac{\odot}{x}\right) \\ &= \log_A \left(1 + \frac{\odot}{x}\right)^{1/\odot} \\ &= \log_A e^{1/x} \text{ (por 2.1.7, Cap. II)} \\ &= \frac{1}{x} \log_A e. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Si $f(x) = e^x$, entonces su derivada es

$$f'(x) = e^x.$$

Demostración

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+\odot) - f(x)}{\odot} = \frac{e^{x+\odot} - e^x}{\odot} \\ &= \frac{e^x(e^\odot - 1)}{\odot} \\ &= \frac{e^x(1+\odot-1)}{\odot} \\ &= e^x. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN Sen(x)

De la fórmula

$$\text{Sen}(x + y) = \text{Sen}(x)\text{Cos}(y) + \text{Sen}(y)\text{Cos}(x)$$

Se obtiene

$$\text{Sen}(x + \odot) = \text{Sen}(x)\text{Cos}(\odot) + \text{Sen}(\odot)\text{Cos}(x) = \text{Sen}(x) + \text{Cos}(x)\odot. \quad (1)$$

Por (1)

$$\text{Sen}(x + \odot) - \text{Sen}(x) = \text{Cos}(x)\odot. \quad (2)$$

Y Por (2) se tiene que

$$[\text{Sin}(x)]' = \text{Cos}(x). \quad \blacklozenge$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función biyectiva y derivable en (a, b) . Entonces, la función inversa es también derivable si $f'(x) \neq 0$ y su derivada viene dada por la igualdad

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Note el lector que no podemos aplicar la derivada de una compuesta ($f \circ g$). Pues, en ésta se supone que las dos funciones son derivables y, acá, sólo sabemos que f es derivable pero nada sabemos sobre f^{-1} . Sin embargo, podemos resolver esto aplicando directamente la definición de derivada.

Demostración

Supongamos que $f'(x) \neq 0$. Como f es derivable, entonces se cumple que

$$f(x + n\odot) = f(x) + f'(x)n\odot. \quad (1)$$

Por otra parte, f^{-1} es derivable si existe el cociente $\frac{f^{-1}(f(x) + f'(x)n\odot) - f^{-1}(f(x))}{f'(x)n\odot}$, ya que $f'(x)n\odot$ es el incremento para cada $f(x)$. Por lo tanto, hallando la imagen inversa por f^{-1} a cada miembro de (1) se tiene, por ser f inyectiva

$$x + n\odot = f^{-1}(f(x) + f'(x)n\odot). \quad (2)$$

Como

$$x = f^{-1}(f(x)). \quad (3)$$

Entonces, por (2) y (3) se tiene

$$n\odot = f^{-1}(f(x) + f'(x)n\odot) - f^{-1}(f(x)). \quad (4)$$

Dividiendo a ambos miembros de (4) por $f'(x)n\odot \neq 0$, se tiene

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{f^{-1}(f(x) + f'(x)n\odot) - f^{-1}(f(x))}{f'(x)n\odot}. \quad (5)$$

Como el primer miembro de (5) existe y el segundo miembro es $(f^{-1})'(f(x))$, entonces

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

◆

Nótese que si x implica $f(x)$, entonces, $f^{-1}(x)$ implica x . En consecuencia, la igualdad anterior también se puede escribir

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Observación: al demostrar que $(f^{-1})'$ existe en todo el rango de f , entonces f^{-1} es derivable en el rango de f , R_f . Al ser derivable en R_f , es continua en R_f .

3.4. La Recta Tangente en un Punto Cualquiera de f

Finalizaremos este capítulo deduciendo la ecuación de la recta tangente a una curva $f(x)$ en un punto cualquiera del dominio de f .

3.4.1. Teorema 3.4 (de la ecuación de la tangente)

Sea f una función derivable en (a, b) . La ecuación de la recta tangente a f en un punto $k \in (a, b)$ viene dada por

$$T(x) = f'(k)(x - k) + f(k).$$

Demostración

Sabemos que la recta que pasa por dos puntos cualesquiera, x , y , de f tiene como pendiente $m = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Pero, esta recta pasa por dos puntos de f y queremos que pase por un punto único de dicha gráfica. En consecuencia, los puntos x y y deben estar separados por la menor distancia la cual es \odot . Cuando $y - x = \odot$, entonces $y = x + \odot$. Por lo tanto, la pendiente m se convierte en

$$m = \frac{f(x + \odot) - f(x)}{\odot} = f'(x) \quad (1)$$

Como la ecuación de una recta que pasa por $x = k$ y $y = b$ es

$$g(x) = m(x - k) + b. \quad (2)$$

Entonces, por (1), (2) y cambiando $g(x)$ por $T(x)$, se tiene que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(k, f(k))$, $k \in (a, b)$ es

$$T(x) = f'(k)(x - k) + f(k). \quad \blacklozenge$$

CAPÍTULO IV

4. TEOREMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN UNA VARIABLE

4.1. Los Puntos Críticos. Máximos y Mínimos

En esta primera sección del capítulo veremos cómo estudiar los puntos críticos, es decir, aquellos puntos de mínimo o de máximo (local, o relativo al intervalo) o bien de inflexión, mediante la derivada de una función. Todo intervalo (a, b) se supone en \mathbb{R} .

4.1.1. Teorema 4.1 (de los puntos críticos)

Sea f una función cualquiera derivable en (a, b) tal que f posee un punto crítico (máximo o mínimo) en $c \in (a, b)$, entonces, se cumple que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Demostración

Sea c un punto de máximo o de mínimo y supongamos que $f'(c)$ existe y es

$$f'(c) \neq 0. \quad (1)$$

Por (1) se debe cumplir

$$\text{i) } f'(c) < 0. \quad (2)$$

$$\text{ii) } f'(c) > 0. \quad (3)$$

Si se da i), por definición de derivada en cualquier punto x (en este caso $x = c$), se tiene

$$\frac{f(c+n\odot) - f(c)}{n\odot} < 0 \text{ (a) y } \frac{f(c) - f(c-n\odot)}{n\odot} < 0 \text{ (b)}. \quad (4)$$

Por (a) y (b) de (4)

$$f(c + n\odot) < f(c) < f(c - n\odot). \quad (5)$$

Y por (5), $f(c)$ no es ni máximo ni mínimo.

De igual manera, si se cumple ii), las desigualdades en (4) se invierten y queda

$$f(c - n\odot) < f(c) < f(c + n\odot). \quad (6)$$

Y por (6), $f(c)$ no es ni máximo ni mínimo. Como, al suponer $f'(c) \neq 0$ resulta una contradicción, entonces

$$f'(c) = 0. \quad \blacklozenge A$$

Ahora, supongamos que $f'(c)$ no existe. Entonces, $f'(c)$ no existe por una de las dos razones siguientes

1) Se hace infinita positiva o negativamente. Es decir

$$f'(c) = \pm \infty. \quad (I)$$

2) Las razones incrementales a ambos lados de c son distintas, es decir

$$\frac{f(c) - f(c - \odot)}{\odot} \neq \frac{f(c + \odot) - f(c)}{\odot}. \quad (II)$$

Si sucede (I), se tendrá que

$$f(c + \odot) - f(c) = f(c) - f(c + \odot) = \pm \infty \odot = \pm \frac{\infty}{\infty}. \quad (A)$$

Como en (A) la indeterminación puede valer 0, entonces $f(c)$ puede ser un valor máximo o mínimo.

Si sucede (II), entonces

$$\frac{f(c) - f(c - n\odot)}{n\odot} = k_1 \text{ por la izquierda de } c$$

$$\frac{f(c + n\odot) - f(c)}{n\odot} = k_2 \text{ por la derecha de } c; \text{ con } k_1 \neq k_2.$$

Si ambos números son del mismo signo, $f(x)$ es creciente o decreciente pero con discontinuidad de salto en c (recordar la definición de continuidad). Si dichos números son de signos contrarios, $k_1 < 0$ y $k_2 > 0$, por ejemplo, se tendrá:

$$f(c) - f(c - n \odot) = -n \odot k_1 < 0. \quad (7)$$

Y también

$$f(c + n \odot) - f(c) = n \odot k_2 > 0. \quad (8)$$

Por (7) y (8) se tiene

$$f(c) < f(c \pm n \odot). \quad (9)$$

Y por (9)

$$f(c) \text{ es mínimo.} \quad \blacklozenge B$$

De igual manera se prueba que $f(c)$ es un máximo si $k_1 > 0$ y $k_2 < 0$. Esto termina la demostración del teorema.

4.1.2. Teorema 4.2 (de Rolle)

Sea f una función cualquiera y derivable en (a, b) . Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ y tal que $f'(c) = 0$.

Demostración (S. Salas y E. Hill)

Como f es derivable en (a, b) , entonces es continua en $[a, b]$ (teorema 3.3). Si f es constante, entonces $f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$ y, por tanto, $f'(x) = 0$; por lo que el teorema es cierto. Si f no es constante en $[a, b]$, entonces, por el teorema 2.1, f alcanza su máximo o su mínimo en algún $c \in (a, b)$, el cual debe ser positivo o negativo (f no es constante). Por el teorema 4.1, $f'(c) = 0$. \blacklozenge

4.1.3. Teorema 4.3 (del valor medio)

Si f es una función derivable en (a, b) , entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración (S. Salas y E. Hill)

Como f es derivable en (a, b) , es continua en $[a, b]$. En consecuencia, también es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) la función g definida por

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right] - f(a). \quad (1)$$

Por (1)

$$g'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]. \quad (2)$$

También por (1)

$$g(a) = g(b) = 0. \quad (3)$$

Por (3) y teorema 4.3 (de Rolle), $\exists c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c) = 0. \quad (4)$$

Por (4) y (2)

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \blacklozenge$$

4.1.4. Teorema 4.4 (crecimiento y decrecimiento de f)

Sea f una función cualquiera derivable en (a, b) . Entonces, si

i) $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, f es **decreciente** en $[a, b]$.

ii) $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, f es **creciente** en $[a, b]$.

iii) $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, f es **constante** en $[a, b]$.

Note el lector que se incluyen los extremos a y b en el crecimiento

(decrecimiento). Pues, si f es derivable en $a + \odot$ y en $b - \odot$, es continua en a y en b .

Demostración

Sea $x \in (a, b)$. Entonces

$$f'(x) = \frac{f(x+n\odot) - f(x)}{n\odot} = \frac{f(x) - f(x-n\odot)}{n\odot}. \quad (1)$$

Supongamos que $f'(x) < 0$ (en ii se procede en forma análoga), entonces, por (1)

$$f(x + n\odot) < f(x) \quad \text{y} \quad f(x) < f(x - n\odot). \quad (2)$$

Por (2)

$$f(x + n\odot) < f(x) < f(x - n\odot). \quad (3)$$

Por (3) y definición de decrecimiento

$$f \text{ es decreciente en } [a, b]. \quad \blacklozenge A$$

Sea ahora $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$. Entonces, $\forall x, y \in (a, b)$, con $x \neq y$, se tiene, por el teorema 4.3, que existe un $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \quad (4)$$

Como $f'(c) = 0$, se tiene por (4)

$$f(y) = f(x). \quad (5)$$

Por (5) y ser x, y dos números cualesquiera de (a, b)

$$f \text{ es constante en } [a, b]. \quad \blacklozenge B$$

4.1.5. Teorema 4.5 (criterio de f' para máximos y mínimos)

Sea f una función cualquiera tal que $f(c)$ es un valor crítico de f . Entonces, para $\delta > 0$ se tiene

i) Si $f'(x) < 0 \forall x \in (c - \delta, c)$ y $f'(x) > 0 \forall x \in (c, c + \delta)$, $f(c)$ es un mínimo.

ii) Si $f'(x) > 0 \forall x \in (c - \delta, c)$ y $f'(x) < 0 \forall x \in (c, c + \delta)$, $f(c)$ es un máximo.

Demostración

Supongamos el caso i) (el segundo es análogo). Entonces, por la definición de derivada, se cumple que

$$f(x + n\odot) < f(x) < f(x - n\odot) \text{ por la izquierda de } c. \quad (1)$$

$$f(x - n\odot) < f(x) < f(x + n\odot) \text{ por la derecha de } c. \quad (2)$$

Por (1) y (2) f decrece hasta c y luego crece a partir de c . Por el teorema 2.1

$f(c)$ es un mínimo. ♦

4.2. Derivadas de Orden Superior a Uno

Puede suceder que al derivar a una función $f(x)$ el resultado sigue siendo una función $g(x)$ también derivable. Entonces, la derivada de $g(x) = f'(x)$ será $g'(x) = (f'(x))'$. Esta derivada $(f'(x))'$ se denota por $f''(x)$ y se le llama derivada de segundo orden o segunda derivada. Esto nos indica que f puede ser derivable una, dos, tres, ..., n veces. Si la derivada $f^{(n)}(x)$ existe y es continua, se dice que f es de clase C^n .

4.2.1. Teorema 4.6 (crecimiento y decrecimiento de f')

Sea f una función de clase C^2 . Entonces se cumple que

i) Si $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, f' es decreciente en (a, b) .

ii) Si $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, f' es creciente en (a, b) .

iii) Si $f''(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, f' es constante en (a, b) .

Demostración

En efecto, Basta aplicar el teorema 4.4 a f' en vez de a f .

4.2.2. Teorema 4.7 (criterio de f'' para máximos y mínimos)

Sea f una función cualquiera tal que $f'(c)$ es un valor crítico y existe la segunda derivada de f en c . Entonces, se cumple que

i) Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un máximo.

ii) Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un mínimo.

Demostración

Sea $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$. Entonces, f' es decreciente en c y se tiene

$$f'(c + n\odot) < f'(c) < f'(c - n\odot). \quad (1)$$

Como $f'(c) = 0$, se tiene por (1)

$$f'(c - n\odot) = \frac{f(c) - f(c - n\odot)}{n\odot} > 0. \quad (2)$$

$$f'(c + n\odot) = \frac{f(c + n\odot) - f(c)}{n\odot} < 0. \quad (3)$$

Por (2) y (3)

$$f(c) > f(c \pm n\odot). \quad (4)$$

Y por (4)

$$f(c) \text{ es un máximo.} \quad \blacklozenge$$

De igual manera se da la prueba para el mínimo.

4.2.3. Estudio de la Concavidad de Funciones

Si una función es de clase C^2 , podemos estudiarle su concavidad con base en la primera y segunda derivada; ya que la gráfica de una función de clase C^2 puede ser: primero cóncava y luego convexa (o viceversa), sólo cóncava o sólo convexa.

Algunos autores, a un arco cóncavo lo llaman cóncavo hacia arriba y, a uno

convexo, cóncavo hacia abajo. Para otros, el arco cóncavo es el cóncavo hacia abajo y el convexo, es el cóncavo hacia arriba (cuestión de gustos). Acá seguiremos las reglas del DRAE. Una concavidad será como un hueco o depresión. Mientras que una convexidad será como una prominencia. Sin embargo, seguiremos diciendo *concavidad hacia arriba* (concavidad) y *concavidad hacia abajo* (convexidad).

Concavidad Hacia Arriba: Una función tiene concavidad hacia arriba en un intervalo I , si la tangente, T , a la curva f en cualquier punto $x \in I$ deja a f por encima de T . Esto nos indica que $\forall k \in I, f(k) \geq T(k)$ (figura 4.1). La igualdad se da sólo cuando $k \in f \cap T$.

Concavidad Hacia Abajo: Una función tiene concavidad hacia abajo en un intervalo I , si la tangente, T , a la curva f en cualquier punto $x \in I$ deja a f por debajo de T . Esto nos indica que $\forall k \in I$, entonces $f(k) \leq T(k)$ (figura 4.2). $f(k) = T(k)$ sólo cuando $k \in f \cap T$.

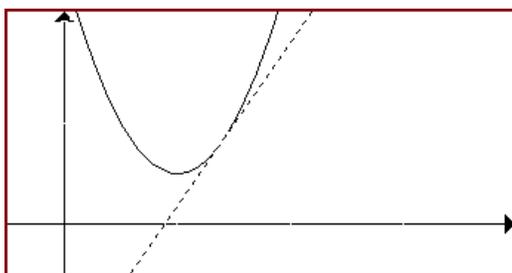


Fig. 4.1

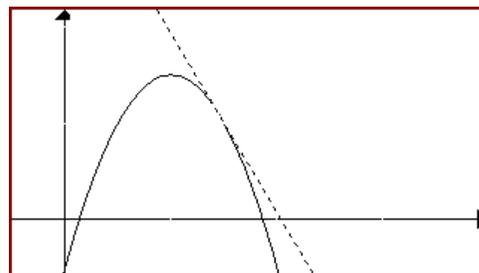


Fig. 4.2

4.2.4. Teorema 4.8 (de la concavidad en $I \subset \mathbb{R}$)

Sea f una función de clase C^2 en (a, b) . Sean x, y ($x < y$) dos puntos cualesquiera de un intervalo $I \subset (a, b)$. Entonces, f es cóncava hacia arriba en I si, y sólo si

$$i) f'(x)(y - x) < f(y) - f(x).$$

Y es cóncava hacia abajo si, y sólo si

$$\text{ii) } f'(x)(y - x) > f(y) - f(x).$$

Demostración

Supongamos que se cumple i), la otra alternativa se demuestra igual. Entonces

$$f(y) > f'(x)(y - x) + f(x). \quad (1)$$

Como el segundo miembro de (1) es la ecuación de una recta $T(y)$ que pasa por el punto $(x, f(x))$ del gráfico de f , entonces, cambiando y por k en (1) se tiene

$$f(k) > T(k) \quad \forall k \in I. \quad (2)$$

Por (2), ser T tangente a f en $x \in I$ y definición

$$f \text{ es cóncava hacia arriba en } I. \quad \blacklozenge A$$

Recíprocamente, sea f cóncava hacia arriba en I . Entonces, por definición

$$f(k) \geq T(k) \quad \forall k \in I. \quad (3)$$

Cambiando k por $y \in I$ y sabiendo que T es una tangente a f en un punto cualquiera $x \in I$ (con $x \neq y$ no se da la igualdad), se tiene por (3)

$$f(y) > T(y) = f'(x)(y - x) + f(x). \quad (4)$$

Y de (4) se tiene que

$$f'(x)(y - x) < f(y) - f(x). \quad \blacklozenge B$$

4.2.5. Teorema 4.9 (concavidad y crecimiento o decrecimiento de f')

Sea f una función de clase C^2 en (a, b) . Entonces

i) En el intervalo I de concavidad hacia arriba de f , f' es creciente.

ii) En el intervalo I de concavidad hacia abajo de f , f' es decreciente.

Demostración

Demostremos i) (el otro caso se demuestra de forma análoga). Sea f cóncava hacia arriba en $I \subset (a, b)$. Entonces

$$f'(x)(y-x) < f(y) - f(x) \quad \forall x, y \in I. \quad (1)$$

Despejando $f'(x)$ en (1) y aplicando el teorema del valor medio, se tiene que

$$f'(x) < \frac{f(y) - f(x)}{y-x} = f'(\lambda), \quad \lambda \in (x, y). \quad (2)$$

Por (2) se tiene

$$x < \lambda \quad y \quad f'(x) < f'(\lambda). \quad (3)$$

Por (3) y ser x, λ puntos cualesquiera de I

$$f' \text{ es creciente en } I. \quad \blacklozenge$$

4.2.6. Definición de Punto de Inflexión

Sea f una función de clase C^2 en (a, b) . Se dice que un punto de f es de inflexión si separa un arco de concavidad hacia arriba de otro cuya concavidad es hacia abajo.

Como f' es creciente en el intervalo de concavidad hacia arriba y decreciente en el intervalo de concavidad hacia abajo, entonces, en un punto de inflexión f'' tiene que ser nula o no existir. Esto lo demuestra el siguiente teorema.

4.2.7. Teorema 4.10 (de f'' y el punto de inflexión)

Sea f una función de clase C^2 en (a, b) . Si c es un punto de f que separa un arco cóncavo hacia arriba de otro cóncavo hacia abajo, entonces $f''(c) = 0$ o no existe.

Demostración

Para la demostración de este teorema, aplíquese el **teorema 4.1** (de los valores críticos) no con f y f' sino con f' y f'' . \blacklozenge

Como consecuencia inmediata de los teoremas 4.9 y 4.10 se tiene el siguiente corolario.

4.2.8. Teorema 4.11 (del criterio de f'' para concavidad)

Sea f una función de clase C^2 en (a, b) . Si $f(c)$ es un punto de inflexión, entonces, en un intervalo I , por la izquierda o por la derecha de c , se cumple

i) $f''(x) < 0, \forall x \in I, f$ es cóncava hacia abajo en I .

ii) $f''(x) > 0, \forall x \in I, f$ es cóncava hacia arriba en I .

Demostración

En efecto, si se cumple i), f' es decreciente en I y, por el teorema 4.9, f es cóncava hacia abajo en I . De igual manera se demuestra ii). ♦

4.3. Las Fórmulas de L'hospital

En el capítulo II vimos el teorema 2.3 en el cual se demostró que si f es derivable en (a, b) , entonces, $\forall c \in (a, b)$, se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x + n\odot) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Por otra parte, en el capítulo III vimos que si f es derivable en (a, b) , entonces se cumple que

$$f(x + n\odot) = f(x) + f'(x)n\odot \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Acá veremos que las fórmulas de L'hospital para las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ son una consecuencia de estas dos igualdades.

4.3.1. Teorema 4.12 (de L'hospital para 0/0)

Sean f y g dos funciones derivables en un punto c de su dominio común y tales que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$. Entonces, si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración

Por el teorema 2.3 se tiene

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x+\odot)}{g(x+\odot)}. \quad (1)$$

Como f y g son derivables en c se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x+\odot)}{g(x+\odot)} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) + f'(x)\odot}{g(x) + g'(x)\odot} \\ &= \frac{f(c) + f'(c)\odot}{g(c) + g'(c)\odot} = \frac{0 + f'(c)\odot}{0 + g'(c)\odot} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Por (1) y (2)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \blacklozenge$$

4.3.2. Teorema 4.13 (de L’hopital para ∞/∞)

Sean f y g dos funciones derivables en un punto c de su dominio común y tales que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$. Si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración:

Supongamos que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe y hagamos

$$G(x) = \frac{1}{g(x)}; \quad F(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Así tendremos

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{f(x+n\odot)-f(x)}{g(x+n\odot)-g(x)} = \frac{\frac{1}{F(x+n\odot)} - \frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{G(x+n\odot)} - \frac{1}{G(x)}} = \frac{\frac{F(x)-F(x+n\odot)}{F(x)F(x+n\odot)}}{\frac{G(x)-G(x+n\odot)}{G(x)G(x+n\odot)}} \\ &= \frac{G(x)G(x+n\odot)}{F(x)F(x+n\odot)} \cdot \frac{F(x+n\odot)-F(x)}{G(x+n\odot)-G(x)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Al aplicar límite en (1), por ser F y G derivables en c y $F(c) = G(c) = 0$, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{G(c)G(c+n\odot)}{F(c)F(c+n\odot)} \frac{F(c+n\odot)}{G(c+n\odot)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{G(x)G(x+n\odot)F(x+n\odot)}{F(x)F(x+n\odot)G(x+n\odot)}. \quad (2)$$

Pero, como $f(x+n\odot)$ y $g(x+n\odot)$ existen cerca de c y no son nulas, entonces

$$\frac{G(x)G(x+n\odot)}{F(x)F(x+n\odot)} \frac{F(x+n\odot)}{G(x+n\odot)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{[f(x+n\odot)]}{[g(x+n\odot)]} \frac{[g(x+n\odot)]}{[f(x+n\odot)]} = \frac{f(x)}{g(x)}. \quad (3)$$

En consecuencia, por (3)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{G(x)G(x+n\odot)F(x+n\odot)}{F(x)F(x+n\odot)G(x+n\odot)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}. \quad (4)$$

Por (4) y (2)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}. \quad \blacklozenge$$

4.4. Inyectividad y Sobreyectividad

La definición formal de inyectividad nos dice que “una función es inyectiva si para $x, y \in D_f$, con $x \neq y$, se tiene que $f(x) \neq f(y)$ ”. La razón de continuidad nos permite inferir que el criterio de inyectividad que se enuncia: “**Una función $f: D_f \rightarrow R_f$ es inyectiva, si para dos valores cualesquiera $x, y \in D_f$ y $f(x) = f(y)$, entonces, $x = y$** ”, no es aplicable cuando el dominio es el conjunto R o un subconjunto de éste. Sin embargo, este criterio puede seguir vigente si lo denominamos **criterio de inyectividad finita**. Es decir, cuando los valores que se tomen en cuenta no sean consecutivos o valores infinitamente cerca. Esto, porque los humanos nunca podremos ubicar al lado de un número x a otros números que estén infinitamente

cerca de éste. Veamos un sencillo ejemplo de esto.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \frac{1}{10}x$

Inyectividad finita: Si $f(x) = f(y)$, entonces $(1/10)x = (1/10)y$, entonces $x = y$. Así, f posee inyectividad finita.

Inyectividad total: $x + 9\textcircled{c} \neq x$, pero $f(x + 9\textcircled{c}) = (1/10)x + (9/10)\textcircled{c} = (1/10)x = f(x)$. Así, $x + 9\textcircled{c} \neq x$ y sin embargo, $f(x + 9\textcircled{c}) = f(x)$. Por lo tanto, f no posee inyectividad total.

En consecuencia, el criterio de inyectividad total apropiado para funciones reales es el siguiente.

4.4.1. Teorema 4.14 (criterio de inyectividad total)

Sea f una función cualquiera derivable en (a, b) . Entonces f es inyectiva total en un intervalo $I \subset (a, b)$ si, y sólo si, $|f'(x)| \geq 1$ en I .

Demostración

Supongamos que

$$|f'(x)| \geq 1 \text{ en } I. \quad (1)$$

Por (1) se tiene

$$\left| \frac{f(x + \textcircled{c}) - f(x)}{\textcircled{c}} \right| \geq 1 \text{ en } I. \quad (2)$$

Por (2) y ser \textcircled{c} positivo, se tiene

$$f(x + \textcircled{c}) - f(x) \geq \textcircled{c} > 0 \text{ ó } f(x + \textcircled{c}) - f(x) \leq -\textcircled{c} < 0. \quad (3)$$

Por (3)

$$f(x + \textcircled{c}) \neq f(x) \text{ en } I. \quad (4)$$

Y por (4) y ser $x \neq x + \odot$

f es inyectiva total en I. ♦A

Recíprocamente, sea f inyectiva total y $f'(x)$ existe en el intervalo I. Entonces, como $x \neq x + \odot$

$$f(x + \odot) \neq f(x) \text{ en I.} \quad (5)$$

De (5) se tiene

$$f(x + \odot) - f(x) \neq 0 \text{ en I.} \quad (6)$$

Por (6)

$$f'(x)\odot \neq 0 \text{ en I.} \quad (7)$$

Por (7) y propiedades de \odot (el producto $f'(x)\odot = 0$ si $|f'(x)| < 1$)

$$|f'(x)| \geq 1 \text{ en I.} \quad \text{♦B}$$

4.4.2. Continuidad Uniforme

La definición tradicional de continuidad uniforme es “una función f es uniformemente continua en un intervalo I si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) / (\forall x, y \in I) (|y - x| < \delta \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$$

Aceptando esta misma definición, se puede probar que f es uniformemente continua en un intervalo I si, y sólo si, el valor absoluto de f' es menor o igual a la unidad en dicho intervalo. Esto lo prueba el siguiente teorema.

4.4.3. Teorema 4.15 (de la continuidad uniforme)

Una función f tiene continuidad uniforme en un intervalo $I \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, $|f'(x)| \leq 1$ en I.

Demostración

Supongamos que

$$|f'(x)| \leq 1 \text{ en } I. \quad (1)$$

Hagamos

$$\varepsilon = n\odot > 0; y = x + n\odot (x, y \in I, n \in \mathbb{N}^*); \delta > n\odot. \quad (2)$$

Por (2) y (1) se tiene

$$|y - x| < \delta. \quad (3)$$

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{n\odot} \right| \leq 1. \quad (4)$$

Como $n\odot$ es positivo, entonces por (4) y (2)

$$|f(y) - f(x)| < n\odot = \varepsilon. \quad (5)$$

Por (3) y (5) se tiene

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x, y \in I, |y - x| < \delta \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon. \quad (6)$$

Y por (6)

f es uniformemente continua en I . ◆A

Recíprocamente, sea f uniformemente continua en I , entonces

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) / (\forall x, y \in I) (|y - x| < \delta \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon). \quad (7)$$

Hagamos en (7)

$$y = x + n\odot; \varepsilon = n\odot = |n\odot|. \quad (8)$$

Por (7) y (8) se tiene

$$|f(x + n\odot) - f(x)| < |n\odot|. \quad (9)$$

Al dividir ambos miembros de (9) por $|n\textcircled{c}|$, se tiene por definición de derivada

$$|f'(x)| \leq 1 \text{ en } I. \quad \blacklozenge B$$

Observación: Note el lector que, en los intervalos de continuidad uniforme, siempre existe un punto crítico. Esto es así por lo siguiente: si $|f'(x)| \leq 1$ tiene solución, entonces, $-1 \leq f'(x) \leq 1$. Como f es continua en I y f' toma el valor 0 en algún punto c , entonces $f(c)$ es un punto crítico que puede ser máximo, mínimo o, si no existe máximo o mínimo, de inflexión. De manera que, *la continuidad uniforme está, casi siempre, alrededor de un punto crítico.*

4.4.4. Sobreyectividad Finita y Total

Con lo que hemos visto sobre la inyectividad y la continuidad uniforme podemos probar que una función es sobreyectiva total en un intervalo I si, y sólo si, $|f'(x)| \leq 1$ en I . por otra parte, la *sobreyectividad finita* será la que tradicionalmente hemos entendido como tal. Es decir, una función tiene siempre sobreyectividad finita en un intervalo $[f(a), f(b)]$ si es continua en $[a, b]$. Asimismo, se entenderá que f tiene *sobreyectividad total* en un intervalo $f(I) \in \mathbb{R}$, si f es continua en I y, además, $f(x + n\textcircled{c}) = f(x) \pm \textcircled{c}$, para algún $n \in \mathbb{N}^*$ y $\forall x \in I$.

Como un sencillo ejemplo de lo anterior, estudiemos la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[2, 3]$. La imagen de $[2, 3]$ es $[8, 27]$. La sobreyectividad finita nos dice que f es *sobreyectiva* en $[2, 3]$. Pero veamos lo que dice la sobreyectividad total.

$$f(2) = 8; f(2 + \textcircled{c}) = (2 + \textcircled{c})^3 = 8 + 3 \cdot 2^2 \textcircled{c} = 8 + 12\textcircled{c}$$

Observación: el término $3 \cdot 2 \cdot (\textcircled{c})^2 = 6\textcircled{c} \cdot \textcircled{c} = 0$, porque $k\textcircled{c} < 1$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Así se tiene que $f(2) = 8$ y $f(2 + \textcircled{c}) = 8 + 12\textcircled{c}$. Por lo tanto, los números del $8 + \textcircled{c}$ al $8 + 11\textcircled{c}$ están en $[8, 27]$ pero no tienen contraimagen en $[2, 3]$. Es decir, $\sqrt[3]{8 + n\textcircled{c}}$ es 2 para n desde 1 hasta 11. Esto, porque $2 < \sqrt[3]{8 + n\textcircled{c}} < 2 + \textcircled{c}$ si n está entre 1 y 11. Por todo lo anterior, f no es *sobreyectiva total* en el rango $[8, 27]$.

4.4.5. Teorema 4.16 (de la sobreyectividad total)

Una función f es sobreyectiva total en $I \subset \mathbb{R}$ si, y sólo si, $|f'(x)| \leq 1$ en I .

Demostración

Supongamos que $|f'(x)| \leq 1$. Si se da la igualdad, $f'(x) = 1$ o $f'(x) = -1$. Si es $f'(x) = 1 > 0$, f es creciente y, por tanto, $f(x + \odot) = f(x) + f'(x)\odot = f(x) + \odot$. Si, por el contrario, es $f'(x) = -1$, f es decreciente y, por tanto, $f(x + \odot) = f(x) - \odot$. En cualquiera de los dos casos $f(x + \odot) = f(x) \pm \odot$ y, por tanto, f es *sobreyectiva total*.

Por otra parte, si $|f'(x)| < 1$, entonces $f'(x) = \pm 0, a_1 a_2 \dots$, y, en consecuencia, siempre existirá un natural n tal que $|nf'(x)| = 1 + 0, b_1 b_2 \dots$. De donde, al multiplicar por \odot , se tiene que $f'(x)n\odot = \pm\odot + 0 = \pm\odot$. Teniéndose que $f(x + n\odot) = f(x) \pm \odot$. En conclusión, f siempre será sobreyectiva total en el intervalo I donde sea $|f'(x)| \leq 1$.

Recíprocamente, si f es *sobreyectiva total* en I , entonces $f(x + n\odot) = f(x) \pm \odot$, para algún n natural. Si siempre es $n = 1$, entonces, $|f'(x)| = 1\odot < 1$. Si es $n > 1$, entonces se tiene que $f(x + n\odot) - f(x) = \pm\odot = f'(x)n\odot$. Entonces (recordar 2.1.3), $f'(x)n = \pm 1$. Pero $n > 1$, en consecuencia, $|f'(x)| < 1$ en I . En conclusión, $|f'(x)| \leq 1$ en I si f es sobreyectiva total. ♦

Del teorema anterior, ***una función tiene sobreyectividad total sólo en los intervalos de continuidad uniforme.***

El teorema de la continuidad uniforme nos prueba rápidamente que:

- Las funciones $\text{Sen}(x)$ y $\text{Cos}(x)$ son uniformemente continuas en \mathbb{R} .
- La función $\text{Senh}(x)$ es uniformemente continua sólo en el punto $x = 0$ (a su alrededor).
- La función $\text{Cosh}(x)$ es uniformemente continua en un intervalo alrededor de 0.

- d) La función $\ln(x)$ es uniformemente continua en $[1, \infty) = [1, \Omega]$.
- e) La función e^x es uniformemente continua en el intervalo $(-\infty, 0]$. Para verificar esto resuelva $|e^x| \leq 1$.

Otra inferencia que se extrae de la continuidad uniforme es que

“La longitud de un intervalo de *continuidad uniforme* es siempre mayor o igual que la longitud del intervalo imagen”. En consecuencia, “La longitud de un intervalo de *continuidad no uniforme* es siempre menor que la longitud del intervalo imagen”.

Por ejemplo, la función e^x no es uniformemente continua en $[0,4; 0,5]$, por lo tanto, la longitud del intervalo imagen, $[1,492; 1,64]$ es mayor. En efecto, la longitud del intervalo dominio es 0,1, mientras que la longitud del intervalo imagen es aproximadamente 0,14. De lo anterior, cuando sea muy difícil resolver $|f'(x)| \leq 1$, tomamos un intervalo bastante pequeño de longitud l_d , hallamos su imagen de longitud l_i y, si $l_d < l_i$, f no es uniformemente continua en dicho intervalo.

4.5. La Diferencial df

Se finaliza el capítulo abordando el problema de la diferencial de f la cual viene dada por la igualdad

$$df = f(x + n \odot) - f(x) = f'(x)n \odot.$$

En nuestros cálculos cotidianos usamos

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

De donde se obtiene

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (*)$$

Ahora bien, cuando Δx se convierte en el menor número real positivo no nulo,

entonces,

$$f(x + \odot) = f(x) + f'(x)\odot.$$

Como también

$$f(x + n\odot) = f(x) + f'(x)n\odot. \quad (**)$$

Entonces, para números finitos (manipulables por el humano) se tiene (*). Sin embargo, (*) nunca será una igualdad, puesto que (**) se cumple siempre sólo para incrementos infinitesimales. Es decir, el primer término del segundo miembro de (**) está siempre infinitamente cerca del término del primer miembro. Veamos, en un sencillo ejemplo, lo que necesitaríamos para hacer que (*) sea una igualdad

Sabemos que

$$(2,1)^2 = (2 + 0,1)^2 = 4 + 4.(0,1) + (0,1)^2 = 4,41. \quad (1)$$

Por la fórmula (*) se tiene, haciendo $f(x) = \sqrt{x}$ ($f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$).

$$\sqrt{4,41} = \sqrt{4} + \frac{1}{4}.(0,41) = 2 + \frac{1}{4}.(0,4) + \frac{1}{4}.(0,01) = 2,1025 > 2,1. \quad (2)$$

El resultado aproximado nos dio mayor que el verdadero. Si observamos en (1) y (2) los miembros subrayados, notaremos que la fórmula introdujo f' veces el tercer término del miembro subrayado en (1). Ahora, veamos lo que sucede con $(2 + n\odot)^2$.

$$(2 + n\odot)^2 = 4 + 4.(n\odot) + (n\odot)^2. \quad (3)$$

$$(2 + n\odot)^2 = 4 + 4.(n\odot). \quad (4)$$

Por (1) y (4), basta que sea $4.(n\odot) = 4.(0,1)$. Puesto que siempre el último término desaparece en nuestra fórmula por ser un cero absoluto.

De manera que, si resolvemos $4.(n\odot) = 4.(0,1)$, encontraremos el n que nos da

la exactitud en nuestro cálculo. Este n es $n = \frac{2^\omega}{10} \notin \mathbb{N}$ (recuerde que $\odot = 1/2^\omega$ y 2^ω es siempre múltiplo de cualquier natural finito como se podrá comprobar en el apéndice, pero $2^\omega > \omega^n$ si n es finito). Al sustituir este n en (4) se obtiene $(2 + n\odot)^2 = 4,41$.

De todo lo anterior se concluye que nuestro cálculo con la fórmula de la diferencial de f siempre será aproximado, no sólo porque nuestro Δx es aproximado, sino porque, en funciones donde necesitemos potenciar, nunca sabremos el valor del término que desaparece cuando potenciamos y porque, además, el valor del n necesario no es natural.

En el capítulo VII veremos cómo todo lo anterior influye en nuestra geometría cuando la potencia es impar mayor o igual que tres.

CAPÍTULO V

5. LA DERIVACIÓN EN VARIAS VARIABLES

5.1. Derivación Parcial

Comenzaremos este capítulo estudiando la derivación parcial con la razón de continuidad; dejando todos los demás detalles que dan inicio al estudio de las funciones de varias variables, como lo son: todo lo referente a la topología de \mathbb{R}^n , límites, continuidad en un punto, continuidad en un intervalo, etc., tal como tradicionalmente se estudian. Esto, porque lo que se desea es mostrar la agilidad que el número \odot le da a la demostración de aquellos teoremas cuya justificación es sumamente complicada con la forma tradicional.

Se trabajará con dos variables independientes; puesto que todo lo estudiado se puede generalizar fácilmente a más variables. Asimismo, como es muy variada la notación conocida para las derivadas parciales, se usará la notación f_x para la parcial de f en función de x y f_y para la parcial en función de y ; por ser la más cómoda. Se supone que el lector domina lo concerniente al estudio tradicional de funciones de varias variables.

5.1.1. Derivadas Parciales de f

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en todo el abierto U . Entonces, sus derivadas parciales en cualquier punto $(x, y) \in U$, cuando existen, vienen dadas por las siguientes igualdades:

$$f_x = \frac{f(x+n\odot, y) - f(x, y)}{n\odot} \quad y \quad f_y = \frac{f(x, y+n\odot) - f(x, y)}{n\odot}. \quad (\text{I})$$

Cuando dichas parciales están evaluadas en el punto $P = (a, b)$, entonces éstas se escriben

$$f_x(\mathbf{P}) = f_x(a, b) = \frac{f(a+n\odot, b) - f(a, b)}{n\odot} \quad \text{y} \quad f_y(\mathbf{P}) = f_y(a, b) = \frac{f(a, b+n\odot) - f(a, b)}{n\odot}$$

De las dos fórmulas en (I) se tiene

$$f(x + n\odot, y) = f(x, y) + f_x n\odot \quad \text{y} \quad f(x, y + n\odot) = f(x, y) + f_y n\odot. \quad (\text{II})$$

O, disminuyendo las variables

$$f(x, y) = f(x - n\odot, y) + f_x n\odot \quad \text{y} \quad f(x, y) = f(x, y - n\odot) + f_y n\odot. \quad (\text{II}^*)$$

Haciendo uso de las fórmulas en (II), al igual que en la derivación simple, se puede probar, omitiendo el punto (x, y) , que

$$\text{a) } (f + g)_x = f_x + g_x \quad \text{y} \quad (f + g)_y = f_y + g_y.$$

$$\text{b) } (f \cdot g)_x = f_x g + g f_x \quad \text{y} \quad (f \cdot g)_y = f_y g + g f_y.$$

$$\text{c) } \left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{g f_x - f g_x}{g^2} \quad \text{y} \quad \left(\frac{f}{g}\right)_y = \frac{g f_y - f g_y}{g^2}.$$

De igual manera, se puede probar, tal como se hizo en la derivación simple, que existe la equivalencia de los infinitésimos siguientes

$$f(x + n\odot, y)n\odot = f(x, y)n\odot \quad \text{y} \quad f(x, y + n\odot)n\odot = f(x, y)n\odot. \quad (\text{III})$$

5.1.2. Derivadas Direccionales. Gradiente de f

Como el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es un disco, entonces, según lo estudiado en la teoría de límites, la función $f(x, y)$ es continua en U si lo es en todas las direcciones de dicho disco. En consecuencia, si la derivada total de f existe en todas estas direcciones, siempre podremos encontrar un natural n tal que $nh \geq 1$ y $nk \geq 1$, para valores reales cualesquiera de h y k , donde h y k son las componentes de un vector unitario \mathbf{u} . Por lo tanto, de las dos igualdades en (I) de 5.1.1 se tiene

$$f_x = \frac{f(x+n\odot h, y) - f(x, y)}{n\odot h} \quad \text{y} \quad f_y = \frac{f(x, y+n\odot k) - f(x, y)}{n\odot k}. \quad (1)$$

Ahora bien, en (III) de 5.1.1 tenemos la equivalencia de infinitésimos siguiente

$$f(x + nh\odot, y)nk\odot = f(x, y)nk\odot. \quad (nh \geq 1 \text{ y } nk \geq 1). \quad (2)$$

Derivando ambos miembros de (2) en función de y se tiene

$$nk\odot \left[\frac{f(x+nh\odot, y+nk\odot) - f(x+nh\odot, y)}{nk\odot} \right] = \left[\frac{f(x, y+nk\odot) - f(x, y)}{nk\odot} \right] nk\odot. \quad (3)$$

Por (3) se tiene que

$$f(x + nh\odot, y + nk\odot) - f(x + nh\odot, y) = f(x, y + nk\odot) - f(x, y). \quad (4)$$

Por otra parte, por (II) de 5.1.1 se tiene

$$f(x + nh\odot, y) = f(x, y) + f_x nh\odot. \quad (5)$$

$$f(x, y + nk\odot) = f(x, y) + f_y nk\odot. \quad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4) y simplificando se obtiene

$$f(x + nh\odot, y + nk\odot) - f(x, y) = f_x nh\odot + f_y nk\odot. \quad (7)$$

Hagamos en (7) (*las letras en negrita simbolizan vectores*)

$$(x + nh\odot, y + nk\odot) = (x, y) + n\odot(h, k); \quad (x, y) = \mathbf{x}; \quad \mathbf{u} = (h, k); \quad \|\mathbf{u}\| = 1. \quad (8)$$

Por (7) y (8) se tiene (*escribiendo el segundo miembro de (7) como producto escalar*)

$$f(\mathbf{x} + n\odot\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) = (f_x, f_y) \cdot \mathbf{u} \cdot n\odot. \quad (9)$$

Por (9) tenemos, sabiendo que $\|\mathbf{u}\| = 1$

$$\frac{f(\mathbf{x} + n\odot\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{u}\|n\odot} = (f_x, f_y) \cdot \mathbf{u}. \quad (10)$$

El primer miembro de (10) se le denomina la **derivada (total)** de f en la

dirección del vector unitario \mathbf{u} y se denota por $f'(\mathbf{x})\mathbf{u}$ o por $\frac{df}{du}(\mathbf{x})$. El vector (f_x, f_y) se denomina *gradiente* de f y se denota por $\nabla f(\mathbf{x})$. Por lo tanto, (10) se escribe

$$f'(\mathbf{x})\mathbf{u} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}.$$

Nota: se hace $nh \geq 1$ para que no sea $f_x \cdot nh = f_y \cdot nk = 0$, pues h y k son pequeños.

5.1.3. Diferenciabilidad

Sabemos que la existencia de las derivadas parciales de f en dirección de los ejes X y Y es necesaria para que ésta sea diferenciable en un punto P ; pero dicha existencia no es suficiente. No obstante, si la derivada direccional de f existe en P en la dirección de cualquier vector unitario \mathbf{u} , entonces f es diferenciable en P . Luego la definición de diferenciabilidad será:

Diferenciabilidad de f

Sea f una función definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Si la derivada direccional de f existe en un punto $P \in U$ en cualquier dirección \mathbf{u} , entonces f es diferenciable en P .

5.1.4. Teorema 5.1 (del valor medio en varias variables)

Sea f una función definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Si f es continua en todo el segmento que une los puntos $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ y tiene derivadas direccionales en la dirección del vector \mathbf{u} , entonces existe un número λ , $0 < \lambda < 1$, tal que

$$f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u}) = \nabla f(\lambda) \cdot [\mathbf{v} - \mathbf{u}].$$

Demostración

Este teorema se demuestra aplicando el teorema del valor medio de una función g en variable simple.

Sea f continua en el segmento $\mathbf{u}\mathbf{v}$ y con derivada direccional en la dirección de

u. Sea también

$$g(t) = f(\mathbf{u} + t\mathbf{w}); t \in [0, 1]; \mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}. \quad (1)$$

Como f es diferenciable en \mathbf{u}, \mathbf{v} , entonces g es diferenciable en $(0, 1)$. Por (1) se tiene

$$n \odot g'(t) = g(t + n \odot) - g(t) = f(\mathbf{u} + [t + n \odot]\mathbf{w}) - f(\mathbf{u} + t\mathbf{w}). \quad (2)$$

Por (2) y 5.1.4 se tiene

$$n \odot g'(t) = f(\mathbf{u} + t\mathbf{w} + n \odot \mathbf{w}) - f(\mathbf{u} + t\mathbf{w}) = \nabla f(\mathbf{u} + t\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} n \odot. \quad (3)$$

Por (3)

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{u} + t\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}. \quad (4)$$

Ahora, el teorema 4.3 (del valor medio) nos asegura que existe $k \in (0, 1)$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(k)(1 - 0) = g'(k). \quad (5)$$

Como $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, entonces, por (1)

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}; g(1) = f(\mathbf{v}) \text{ y } g(0) = f(\mathbf{u}). \quad (6)$$

Por (6), (5) y (4) se tiene

$$f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{u} + k\mathbf{w}) \cdot [\mathbf{v} - \mathbf{u}]. \quad (7)$$

Con $\mathbf{u} + k\mathbf{w} = \lambda$ se tiene en (7)

$$f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u}) = \nabla f(\lambda) \cdot [\mathbf{v} - \mathbf{u}]. \quad \blacklozenge$$

5.1.5. Teorema 5.2 (de la continuidad total)

Si f es diferenciable en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces f es continua en U .

Demostración

Sea $\mathbf{x} \in U$ un punto (x, y) cualquiera. En 5.1.2 vimos que

$$\frac{f(\mathbf{x} + n\odot \mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{n\odot} = (f_x, f_y) \cdot \mathbf{u}. \quad (1)$$

De (1) se obtiene

$$f(\mathbf{x} + n\odot \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + n\odot \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}. \quad (2)$$

Por (2) y ser $\lim_{n \rightarrow 0} n\odot = 0$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow 0} f(\mathbf{x} + n\odot \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Y por (3), f es continua en U . ♦

5.1.6. Parciales de Orden Superior a Uno

Si $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, con derivadas parciales derivables en U , entonces estas derivadas parciales de segundo orden, en un punto cualquiera de U , vienen dadas por las igualdades (compruébelo usando las igualdades dadas en (I) de 5.1.1)

$$f_{xx} = \frac{1}{n\odot} \left[\frac{f(x+2n\odot, y) - f(x+n\odot, y)}{n\odot} - \frac{f(x+n\odot, y) - f(x, y)}{n\odot} \right]. \quad (IV)$$

$$f_{yy} = \frac{1}{n\odot} \left[\frac{f(x, y+2n\odot) - f(x, y+n\odot)}{n\odot} - \frac{f(x, y+n\odot) - f(x, y)}{n\odot} \right]. \quad (V)$$

$$f_{yx} = \frac{1}{n\odot} \left[\frac{f(x+n\odot, y+n\odot) - f(x, y+n\odot)}{n\odot} - \frac{f(x+n\odot, y) - f(x, y)}{n\odot} \right]. \quad (VI)$$

$$f_{xy} = \frac{1}{n\odot} \left[\frac{f(x+n\odot, y+n\odot) - f(x+n\odot, y)}{n\odot} - \frac{f(x, y+n\odot) - f(x, y)}{n\odot} \right]. \quad (VII)$$

Nota: si f es diferenciable en U y sus parciales de n -ésimo orden son continuas en U , entonces f es de clase C^n .

5.1.7. Teorema 5.3 (igualdad de las parciales mixtas)

Si f es de clase C^2 sus parciales mixtas f_{yx} y f_{xy} existen y son continuas y, además, se verifica que $f_{yx} = f_{xy}$.

Demostración

Las igualdades (VI) y (VII) de 5.1.5 se pueden escribir como

$$f_{yx} = \frac{1}{n\odot} \left[\frac{1}{n\odot} [f(x + n\odot, y + n\odot) - f(x, y + n\odot) - f(x + n\odot, y) + f(x, y)] \right]. \quad (1)$$

$$f_{xy} = \frac{1}{n\odot} \left[\frac{1}{n\odot} [f(x + n\odot, y + n\odot) - f(x + n\odot, y) - f(x, y + n\odot) + f(x, y)] \right]. \quad (2)$$

Como en (1) y (2) los términos entre los corchetes centrales son iguales, entonces

$$f_{yx} = f_{xy}. \quad \blacklozenge$$

5.1.8. La Diferencial de f (df)

Se denomina diferencial (total) de f a la expresión

$$df = f(x + n\odot h, y + n\odot k) - f(x, y). \quad (*)$$

Para tres variables sería

$$df = f(x + n\odot h, y + n\odot k, z + n\odot l) - f(x, y, z).$$

En la igualdad (10) de 5.1.2 se obtuvo, para el gradiente de f

$$\frac{df}{du} = \frac{f(x+n\odot\mathbf{u})-f(x)}{\|\mathbf{u}\|n\odot} = (f_x, f_y) \cdot \mathbf{u}. \quad (1)$$

Por (1) y siendo $\mathbf{u} = (h, k)$ se tiene

$$\frac{df}{du} = f_x h + f_y k. \quad (2)$$

Por (2), (1), sabiendo que $\|\mathbf{u}\| = 1$ y $du = n\odot$

$$df = f(x + n\odot h, y + n\odot k) - f(x, y) = f_x h du + f_y k du = f_x h n\odot + f_y k n\odot. \quad (3)$$

Ahora bien, como

$$dx = x + n\odot h - x = n\odot h \text{ y } dy = y + n\odot k - y = n\odot k. \quad (4)$$

Se tiene entonces, por (4) y (3)

$$df = f_x dx + f_y dy. \quad (I)$$

Observe el lector que por (I) y (3) $hdu = dx$, de donde $(dx/du) = h$ es la primera componente del vector \mathbf{u} . Si $\mathbf{u} = i = (1, 0)$, entonces, la derivada total se convierte en derivada parcial, por lo que du coincide con dx y se convierte en ∂x y df se convierte en ∂f . Así, $\partial f = f_x \partial x$ será diferencial parcial (en la variable x) y $df = f_x dx + f_y dy$, diferencial total.

Puesto que la fórmula (I) anterior es muy útil para la composición de funciones así como para las funciones implícitas, conviene explicar brevemente cómo proceder para funciones de tres o más variables. Se mostrará el procedimiento para tres variables, ya que para más de tres es análogo.

Por (III) de 5.1.1 se tiene, para tres variables

$$f(x + n\odot h, y, z)n\odot k = f(x, y, z)n\odot k. \quad (1)$$

Al derivar en (1) a ambos miembros en función de y , se tiene al simplificar

$$f(x + n\odot h, y + n\odot k, z) - f(x + n\odot h, y, z) = f(x, y + n\odot k, z) - f(x, y, z). \quad (2)$$

Asimismo

$$f(x + n\odot h, y, z) = f(x, y, z) + f_x n\odot h. \quad (3)$$

$$f(x, y + n\odot k, z) = f(x, y, z) + f_y n\odot k. \quad (4)$$

Al sustituir (3) y (4) en (2) y simplificar se obtiene

$$f(x + n\odot h, y + n\odot k, z) = f(x, y, z) + f_x n\odot h + f_y n\odot k. \quad (5)$$

Por (5), se tiene la siguiente equivalencia de infinitésimos

$$f(x + n\odot h, y + n\odot k, z) n\odot l = f(x, y, z) n\odot l. \quad (6)$$

Al derivar ambos miembros de (6) en función de z se tiene, al simplificar

$$\begin{aligned} f(x + n\odot h, y + n\odot k, z + n\odot l) - f(x + n\odot h, y + n\odot k, z) = \\ = f(x, y, z + n\odot l) - f(x, y, z). \end{aligned} \quad (7)$$

Al sustituir (5) en (7) y sabiendo que $f(x, y, z + n\odot l) = f(x, y, z) + f_z n\odot l$, se tiene

$$\begin{aligned} f(x + n\odot h, y + n\odot k, z + n\odot l) - f(x, y, z) = \\ = f_x n\odot h + f_y n\odot k + f_z n\odot l. \end{aligned} \quad (8)$$

Y por (8)

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz.$$

Nota Importante: la fórmula anterior vale para toda variable u aun cuando dicha variable sea dependiente. Para ver esto, sólo hay que cambiar en el teorema 3.2 del capítulo III los incrementos $n\odot$ por du y los infinitésimos equivalentes quedan

$$f(u + du, y, z) \odot = f(u, y, z) \odot.$$

Luego, se procede igual que se hizo anteriormente.

5.1.9. La Matriz Jacobiana

Se pasa ahora a definir lo que se llama la matriz Jacobiana de f . Ésta se deduce de la derivada de f en la dirección de un vector unitario \mathbf{u} . Veamos

Sabemos que

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \frac{f(\mathbf{x} + n\odot \mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{n\odot} = (f_x, f_y) \cdot \mathbf{u}. \quad (1)$$

Como el tercer miembro de (1) es un producto escalar de vectores, este se puede escribir en forma de producto matricial de la siguiente manera

$$(f_x \ f_y)(\mathbf{u})^t = (f_x \ f_y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = f_x h + f_y k. \quad (2)$$

A la matriz $(f_x \ f_y)$ se le denomina matriz Jacobiana de f , o simplemente Jacobiana de f , y se denota por Jf , que en el punto \mathbf{x} se escribe $Jf(\mathbf{x})$. De esta manera

$$Jf(\mathbf{x}) = (f_x \ f_y). \quad (I)$$

5.1.10. Algo Sobre Funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

En este apartado se tratará muy someramente sobre las funciones de varias variables de la forma $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se tocará el tema sólo grosso modo, puesto que lo que se trata es de poner en evidencia la gran utilidad de la matriz Jacobiana en la derivación de estas funciones. En la sección siguiente se trabajará otro tanto con ellas.

Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, como por ejemplo, $f(x, y) = (f_1(x, y); f_2(x, y); f_3(x, y))$, se dice que es diferenciable si lo es en cada una de sus funciones coordenadas. Por lo tanto, si f es diferenciable en algún conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, aplicando lo que ya se ha visto a cada una de las funciones coordenadas de f , se tiene que las parciales de f son

$$f_x = (f_{1(x)}; f_{2(x)}; f_{3(x)}). \quad (1)$$

$$f_y = (f_{1(y)}; f_{2(y)}; f_{3(y)}). \quad (2)$$

Por (1) y (2), la Jacobiana de f (evaluada en el punto (x, y)) será

$$Jf(\mathbf{x}) = (f_x \ f_y) = \begin{pmatrix} f_{1(x)} & f_{1(y)} \\ f_{2(x)} & f_{2(y)} \\ f_{3(x)} & f_{3(y)} \end{pmatrix}_{(x,y)} \quad (3)$$

Luego, por (3), la derivada de f en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es

$$f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = Jf(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u})^t = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1(y) \\ f_2(x) & f_2(y) \\ f_3(x) & f_3(y) \end{pmatrix}_{(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x)u_1 + f_1(y)u_2 \\ f_2(x)u_1 + f_2(y)u_2 \\ f_3(x)u_1 + f_3(y)u_2 \end{pmatrix}_{(x,y)} .$$

5.2. Funciones Compuestas. Regla de la Cadena

La composición de funciones en varias variables, para funciones $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se entenderá como *la sustitución de una función en otra*. De esta manera, si f es $f(u, v)$ con u y v funciones en las variables x, y , es decir, $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$, entonces f es

$$f(u, v) = (u(x, y); v(x, y)).$$

Al ser u y v funciones de x, y , entonces f da lugar a una función g en las dos variables x, y . En consecuencia, se puede escribir

$$f(u, v) = (u(x, y); v(x, y)) = g(x, y). \quad (I)$$

En el teorema que sigue se abusará del lenguaje (matemático) y a una función de la forma $u = f(x, y)$, se le denotará, por simplificar la exposición, por $u = u(x, y)$.

5.2.1. Teorema 5.4 (la regla de la cadena)

Sea z una función diferenciable en las variables u, v , tal que $z = z(u, v)$. Sean u y v funciones diferenciables en las variables x, y , tal que $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$. Además, las derivadas parciales de u y v existen y son continuas. Entonces z es función de las variables x, y , y se cumple que

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x.$$

$$z_y = z_u u_y + z_v v_y.$$

Demostración

$$z = z(u, v) = g(x, y); u = u(x, y); v = v(x, y). \quad (1)$$

Por (1) y 5.1.7 (la fórmula de la diferencial total vale para toda variable u), se

tiene

$$dz = z_u du + z_v dv. \quad (a)$$

$$dg = g_x dx + g_y dy. \quad (b)$$

$$du = u_x dx + u_y dy. \quad (c)$$

$$dv = v_x dx + v_y dy. \quad (d)$$

$$dz = dg. \quad (e)$$

Al sustituir (c) y (d) en (a) y agrupar convenientemente se tiene

$$dz = (z_u u_x + z_v v_x) dx + (z_u u_y + z_v v_y) dy. \quad (2)$$

Por (2), (e) y (b)

$$g_x dx + g_y dy = (z_u u_x + z_v v_x) dx + (z_u u_y + z_v v_y) dy. \quad (3)$$

Como (3) es una identidad en todo el conjunto U de diferenciabilidad, entonces

$$g_x = z_u u_x + z_v v_x \quad y \quad g_y = z_u u_y + z_v v_y. \quad (4)$$

Como $z = z(u, v) = g(x, y)$, entonces $z_x = g_x$, por tanto

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x \quad y \quad z_y = z_u u_y + z_v v_y. \quad \blacklozenge$$

El teorema anterior se ha demostrado para dos variables u y v cada una dependiente de dos variables independientes x y y . Sin embargo, es generalizable fácilmente para n variables cada una dependiente de m variables independientes. El procedimiento es el mismo. Asimismo, las funciones que hemos involucrado en dicho teorema tienen, una vez que se ha efectuado la composición, su destino o recorrido final en \mathbb{R} . Para la composición de funciones de la forma $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, es más conveniente el teorema que se da a continuación.

5.2.2. Teorema 5.5 (regla de la cadena en general)

Consideremos las funciones $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Sea f definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y g definida en un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^m$ con $g(V) \subseteq U$. Si g es diferenciable en $\mathbf{x} \in V$ y f lo es en $g(\mathbf{x}) \in U$, entonces la compuesta $f \circ g: V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es también diferenciable en $\mathbf{x} \in V$ y su derivada viene dada por $(Jf(g(\mathbf{x})))$, matriz $m \times n$ y $Jg(\mathbf{x})$, matriz $n \times k$

$$J(f \circ g)(\mathbf{x}) = Jf(g(\mathbf{x}))Jg(\mathbf{x}).$$

Demostración

De la fórmula $\frac{g(\mathbf{x} + n \odot \mathbf{u}) - g(\mathbf{x})}{n \odot} = (g_x, g_y) \cdot \mathbf{u}$. Se obtiene

$$g(\mathbf{x} + n \odot \mathbf{u}) = g(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x}) n \odot \mathbf{u}. \quad (1)$$

Por (1) y haciendo $n \odot \mathbf{u} = d\mathbf{x}$ se tiene

$$g(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2)$$

Observe, el lector, la similitud de la igualdad (2) con lo que sucede en el caso de una variable. La imagen, por g , de $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ es: $g(\mathbf{x})$, más el gradiente de $g(\mathbf{x})$ multiplicado por el incremento de \mathbf{x} el cual es $d\mathbf{x}$.

Aplicando f a ambos miembros en (2) se tiene

$$f(g(\mathbf{x} + d\mathbf{x})) = f(g(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}). \quad (3)$$

Haciendo en el segundo miembro de (3) $g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ y $\nabla g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = d\mathbf{w}$ se tiene

$$f(g(\mathbf{x} + d\mathbf{x})) = f(\mathbf{w} + d\mathbf{w}). \quad (4)$$

Ahora, aplicando (2) al segundo miembro de (4) se obtiene

$$f(g(\mathbf{x} + d\mathbf{x})) = f(\mathbf{w} + d\mathbf{w}) = f(\mathbf{w}) + \nabla f(\mathbf{w}) d\mathbf{w}. \quad (5)$$

Devolviendo los cambios $n \odot \mathbf{u} = d\mathbf{x}$, $g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ y $\nabla g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = d\mathbf{w}$ en (5), se

obtiene

$$f(g(\mathbf{x} + n\mathcal{C}\mathbf{u})) = f(g(\mathbf{x})) + \nabla f(g(\mathbf{x}))\nabla g(\mathbf{x})n\mathcal{C}\cdot\mathbf{u}. \quad (6)$$

De (6) se obtiene, sabiendo que $\|\mathbf{u}\| = 1$.

$$\frac{f(g(\mathbf{x}+n\mathcal{C}\mathbf{u}))-f(g(\mathbf{x}))}{\|\mathbf{u}\|n\mathcal{C}} = \nabla f(g(\mathbf{x}))\nabla g(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u} \quad (7)$$

Como el primer miembro de (7) es $\nabla(f\circ g)(\mathbf{x})$, entonces (7) es

$$\nabla(f\circ g)(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u} = \nabla f(g(\mathbf{x}))\nabla g(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}. \quad (8)$$

Escribiendo (8) en forma matricial se tiene

$$J(f\circ g)(\mathbf{x})(\mathbf{u})^t = Jf(g(\mathbf{x}))Jg(\mathbf{x})(\mathbf{u})^t. \quad (9)$$

Como (9) se cumple para cualesquiera que sean las matrices $Jf(g(\mathbf{x}))$ y $Jg(\mathbf{x})$ (siempre que f y g cumplan con las hipótesis), las cuales variarán sus componentes cada vez que varía el punto \mathbf{x} , entonces esto es posible si, y sólo, si

$$J(f\circ g)(\mathbf{x}) = Jf(g(\mathbf{x}))Jg(\mathbf{x}). \quad \blacklozenge$$

5.3. Funciones Implícitas e Inversas

Pasamos a estudiar el problema de las funciones implícitas. Dicho estudio consistirá en probar que, si en un punto dado \mathbf{x} de un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, una determinada función g se anula, entonces, en un entorno de \mathbf{x} donde siempre sea $g(\mathbf{x}) = 0$, todas las derivadas parciales de g son nulas siempre y cuando todas sus variables sean independientes. Nótese que la prueba se dará sólo en el caso en que todas las variables de g sean independientes. En el caso en que alguna de las variables que intervienen no sea independiente, entonces ésta dependerá de las otras variables que sí lo sean y, por lo tanto, las derivadas parciales tendrán una forma muy distinta a la que tienen cuando son todas independientes. Veamos un ejemplo de esto con una función de tres variables (el número de variables no influye).

Sea la función $G(x, y, z)$ definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Entonces, si sus tres variables son independientes, su derivada parcial en función de x es: $\frac{G(x+n\odot, y, z) - G(x, y, z)}{n\odot}$. Sin embargo, si una de las variables, por ejemplo z , depende de las dos variables x, y , es decir, $z = z(x, y)$, entonces la derivada parcial de G en función de x no es de la forma $\frac{G(x+n\odot, y, z) - G(x, y, z)}{n\odot}$, puesto que se estaría pasando por alto la x que está en la variable z . Todo lo anterior da pie al teorema que sigue.

5.3.1. Teorema 5.6 (de las parciales en el entorno de un cero de f)

Sea G una función diferenciable en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (en este caso trabajaremos en \mathbb{R}^2 ; para $n > 2$ el procedimiento es análogo). Si en un punto $\mathbf{x} \in U$ se hace $G(\mathbf{x}, y) = 0$ y las dos variables de G siguen siendo independientes en un entorno (disco abierto $B(\mathbf{x}, r)$) de \mathbf{x} , entonces las derivadas parciales de G son nulas en todo B .

Demostración

Sean G y B como en la hipótesis. Sea, además, $G(x, y) = 0$, $(x, y) \in B$, y supongamos, como *hipótesis auxiliar*, que G_x existe en todo B . Entonces

$$G_x = \frac{G(x+n\odot, y) - G(x, y)}{n\odot} = \frac{G(x, y) - G(x-n\odot, y)}{n\odot}. \quad (1)$$

De (1) se tiene que

$$G_x n\odot = G(x + n\odot, y) \text{ y } G_x n\odot = -G(x - n\odot, y). \quad (2)$$

Por (2) se tiene

$$G(x + n\odot, y) = -G(x - n\odot, y). \quad (3)$$

Como (3) es cierto para todo x en B y (1) lo es para todo n , entonces, al aumentar a x en $n\odot$ de tal forma que permanezca $x + 2n\odot$ en B , se obtiene de (3) que

$$G(x + 2n\odot, y) = -G(x, y) = 0. \quad (4)$$

Por (4), cuando $n = 1$ se tiene

$$G(x + 2\textcircled{0}, y) = 0. \quad (5)$$

Por (1), cuando $n = 2$, se tiene, aplicando (5)

$$G_x = \frac{G(x+2\textcircled{0},y) - G(x,y)}{2\textcircled{0}} = \frac{0}{2\textcircled{0}} - \frac{0}{2\textcircled{0}} = 0. \quad \blacklozenge$$

5.3.2. Teorema 5.7 (de la función implícita)

Sea f una función de n variables x_i ($i = 1, \dots, n$). Sea \mathbf{x} un punto tal que $f(\mathbf{x}) = 0$. Si f tiene derivadas parciales continuas en un entorno $B(\mathbf{x}, r)$ con $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \neq 0$, entonces existe una vecindad V de \mathbf{x} en el cual x_n es dependiente de las demás variables x_i ($i = 1, \dots, n - 1$), y la función $f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))$ tiene derivadas continuas en V ($V \subseteq B$) que vienen dadas por

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})} \quad (i = 1, \dots, n - 1).$$

Demostración

Para simplificar la exposición se demostrará el teorema para cuatro variables (para cualquier número mayor que uno de variables el procedimiento es igual).

Sea f la función de las cuatro variables independientes x, y, z y u dada en la hipótesis. Sea P un punto del abierto U en el cual f se anula y la derivada parcial de f , $f_u(P) \neq 0$. Entonces, por el teorema 5.6, en una vecindad V del punto P ($V \subseteq U$) en el cual $f(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$, al ser x, y, z , independientes, u no es independiente, pues si lo fuera, sería $f_u(\mathbf{x}) = 0$, lo que sería una contradicción. De manera que, en V , u depende de las demás variables x, y, z . Sólo resta demostrar que u toma a todas las variables x, y, z , como variables independientes suyas. Para ello, supongamos que u no toma a una de ellas, por ejemplo x , como variable suya. Entonces se tendrá que, en todo V (nivel cero de f)

$$v = f(x, y, z, u(y, z)) = g(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Observe que la función f da lugar a una función g en las variables independientes x, y, z . Pero, como en f de (1) todas las variables no son independientes, no es aplicable el teorema 5.6 en dicha igualdad. Usando g por comodidad, se tiene

$$\frac{g(x+n\odot, y, z) - g(x, y, z)}{n\odot} = \frac{g(x, y, z) - g(x-n\odot, y, z)}{n\odot}. \quad (2)$$

Por (2) y sabiendo que $g(x, y, z) = 0$, se tiene

$$g(x + n\odot, y, z) = -g(x - n\odot, y, z). \quad (3)$$

Como (3) es cierto para todo x en V y (2) lo es para todo n , entonces, al aumentar a x de (3) en $n\odot$, de manera que $x + 2n\odot$ permanezca en V , se tiene

$$g(x + 2n\odot, y, z) = -g(x, y, z) = 0. \quad (4)$$

Como (3) y (4) valen para toda x en V y todo natural n , entonces x no es variable en la vecindad V , en consecuencia, es constante; lo que es una contradicción. Como esta contradicción se genera al suponer que u no toma a x como variable independiente suya, se tiene que u es

$$u = h(x, y, z). \quad (6)$$

Por (6) y (1) en la vecindad V se tiene

$$v = f(x, y, z, u(x, y, z)) = 0. \quad (7)$$

Por (7) y la regla de la cadena

$$f_x + f_u u_x = 0. \quad (a)$$

$$f_y + f_u u_y = 0. \quad (b)$$

$$f_z + f_u u_z = 0. \quad (c)$$

Y por (a), (b) y (c)

$$u_x = -\frac{f_x}{f_u}; \quad u_y = -\frac{f_y}{f_u}; \quad u_z = -\frac{f_z}{f_u}. \quad \blacklozenge$$

Observación importante: al igual que en el caso tradicional, la demostración anterior se da para cualquiera que sea la derivada parcial que no se anula en el punto P. Si, por ejemplo, la parcial no nula es f_x , entonces a x se le puede ver como dependiente de las otras variables. Si tanto f_u como f_x no se anulan en el punto \mathbf{x} (donde sea $f(\mathbf{x}) = 0$), entonces, podemos suponer que, en la vecindad V, todas son independientes excepto x, o que todas son independientes excepto u, aún cuando a la variable dependiente no se le pueda denotar explícitamente (igual para las demás parciales que no se anulen en el referido punto). Por otra parte, el teorema sólo se cumple localmente, es decir, en una vecindad del punto P donde sea $f(P) = 0$. Fuera de dicha vecindad, nada asegura este teorema.

5.3.3. Teorema 5.8 (de las n funciones implícitas)

Sean las n funciones: $F_i(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, \dots, n$. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ un punto cualquiera donde todas las F_i se anulan. Si en una bola $B(\mathbf{x}, r) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ las F_i tienen todas sus derivadas parciales continuas y el determinante Jacobiano

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)}$$

no se anula en el punto \mathbf{x} , entonces, de las expresiones

$$F_i(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Se obtienen funciones

$$u_i = u_i(x_1, \dots, x_m) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Definidas en una vecindad V de \mathbf{x} , en la cual dichas funciones tienen derivadas parciales continuas que vienen dadas por

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(u_1, \dots, u_{i-1}, x_j, u_{i+1}, \dots, u_n)}}{\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)}}$$

Demostración

La demostración se dará para $n = 3$ y $m = 2$ (para cualquier n , $m > 1$ la demostración es análoga).

Sean $F(x, y, u, v, w)$, $G(x, y, u, v, w)$ y $H(x, y, u, v, w)$. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ tal que

$$F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{en } \mathbf{x}. \quad (1)$$

Del determinante en (1) se tiene que

$$F_u \begin{vmatrix} G_v & G_w \\ H_v & H_w \end{vmatrix} - F_v \begin{vmatrix} G_u & G_w \\ H_u & H_w \end{vmatrix} + F_w \begin{vmatrix} G_u & G_v \\ H_u & H_v \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

Los tres términos de (2) no pueden ser simultáneamente nulos, por lo tanto, sea

$$F_w \begin{vmatrix} G_u & G_v \\ H_u & H_v \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

Por (3), F_w ni el determinante $\begin{vmatrix} G_u & G_v \\ H_u & H_v \end{vmatrix}$ pueden ser nulos, entonces

$$\begin{vmatrix} G_u & G_v \\ H_u & H_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{y} \quad F_w \neq 0. \quad (4)$$

Por (4)

$$G_u H_v - G_v H_u \neq 0. \quad (5)$$

Como en (5) los dos términos no pueden ser simultáneamente nulos, entonces, al menos uno debe ser no nulo, digamos que $G_u H_v$. Entonces, se tiene que

$$F_w \neq 0; G_u \neq 0; H_v \neq 0. \quad (6)$$

Por (6) y el teorema anterior aplicado a F, G y H se tiene que

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y). \quad (7)$$

Nótese que u, v y w sólo toman como suyas a las variables independientes, pues si u fuera función de v, sería v función de u y ambas tienen a x, y como variables independientes.

Luego, por (7), en la vecindad V se tiene

$$F(x, y, u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = 0. \quad (a)$$

$$G(x, y, u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = 0. \quad (b)$$

$$H(x, y, u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = 0. \quad (c)$$

Por (a), (b) y (c) y la regla de la cadena se tiene el sistema

$$F_u u_x + F_v v_x + F_w w_x = -F_x. \quad (d)$$

$$G_u u_x + G_v v_x + G_w w_x = -G_x. \quad (e)$$

$$H_u u_x + H_v v_x + H_w w_x = -H_x. \quad (f)$$

Resolviendo este sistema por Cramer, se obtiene (para u_y, v_y, w_y cambie x por y)

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v & F_w \\ -G_x & G_v & G_w \\ -H_x & H_v & H_w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}}; \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x & F_w \\ G_u & -G_x & G_w \\ H_u & -H_x & H_w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}}; \quad w_x = \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_v & -F_x \\ G_u & G_v & -G_x \\ H_u & H_v & -H_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}}. \quad \blacklozenge$$

5.3.4. La Función Inversa

Finalizamos esta sección 5.3 estudiando la existencia de la función inversa de F . Sea $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función definida en un disco $B(\mathbf{x}, r)$ con derivadas parciales continuas en B . Escribimos

$$F(x, y) = (f(x, y); g(x, y)) = (u, v); u = f(x, y); v = g(x, y). \quad (\text{I})$$

Si la función inversa de F , F^{-1} , existe, se debe tener que $F^{-1}(u, v) = (x, y)$. Lo que se desea es saber cuáles son las condiciones que se deben dar para que F^{-1} exista en una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^2$. Y para que ello suceda, deben existir funciones α y β , con derivadas parciales continuas en V tales que

$$x = \alpha(u, v); y = \beta(u, v). \quad (\text{II})$$

Con lo que F^{-1} quedaría: $F^{-1}(u, v) = (\alpha(u, v), \beta(u, v)) = (x, y)$ y tendría derivadas parciales continuas en V .

Para deducir dichas condiciones se definirán (a la manera de **C. Pita Ruiz** en **Cálculo Vectorial**) dos funciones auxiliares G y H en las variables x, y, u, v , tales que (por (I))

$$G(x, y, u, v) = f(x, y) - u = 0. \quad (\text{a})$$

$$H(x, y, u, v) = g(x, y) - v = 0. \quad (\text{b})$$

Por el teorema anterior, sabemos que si el determinante (o Jacobiano)

$$\begin{vmatrix} G_x & G_y \\ H_x & H_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$$

es diferente de cero, existe una vecindad $V \in \mathbb{R}^2$ donde $x = \alpha(u, v)$ y $y = \beta(u, v)$. En consecuencia, la condición necesaria para que exista F^{-1} en una vecindad V de \mathbb{R}^2 es que el Jacobiano $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$ sea no nulo en V . Así, existirá F^{-1} la cual será continua y

diferenciable en V . Veamos que también la condición es suficiente.

Para probar que la condición anterior también es suficiente, se demostrará que la derivada de F^{-1} , JF^{-1} , es $(JF)^{-1}$; puesto que, al existir $(JF)^{-1}$, el Jacobiano de JF será no nulo (al ser JF invertible). Para ello usaremos $J(f \circ g)(\mathbf{x}) = Jf(g(\mathbf{x}))Jg(\mathbf{x})$, fórmula que se da para dos funciones cualesquiera continuamente diferenciables en un entorno U .

Entonces, supongamos que existe F^{-1} . Se tiene que

$$J(g \circ F)(\mathbf{x}) = Jg(F(\mathbf{x}))JF(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Cambiando g por F^{-1} en (1) y simplificando se tiene

$$JI(\mathbf{x}) = JF^{-1}(F(\mathbf{x}))JF(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Como en el primer miembro de (2) apareció la matriz identidad, entonces el segundo miembro en (2) es el producto de una matriz por su inversa, por tanto

$$(JF(\mathbf{x}))^{-1} = JF^{-1}(F(\mathbf{x})). \quad \blacklozenge$$

Se concluye que la condición suficiente y necesaria para que exista en B la función inversa de F es que el determinante de JF sea no nulo.

Nota: de todo lo anterior, la función inversa, F^{-1} , si existe, es local. Es decir, sólo existirá en una vecindad, V , donde el Jacobiano de la función F sea no nulo.

5.4. Extremos de Funciones de Varias Variables

Finalizamos este capítulo estudiando los valores extremos de las funciones de más de una variable. Dicho estudio estará sustentado en lo visto para funciones de una sola variable. Comenzaremos demostrando que toda función F continua en una bola cerrada, B , de \mathbb{R}^n siempre alcanza un máximo valor y un mínimo valor en dicha bola. Probaremos esto para funciones en \mathbb{R}^2 , ya que para funciones en \mathbb{R}^n con $n > 2$ la prueba es análoga.

5.4.1. Teorema 5.9 (del máximo y el mínimo valor de F)

Sea F una función definida en un disco cerrado $U = [(a, b), r] \subseteq \mathbb{R}^2$ y continua en U . Entonces F alcanza su valor máximo absoluto y su valor mínimo absoluto en U .

Demostración

Como F es continua en U , pueden suceder los siguientes casos para todas las direcciones en U (acá supondremos a F no constante, de serlo, $\text{Max. } F = \text{mín. } F$).

F es sólo *creciente* en U . (a)

F es sólo *decreciente* en U . (b)

F *crece* hasta (k_1, k_2) y luego *decrece* (viceversa) en U . (c)

Supongamos que se cumple (a). Entonces

$$F(x - n\odot, y - n\odot) < F(x, y) < F(x + n\odot, y + n\odot) \quad \forall (x, y) \in U. \quad (1)$$

Como en ∂U (∂U frontera de U) se tiene $|(x, y) - (a, b)| = r$, $(x, y) \in \partial U$, entonces, aplicando la fórmula de la distancia se obtiene, al despejar, que $x = h_1 + a$ y $y = h_2 + b$, siendo $h_1 = \sqrt{r^2 - (y - b)^2}$, $h_2 = \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$. Haciendo en (1): $x = h_1 + a$; $y = h_2 + b$, se tiene (al hacer el cambio, el término de la derecha en (1) no pertenece a ∂U)

$$F(h_1 + a, h_2 + b) > F(h_1 + a - n\odot, h_2 + b - n\odot). \quad (2)$$

Y por (2), F alcanza su valor máximo en ∂U y, por tanto, su valor mínimo estará en \ddot{U} (\ddot{U} , el interior de U).

La demostración de (b) es análoga a la de (a) y prueba que F alcanza su mínimo en ∂U y su máximo en \ddot{U} . Demostremos (c).

Si sucede (c), se tiene hasta (k_1, k_2)

$$F(x, y) < F(k_1, k_2), \forall (x, y) \text{ en el intervalo de crecimiento.} \quad (1)$$

$$F(k_1, k_2) > F(x, y), \forall (x, y), \text{ en el intervalo de decrecimiento.} \quad (2)$$

Por (1) y (2), $F(k_1, k_2)$ es un máximo en \ddot{U} . Ahora, a este máximo llamémoslo M . En ∂U se tiene que $x = h_1 + a$; $y = h_2 + b$. Entonces, sólo existen las tres posibilidades siguientes

$$F(h_1 + a, h_2 + b) > M. \quad (i)$$

$$F(h_1 + a, h_2 + b) < M. \quad (ii)$$

$$F(h_1 + a, h_2 + b) = M. \quad (iii)$$

Para cualesquiera que sean los casos (i), (ii) o (iii), F siempre alcanza su valor máximo en: ∂U si se da (i), por lo que su valor mínimo estará en \ddot{U} ; en \ddot{U} si se da (ii), por lo que el valor mínimo estará en ∂U o en \ddot{U} . Si se da (iii), el máximo y el mínimo absoluto están en \ddot{U} . De igual manera se procede si el caso (c) es a la inversa. Esto concluye la demostración. ♦

5.4.2. Definición de Punto Crítico

Sea F una función continua y definida en un disco abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, con derivadas parciales continuas. Se dice que el punto $P = (a, b)$ es un punto crítico de F si todas las derivadas parciales primeras de F en P son nulas.

Según la definición de punto crítico se cumple que

$$F_x(a, b) = 0 \text{ y } F_y(a, b) = 0.$$

En cada punto crítico F puede alcanzar:

(i) Un máximo, si F *crece* (en ambas variables) hasta (a, b) y luego *decrece*.

(ii) Un mínimo, si F *decrece* (en ambas variables) hasta (a, b) y luego *crece*.

(iii) Un punto de silla, si F *crece* (*decrece*) hasta (a, b) en una variable y *decrece* (*crece*) en la otra, o, no *crece* ni *decrece* en una y *crece* o *decrece* en la otra.

5.4.3. Teorema 5.10 (criterio del máximo o mínimo)

Sea F una función continua y definida en un disco abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, con derivadas parciales continuas. Si $P = (a, b)$ es un punto crítico de F , entonces

(i) $F(a, b)$ es un máximo (relativo) si $F_{xx} < 0$, $F_{yy} < 0$ y $F_{xy} \leq 0$.

(ii) $F(a, b)$ es un mínimo (relativo) si $F_{xx} > 0$, $F_{yy} > 0$ y $F_{xy} \geq 0$.

(iii) $F(a, b)$ es un punto de silla si a) F_{xx} y F_{yy} son de signos contrarios; b) Uno de ellos nulo y el otro no nulo; c) Ambos nulos y F_{xy} no nulo

(iv) Si F_{xx} , F_{yy} y F_{xy} son todos nulos, nada se puede inferir.

Demostración

Demostremos (i) ya que (ii) se demuestra análogamente.

F alcanza un máximo en la variable x , o en la variable y , si la segunda derivada en dichas variables es negativa. Entonces, sea $F_{xx} < 0$, $F_{yy} < 0$ y $F_{yx} \leq 0$. Entonces, aumentando a x en $n\Delta h$

$$F_{xx} = \frac{1}{n\Delta h} \left[\frac{F(x+2n\Delta h, y) - F(x+n\Delta h, y)}{n\Delta h} - \frac{F(x+n\Delta h, y) - F(x, y)}{n\Delta h} \right]. \quad (a)$$

Disminuyendo a x en $n\Delta h$

$$F_{xx} = \frac{1}{n\Delta h} \left[\frac{F(x, y) - F(x-n\Delta h, y)}{n\Delta h} - \frac{F(x-n\Delta h, y) - F(x-2n\Delta h, y)}{n\Delta h} \right]. \quad (b)$$

(a) y (b) se pueden escribir como

$$F_{xx} = \frac{1}{n\Delta h} \left[\frac{F(x+2n\Delta h, y) - F(x+n\Delta h, y)}{n\Delta h} - F_x \right] < 0 \text{ (x aumentada)}. \quad (c)$$

$$F_{xx} = \frac{1}{n\odot h} \left[F_x - \frac{F(x-n\odot h, y) - F(x-2n\odot h, y)}{n\odot h} \right] < 0 \text{ (x disminuida)}. \quad (d)$$

Como $F_x = 0$ en (a, b) , entonces, $F(a \pm n\odot h, b) = F(a, b)$. Por tanto, de (c) y (d) se tiene

$$F(a + 2n\odot h, b) < F(a + n\odot h, b) = F(a, b). \quad (e)$$

$$F(a - 2n\odot h, b) < F(a - n\odot h, b) = F(a, b). \quad (f)$$

Por (e) y (f) se tiene que

$$F(a, b) > F(a \pm 2n\odot h, b). \quad (g)$$

De igual manera se prueba con $F_{yy} < 0$ que

$$F(a, b) > F(a, b \pm 2n\odot h). \quad (h)$$

Sea, también, $F_{xy} \leq 0$. Entonces, para x aumentada en $n\odot h$ y y aumentada en $n\odot k$

$$F_{yx} = \frac{1}{n\odot k} \left[\frac{F(x+n\odot h, y+n\odot k) - F(x, y+n\odot k)}{n\odot h} - \frac{F(x+n\odot h, y) - F(x, y)}{n\odot h} \right]. \quad (i)$$

(j) se puede escribir

$$F_{yx} = \frac{1}{n\odot k} \left[\frac{F(x+n\odot h, y+n\odot k) - F(x, y+n\odot k)}{n\odot h} - F_x \right] \leq 0. \quad (j)$$

Como $F_x = 0$ en (a, b) , entonces

$$F(a + n\odot h, b + n\odot k) \leq F(a, b + n\odot k) = F(a, b). \quad (k)$$

Con x disminuida en $n\odot h$ también se obtiene

$$F(a - n\odot h, b - n\odot k) \leq F(a, b - n\odot k) = F(a, b). \quad (l)$$

Por (g), (h), (k) y (l) se tiene que $F(a, b)$ es un máximo, es decir

$$F(a, b) \geq F(a \pm 2n \odot h, b \pm 2n \odot k). \quad \blacklozenge A$$

Demostremos ahora (iii). Parte a) si F_{xx} y F_{yy} son de signos diferentes, entonces, por lo demostrado anteriormente $F(a, b)$ no puede ser ni máximo ni mínimo. En consecuencia es un punto de silla.

Sea b). Si, por ejemplo, $F_{xx} = 0$ y $F_{yy} < 0$ en (a, b) , entonces por (g)

$$F(a, b) = F(a \pm 2n \odot h, b). \quad (m)$$

Por (m), F no es creciente ni decreciente en la variable x alrededor de (a, b) , mientras que por ser $F_{yy} < 0$, F es creciente y luego decreciente en la variable y , alrededor del punto (a, b) . Todo lo anterior nos indica que $F(a, b)$ no es ni máximo ni mínimo. En consecuencia, es un punto de silla.

Sea c). Si $F_{xx} = F_{yy} = 0$ y $F_{xy} \geq 0$, por ejemplo, entonces se tiene

$$F(a, b) = F(a \pm 2n \odot h, b) = F(a, b \pm 2n \odot k). \quad (n)$$

$$F(a, b + n \odot k) \leq F(a + n \odot h, b + n \odot k). \quad (o)$$

Por (n), F no es ni creciente ni decreciente en x ni en y para ningún n , alrededor de (a, b) . Mientras que por (o), F es creciente en la variable x para un cierto n alrededor de (a, b) . Lo anterior no permite que $F(a, b)$ sea ni máximo ni mínimo. Luego, es un punto de silla. \blacklozenge

Nota: Si la función es de tres variables, entonces el criterio anterior será

$F(a, b)$ es máximo (relativo) si $F_{xx} < 0$, $F_{yy} < 0$, $F_{zz} < 0$, $F_{xy} \leq 0$, $F_{xz} \leq 0$, $F_{yz} \leq 0$.

$F(a, b)$ es mínimo (relativo) si $F_{xx} > 0$, $F_{yy} > 0$, $F_{zz} > 0$, $F_{xy} \geq 0$, $F_{xz} \geq 0$, $F_{yz} \geq 0$.

$F(a, b)$ es un punto de silla, si F_{xx} , F_{yy} y F_{zz} no son todos del mismo signo en (a, b) . Uno de ellos (dos de ellos) es cero y los otros (el otro) no en (a, b) . Todos ellos

nulos mientras que alguna de las parciales mixtas no es cero en (a, b) .

Note el lector que el criterio de decisión dado por el teorema 5.10, se comporta igual que el criterio del Hessiano, el cual tradicionalmente se estudia para decidir si un determinado punto crítico proporciona máximo, mínimo o punto de silla. Sin embargo, veamos que el criterio acá presentado tiene más alcance que el del Hessiano. Para ello veamos el siguiente típico ejemplo.

En la función determinada por: $F(x, y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$, se tiene que $(0, 0)$ es un punto crítico. Una vez hechos los cálculos de las derivadas parciales que se necesitan, se tiene

$$F_{xx}(0, 0) = 4; F_{yy}(0, 0) = 0; F_{xy}(0, 0) = 0.$$

Con el criterio del Hessiano se tiene $B^2 - AC = 0$. Luego, dicho criterio no puede asegurar nada sobre el punto $(0, 0)$. Pero el teorema 5.10 nos dice que $(0, 0)$ es un punto de silla (parte (b) de (iii)); como en efecto lo es.

Los multiplicadores de Lagrange se estudiarán (o se deberían estudiar) igual que como se ha hecho tradicionalmente. Sin embargo, el criterio de decisión, del teorema 5.10, también es aplicable en dicho estudio de los extremos condicionados.

CAPÍTULO VI

6. EL NÚMERO \mathcal{C} EN LA INTEGRACIÓN

6.1. Integración y Derivación

Así como adición y sustracción, multiplicación y división, potenciación y radicación, etc., son operaciones opuestas, así también la integración y la derivación son opuestas una de la otra. En esta primera sección de capítulo se demostrará tal hecho utilizando las propiedades de la derivación con el número \mathcal{C} . Para ello se necesitan las siguientes definiciones.

Integral Definida

Se denomina integral definida de f , en el intervalo $[a, b]$, a la expresión

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Antiderivada o Primitiva de f

La función $G(x)$ es una antiderivada o una primitiva de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, si se cumple que

- (a) G es continua en $[a, b]$.
- (b) $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

6.1.1. Teorema 6.1 (teorema fundamental del cálculo)

Sea f una función continua en $[a, b]$ y G una primitiva de f en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Demostración

Sabemos que $G'(x)n\mathcal{C} = G(x) - G(x - n\mathcal{C})$, $\forall x \in (a, b)$ y $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces

$$G'(b)\mathcal{C} = G(b) - G(b - \mathcal{C}). \quad (\text{a})$$

$$G'(b - \mathcal{C})\mathcal{C} = G(b - \mathcal{C}) - G(b - 2\mathcal{C}). \quad (\text{b})$$

•
•
•

$$G'(a + 2\mathcal{C})\mathcal{C} = G(a + 2\mathcal{C}) - G(a + \mathcal{C}). \quad (\text{h})$$

$$G'(a + \mathcal{C})\mathcal{C} = G(a + \mathcal{C}) - G(a). \quad (\text{i})$$

Sumando todas estas igualdades, haciendo $\mathcal{C} = dx$ y sabiendo que $G' = f$, se tiene

$$\sum_{x=a+\mathcal{C}}^{x=b} f(x)dx = G(b) - G(a). \quad (1)$$

Como $G'(a + \mathcal{C})\mathcal{C} = G'(a)\mathcal{C}$ y cambiando el símbolo \sum por el de \int , se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a). \quad \blacklozenge$$

Nota: antes de proseguir es necesario hacer la siguiente salvedad: colocamos el punto a como límite inferior porque $G'(a + \mathcal{C})\mathcal{C} = G'(a)\mathcal{C}$. Al hacer esto, estamos tomando un término (conjunto) más en nuestra suma infinita (transfinita). Sin embargo, la medida de este conjunto adicional es: $f(a)\mathcal{C}$, valor que para nuestros cálculos es cero. Esta es la razón por la cual en nuestro cálculo tradicional existen los **conjuntos de medida nula**. Pues, todo conjunto cuya extensión se pueda poner en línea recta, tiene medida $L \cdot \mathcal{C} = 0(\text{res})$, donde L es la longitud del conjunto y \mathcal{C} es la anchura. De esta manera, quedan justificados los siguientes dos hechos:

1) tomar a como límite no es ningún error. 2) existen los conjuntos de medida nula.

6.1.2. Teorema 6.2 (subdivisión del intervalo de integración)

Sea f una función continua en $[a, b]$ y G una primitiva de f . Sea $c \in (a, b)$.

Entonces $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Demostración

$$\int_c^b f(x)dx = G(b) - G(c). \quad (1)$$

$$\int_a^c f(x)dx = G(c) - G(a). \quad (2)$$

Por (1) y (2) se tiene

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = G(b) - G(a). \quad (3)$$

Por (3) y el teorema anterior

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \quad \blacklozenge$$

6.1.3. Integración como Opuesto de Derivación

Los dos teoremas anteriores permiten deducir fácilmente que la integración y la derivación son dos operaciones opuestas una de la otra. En efecto, si f es continua en $[a, b]$, G es una primitiva de f en $[a, b]$ y x es un punto cualquiera de (a, b) se tiene

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a). \quad (1)$$

Derivando ambos miembros de (1) se tiene

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = G'(x). \quad (2)$$

Como $G'(x) = f(x)$ se tiene por (2)

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x).$$

Es decir, la derivada en función de x de la integral $\int_a^x f(t)dt$, es la misma $f(x)$.

Lo que demuestra que *integración* y *derivación* son operaciones opuestas.

De (1) se tiene que si $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces, $G'(x) = f(x)$.

Nota: se acostumbra cambiar x por t en $\int_a^x f(t)dt$, por ser x dentro de este símbolo una variable muda. Por otra parte, si $G(x) + c$ es primitiva de $f(x)$ y, $F(x) + k$ también lo es (c y k constantes), entonces, $G'(x) = F'(x) = f(x)$. Lo que indica que *dos primitivas de f sólo difieren en una constante*.

6.2. Propiedades de la Integral Definida

La integral definida tiene muchas propiedades cuyas demostraciones son sencillas con base en los teoremas anteriores. Aquí sólo veremos la linealidad de una integral.

6.2.1. Propiedad de Linealidad

Como en la suma $kf(b) + kf(b - \Delta x) + \dots + kf(a)$, podemos sacar a k como factor común, entonces

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

Por otra parte, si $f(x) = g(x) + h(x)$, entonces, al ser $G'(x) = f(x)$ se tiene

$$\begin{aligned} & [g(b) + h(b)] + [g(b - \Delta x) + h(b - \Delta x)] + \dots \\ & \quad + [g(a) + h(a)] = \int_a^b [g(x) + h(x)]dx = \\ & = [g(b) + g(b - \Delta x) + \dots + g(a)] + [h(b) + \dots + h(a)] = \\ & \quad = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx = \int_a^b [g(x) + h(x)]dx. \quad (2)$$

Por (1) y (2) se tiene

$$\int_a^b [\alpha g(x) + \beta h(x)] dx = \alpha \int_a^b g(x) dx + \beta \int_a^b h(x) dx.$$

Todas las demás propiedades de la integral definida son sencillas de demostrar.

La expresión $\int_a^b g(x) dx = F(b) - F(a)$, siendo $F(x)$ primitiva de $g(x)$, se acostumbra a escribir $\int_a^b g(x) dx = [F(x)]_a^b$.

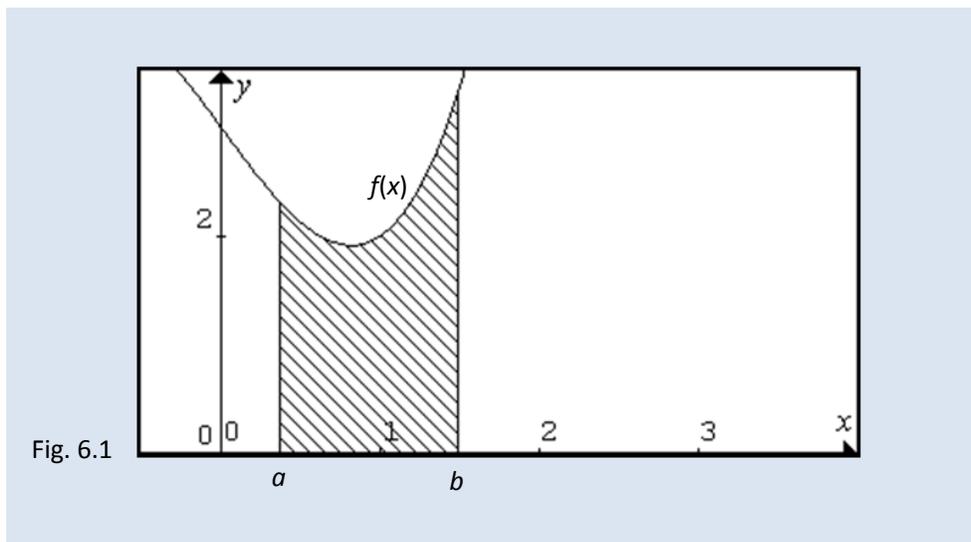
6.3. Aplicación de la Integral Definida

En esta sección, veremos algunas aplicaciones de la integral definida como por ejemplo, área de figuras planas, volúmenes de sólidos y longitud de un arco de curva en el plano.

6.3.1. La Integral Como un Área

En la figura 6.1 se tiene parte del gráfico de una función $f(x)$. El área de la porción de plano encerrada por la curva $f(x)$, el eje X y las rectas $x = b$ y $x = a$, viene dada por la fórmula

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (I)$$



Demostración

Obsérvese que el área A_i de un rectángulo de mínima anchura cuya longitud es $f(x_i)$ es: $A_i = f(x_i) \odot$. Por lo tanto, al sumar cada A_i desde b hasta a , se tiene

$$f(b) \odot + f(b - \odot) \odot + \dots + f(a) \odot = \int_a^b f(x). \quad (1)$$

Como el área A (figura rayada) es la suma de las infinitas A_i , se tiene por (1)

$$A = \int_a^b f(x). \quad \blacklozenge$$

6.3.2. Volumen de un Sólido de Revolución

Si en la figura 6.1 hacemos girar el área rayada alrededor del eje X , se obtiene un sólido de revolución, cuyo volumen viene dado por la fórmula

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Demostración

El área A_i de cada disco cuyo radio es $f(x)$ viene dado por

$$A_i = \pi [f(x)]^2. \quad (1)$$

Hagamos $G^2(x) = [f(x)]^2$. Como la suma del área de los infinitos discos es el volumen de toda la figura de revolución, se tiene que

$$V = \pi [f(b)]^2 \odot + \pi [f(b - \odot)]^2 \odot + \dots + \pi [f(a)]^2 \odot = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Es decir

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad \blacklozenge$$

6.3.3. Sólidos de Secciones Transversales Paralelas

Si el sólido no es de revolución, sino un sólido de secciones transversales paralelas, siendo el área de cada sección igual A_i , entonces, si cada A_i varía con x , la

fórmula de su volumen queda

$$V = \int_a^b A dx.$$

Demostración

Haciendo $f(x) = A(x)$, se tiene que el volumen es la suma de las infinitas A_i .
Como

$$A(b)\Delta x + A(b - \Delta x)\Delta x + \dots + A(a)\Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

Entonces

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad \blacklozenge$$

6.3.4. Longitud de un Arco de Curva Plana

Sea $\mathcal{L}(a, b)$ la longitud del arco, desde a hasta b , de una curva cualquiera en el plano. La mínima longitud de arco será el límite, cuando Δx tiende a Δ , de la expresión: $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Es decir (acá la función que genera el arco es $y = f(x)$ que se supone continua en $[a, b]$).

$$\mathcal{L}_{\min}(x, x + \Delta) = \lim_{\Delta x \rightarrow \Delta} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \quad (1)$$

Como

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x. \quad (2)$$

Por (1) y (2) y sabiendo que $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow \Delta} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ se tiene, llamando dx a Δ

$$\mathcal{L}_{\min}(x, x + \Delta) = \int \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (3)$$

Haciendo

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = g(x). \quad (4)$$

Se tiene por (3) y (4)

$$\mathcal{L}_{\min}(x, x + \Delta x) = g(x) \Delta x. \quad (5)$$

Como la suma de las infinitas longitudes mínimas desde a hasta b es la longitud del arco de curva pedido, se tiene que

$$\mathcal{L}(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad \blacklozenge$$

De todo lo anterior, se concluye que: “toda suma de infinitos términos de la forma

$$G(b) \Delta x + G(b - \Delta x) \Delta x + \dots + G(a) \Delta x. \quad (I)$$

Es una integral de la forma $\int_a^b G(x) dx$, siempre que $G(x)$ sea continua en $[a, b]$. La suma (I) es lo que se conoce como *suma de Riemann*.

Observación importante: Habrá notado el(la) lector(a) que no es necesario hablar de un número único que represente el área de una superficie o el volumen de un sólido, puesto que si, por ejemplo, existieran dos números, A_1, A_2 , que dan la misma área de una determinada superficie, se tendría

$$A_1 = G(b) \Delta x + G(b - \Delta x) \Delta x + \dots + G(a) \Delta x. \quad (1)$$

$$A_2 = G(b) \Delta x + G(b - \Delta x) \Delta x + \dots + G(a) \Delta x. \quad (2)$$

Y por (1) y (2), $A_1 = A_2$.

6.4. Integrales en Más de una Variable

Veamos ahora lo correspondiente a la integración en dos o más variables. Sólo se expondrá: *la integración iterada*, ya que, áreas en doble integral, volúmenes en doble y en triple integral y todo lo demás relacionado es aplicación de lo visto hasta

ahora.

6.4.1. Integración Iterada

Se demostrará que una integral de la forma: $\iint_R f(x, y) dy dx$, se puede resolver en la forma iterada:

$$\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Donde R está determinada por: $\{(x, y): g_2(x) \leq y \leq g_1(x); b \leq x \leq a\}$.

En efecto, si definimos el símbolo \iint_R por

$$\iint_R = \sum_a^b \sum_{g_1(x)}^{g_2(x)}. \quad (\text{A})$$

Entonces, al integrar a y desde $g_1(x)$ hasta $g_2(x)$, y a x desde a hasta b , se tiene la doble integral de toda la región. Luego, para x constante y y variable, se tiene

$$f(x, g_2(x)) \odot + f(x, g_2(x) - \odot) \odot + \dots + f(x, g_1(x)) \odot = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1)$$

Haciendo $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = G(x, y)$, se tiene, para y constante y x variable

$$\begin{aligned} G(b, y) \odot + G(b - \odot, y) \odot + \dots + G(a, y) \odot &= \int_a^b G(x, y) dx = \\ &= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Por (1), (2)

$$\sum_a^b \sum_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (3)$$

Y por (3) y (A)

$$\iint_R f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Igualdad que, vista sin los corchetes, es

$$\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad \blacklozenge$$

Acá, como en el caso tradicional, el orden de integración no influye, siempre que las variables tengan bien definidos sus límites de variación.

Ahora, es fácil generalizar a tres o más variables y probar todos los teoremas donde intervengan las sumas de Rieman.

CAPÍTULO VII

7. EL NÚMERO \textcircled{c} EN LA GEOMETRÍA

7.1. El Caos Geométrico-Algebraico

Ya hemos visto cómo se comporta el número \textcircled{c} en las funciones reales. Ahora se verá cómo dicha razón es la causa del caos en la geometría, al realizar construcciones con regla y compás. En lo adelante, *regla y compás* se abreviará por *re-com*.

7.1.1. Potencias Pares Geométricas y Algebraicas

Sabemos que para todo número real x existe $k \in \mathbb{N}^*$ y $y \in \mathbb{R}$ tal que $x = y + k\textcircled{c}$. Si x es constructible, la regla y el compás no determinan la posición de y ni de $k\textcircled{c}$. Entonces, con re-com se obtiene el cuadrado geométrico de x en la forma $xx = x^2$. Como el cuadrado algebraico de x en función de y es $x^2 = y^2 + 2ky\textcircled{c}$, podemos probar que el cuadrado geométrico de x y el algebraico coinciden, ya que en $(y + k\textcircled{c})^2$, el término $(k\textcircled{c})^2$ es nulo. En efecto, se tiene que

$$x^2 = (y + k\textcircled{c})^2 = y^2 + 2ky\textcircled{c} + k^2\textcircled{c}^2 = y^2 + 2ky\textcircled{c}.$$

Luego

x^2 es la potencia geométrica y $y^2 + 2ky\textcircled{c}$ es la potencia algebraica.

Ahora bien, sea

$$x^2 = y^2 + 2ky\textcircled{c}. \quad (1)$$

De (1) se tiene que cuando con re-com se eleva al cuadrado a x^2 (utilizando el método de Rodolfo Nieves, sección 7.2), se está elevando a la vez a $(y^2 + 2ky\textcircled{c})$ al cuadrado. Entonces

$$(x^2)^2 = x^4 = (y^2 + 2ky \odot)^2 = y^4 + 4ky^3 \odot. \quad (2)$$

De igual manera se obtiene de (1) que cuando se eleva al cubo a x^2 , también se eleva al cubo a $(y^2 + 2ky \odot)$. Es decir

$$(x^2)^3 = x^6 = (y^2 + 2ky \odot)^3 = y^6 + 6ky^5 \odot. \quad (3)$$

Observe que el cubo geométrico es $x^3 = x^2 \cdot x = (y^2 + 2ky \odot)x = xy^2 + 2kxy \odot$.

Luego

$$(x^3)^2 = (xy^2 + 2kxy \odot)^2 = x^2(y^4 + 4ky^3 \odot) = (y^2 + 2ky \odot)(y^4 + 4ky^3 \odot) = y^6 + 6ky^5 \odot.$$

En general, al elevar, con re-com, a la potencia n a x^2 , también se está elevando a la n al segundo miembro, en (1). En consecuencia, todas las potencias pares geométricas y algebraicas coinciden, cuando se utiliza el método Nieves.

Ahora, si lo hacemos sólo utilizando el triángulo rectángulo y no todo el plano cartesiano se tiene

$$x^4 = x^2 \cdot x^2 = (y^2 + 2ky \odot)(y^2 + 2ky \odot) = y^4 + 4ky^3 \odot. \quad (4)$$

$$x^6 = x^4 \cdot x^2 = (y^4 + 4ky^3 \odot)(y^2 + 2ky \odot) = y^6 + 6ky^5 \odot. \quad (5)$$

$$x^8 = x^6 \cdot x^2 = (y^6 + 6ky^5 \odot)(y^2 + 2ky \odot) = y^8 + 8ky^7 \odot. \quad (6)$$

En general

$$x^{2n} = x^{2n-2} \cdot x^2 = (y^{2n-2} + (2n-2)ky^{2n-3} \odot)(y^2 + 2ky \odot) = y^{2n} + 2kny^{2n-1} \odot.$$

Lo que nos dice que los x^{2n} coinciden geométrica y algebraicamente. ♦

Sin embargo, como la regla y el compás no operan con el número y , para elevar a x a la potencia tres, primero se le eleva a la dos y luego multiplicamos por x , obteniéndose que

$$(x^2).x = x^3 = (y^2 + 2ky) x = xy^2 + 2kxy.$$

Mientras que el cubo algebraico es

$$x^3 = y^3 + 3ky^2.$$

Observación: Cuando se dice que coinciden (*iguales geométrica y algebraicamente*) se está queriendo decir que, si pudiésemos construir la $\sqrt[3]{2}$ geométrica, por ejemplo, su valor numérico sería igual que su verdadero valor algebraico. Esto contradiría al teorema que demostraremos a continuación.

7.1.2. Teorema 7.1 (sobre las potencias impares)

La n -ésima potencia geométrica de algunos reales x es un poco mayor que la n -ésima potencia algebraica de dichos números cuando n es impar mayor o igual que tres.

Demostración (se exceptúa la forma $x = \sqrt[n]{a}$)

Sea x un número real cualquiera constructible con re-com. Como las potencias pares tanto geométricas como algebraicas coinciden, entonces se tiene, para n impar, que

$$x^{n-1} = y^{n-1} + (n-1)ky^{n-2} \text{ (potencias pares; geométrica y algebraica)}$$

$$x^n = xy^{n-1} + (n-1)kxy^{n-2} \text{ (potencia impar geométrica). (a)}$$

$$x^n = y^n + nky^{n-1} \text{ (potencia impar algebraica). (b)}$$

Se probará que, para los segundos miembros, (a) es mayor que (b). Veamos.

$$x = y + k. \tag{1}$$

De (1) se tiene que

$$x > y. \tag{2}$$

Por (2)

$$(n-1)x > (n-1)y. \quad (3)$$

Al operar en (3) se tiene que

$$y > ny - (n-1)x. \quad (4)$$

Multiplicando en (4) por y^{n-2} se tiene

$$y^{n-1} > ny^{n-1} - y^{n-2}(n-1)x. \quad (5)$$

Multiplicando el primer miembro de (5) por $x-y$ y el segundo por k se tiene

$$y^{n-1}(x-y) > [ny^{n-1} - y^{n-2}(n-1)x]k. \quad (6)$$

Y al operar en (6) se tiene que

$$xy^{n-1} + (n-1)kxy^{n-2} > y^n + nky^{n-1}. \quad \blacklozenge$$

Esto, que acá se denominará *el caos geométrico-algebraico*, fue lo que hizo imposible a los matemáticos del pasado que lograran la solución de los tres problemas clásicos de la geometría.

Nota aclaratoria: Los valores $y^n + nky^{n-1}$ y $xy^{n-1} + (n-1)kxy^{n-2}$ son iguales para nuestros cálculos porque nunca podremos ubicar a x al lado de y estando infinitamente cerca; pero algebraicamente son diferentes. En consecuencia, *geometría y álgebra están en desfase para números $\sqrt[n]{x}$ no exactos y n impar.*

7.2. El Método para la Potenciación Geométrica

A continuación, veremos el método para elevar a la potencia n a cualquier segmento que determinemos sobre los ejes coordenados (X, Y) con una unidad fijada de antemano. Dicho método, pertenece a *Rodolfo Nieves* (Tinaco-Cojedes).

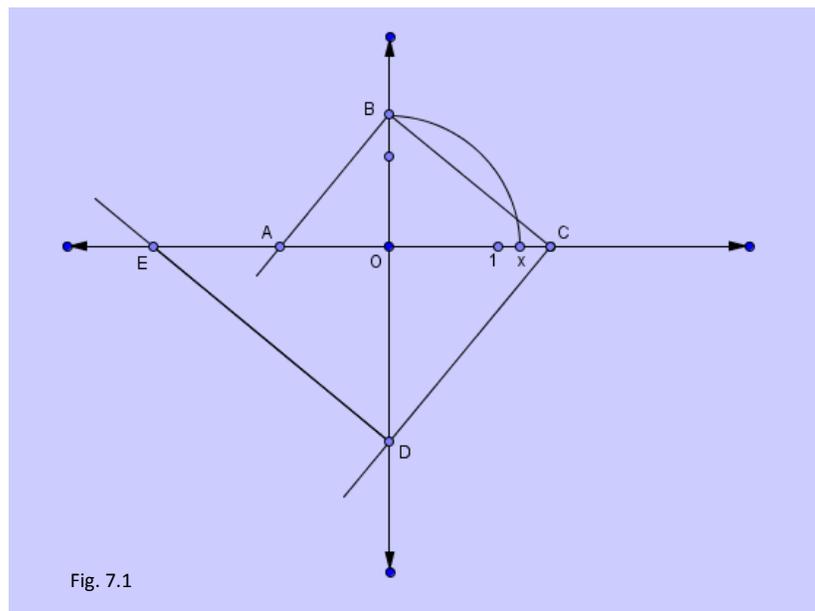
En la figura 7.1 se tienen los dos ejes coordenados (X, Y). En ellos se ha

determinado la unidad y se ha tomado al azar un punto x sobre el eje X .

En la figura se tiene $OA = 01$ y se ha determinado $OB = 0x = x$. Por A y B se ha trazado la recta \overleftrightarrow{AB} . Por el punto B se ha trazado una perpendicular a \overleftrightarrow{AB} que corta al eje X en el punto C . Por el punto C se ha trazado otra perpendicular a \overleftrightarrow{BC} que corta al eje Y en D . Por el punto D se ha trazado otra perpendicular a \overleftrightarrow{CD} que corta al eje X en E . Continuando este proceso se obtienen todas las potencias del número real x . Veamos por qué.

En el triángulo ABC rectángulo en B se tiene que $OB = x$ y $OA = 1$. Entonces, por Euclides se tiene

$$x^2 = 0C. \quad (1)$$



En el triángulo BCD rectángulo en C se tiene $OB = x$ y $OC = x^2$. Entonces, nuevamente por Euclides se tiene

$$x^4 = 0D.x. \quad (2)$$

Y por (2) se tiene que

$$x^3 = 0D. \quad (3)$$

De igual manera se obtiene del triángulo CDE rectángulo en D que

$$x^4 = 0E. \quad (4)$$

Y al continuar el proceso se obtiene $x^5, x^6, \dots, x^n, \dots$, etc.

7.3. Duplicación, Cuadratura y Trisección

Se mostrará acá la verdadera causa por la cual es imposible la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la trisección de un ángulo arbitrario usando sólo la regla y el compás.

7.3.1. Imposibilidad de la Duplicación

Con base en todo lo que se ha visto, podemos ya demostrar la imposibilidad de la duplicación del cubo con regla y compás.

a) Si x es constructible, entonces x^n es constructible $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Si x es constructible y $\sqrt[n]{x}$ no es exacta, entonces $\sqrt[n]{x}$ es constructible sólo cuando $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Demostración

La parte a) ya quedó demostrada en la sección 7.2. Por lo tanto, sólo resta probar la parte b). Esto es sencillo hacerlo con base en el teorema 7.1 de las potencias impares.

En efecto, sea n impar mayor o igual a tres y $\sqrt[n]{x}$ no es exacta. Si x es constructible y $\sqrt[2n]{x}$ también lo es, entonces, el número $\sqrt[2n]{x}$ es coincidente *geométrico-algebraicamente*. Por lo tanto, $(\sqrt[2n]{x})^2 = \sqrt[n]{x}$ es coincidente *geométrico-algebraicamente* siendo n impar diferente de la unidad, lo que viola el teorema 7.1.

Entonces ${}^{2^n}\sqrt{x}$ no es constructible cuando ${}^n\sqrt{x}$ no es exacta y n es impar diferente de la unidad. Esto nos dice que ${}^{2^k n}\sqrt{x}$ no es constructible si n es impar mayor o igual que tres. Ahora bien, como ${}^{2^n}\sqrt{x}$ siempre coincide *geométrico-algebraicamente* ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), entonces ${}^{2^n}\sqrt{x}$ siempre es constructible, si x lo es.

De todo lo anterior, todo segmento (longitud) construida con re-com es de la forma x^n o ${}^{2^n}\sqrt{x}$ (x constructible). En consecuencia, **la duplicación del cubo** no es posible realizarla con re-com, ya que $\sqrt[3]{2}$ no es constructible, por no ser de la forma ${}^{2^n}\sqrt{x}$. ♦

7.3.2. Imposibilidad de la Cuadratura

Demostraremos ahora que el número π no es constructible. Para ello, primero demostremos que π no se puede escribir como fracción finita. Veamos.

$$\frac{\pi}{2} \neq \frac{p}{q}. \quad (p \text{ y } q \text{ finitos}). \quad (1)$$

En efecto, $\pi/2$ lo podemos escribir de la forma (*de J. Wallis*)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots \quad (2)$$

Estudiemos minuciosamente esta productoria. La cantidad de factores en el denominador desde el 1 hasta el segundo 5, es cinco. Hasta el segundo 7 es siete, etc. Por tanto, deberían existir ω factores en dicha productoria. Sin embargo, se puede probar que 2^ω no es múltiplo de todos los naturales infinitos (ver Apéndice, sección A.3.10) y, como al efectuar semisumas en el intervalo [3, 4] (efectúela como en las secciones A.3.3, A.3.4 y A.3.10) se obtiene que $\pi = 3 + b(\omega)/2^\omega$, entonces debe ser (con $a(i)$ par)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{a(i)}{a(i)-1} \cdot \frac{a(i)}{a(i)+1}. \quad (3)$$

Ahora, observemos que los dos 3 del denominador se cancelan con los dos 3 que están en los dos 6 del numerador; quedando $6 - 3 = 3$ impares en el denominador, hasta el segundo 6. Los dos 5 se cancelan con los que están en los dos 10; quedando una cantidad de $10 - 5 = 5$ impares hasta el segundo 10. Continuando la cancelación de impares del denominador, notamos que podemos cancelar, hasta llegar al segundo $a(i)$ par, todos los impares, menos una cantidad igual a $a(i) - \frac{1}{2}a(i) = \frac{1}{2}a(i)$ impares. Esto nos dice que en el denominador nos quedará el producto de $\frac{1}{2}a(i)$ números impares; siendo dicho producto un número transfinito de la forma $b(i)$. Seguidamente, estudiemos el numerador.

En el numerador queda el producto $2^{a(i)+1} \cdot b(i)$. Donde $b(i)$ es el producto de los pares que quedan al extraer un 2 de los que están en 4, 6, 8, ..., $a(i)$ y los impares que están en 12, 20, 24, etc. Ahora bien, el número $b(i) \cdot 2^{a(i)+1}$ no contiene como factores primos a cada uno de los impares restantes del denominador, donde muchos de ellos serán primos infinitos (ver por qué en Apéndice, sección A.3.10), pues, de contenerlos, π sería entero; y sabemos que esto no es así. Por lo tanto, en el denominador queda al menos uno de los impares (primo infinito); por lo que dicho denominador, simplificado, será de la forma $c(i)$. Por otra parte, el numerador, una vez simplificado, será de la forma $d(i)$.

Por todo lo anterior, el número $\pi/2$ tiene una fracción no simplificable de la forma

$$\frac{\pi}{2} = \frac{d(i)}{c(i)}. \quad (4)$$

Y por (4), π tiene una fracción no simplificable de la forma

$$\pi = \frac{e(i)}{c(i)} \quad \text{y} \quad \pi^n = \left(\frac{e(i)}{c(i)}\right)^n = \frac{f(i)}{g(i)}. \quad (5)$$

Pasando ahora a la constructibilidad, y sabiendo que para construir un natural

con re-com éste debe ser finito, veamos que π no puede ser constructible, pues, si lo fuera, sería un número de la forma $\frac{p}{q}$ ó de la forma $\sqrt[k]{\frac{p}{q}}$ (p y q finitos). Por lo visto anteriormente, π no puede tener ninguna de estas formas. Por lo tanto, π no es constructible y, en consecuencia, la cuadratura del círculo no es posible realizarla sólo con re-com. ♦

7.3.3. Imposibilidad de la Trisección

Como tercer problema no resoluble con re-com se presentará acá la trisección de un ángulo arbitrario. Pero antes, es necesario hacer la rectificación de un error que se cometió en el trabajo presentado en la página web *monografías.com*, titulado: **Hacia una Matemática sin Contradicciones**. Allí se supuso que la trisección era posible (ver dicha página). Sin embargo, la demostración geométrica que se dio es errónea. Por otra parte, la demostración usando la razón de continuidad fue como sigue. Se hizo

$$\beta' = \beta + n\odot \text{ y } \frac{\beta'}{3} = \frac{\beta}{3} + \frac{n}{3}\odot. \quad (1)$$

Como $\frac{\beta'}{3}$ alcanza el valor de φ (cuando $\beta = 90^\circ$), se hizo

$$\varphi' = \varphi + \frac{n}{\lambda}\odot (\lambda > 3). \quad (2)$$

Ahora bien, en (1) el que crece independientemente es el natural n y su divisor permanece constante. Pero en (2) el factor λ no permanece constante (varía en \mathbb{R}). Esta es la razón por la que, en la igualdad

$$\text{Sen}(\beta') - 2\text{Sen}(\varphi') = \text{Sen}\beta - 2\text{Sen}\varphi + n(\text{Cos}\beta - \frac{2}{\lambda}\text{Cos}\varphi)\odot. \quad (3)$$

El número

$$n(\text{Cos}\beta - \frac{2}{\lambda}\text{Cos}\varphi)\odot. \quad (4)$$

Es positivo, para $\beta \leq 75^\circ$ y negativo para $75^\circ < \beta \leq 90^\circ$.

Ahora bien, si (4) es nulo, de (1), (2) y (3) se tiene

$$\frac{\text{Sen}\beta' - \text{Sen}\beta}{2\text{Sen}\varphi' - 2\text{Sen}\varphi} = \frac{\lambda\text{Cos}\beta}{2\text{Cos}\varphi} = 1. \quad (5)$$

Pero, como (5) se debe cumplir para cualquiera que sea el ángulo β , entonces, cuando β se aproxima a 90° veamos lo que sucede.

Si $\beta = 90^\circ - k\odot$ ($k \in \mathbb{R}^*_{+}$), entonces $\text{Cos}\beta = k\odot$. En consecuencia, de (5) se obtiene

$$\lambda k\odot = 2\text{Cos}\varphi. \quad (\lambda, k \in \mathbb{R}). \quad (6)$$

Pero, en (6) φ está muy próximo a 30° . Por tanto, $2\text{Cos}\varphi > 1$ y no es un infinitésimo de la forma $\lambda k\odot$ ((6) sólo es posible si $\lambda k > 2^{\odot}$, pero $\lambda k < 2^{\odot} \forall \lambda, k \in \mathbb{R}$; por 1.2.4). Por lo tanto, (6) es una contradicción. Como esta contradicción es por suponer que (4) es nula, se concluye que esto es falso, es decir, en (3) debemos tomar

$$n(\text{Cos}\beta - \frac{2}{\lambda}\text{Cos}\varphi) > 1$$

Y, por tanto, $n(\text{Cos}\beta - \frac{2}{\lambda}\text{Cos}\varphi)\odot > \odot > 0$.

Una vez hechas las rectificaciones anteriores, pasemos a ver por qué es imposible la trisección de un ángulo cualquiera.

De la fórmula

$$\text{Sen}(3\alpha) = 3\text{Sen}(\alpha) - 4\text{Sen}^3(\alpha). \quad (1)$$

Se tiene

$$\text{Sen}(\alpha) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\text{Sen}\alpha - \frac{1}{4}\text{Sen}3\alpha}. \quad (2)$$

De (2) se tiene que el ángulo 3α es trisecable únicamente cuando se cumpla que

$$\frac{3}{4}\text{Sen}(\alpha) - \frac{1}{4}\text{Sen}3\alpha = \lambda^3$$

con λ constructible. Y este λ es constructible, por el teorema 7.2, cuando se cumple que $\text{Sen}(\alpha)$ es de la forma $\sqrt[2^k]{a}$ (a racional finito) o de la forma $\frac{a}{b}$ (siendo a y b enteros finitos y $b \neq 0$, ya que $k(i) / l(i)$ es constructible si es de la forma $\sqrt[2^k]{a/b}$). Pero, no en todos los ángulos se cumple que $\text{Sen}(\alpha)$ tiene la forma anterior, en consecuencia, no siempre se tendrá que

$$\frac{3}{4}\text{Sen}(\alpha) - \frac{1}{4}\text{Sen}3\alpha = \lambda^3 \text{ (}\lambda \text{ constructible)}$$

Entonces, **no todos los ángulos** son trisecables. ♦

CAPÍTULO VIII

8. FIN DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

8.1. Unicidad de la Recta que Pasa por Dos Puntos

Se presentará en esta primera sección de este capítulo la demostración del postulado de unicidad de la recta que pasa por dos puntos distintos.

Se supone conocido por el lector todo lo relacionado con rectas, puntos, planos y espacio, así como puntos colineales y coplanarios.

8.1.1. Postulados de Incidencia

Los primeros cuatro postulados que dan nacimiento a toda geometría que trate de rectas y planos en el espacio son los siguientes:

Postulado 1 (de los dos puntos distintos)

“Por dos puntos distintos cualesquiera pasa una recta”.

Obsérvese que acá no se está postulando la unicidad de dicha recta. Esto es porque la unicidad es demostrable a partir de los demás postulados de incidencia.

Postulado 2 (de la cantidad mínima de puntos)

- a) “Toda recta contiene al menos dos puntos distintos”.
- b) “El plano contiene al menos tres puntos distintos no colineales”.
- c) “El espacio contiene al menos cuatro puntos distintos no coplanarios”.

Postulado 3 (de los tres puntos distintos)

“Para cada tres puntos distintos existe al menos un plano que los contiene”.

Postulado 4 (de la recta en el plano)

“Toda recta que tiene dos de sus puntos en un plano, está contenida totalmente en dicho plano”.

Para la demostración de unicidad de la recta que pasa por dos puntos distintos sólo se necesitan los siguientes dos teoremas.

8.1.2. Teorema 8.1 (el plano que contiene a r y no a s)

Si dos rectas se intersecan en algún punto (por postulado 1 y postulado 2, parte b, lo hacen), entonces existe al menos un plano que contiene a una pero no a la otra.

Demostración:

Sean r y s dos rectas distintas y supongamos que se intersecan en algún punto A . Entonces

$$r \neq s \text{ y } A \in (r \cap s). \quad (1)$$

Como $r \neq s$, entonces existe al menos un punto $B \neq A$ que pertenece a r pero no a s o viceversa. Entonces, sea

$$B \neq A, B \in r \text{ y } B \notin s. \quad (2)$$

Como s también contiene al menos dos puntos, sea

$$C \neq A \text{ y } C \in s. \quad (3)$$

Por (1), (2) y (3)

$$A, B \text{ y } C \text{ son distintos.} \quad (4)$$

Por (4) y parte c del postulado 2, existe un punto D , distinto a A, B y C tal que

$$A, B, C, D \text{ son no coplanarios.} \quad (5)$$

Por (4) y (5)

A, B y D son distintos. (6)

Por (6) y el postulado 3, existe al menos un plano β que contiene a A, B y D.
Por lo tanto

$\exists \beta / A, B, D \in \beta.$ (7)

Por (1), (2) y (7)

$A, B \in r$ y $A, B \in \beta.$ (8)

Por (8) y el postulado 4

$r \subset \beta.$ (9)

Por (5), (7) y definición de puntos coplanarios

$C \notin \beta.$ (10)

Por (3), (10) y definición de inclusión

$s \not\subset \beta.$ (11)

Y por (9) y (11)

$\exists \beta / r \subset \beta$ y $s \not\subset \beta.$ ♦

Ahora se está en condiciones de demostrar que si dos rectas se intersecan en algún punto, éste es único.

8.1.3. Teorema 8.2 (intersección de dos rectas)

Si dos rectas se intersecan en algún punto, éste es único.

Demostración:

Sean r y s dos rectas distintas y supongamos que se intersecan en algún punto A. Entonces

$$r \neq s \text{ y } A \in (r \cap s). \quad (1)$$

Por (1) y el teorema 8.1

$$\exists \beta / r \subset \beta \text{ y } s \not\subset \beta. \quad (2)$$

Supongamos, como *hipótesis temporal*, que r y s se intersecan en algún otro punto B distinto de A. Entonces

$$\exists B / B \neq A \text{ y } A, B \in (r \cap s). \quad (3)$$

Por (2) y (3)

$$A, B \in r \text{ y } r \subset \beta. \quad (4)$$

Por (4)

$$A, B \in \beta. \quad (5)$$

Por (3) y (5)

$$A, B \in s \text{ y } A, B \in \beta. \quad (6)$$

Por (6) y el postulado (4)

$$s \subset \beta. \quad (7)$$

Como (7) contradice a (2) y la contradicción se genera a partir de la hipótesis temporal (3), entonces (acá se usará el símbolo \neg como negación)

$$\neg \exists B / B \neq A \text{ y } A, B \in (r \cap s). \quad (8)$$

Por (1) y (8)

$$(r \cap s) = \{A\}. \quad \blacklozenge$$

Ahora, como corolario de este teorema 8.2, se tiene

Corolario 8.2.1

La recta que pasa por dos puntos distintos es única.

En efecto, si por dos puntos distintos pasaran dos rectas distintas, éstas se estarían intersecando en dos puntos distintos, lo que contradiría al teorema anterior. Así, la recta que pasa por dos puntos distintos es única. ♦

8.1.4. Consecuencias del Teorema 8.2

La consecuencia directa del teorema 8.2 es la desaparición de la geometría elíptica como tal; pasando a ser sólo el estudio de las geodésicas de una esfera. Veamos el porqué.

El plano para la geometría elíptica es la esfera y en ésta los grandes círculos son las rectas. Según los postulados de esta geometría, por dos puntos distintos pasa al menos una recta. Además, existen pares de puntos en el plano de dicha geometría por los cuales pasa más de una recta. Estos son los puntos conocidos como antípodas. Sin embargo, en los cinco postulados que dan nacimiento a dicha geometría, están implícitos los cuatro postulados de incidencia; pues sin éstos, es imposible el nacimiento de geometría alguna.

Ahora bien, al demostrarse que por dos puntos distintos no puede pasar más de una recta, entonces esta geometría no es una geometría de líneas rectas, sino la aplicación de la geometría euclidiana, con algunas restricciones, al estudio de las geodésicas de la esfera; que es como se le debe tener.

De esta manera, queda esclarecido porqué *Beltrami* y *Klein* dedujeron que las geometrías no euclidianas eran consistentes si la euclidiana lo era, puesto que dichas geometrías (las no euclidianas) no son más que aplicaciones de aquella.

8.2. El Teorema de las Paralelas

El teorema de las paralelas o quinto postulado de Euclides en su forma de

Playfair (físico y matemático escocés) se enuncia así:

“Por un punto exterior a una recta r pasa una única paralela a r ”.

En la enunciación (sin demostración) de los teoremas a continuación, se supone que el lector conoce todo lo concerniente a paralelismo y perpendicularidad, así como la congruencia de triángulos.

Para el teorema de las paralelas se necesitan los siguientes teoremas preliminares.

8.2.1. Teorema 8.3 (perpendicular no común a dos rectas)

“Sean r , s y t rectas en un plano tales que s es secante a r y a t con s perpendicular a t en B_0 pero no perpendicular a r en su punto de corte A_0 ; además, toda perpendicular a r corta a t y toda perpendicular a t corta a r . Entonces, existe un conjunto infinito C_p de rectas $\overleftrightarrow{A_i B_i}$ y $\overleftrightarrow{B_i A_{i+1}}$ tales que $\overleftrightarrow{A_i B_i} \perp t$ en B_i y $\overleftrightarrow{B_i A_{i+1}} \perp r$ en A_{i+1} , $\forall i \in \mathbb{Z}$ ”.

La figura 8.1 ilustra la situación general ($\angle A_i A_0 B_0$ es agudo, $i > 0$).

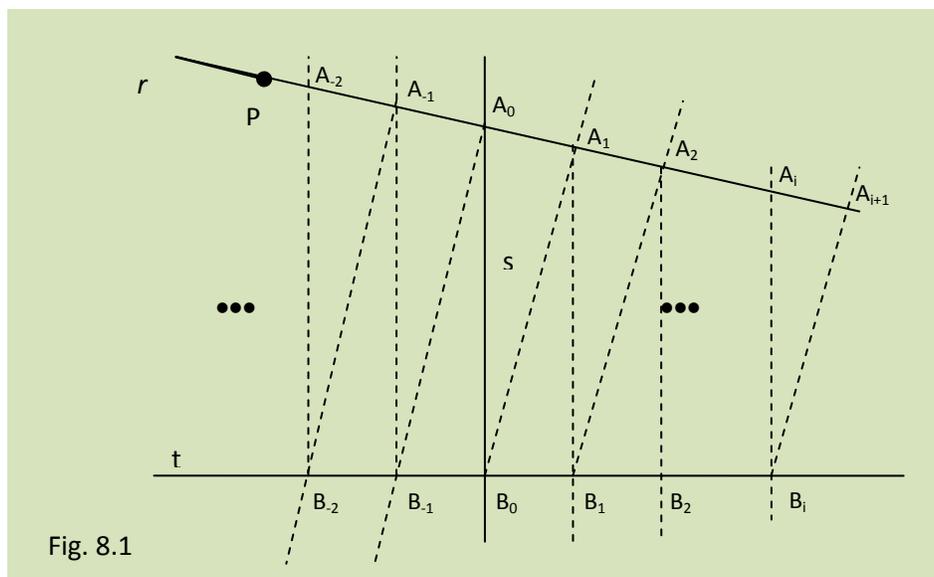


Fig. 8.1

Las demostraciones de todos los teoremas que se enunciarán acá están detalladas en el libro “**Los fundamentos de la geometría**” (Liberación de la geometría del postulado de las paralelas, registro SAPI # 4923) del autor.

Note el lector que, como $s = \overleftrightarrow{A_0B_0}$ no es perpendicular a r en A_0 , entonces, por B_0 pasa una perpendicular a r en A_1 (la recta $\overleftrightarrow{B_0A_1}$) y A_1 está a la derecha de A_0 , por ser $\angle A_1A_0B_0$ (a la derecha de s) agudo. Ahora, como $\overleftrightarrow{B_0A_1} \perp t$ en B_0 , entonces, por A_1 pasa una perpendicular a t en B_1 (la recta $\overleftrightarrow{A_1B_1}$) y B_1 está a la derecha de B_0 . Continuando el proceso por ambos lados de s se obtiene el conjunto infinito

$$C_p = \{ \overleftrightarrow{A_iB_i} \text{ y } \overleftrightarrow{B_iA_{i+1}} / \overleftrightarrow{A_iB_i} \perp t \text{ en } B_i \text{ y } \overleftrightarrow{B_iA_{i+1}} \perp r \text{ en } A_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z} \}.$$

Es fácil probar que el conjunto C_p no finaliza en puntos finitos de r y t , si éstas no se cortan. Por lo tanto, del teorema anterior se puede inferir el otro teorema siguiente.

8.2.2. Teorema 8.4 (rectas sin perpendicular común)

“Sean r , s y t rectas en un plano tales que s es secante a r y a t con s perpendicular a t en B_0 pero no perpendicular a r en el punto de corte A_0 ; además, toda perpendicular a r corta a t y toda perpendicular a t corta a r . Entonces, no existe ninguna recta que sea perpendicular tanto a t como a r ”.

La figura 8.2 ilustra la situación general.

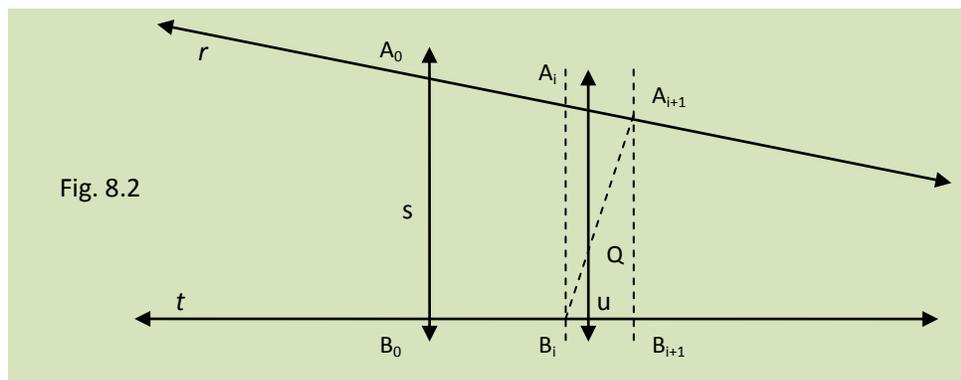


Fig. 8.2

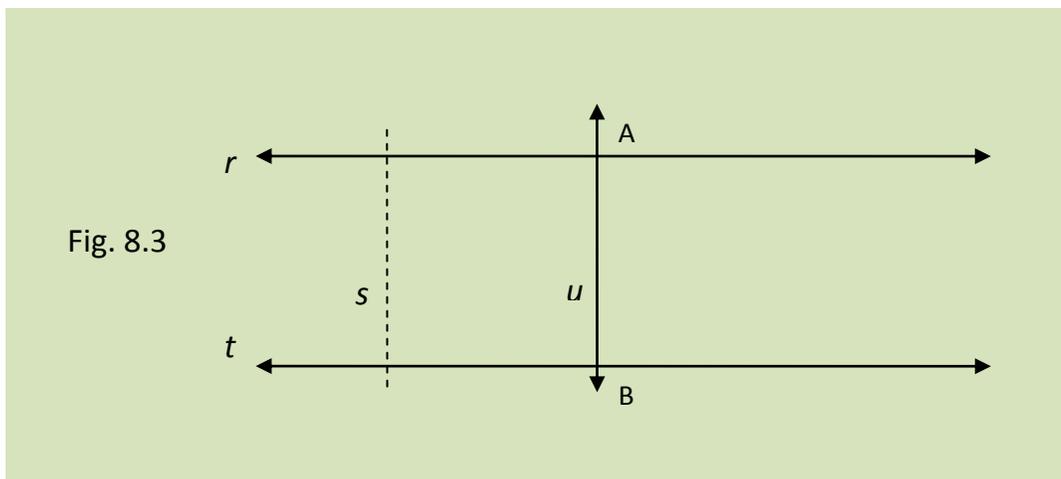
En efecto, si existiera una perpendicular común a r y t , ésta sería diferente a las rectas del conjunto C_p deducido anteriormente. En consecuencia, dicha recta estaría entre las rectas $\overleftrightarrow{A_i B_i}$ y $\overleftrightarrow{B_{i+1} A_{i+1}}$, y, por tanto, cortaría en un punto Q a la recta $\overleftrightarrow{B_i A_{i+1}}$, la cual también es perpendicular a r en A_{i+1} . Así, por Q estarían pasando dos perpendiculares a r , lo que sería un absurdo.

Ahora, se definen **paralelas cap**, a dos rectas en un plano paralelas y **cortadas ambas perpendicularmente** por una secante s . Es fácil determinar que, en dos de tales rectas, cada perpendicular a una corta a la otra. En consecuencia, es fácil probar el siguiente teorema

8.2.3. Teorema 8.5 (la perpendicular común)

“En un plano, si r y t son paralelas *cap* y una recta u es perpendicular a una de ellas, también es perpendicular a la otra”.

Este teorema fue el que muchos matemáticos del pasado trataron de probar inútilmente. De haber podido demostrar este teorema, hubiesen demostrado el postulado de las paralelas. La figura 8.3 ilustra la situación general.



En la figura 8.3 se tiene que s corta perpendicularmente a r y t . Por lo tanto, r y t son paralelas *cap*. La recta u es perpendicular a t en B . Es fácil probar, con base en

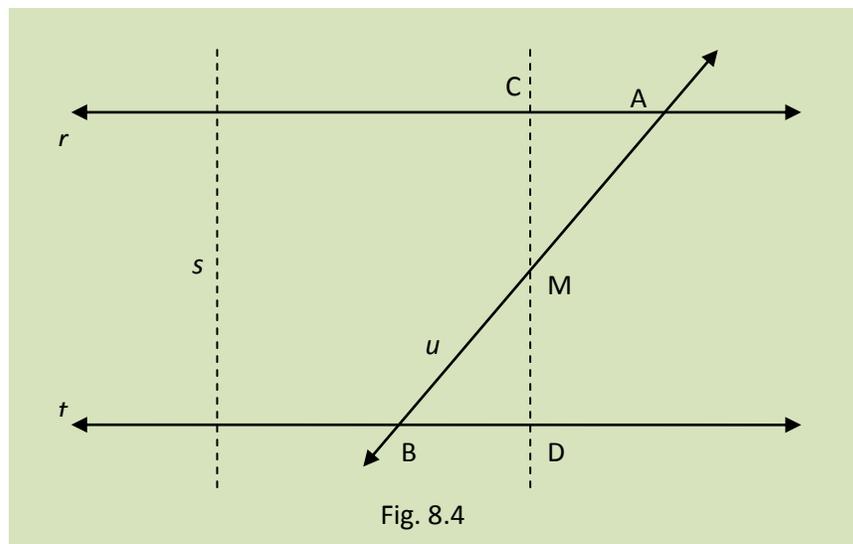
los teoremas anteriores, que u también es perpendicular a r en A (si no lo fuera, aplique el teorema 8.4).

Demostrados los tres teoremas anteriores también lo está el postulado de las paralelas. Ahora, veamos lo sencillo que es demostrar el teorema de la suma de los tres ángulos internos de un triángulo; con base en el siguiente teorema.

8.2.4. Teorema 8.6 (secante a dos paralelas)

“En un plano, la secante a dos paralelas *cap* forma con éstas ángulos alternos internos congruentes”.

La figura 8.4 ilustra la situación general.



En la figura 8.4 se tiene la secante u . Por el punto medio M de $\overline{AB} \subset u$ pasa una perpendicular a r en C , la cual también corta perpendicularmente a t en D . Así, los triángulos ΔMCA y ΔMDB son congruentes. En consecuencia, los ángulos alternos internos formados por u en A y B son congruentes. Ahora, se está listo para probar que los tres ángulos internos de un triángulo suman 180° .

8.2.5. Teorema 8.7 (los ángulos internos de un triángulo)

“La suma de la medida de los tres ángulos internos de un triángulo cualquiera

es igual a 180° .

La figura 8.5 ilustra la situación general.

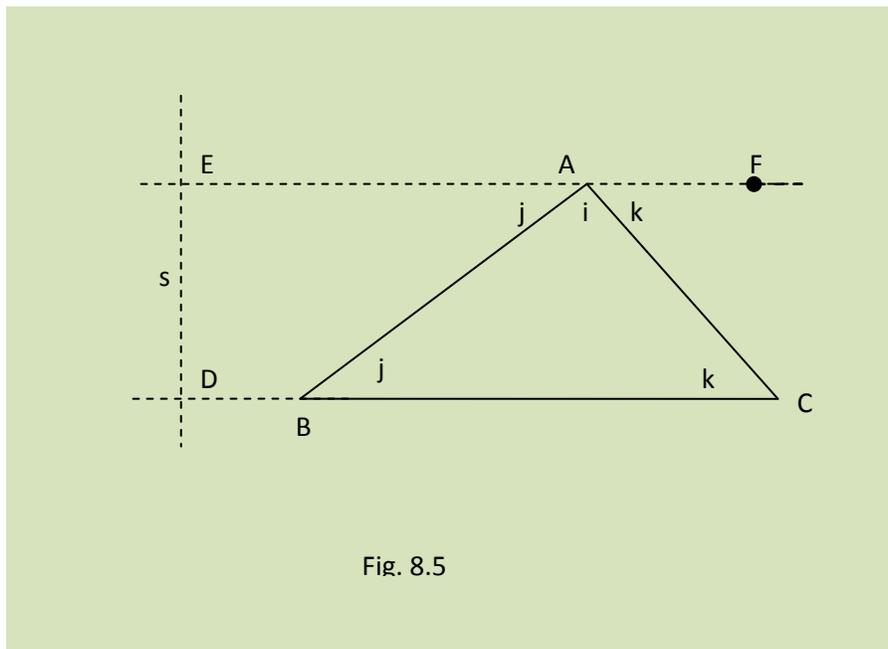


Fig. 8.5

En la figura 8.5 se tiene el triángulo $\triangle ABC$. Por la prolongación de la recta \overleftrightarrow{BC} en el punto D pasa una perpendicular a \overleftrightarrow{BC} ; la recta s . Por el punto A, pasa una perpendicular a s en E; la recta \overleftrightarrow{AE} . Así, \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{AC} son secantes a dos rectas paralelas cap y forman ángulos alternos internos congruentes. De manera que los tres ángulos internos i , j y k , suman 180° .

El teorema anterior también es equivalente al postulado de las paralelas. Así, queda demostrado que el postulado de las paralelas era dependiente de los otros cuatro postulados de la geometría euclidiana.

8.2.6. Consecuencias del Teorema de las Paralelas

Al igual que el teorema de unicidad de la recta que pasa por dos puntos distintos, el teorema de las paralelas arroja fuera del ámbito matemático a la geometría hiperbólica como geometría de líneas rectas, quedando, al igual que la

elíptica, como una aplicación de la geometría euclidiana al estudio de las geodésicas de la seudoesfera. En consecuencia, las geometrías no euclidianas llegan a su fin como geometrías de líneas rectas y quedan sólo como aplicaciones de la euclidiana.

8.3. El Verdadero Plano de la Geometría Euclidiana

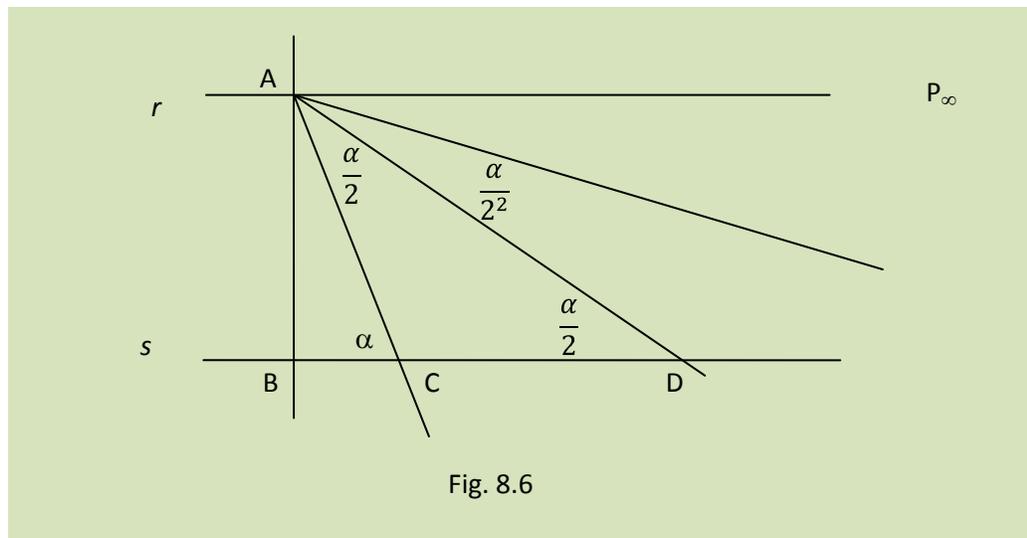
Se probará en esta sección que el verdadero plano euclidiano es la superficie de una esfera cuyo radio es $r = \Omega$, siendo Ω el último número real. Para ello vasta demostrar que dos paralelas cualesquiera se intersecan en el infinito por ambos lados.

8.3.1. Teorema 8.8 (paralelas secantes en el infinito)

Dos paralelas cualesquiera se cortan en el infinito en sus extremos.

Demostración:

Sean r y s dos rectas paralelas cualesquiera. La figura 8.6 ilustra la situación general.



En la figura 8.6 se tienen las paralelas r y s con la recta \overleftrightarrow{AB} como perpendicular común. La recta \overleftrightarrow{AC} forma con r y s ángulos alternos internos congruentes de medida igual a α . Sobre s existe un punto D tal que $CD = AC$ y, por tanto, los ángulos $\angle A$ y

$\angle D$ del triángulo $\triangle ACD$ son congruentes y miden $\frac{\alpha}{2}$. Así, podemos continuar encontrando puntos sobre s tales que los triángulos formados sean isósceles y se obtendrá una serie de ángulos de medida $\frac{\alpha}{2^n}$. Cuando el número de puntos sea infinito se tiene

$$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2^2} + \dots + \frac{\alpha}{2^n} + \dots$$

En consecuencia el rayo AP_∞ coincide con r y, como P_∞ está sobre s , entonces r y s se intersecan en el infinito. Como esto también sucede por el lado izquierdo de la recta \overleftrightarrow{AB} entonces r y s se intersecan por ambos extremos en el infinito. Pero esto sucede para las infinitas paralelas en el plano euclidiano. En consecuencia, dicho plano es la superficie de una esfera de radio $r = \Omega$ (recuerde que $\Omega = \aleph_0 - \textcircled{c}$, y simboliza al último real).

Ahora bien, siendo el plano euclidiano la superficie de una esfera infinita, entonces el espacio es curvo de curvatura $\frac{1}{r} = \frac{1}{\Omega} = 0(\text{res}) \neq 0$. Por lo tanto, la teoría de la relatividad se puede fundamentar en la geometría euclidiana, puesto que las rectas euclidianas tienen todas curvaturas diferentes del cero absoluto.

APÉNDICE

A. CONSECUENCIAS DEL NÚMERO \mathbb{C}

A.1. Propiedad de Dilatación y Contracción de Los Puntos

Sabemos que el punto carece de existencia real, es decir, así como el universo nace de la nada, también la Geometría nace de la nada. Por esta razón, los puntos poseen unas propiedades que no se pueden notar cuando las ponen en práctica. A estas propiedades se les llamará *propiedad de contracción* y *propiedad de dilatación* y consisten en que, los infinitos puntos que están en un segmento cualquiera, pueden entrar todos (en sentido figurado) en otro segmento de mayor o menor longitud, dilatándose o contrayéndose respectivamente. Sin embargo, es un error afirmar que dos segmentos cualesquiera poseen la misma cantidad de puntos, tomados dichos puntos como entes con existencia real, si dichos segmentos poseen longitudes distintas. Veamos la demostración de esto.

A.1.1. Teorema A.1 (de los segmentos no congruentes)

Si dos segmentos \overline{AB} y \overline{CD} no son congruentes, entonces, el de mayor longitud tiene mayor cardinalidad, tomados como conjuntos de puntos.

Demostración

Sean \overline{AB} , \overline{CD} y $\overline{CD} > \overline{AB}$. Hagamos la siguiente construcción auxiliar:

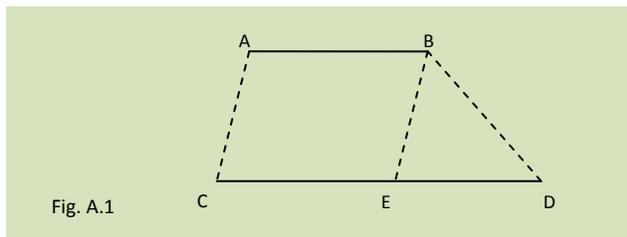


Fig. A.1

En la figura A.1, se ha colocado $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ y se ha trazado $\overline{EB} \parallel \overline{CA}$

Sean ahora, $P_k(\overline{CD})$ el punto k -ésimo de \overline{CD} y $P_k(\overline{AB})$ el punto k -ésimo de \overline{AB} , tales que $\overline{P_k(\overline{CD})P_k(\overline{AB})} \parallel \overline{CA}$. Con esta notación ya especificada, formemos ahora la siguiente aplicación $f: \overline{CD} \rightarrow \overline{AB}$, definida por

$$f(P_k(\overline{CD})) = \begin{cases} P_k(\overline{AB}), & \text{si } P_k(\overline{CD}) \in \overline{CE} \text{ con } \overline{P_k(\overline{CD})P_k(\overline{AB})} \parallel \overline{CA} \\ B, & \text{si } P_k(\overline{CD}) \in \overline{ED} \end{cases}$$

Acá $\overline{E)D}$ significa que $E \notin \overline{ED}$.

Esta función así definida es sobreyectiva, ya que $f(\overline{CD}) = \overline{AB}$, pero es no inyectiva, porque $f(E) = f(D) = B$ y $E \neq D$. Por el teorema 1.4, $\# \overline{CD} > \# \overline{AB}$. ♦

A.1.2. La Unidad a Diferentes Escalas

Sean dos segmentos paralelos de diferentes longitudes y representando ambos a la unidad (fig. A.2), a los cuales llamaremos $\overline{01}$ *menor* (segmento de color verde) y $\overline{01}$ *mayor* (de color rojo).

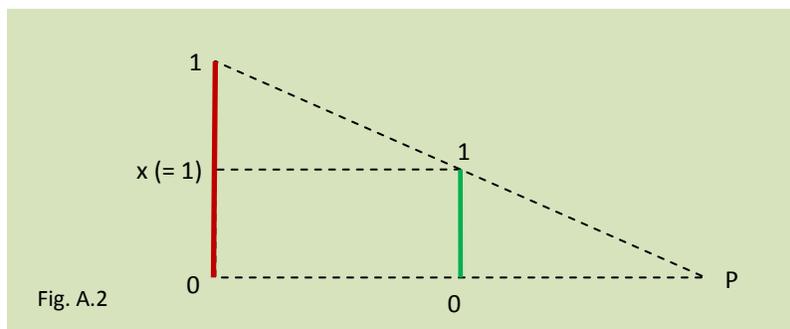


Fig. A.2

Como ambos representan a la unidad (en diferentes escalas), cometemos el error de decir que ambos contienen la misma cantidad de puntos, es decir, que como conjuntos de puntos (*no de números*) son equipotentes. Pero el teorema anterior nos dice que ello no es así. De manera que algo anda mal en nuestra forma de ver la realidad.

La pregunta es ¿qué es lo que realmente sucede? La respuesta es “la propiedad que tienen los puntos geométricos de dilatarse y contraerse”. En efecto, observemos

que en $\overline{01}$ mayor hay un punto x tal que $\overline{0x}$ es congruente con $\overline{01}$ menor y, por tanto, ellos son equipotentes; como lo afirma la biyección $f: \overline{01} \rightarrow \overline{0x}$ definida por $f(x) = x$. Esta biyección (*la biyección paralela*) nos indica que en $\overline{01}$ mayor está el real 1 en dos posiciones distintas, lo cual es absurdo. Ahora bien, obsérvese que desde el punto P salen rectas que pasan por cada uno de los puntos de $\overline{01}$ mayor y, por ende, por cada punto de $\overline{01}$ menor. Esto nos indica que los puntos de $\overline{0x}$, los cuales son imágenes de $\overline{01}$ menor, se ven obligados a dilatarse y, por tanto, el punto x llega a ubicarse en la posición del 1 de $\overline{01}$ mayor. Esa es la realidad de lo que sucede.

De todo lo anterior aún queda algo por aclarar. Si se acepta que tanto la biyección entre $\overline{01}$ menor y $\overline{0x}$, y entre $\overline{01}$ menor y $\overline{01}$ mayor son biyecciones algebraicas, entonces nuestras matemáticas están muy mal, pues se tendría que $\overline{01}$ menor y $\overline{01}$ mayor son a la vez equipotentes y no equipotentes. En consecuencia, ambas no deben ser biyecciones algebraicas, por lo tanto, estamos obligados a dar las siguientes dos definiciones.

Biyección Geométrica

Es la biyección galileana (en honor a Galileo quien fue el primero en observar esto) que existe entre los conjuntos de puntos geométricos. Ejemplo de ello es la biyección entre $\overline{01}$ menor y $\overline{01}$ mayor dada a partir de P del apartado anterior.

Obsérvese que si acercamos P hacia $\overline{01}$ menor, $\overline{01}$ mayor aumenta de longitud, es decir, los puntos imágenes de $\overline{01}$ menor se dilatan en una proporción mayor. Si, por el contrario, lo alejamos, $\overline{01}$ mayor disminuye. Es decir, los puntos imágenes de $\overline{01}$ menor sufren una dilatación en menor proporción.

Biyección Algebraica

Es la biyección cantoriana (en honor a Cantor, padre de la teoría de conjuntos) que existe entre conjuntos cuyos elementos tienen (o se les asigna) una existencia

real. Ejemplo de ellos son las biyecciones entre conjuntos numéricos.

Para concluir esta sección se debe decir que el gran geómetra Euclides de Alejandría sí tuvo razón al postular que “El todo es mayor que cualquiera de sus partes”. Y ha sido la teoría de Cantor la que nos ha permitido demostrar este hecho.

A.2. Dilatación y Contracción de los Puntos en Funciones Reales

En esta sección se explicarán los inconvenientes que la dilatación y contracción de los puntos ocasionan en la teoría de funciones, y cómo estos mismos puntos superan dichos inconvenientes, sin que nos percatemos de nada.

A.2.1. Ubicación de los $f(x)$ en el Eje Y

En la demostración del teorema del valor intermedio, se dijo que si d está entre $f(a)$ y $f(b)$, siempre existirá un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$, pero que puede ser $d = d \pm n\epsilon$ para algún natural n . Esto es así por lo que acabamos de ver en el teorema A.1.

Por otra parte, también vimos que dos números, infinitamente próximos, pueden ocupar la misma posición en el eje X sin que estos sean iguales en su valor real. Lo anterior tiene su lógica, pues, cada vez que los puntos de un intervalo menor se corresponden con los puntos de un intervalo mayor (o viceversa), éstos se ven obligados a dilatarse (contraerse) y, por tanto, esto también le sucede a los números que dichos puntos representan. Veamos algunos ejemplos sencillos de ubicación en el eje Y.

Sea la función $f(x) = 3x - 1$. Para esta función, la imagen de 2 es $f(2) = 5$. La imagen de $2 + \epsilon$ es $f(2 + \epsilon) = 5 + 3\epsilon$. Observe que los números: $5 + \epsilon$ y $5 + 2\epsilon$ no son imágenes de ningún real pero están en el eje Y. Como $f(3) = 8$, entonces $f([2, 3]) = [5, 8]$ y, al calcular la imagen inversa de $[5, 8]$ por la función f^{-1} , se tiene que $f^{-1}(5 + \epsilon) = f^{-1}(5 + 2\epsilon) = 2$. Es decir, 5 ocupa su posición y también las de $5 + \epsilon$ y $5 + 2\epsilon$, al dilatarse.

Todo esto nos muestra las series de dificultades que aparecen al operar con las

imágenes de dos reales que estén infinitamente próximos. Dificultades que los mismos números superan sin que nos percatemos de nada, gracias a la propiedad ya mencionada.

A.2.2. Demostraciones Erróneas del Teorema del Valor Intermedio

Al demostrar el teorema del valor intermedio se prometió mostrar que las demostraciones conocidas de este teorema son erróneas. Es el momento de explicar el por qué.

Primera Demostración Errónea

Una de las demostraciones que dan algunos autores es la siguiente:

- 1) Suponen que $f(a) < d < f(b)$.
- 2) Suponen que $c \in (a, b)$ y $f(x) < d, \forall x \in [a, c)$ y $f(x) > d \forall x \in (c, b]$.
- 3) Llaman a c el supremo del conjunto $A = \{f(x) / f(x) < d\}$
- 4) Suponen que si $f(c) < d$, entonces existe u tal que $f(u) < d$ y por tanto c no es el supremo de A .

He aquí el error. Cuando d está entre $f(a)$ y $f(b)$ y no es imagen de ningún x del intervalo $[a, b]$, entonces existe c en $[a, b]$ tal que $f(c) < d$ y $f(c + \epsilon) > d$ (o viceversa). En consecuencia, se puede tener que $f(c) < d$ y, sin embargo, no existe ningún u entre c y $c + \epsilon$ tal que $f(u) < d$. De esta manera, la demostración es errónea. Como un ejemplo de lo anterior veamos la función $f(x) = x^3$. Si $x = 3$, se tiene que $f(x) = 27$. Si ahora hacemos $x = 3 + \epsilon$, se obtiene que $f(x) = 27 + 27\epsilon$. Así, los números $27 + \epsilon, 27 + 2\epsilon, \dots, 27 + 26\epsilon$ no tienen contraimagen en $[3, 3 + \epsilon]$. Por lo demostrado en el teorema 2.2 (Cap. II), $d = d + n\epsilon$, para algún $n \in \mathbb{N}^*$ cuando d es un número del intervalo $[27 + \epsilon, 27 + 26\epsilon]$. Es decir, si $d \in [27 + \epsilon, 27 + 26\epsilon]$, se tiene que $c = 3 + \epsilon$ y $f(c) = d$.

Segunda Demostración Errónea

Otros autores demuestran al teorema en cuestión de la siguiente manera:

1) Se apoyan en el teorema de Bolzano, es decir, $f(a)f(b) < 0$, y $f(a) < d < f(b)$ (o al contrario).

2) Emplean una nueva función g tal que $g(x) = f(x) - d$.

3) Como $g(a) < 0$ y $g(b) > 0$, por Bolzano, existe c en (a, b) tal que $g(c) = 0$. Entonces $f(c) = d$.

Ahora bien, el error que se comete acá está en la selección del número d . Pues, al hacer $g(x) = f(x) - d$, se tiene que d es un número del conjunto $\{f(a), \dots, f(b)\}$. Veamos esto analizando la función $f(x) = x^3$ y a la función $g(x) = f(x) - d = x^3 - d$ (para cualquier otra función el razonamiento es análogo).

Observemos que si $g(k) = 0$, $k \in (a, b)$, entonces, $k^3 - d = 0$, de donde $k^3 = d$, es decir, el d que se toma para formar a la función g siempre será un número del conjunto $\{f(a), \dots, f(b)\}$, pues, k es un número de $[a, b]$ y f está definida en $[a, b]$. Por tanto, $f(k)$ está en $\{f(a), \dots, f(b)\}$. Sin embargo el verdadero d buscado puede seguir oculto. Esto sucede así por la dilatación de los puntos, ya que en el rango $f[a, b]$ todos los puntos están dilatados y, tal vez, ocultando al número d .

De lo anterior se tiene que al tratar de demostrar el teorema del valor intermedio utilizando a Bolzano, el cual es una consecuencia del valor intermedio, le tendemos una trampa a la matemática.

A.2.3. Funciones Discretas y Continuas

Para internalizar mejor lo que sucede con las funciones entre conjuntos discretos y entre el continuo, las cuales acá llamaremos ***funciones discretas*** y ***funciones continuas*** respectivamente, veamos que para funciones discretas sucede que si $f:A \rightarrow A$ es una función tal que $f(A) = A$, entonces f es inyectiva total (porque A

es equipotente a A y teoremas del capítulo I). Pero, lo anterior no es correcto aplicarlo a funciones del continuo *no inyectivas total*. Como ejemplo tomemos la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^3.$$

Acá decimos que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, con lo cual tendríamos que aceptar que esta es una biyección de \mathbb{R} en \mathbb{R} , lo que es falso porque f no es inyectiva total y, además, el dominio de esta f no es en verdad \mathbb{R} sino $[-\sqrt[3]{\Omega}, \sqrt[3]{\Omega}] \subset \mathbb{R} = \{-\Omega, \dots, 0, \dots, \Omega\}$.

Otra propiedad que nos complica la vida en las funciones con el continuo es el teorema 1.4, el cual nos dice que si $f: A \rightarrow B$ es tal que f es sobreyectiva pero no inyectiva, entonces, $\#A > \#B$. En efecto, la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^3 - x$, es, al estilo tradicional, sobreyectiva pero no inyectiva (sobreyectiva finita pero no inyectiva finita); por lo tanto, debería ser $\#\mathbb{R} > \#\mathbb{R}$, lo cual es absurdo. Sin embargo, esta complicación desaparece si aceptamos la realidad, ya que el dominio de dicha función no es \mathbb{R} sino un conjunto con menos elementos que \mathbb{R} , pues, si en esta función x toma el valor de Ω , se tiene que su imagen es: $\Omega^3 - \Omega > \Omega^2$, el cual no pertenece a \mathbb{R} . Ahora bien, el absurdo de ser $\#\mathbb{R} > \#\mathbb{R}$ se da porque la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^3 - x$, es *sobreyectiva total* en algunos intervalos y *no sobreyectiva total* en otros.

De todo el análisis anterior, es fácil deducir que la única función *biyectiva total* en \mathbb{R} es la función definida por $f(x) = x$. Tal vez esta fue la gran dificultad con la cual tropezó *Cantor* al tratar de demostrar la inexistente verdad de su hipótesis del continuo.

A.3. Lo Contradictorio del Número Irracional

Desde que los pitagóricos descubrieron que el número $\sqrt{2}$ no podía ser la razón de dos números enteros a y b , se ha tenido en nuestra matemática a los números como éste como *números irracionales*. Sin embargo, sabemos que todo número de la forma

$$m, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Siendo m la parte entera y las a_i ($i \in \mathbb{N}$) cifras que no se repiten periódicamente, es irracional. Esto permite encontrar algunas contradicciones dentro de nuestra matemática. Antes de ver estas contradicciones, veamos el siguiente teorema donde se admite que el lector conoce todo lo referente a la teoría de grupos.

A.3.1. Teorema A.2 (composición de infinitos elementos de un grupo)

“La composición de un número infinito de elementos de un grupo $(G, *)$, que posee infinitos elementos, es otro elemento de dicho grupo”.

Demostración:

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ infinitos elementos de un grupo $(G, *)$. Entonces se tiene que

$$x_1 = G_1 \in (G, *) \text{ (por hipótesis).}$$

$$G_1 * x_2 = G_2 \in (G, *) \text{ (por ser composición de dos elementos de dicho grupo).}$$

$$G_2 * x_3 = G_3 \in (G, *) \text{ (por la misma razón anterior).}$$

Supongamos que esto es cierto hasta un n cualquiera, es decir

$$G_{n-1} * x_n = G_n \in (G, *) \text{ (Supuesto).}$$

Entonces, para el racional con el siguiente de n como subíndice se tiene

$G_n * x_{n+1} = G_{n+1} \in (G, *)$ porque $G_n \in (G, *)$ en el supuesto y $x_{n+1} \in (G, *)$ en la hipótesis.

Así, al suponerlo cierto para un n cualquiera, también es cierto para $n + 1$. Por el principio de inducción completa, esto es cierto para todo n natural, y como los naturales son infinitos, entonces queda demostrado que la composición de una cantidad infinita de elementos de un grupo $(G, *)$ es otro elemento de $(G, *)$. ♦

A.3.2. Dos Expresiones Contradictorias

Sea el número $m, a_1a_2\dots a_n\dots$ donde las infinitas cifras a_i son naturales (0,1,2,... ó 9) distintos y los cuales no se repiten periódicamente. Entonces se tiene

$$1) m, a_1a_2\dots a_n\dots = m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots = \text{irracional.}$$

Sea ahora el mismo número anterior donde se ha sustituido a cada cifra a_i por una cifra (dígito) constante $a_k \neq 0$.

$$2) m, a_k a_k a_k \dots a_k \dots = m + \frac{a_k}{10} + \frac{a_k}{10^2} + \frac{a_k}{10^3} + \dots + \frac{a_k}{10^n} + \dots = m + \frac{a_k}{9} = \text{racional.}$$

La expresión 1) se contradice con el teorema A.2, ya que el conjunto Q es un grupo infinito para la suma. Por otra parte, la expresión 2) es algebraicamente igual que la 1), puesto que son sumas de infinitos elementos de Q . En consecuencia, no puede ser que una es irracional, incumpliendo con el teorema A.2, y la otra racional, cumpliendo con dicho teorema. Obsérvese que, al aceptar que 1) es irracional, se está aceptando que existen dos racionales que al sumarlos nos da irracional, lo que contradice la definición de $(Q, +)$.

A.3.3. Sobre la Fracción Infinita de $\sqrt{2}$

Sabemos que $1 < \sqrt{2} < 2$, entonces, efectuando semisumas indefinidamente alrededor de $\sqrt{2}$ obtendremos a dicho número (ver apartado A.3.7). La primera semisuma es

$$S_1 = \frac{1(1)+1(2)}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 > \sqrt{2}. \quad (A)$$

Acá, los números que estamos sumando, que son el 1 y el 2, aparecen entre paréntesis, y los números antepuestos son los coeficientes que nos indican cuántas veces se toma dicho número.

Como $1 < \sqrt{2} < S_1$, hallemos la semisuma de 1 y S_1 la cual es

$$S_2 = \frac{1+S_1}{2} = \frac{1+\frac{1(1)+1(2)}{2}}{2} = \frac{2(1)+1(1)+1(2)}{2^2} = \frac{3(1)+1(2)}{2^2} = \frac{5}{4} = 1,25 < \sqrt{2}. \quad (\text{B})$$

Como $S_2 < \sqrt{2} < S_1$, hallemos la semisuma de S_1 y S_2 la cual es

$$S_3 = \frac{S_1+S_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1(1)+1(2)}{2} + \frac{3(1)+1(2)}{2^2} \right) = \frac{5(1)+3(2)}{2^3} = \frac{11}{8} = 1,375 < \sqrt{2}. \quad (\text{C})$$

Como $S_3 < \sqrt{2} < S_1$, hallemos la semisuma de S_3 y S_1 , la cual queda

$$S_4 = \frac{9(1)+7(2)}{2^4} = \frac{23}{16} = 1,4375 > \sqrt{2}. \quad (\text{D})$$

Como $S_3 < \sqrt{2} < S_4$, hallemos la semisuma de S_3 y S_4 la cual queda

$$S_5 = \frac{19(1)+13(2)}{2^5} = 1,40625 < \sqrt{2}. \quad (\text{E})$$

Con estas cinco operaciones de semisumas se está listo para generalizar a n operaciones. Para ello veamos que el denominador siempre es 2^n . Al observar los coeficientes en (A), (B), (C), (D) y (E) se tiene que la suma de ellos es siempre igual al denominador. Esto se puede probar de la siguiente manera.

Llamemos $a(n)$ al coeficiente del 1 y $b(n)$ al coeficiente del 2. Supongamos que la suma de estos coeficientes es 2^n hasta un determinado n , y probemos que también los coeficientes de S_{n+1} suman 2^{n+1} . Se tiene, para $1 \leq k < n$ que

$$a(n) + b(n) = 2^n. \quad (1)$$

$$a(n-k) + b(n-k) = 2^{n-k}. \quad (2)$$

Supongamos también sin pérdida de generalidad que $S_{n-k} < \sqrt{2} < S_n$. Entonces la semisuma de S_{n-k} y S_n es

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}(S_{n-k} + S_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{a(n-k)(1) + b(n-k)(2)}{2^{n-k}} + \frac{a(n)(1) + b(n)(2)}{2^n} \right]$$

De donde se tiene

$$S_{n+1} = \frac{[2^k a(n-k) + a(n)](1) + [2^k b(n-k) + b(n)](2)}{2^{n+1}}. \quad (3)$$

La suma de los coeficientes del 1 y el 2 en (3) es

$$\begin{aligned} 2^k a(n-k) + a(n) + 2^k b(n-k) + b(n) &= 2^k [a(n-k) + b(n-k)] + a(n) + b(n) \\ &= 2^k (2^{n-k}) + 2^n = 2^n + 2^n = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

De todo lo anterior, la semisuma enésima es

$$S_n = \frac{a(n)(1) + b(n)(2)}{2^n}, \text{ con } a(n) + b(n) = 2^n. \quad (4)$$

De (4) se tiene que

$$a(n) = 2^n - b(n). \quad (5)$$

Al sustituir (5) en el numerador de S_n y simplificar se tiene

$$S_n = 1 + \frac{b(n)}{2^n}. \quad (6)$$

Aplicando límite al infinito se tiene que

$$\sqrt{2} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b(n)}{2^n} \right). \quad (7)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b(n)}{2^n} \right) = \frac{a(i) \in \mathbb{Z}}{b(i) \in \mathbb{Z}}$, entonces

$$\sqrt{2} = \frac{c(i)}{b(i)} \in \mathbb{Q} \quad (c(i) = b(i) + a(i)). \quad \blacklozenge$$

Se presentarán ahora dos teoremas que son contradictorios si se sigue aceptando que los mal llamados irracionales existen (existen pero son racionales).

A.3.4. Teorema A.3 (semisumas de a y b que tienden a a)

Sea el intervalo $[a, b]$ de números reales y sean las semisumas S_1, S_2, \dots, S_n definidas de la siguiente manera:

$$S_1 = \frac{a+b}{2}, S_2 = \frac{a+s_1}{2}, S_3 = \frac{a+S_2}{2}, \dots, S_n = \frac{a+S_{n-1}}{2}.$$

Entonces, cuando la operación de semisumas se hace indefinidamente, el límite es a .

Demostración:

Se tiene que

$$S_1 = \frac{a+b}{2}; S_2 = \frac{a+s_1}{2} = \frac{a+\frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3a+b}{2^2}; S_3 = \frac{7a+b}{2^3}; \text{ etc.}$$

Se puede probar fácilmente, que

$$S_n = \frac{(2^n - 1)a + b}{2^n} = a + \frac{b-a}{2^n}.$$

Por lo tanto, cuando n tiende a infinito, y aceptando lo que siempre hemos aceptado tradicionalmente, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ (*abs*), se tiene (recuerde lo de *Aquiles* y la *tortuga*)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a. \quad \blacklozenge$$

A.3.5. Teorema A.4 (de las semisumas mixtas)

Definiremos *semisuma mixta* a la semisuma de un racional y un irracional y es sumamente sencillo probar que

“Toda semisuma mixta es siempre irracional”.

Demostración:

En efecto, sea r el número racional e i el irracional. Sabemos que $\frac{i}{2} =$ irracional. Veamos que también la suma $r + i =$ irracional aún cuando la efectuemos infinitamente.

Sea $r = \frac{a}{b}$, entonces, $r = \frac{a}{b+1} + \frac{a}{(b+1)^2} + \frac{a}{(b+1)^3} + \dots + \frac{a}{(b+1)^n} + \dots$, al sumar i a r se tiene $i + r = I$ (irracional) $= i + \frac{a}{b+1} + \frac{a}{(b+1)^2} + \frac{a}{(b+1)^3} + \dots + \frac{a}{(b+1)^n} + \dots$. Al sumar i con el primer término se tiene $i + \frac{a}{b+1} = i_1$ (irracional). Luego $i_1 + \frac{a}{(b+1)^2} = i_2$ (irracional); y así sucesivamente. Una vez efectuada la operación con todos y cada uno de los infinitos racionales se obtiene: $i + r = I$ (irracional). Por lo tanto, *la suma de un irracional con un racional siempre es irracional aun cuando se efectúe indefinidamente*. Se concluye que $\frac{r+i}{2} = \text{irracional}$. ♦

Ahora, veamos que los dos teoremas anteriores son contradictorios. Para ello, hagamos ***b irracional*** y ***a racional*** en el teorema A.3. Dicho teorema nos asegura que el límite es a (racional). Pero el teorema A.4 nos dice que este límite no puede ser racional porque ninguna semisuma mixta es racional. Para comprobar que este límite no puede ser racional, analicemos las infinitas semisumas en sentido inverso y veamos que si la última semisuma en el infinito fuese racional se tendría

$$S_{\infty} = \frac{a + S_{\infty-1}}{2} = \text{racional. Pero entonces}$$

$$S_{\infty-1} = \frac{a + S_{\infty-2}}{2} = \text{racional y, por tanto}$$

•

•

•

$$S_2 = \frac{a + S_1}{2} = \text{racional.}$$

De esta manera vemos que, si continuamos el proceso inverso indefinidamente, se tiene que S_1 y, por ende b , es racional (porque $S_1 = (a + b)/2$); lo cual es una contradicción. Así, los dos teoremas son contradictorios si los irracionales existen

como tal.

A.3.6. El Número e Como un Racional

El número e , base de los logaritmos naturales, se puede obtener como una fracción infinita de la siguiente manera.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \quad (1)$$

La suma de los primeros n términos de (1) es

$$e_n = \frac{2n! + [n(n-1)\dots 4.3] + [n(n-1)\dots 5.4] + \cdots + [n(n-1)] + n + 1}{n!}. \quad (2)$$

El lector puede comprobar fácilmente que para obtener a e_{n+1} basta con multiplicar tanto al numerador como al denominador en (2) por $n+1$ y luego sumar 1 al numerador.

Ahora le damos un valor a n , por ejemplo 11, y luego obtenemos e_{12} , e_{13} , etc.

$$e_{11} = \frac{108505112}{39916800} = 2,718281826\dots \text{ (Ocho decimales exactos a los de } e\text{)}. \quad (3)$$

$$e_{12} = \frac{(108505112)12+1}{(39916800)12} = \frac{1302061345}{479001600} = 2,7182818282\dots \quad (4)$$

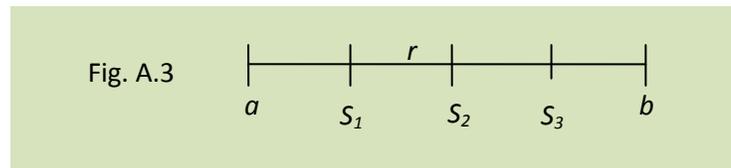
$$e_{13} = \frac{(1302061345)13+1}{(479001600)13} = \frac{16926797486}{6227020800} = 2,71828182844\dots \quad (5)$$

Continuando de esta manera, cuando n es suficientemente grande, se obtiene a e como una fracción racional infinita. ♦

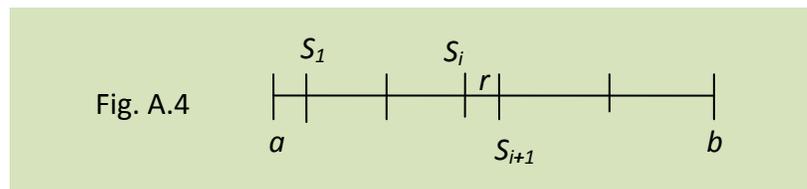
A.3.7. En el Proceso de Semisumas en $[a, b]$ no Quedan Huecos

Al efectuar el proceso de semisumas en $[a, b]$, alguien podría inferir que en dicho intervalo quedan números reales a los cuales no se les puede llegar con el proceso en cuestión. Demostraremos acá que cualquiera que sea el real $r \in [a, b]$, éste se consigue con el proceso de semisumas.

En efecto, el teorema A.3 nos asegura que, en el intervalo $[a, b]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a$ (al aplicar semisumas hacia a). Ahora bien, en la figura A.3 se tiene representado un número r cualquiera de $[a, b]$ y las S_i son semisumas.



La longitud del intervalo $[S_1, S_2]$, el cual contiene a r , es igual a la longitud de $[a, S_1]$. Si seguimos aplicando semisumas a cada nuevo intervalo, siempre la longitud del primer intervalo $[a, S_1]$ será igual a la longitud del intervalo $[S_i, S_{i+1}]$ que contenga a r (fig. A.4).



En consecuencia, cuando hayamos encontrado al extremo a , también habremos encontrado al número r . Ya que al encontrar a a se tiene (*al estilo tradicional*): *longitud de $[a, S_1] = 0$* (teorema A.3), y también *longitud de $[S_i, S_{i+1}] = 0$* ; siendo $[S_i, S_{i+1}]$ el intervalo donde esté ubicado r . Se concluye que, sea cual sea el número real r de $[a, b]$, siempre será encontrado al aplicar semisumas.

A.3.8. Teorema A.5 (inexistencia de irracionales)

“El número $m, a_1a_2a_3\dots a_n\dots$, siendo m entero y las infinitas cifras a_i no periódicas, es un número racional llamado erróneamente irracional”.

Demostración:

Sea el número $X = m, a_1a_2a_3\dots a_n\dots$, donde m es la parte entera y las cifras decimales son infinitas y no periódicas. Entonces

$$X = m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots \quad (1)$$

Cambiamos cada numerador en uno por un dígito constante a_k (del 1 al 9), con lo cual se tendrá

$$Y = m + \frac{a_k}{10} + \frac{a_k}{10^2} + \frac{a_k}{10^3} + \dots + \frac{a_k}{10^n} + \dots = \text{racional.} \quad (2)$$

Sabemos que (2) es racional, por lo tanto, tomando *al azar* una parte infinita de esta igualdad y sumándola se tiene (Z es una parte de (2))

$$Z = \frac{a_k}{10^i} + \frac{a_k}{10^l} + \frac{a_k}{10^p} + \dots + \frac{a_k}{10^r} + \dots = \text{racional.} \quad (3)$$

Como (2) es racional, (3) también lo es. Si no lo fuera, sería un irracional I, y al sumarlo con cada uno de los restantes racionales de (2), siempre se tendría un irracional, pues la suma mixta de ***irracional más racional*** siempre es ***irracional*** (teorema A.4). En consecuencia, (2) sería irracional, lo que sería un absurdo. Por lo tanto, (3) es racional.

Como en (1) sólo tenemos diez dígitos distintos en los numeradores de cada racional, entonces, excluyendo al cero, podemos sacar nueve partes infinitas de dicha igualdad (1), tomando las potencias que tengan como numerador el uno, luego las que tengan el dos, etc., y se tendría

$$P_1 = \frac{1}{10^a} + \frac{1}{10^d} + \frac{1}{10^j} + \dots + \frac{1}{10^r} + \dots \quad (4)$$

$$P_2 = \frac{2}{10^c} + \frac{2}{10^t} + \frac{2}{10^p} + \dots + \frac{2}{10^k} + \dots \quad (5)$$

•
•
•

$$P_9 = \frac{9}{10^e} + \frac{9}{10^g} + \frac{9}{10^l} + \dots + \frac{9}{10^m} + \dots \quad (6)$$

Ahora bien, estos nueve P_i son nueve partes infinitas cuya suma es igual a la igualdad (1) disminuida en m y, por (3), son todos racionales (cuando a_k en (2) toma los valores de 1,2, ...,9). Entonces, se tiene al sumar

$$P_1 + P_2 + \dots + P_9 = X - m. \quad (7)$$

Pero la suma de los nueve racionales en (7) es racional, por tanto

$$X - m = \text{racional}. \quad (8)$$

Por (8) y ser m racional se tiene

$$X = \text{racional}. \quad \blacklozenge$$

Lo que nos demuestra que los mal llamados irracionales no son más que números racionales de fracción generatriz infinita (numerador y denominador infinitos).

A.3.9. Un Racional Mal Llamado Irracional

Veamos ahora cómo obtener un número racional al cual se le llama erróneamente irracional. Sabemos que Euclides probó que los números primos son infinitos. Sea $p(i)$ un primo con infinitas cifras y $a(i)$ un entero infinito que cumple con la desigualdad: $a(i) < p(i)$. Se tiene entonces

$$\frac{p(i)}{a(i)} = m, b_1 b_2 \dots b_n \dots \quad (I)$$

En el racional de (I), m es la parte entera y las b_i son infinitas cifras no periódicas, pues si fuesen periódicas (de período finito) se tendría un racional infinito igual a un racional finito, es decir, $\frac{p(i)}{a(i)} = \frac{p}{q}$ (p y q finitos), de donde sería: $p(i) = a(i) \cdot \frac{p}{q} = b(i) \cdot p$. Y por tanto, $p(i)$ no sería primo, lo cual es una contradicción. En consecuencia, todo número de la forma $m, b_1 b_2 \dots b_n \dots$, con las infinitas b_i no

periódicas, es racional de período infinito y, por tanto, de fracción infinita.

A.3.10. El Número 2^ω es Múltiplo de Todo Natural Finito

El lector puede comprobar, operando como se hizo en el apartado A.3.3, que en el intervalo $[1, 2]$ para el número $\frac{8}{7}$ se tiene:

$$\frac{8}{7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)+2b(n)}{2^n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b(n)}{2^n}\right).$$

El miembro central de esta igualdad nos dice que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)+2b(n)}{2^n}$ es siempre un racional y, además, 2^n se hace múltiplo de 7 (de cualquier natural finito) sólo en el infinito, pues, mientras n sea finito, 2^n no es múltiplo de 7 (de ningún natural diferente a 2^k , $k \leq n$).

Ahora bien, obsérvese que

$$\frac{8}{7} = 1,142857\ 142857\ 142857\ 142857\ \dots(\text{infinitas cifras}).$$

Y apenas en la semisuma S_9 la cual es

$$S_9 = \frac{439(1)+73(2)}{2^9} = 1,142578125.$$

es cuando se logran los primeros tres decimales exactos.

Como las seis cifras del período se repiten infinitamente, entonces, este proceso de semisumas se estará efectuando infinitamente. Pero, como este proceso es numerable, entonces termina cuando se nos agoten los naturales y, por tanto, se tendrá que

$$\frac{8}{7} = 1 + \frac{b(\omega)}{2^\omega}. \quad (\text{A})$$

Lo que nos dice que el número $\frac{b(\omega)}{2^\omega}$ siempre será un real racional, puesto que esto vale para $\frac{8}{7}$, $\frac{13}{11}$, $\frac{18}{13}$, etc. Es decir, el entero transfinito 2^ω es múltiplo de cualquier

natural finito, el cual algunas veces se simplificará con el numerador y otras veces no. En este caso se tiene

$$\frac{8}{7} = 1 + \frac{b(\omega)}{2^\omega} = \frac{2^\omega + b(\omega)}{2^\omega} = \frac{8 \cdot a(t)}{7 \cdot a(t)}, \quad a(t) \text{ transfinito.}$$

Igualmente puede comprobar muy fácilmente, el lector o lectora, que en el intervalo $[i, I]$, siendo $i = \sqrt{2}$ e $I = \sqrt{2} + 1$, al número $\frac{20}{13}$, por ejemplo, se le consigue con la igualdad

$$\frac{20}{13} = i + \frac{b(\omega)}{2^\omega} = \frac{20 \cdot k(t)}{13 \cdot k(t)}, \quad k(t) \text{ transfinito.} \quad (\text{B})$$

Siendo el $b(\omega)$ de (B) diferente al de (A) pero siempre será $b(\omega) = \lim_{n \rightarrow \omega} b(n)$, con $b(n)$ un natural que crece con n y, por lo tanto, el número $\frac{b(\omega)}{2^\omega}$ será racional. Pues, no puede ser que dicho número sea caprichoso y se convierta en racional algunas veces y otras en irracional. En consecuencia, i es un número racional, como ya había quedado demostrado en los apartados A.3.8 y A.3.9.

Concluamos demostrando que, no obstante ser $2^\omega > \omega$ y contener a los naturales finitos como factores, dicho número no es divisible por todos los naturales infinitos. En efecto, si lo fuera, sería 2^ω múltiplo de todos los naturales, lo cual es fácil probar que no es así. Para ello veamos que

$$2^\omega = 2.2.2.2 \dots 2^{a(i)} \dots 2 \quad (\omega \text{ veces el } 2). \quad (1)$$

Tomemos ahora tan sólo los impares y formemos su producto $K(i)$

$$K(i) = 1.3.5.7.9 \dots a(i) \dots \quad (\omega/2 \text{ factores}). \quad (2)$$

Tomemos los primeros cinco factores de (2)

$$K'(i) = 1.(2+1).(2^2+1).(2^2+3).(2^3+1) > 2^8 > 2^5. \quad (3)$$

Observe que en (3), el producto de los primeros cinco factores es mayor que el producto de los primeros cinco factores de (1). Lo que nos indica que cuando se tenga en (1) el número $2^{a(i)}$ se tendrá en (3) $k(i) > 2^{a(i)}$. En consecuencia, 2^ω no contiene como factores a todos los naturales; sólo a los naturales finitos y a algunos infinitos.

A.4. La Definición Correcta de Q (= R)

Todo lo visto hasta ahora nos dice que los números transfinitos forman fracciones reales. Ahora bien, no todos los transfinitos nos permiten formar a dichas fracciones. En consecuencia, debemos deducir cuáles son los transfinitos que nos permiten este hecho.

A.4.1. El Conjunto T_0

Si al primer transfinito \aleph_0 le restamos la razón del continuo, $\frac{1}{2^\omega}$, obtenemos el número

$$\frac{\aleph_0 2^\omega - 1}{2^\omega}. \quad (A)$$

Ahora bien, el número en (A) es menor que el primero de los enteros transfinitos, por lo tanto, no es transfinito y, en consecuencia, es real; y, además, es el último de los números reales. Esto nos indica que el último intervalo real positivo es

$$[0, \frac{\aleph_0 2^\omega - 1}{2^\omega}].$$

De esta manera, si llamamos T_0 al subconjunto de números transfinitos que colabora con Z para formar los números reales, entonces éste está determinado por

$$T_0 = \{\pm \aleph_0, \pm (\aleph_0 + 1), \pm (\aleph_0 + 2), \dots, \pm (\aleph_0 2^\omega - 1)\}.$$

Entonces, podemos dar la correcta definición de $Q = R$ en la forma

$$Q = R = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in (Z \cup T_0) \wedge b \neq 0 \right\}.$$

A.4.2. Deducción del Cardinal de R

En este momento estamos listos para calcular el cardinal de R en función de \aleph_0 . Esto se logra de la siguiente manera:

Primero se determina la cantidad de números reales que existen en el intervalo (0,1]. Ya se sabe que

$$[0,1] = \left\{ 0, 1 \frac{1}{2^\omega}, 2 \frac{1}{2^\omega}, 3 \frac{1}{2^\omega}, \dots, (2^\omega - 1) \frac{1}{2^\omega}, 2^\omega \frac{1}{2^\omega} = 1 \right\}. \quad (\text{A})$$

En consecuencia, el cardinal de (0,1] es

$$\#(0,1] = \#[0,1] = 2^\omega. \quad (\text{B})$$

Nótese que en el conjunto [0,1] hay fracciones que el humano no puede simplificar pero ellas se simplifican por sí mismas. Éstas se denominarán *auto-simplificables*. Por lo tanto, toda fracción $\frac{a}{b}$ es el resultado de la auto-simplificación de una fracción transfinita. Ahora contamos los intervalos de longitud unidad que existen desde 0 hasta \aleph_0 excluyendo de cada uno de ellos el extremo final. Estos son

$$[0,1), [1,2), \dots, [\aleph_0 - 2, \aleph_0 - 1), [\aleph_0 - 1, \aleph_0). \quad (\text{C})$$

En la sucesión de intervalos (C) existen \aleph_0 intervalos distintos cada uno con 2^ω reales distintos. Por lo tanto, el cardinal de R_+ es

$$\#R_+ = \aleph_0 \cdot 2^\omega = \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0 - 1}. \quad (\text{D})$$

Como $\#R_- = \#R_+$, entonces, el cardinal de R es

$$\#R = 2 \cdot \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0 - 1} = \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}. \quad (\text{E})$$

Pero, como en (E) estamos contando dos veces al cero, debemos restar 1, obteniendo que

$$\#R = \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} - 1. \quad \blacklozenge$$

De esta manera se ha determinado que $\#R > \# \wp(N)$ en contra de lo que supuso Cantor. Sin embargo, aunque este gran genio de las matemáticas haya tenido este pequeño error, fue el único de entonces que percibió con claridad lo relacionado con el continuo. Y si acá se ha logrado determinar toda la verdad, ha sido gracias a su genialidad.

A.4.3. Dos Demostraciones de Irracionalidad Erróneas

Finalizamos esta sección presentando dos demostraciones de irracionalidad que son erróneas. La primera de ellas es la demostración de irracionalidad del número π . Ésta se fundamenta en el estudio del comportamiento de la función $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$, la cual permanece entre 0 y 1 para $0 < x < 1$. Después de hacer unas transformaciones muy bien concebidas se llega a las siguientes igualdades:

$$G(x) = b^n [\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)]$$

$$H(x) = G'(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi G(x) \operatorname{cos}(\pi x) \quad \text{y} \quad H'(x) = \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x), \text{ donde}$$

$$G(0) = \text{entero y } G(1) = \text{entero y donde se supone a } \pi^2 = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}^*.$$

Se demuestra muy hábilmente que $0 < \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) < 1$, cuando n es suficientemente grande, para todo x en el intervalo $[0, 1]$, y luego se aplica la propiedad de las integrales que asegura que

$$\text{Si } f(x) < g(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Entonces

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx,$$

siendo $g(x) = 1$, en este caso, y el intervalo $[a, b] = [0, 1]$.

He aquí el error. La expresión $\pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x)$ permanece entre 0 y 1 para todo los $x \in [0,1]$, cuando n es suficientemente grande, sólo en el caso de ser $a < 4n$.

Como a es un entero cualquiera, es necesario tomar en cuenta el caso cuando $a = 4n$. Veamos lo que sucede cuando el valor de n , por muy grande que sea, ya ha sido fijado, $a = 4n$ y el valor de x es $1/2$ (el valor de n queda fijo y la variable es x).

Se tendrá que $a = 4n$; $x = 1/2$; $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$. Luego

$$\pi^2 a^n f_n(1/2) \operatorname{sen} \pi(1/2) = \pi^2 a^n \frac{1}{n!} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \pi^2 (4n)^n \frac{1}{n!} \cdot 1 = \frac{\pi^2 n^n}{n!}.$$

Ahora bien, como $\frac{n^n}{n!} > n$, $\forall n \geq 3$ (se demuestra fácilmente, por inducción completa, por ejemplo), entonces

$$\pi^2 \cdot a^n \cdot f_n(1/2) \cdot \operatorname{sen}[\pi(1/2)] = \frac{\pi^2 n^n}{n!} > \pi^2 n \gg 1.$$

De tal manera que la expresión $\pi^2 \cdot a^n \cdot f_n(x) \cdot \operatorname{sen}(\pi x)$ no permanece entre 0 y 1 en todo el intervalo $[0,1]$ si $a \geq 4n$. Por consiguiente, no es aplicable la propiedad de las integrales referidas anteriormente y, por ende, la demostración es errónea.

El error en la demostración anterior ya se había perpetrado al demostrarse que

$\frac{a^n}{n!} < 1$ si n es suficientemente grande y a es cualquier entero. Puesto que si a es cualquier entero, se puede tener que $a = n$, por muy grande que sea el entero n . Y siendo esto así, es falso que $\frac{a^n}{n!} < 1$. Veámoslo cuando $a = n$.

Se tendrá que

$$n^n = n \cdot n \cdot n \dots n \text{ (n factores iguales a n)} \quad (1)$$

Por otra parte

$$n! = n (n-1) (n-2) \dots 2 \cdot 1 \text{ (n factores)} \quad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2) se tiene

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdots \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{1} > n, \text{ si } n > 2.$$

Lo que demuestra que

$$\frac{a^n}{n!} > 1, \text{ si } a \geq n.$$

La otra demostración acá cuestionada es la de la irracionalidad del número e . Veamos por qué dicha demostración es errónea.

La demostración es como sigue:

- 1) Se considera la serie: $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$
- 2) Se considera la q -ésima suma parcial $S_q = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}$.
- 3) Se demuestra que $0 < q! (e - S_q) < \frac{1}{q}$, y $q! S_q$ es un entero.
- 4) Se supone que e es un racional de la forma $\frac{p}{q}$.
- 5) Se demuestra que $q! (\frac{p}{q} - S_q)$ es un entero mayor que cero y menor que 1.

En los cinco pasos anteriores parece que todo es normal. Pero observemos el cuarto paso. En éste se toma $e = \frac{p}{q}$. He aquí el error. Si observamos el paso 2, el q de la q -ésima suma parcial es el mismo q del denominador en $e = \frac{p}{q}$. Pero, para que la q -ésima suma parcial se pueda convertir en e , el q de ésta debe tender a infinito, mientras que el q del número $e = \frac{p}{q}$ debe permanecer constante, es decir, se tiene la siguiente igualdad

$$e = \frac{p}{q} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}.$$

De esta manera, tenemos un número q que tiende a infinito y a la vez

permanece constante. He aquí la trampa que el demostrador de todo esto, involuntariamente, se supone, le tendió a la matemática.

Para que la demostración anterior funcione, se debe tomar a $e = \frac{p}{r}$ donde r es un entero cualquiera. Pero, entonces, en la expresión

$$q! \left(\frac{p}{r} - S_q \right)$$

Se puede tener que $r > q!$ y, por tanto, su valor puede ser menor que uno sin ser entero. De todo lo anterior se desprende que la demostración en cuestión es errónea.

A.5. El Número @y las Indeterminaciones

Al tomar límites infinitos o al infinito aparecen, algunas veces, expresiones de la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, ∞^0 , 0^0 , 1^∞ e $\infty - \infty$. Se deducirá acá la verdadera razón por la cual estas expresiones son indeterminaciones; con base en los ceros residuales y sabiendo que el cero absoluto es constructible con la razón del continuo.

A.5.1. La División por Cero

En lo adelante se denotará el cero absoluto como 0 y los residuales por 0(res). Ya sabemos que $0 = \frac{1}{\rho 2^\omega}$, siendo ρ cualquier número real mayor que 1 finito o infinito. Entonces se tiene, para todo $k \neq 0$, que

$$\frac{k}{0} = k \cdot 1 / \frac{1}{\rho 2^\omega} = k \rho 2^\omega. \quad (1)$$

De (1) se tiene que cualquier k no nulo dividido entre el cero absoluto es un número transfinito, es decir, un número que trasciende lo infinito y, por lo tanto, para el humano no tiene existencia como número real. Por otra parte, si el cero es residual pero diferente a $\frac{1}{2^\omega}$, se tiene

$$\frac{k}{0(res)} = k \cdot 1 / \frac{1}{a(i)} = ka(i) = \infty. \quad (2)$$

Aun cuando en (2) tenemos un entero infinito (siempre que k sea finito), éste no es manipulable por el humano. Por ello se dice que no tiene existencia como número real. Sin embargo, no debemos escribir $\frac{k}{0} = \infty$, pues estaríamos aceptando que $\frac{k}{0}$ es un real infinito. Como casi nunca sabremos si el cero en el denominador es absoluto o residual, esto se debe denotar por

$$\frac{k}{0} > \Omega.$$

$$\text{Ya que } \Omega < \aleph_0 < 2^\omega < k \cdot 2^\omega = \frac{k}{0_{res}}.$$

Así, se entenderá que la división por cero es un número transfinito y no tiene existencia como real.

A.5.2. Las Indeterminaciones $0/0$ y $0_{(res)}/0_{(res)}$

La expresión $\frac{0}{0}$ es una indeterminación por lo siguiente:

Sean $\rho, \mu \in \mathbb{R}_+$ con ρ y μ mayores que 1. Entonces

$$\frac{0}{0} = \frac{\frac{1}{\rho 2^\omega}}{\frac{1}{\mu 2^\omega}} = \frac{\mu 2^\omega}{\rho 2^\omega}. \quad (1)$$

En (1), y por ser $\frac{2^\omega}{2^\omega} = 1$, se tiene

$$\frac{0}{0} = \frac{\mu}{\rho} = (\text{cualquier número real}). \quad \blacklozenge A$$

Ahora se demostrará que las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{0_{(res)}}{0_{(res)}}$ son equivalentes. En efecto, si k es un real positivo mayor que cualesquiera de los números ρ y μ , se tiene que los números $\frac{k}{\rho}$ y $\frac{k}{\mu}$ son reales mayores que 1, por tanto

$$\frac{0}{0} = \frac{\frac{1}{\rho 2^\omega}}{\frac{1}{\mu 2^\omega}} = \frac{k}{k} \cdot \frac{\frac{1}{\rho 2^\omega}}{\frac{1}{\mu 2^\omega}} = \frac{\frac{k \cdot 1}{\rho 2^\omega}}{\frac{k \cdot 1}{\mu 2^\omega}} = \frac{0_{(res)}}{0_{(res)}}. \quad \blacklozenge B$$

A.5.3. Las Expresiones $0_{(res)}/0$, $0/0_{(res)}$, $0/0$ y $0/0$

Veamos lo que sucede con las expresiones $\frac{0_{(res)}}{0}$ y $\frac{0}{0_{(res)}}$ cuando el cero residual es de la forma $\frac{1}{a(i)}$ (recordar que $a(i) < \aleph_0$). Sea $\rho > 1$ y finito. Como $2^\omega > \aleph_0^2$, entonces

$$\frac{0_{(res)}}{0} = \frac{\frac{1}{a(i)}}{\frac{1}{\rho 2^\omega}} = \frac{\rho}{\rho} \cdot \frac{\frac{1}{a(i)}}{\frac{1}{\rho 2^\omega}} = \frac{\rho}{\frac{1}{2^\omega}} = \frac{\rho 2^\omega}{a(i)} > \rho \aleph_0. \quad (1)$$

Pero $\rho \aleph_0$ es un transfinito. Por lo tanto, si $0_{(res)} = \frac{1}{a(i)}$, se tiene que

$$\frac{0_{(res)}}{0} > \Omega. \quad \blacklozenge A$$

Por otra parte, si en (1) cambiamos $a(i)$ por 2^ω , se obtiene que

$$\frac{1}{2^\omega} / 0 = \rho$$

Y como ρ es cualquier real finito, entonces

$$\frac{\frac{1}{2^\omega}}{0} \text{ es indeterminación.} \quad \blacklozenge B$$

Procediendo análogamente con $\frac{0}{0_{(res)}}$ se prueba que

$$\frac{0}{0_{(res)}} = \frac{a(i)}{\rho} \cdot \frac{1}{2^\omega} = 0_{(res)}. \quad (1)$$

Cambiando $a(i)$ por 2^ω en (1) se obtiene que

$$\frac{0}{0_{(res)}} = \frac{1}{\rho}. \quad (2)$$

Como ρ es cualquier real finito, entonces

$$\frac{0}{\frac{1}{2^\omega}} \text{ es indeterminación.} \quad \blacklozenge C$$

A.5.4. La Indeterminación ∞/∞

La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ se puede escribir como $\frac{a(i)}{b(i)}$. Se demostrará que dicha expresión es equivalente a $\frac{0}{0}$. En efecto, Como $\frac{2^\omega}{2^\omega} = \frac{\frac{1}{2^\omega}}{\frac{1}{2^\omega}}$, entonces

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{a(i)}{b(i)} = \frac{\frac{1}{2^\omega}}{\frac{1}{2^\omega}} \cdot \frac{a(i)}{b(i)} = \frac{0(res)}{0(res)}. \quad (1)$$

Por (1) y el apartado 4.4.2

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0}. \quad \blacklozenge$$

A.5.5. La Indeterminación $0 \cdot \infty$

La expresión $0 \cdot \infty$ es una indeterminación por lo siguiente:

Si el cero es absoluto se tiene

$$0 \cdot \infty = \frac{1}{\rho 2^\omega} \cdot a(i) = \frac{a(i)}{\rho} \cdot \frac{1}{2^\omega} = 0(res). \quad (1)$$

Para $0(res)$ se tiene

$$0(res) \cdot \infty = \frac{1}{b(i)} \cdot a(i) = \frac{a(i)}{b(i)} = \frac{\infty}{\infty}. \quad (2)$$

Como $\frac{\infty}{\infty}$ es equivalente a $\frac{0}{0}$, entonces, por (1) y (2),

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{0} \text{ (indeterminación)}. \quad \blacklozenge$$

A.5.6. La Indeterminación ∞^0

Para deducir por qué la expresión ∞^0 es una indeterminación se procede de la siguiente manera:

Sea k un real positivo cualquiera diferente a la unidad. Entonces

$$k^{a(i)} = b(i). \quad (1)$$

Por (1) se tiene

$$(k^{a(i)})^{\frac{1}{a(i)}} = (b(i))^{\frac{1}{a(i)}} = \infty^0. \quad (2)$$

Por (2)

$$k = \infty^0. \quad (3)$$

Por (3) y ser k un real positivo cualquiera diferente a la unidad

∞^0 es una indeterminación. \blacklozenge

Si $\frac{1}{a(i)}$ es $\frac{1}{2^\omega}$, entonces en (2) se tiene $\infty^0 = 1$ (porque $2^\omega \sqrt[b(i)]{b(i)} = 1$).

A.5.7. La Indeterminación 0^0

Para deducir que la expresión 0^0 es una indeterminación suponemos ambos ceros residuales de la forma $\frac{1}{a(i)}$.

Sea k un real positivo diferente de 1 tal que

$$k^{b(i)} = a(i). \quad (1)$$

De (1) se tiene

$$k = [a(i)]^{\frac{1}{b(i)}}. \quad (2)$$

Sea ahora la expresión 0^0 con ceros residuales de la forma $1/a(i)$, entonces

$$\left(\frac{1}{a(i)}\right)^{\frac{1}{b(i)}} = \frac{1^0}{a(i)^{1/b(i)}}. \quad (3)$$

Por (3) y (2) se tiene

$$\left(\frac{1}{a(i)}\right)^{\frac{1}{b(i)}} = \frac{1}{k}. \quad (4)$$

Por (4) y ser k un real positivo diferente de 1, 0^0 es indeterminación. ♦

Veamos lo que sucede cuando ambos ceros son absolutos.

Sea 0^0 con ambos ceros de la forma $\frac{1}{\rho 2^\omega}$, entonces, como $\mu^{1/\rho 2^\omega} = \mu^0 = 1$, se tiene

$$\left(\frac{1}{\mu 2^\omega}\right)^{1/\rho 2^\omega} = \frac{1^0}{2^{\omega/\rho 2^\omega}}. \quad (1)$$

Y como

$$\frac{1}{\rho} \frac{\omega}{2^\omega} = 0(\text{res}). \quad (2)$$

Por (1) y (2) se tiene que

$$\left(\frac{1}{\mu 2^\omega}\right)^{1/\rho 2^\omega} = \frac{1}{2^0} = 1. \quad (3)$$

Y por (3)

$$0^0 = 1 \text{ si ambos ceros son absolutos.} \quad \blacklozenge$$

El lector podrá comprobar que si el cero de la base es absoluto y el exponente residual, dicha expresión es indeterminación. Si es al contrario, dicha expresión es 1. Como en general no sabemos cuándo estos ceros son absolutos o residuales, entonces 0^0 es siempre una indeterminación.

A.5.8. La Indeterminación 1^∞

Para comprobar que la expresión 1^∞ es indeterminación, suponemos a la unidad como cualquier real no nulo elevado al exponente cero. Entonces se tiene

$$1 = k^0. \quad (1)$$

De (1) se tiene

$$1^\infty = (k^0)^\infty = k^{0 \cdot \infty}. \quad (2)$$

Como $0 \cdot \infty$ es una indeterminación, entonces 1^∞ es cualquier real no nulo elevado a cualquier real. En consecuencia, 1^∞ es indeterminación.

A.5.9. La Indeterminación $\infty - \infty$

Para determinar que la expresión $\infty - \infty$ es una determinación se procede de la siguiente manera. Sean $a(t) > b(t)$ transfinitos y $b(i) > a(i)$ infinitos cualesquiera. Entonces,

$$\frac{a(t)}{a(i)} - \frac{b(t)}{b(i)} = \infty - \infty. \quad (1)$$

Operando en el primer miembro de (1) se tiene

$$\frac{b(i)a(t) - a(i)b(t)}{a(i) \cdot b(i)} = \frac{\infty}{\infty}. \quad (2)$$

Por (1) y (2)

$$\infty - \infty = \frac{\infty}{\infty} \text{ (indeterminación)}. \quad \blacklozenge$$

A.6. Los Enteros Infinitos y sus Factores Finitos

Se probará, ahora, que todo entero infinito o transfinito, cuando es potencia infinita de un entero positivo finito $b + 1 > 1$, tiene como factor al entero finito b . En efecto, sea b cualquier entero finito mayor o igual que dos. Se tiene

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \dots + \frac{1}{(b+1)^{a(i)}} + \dots + \frac{1}{(b+1)^\omega}. \quad (1)$$

Si $b = 2$, entonces $b + 1 = 3$ y siempre existirá un entero infinito $c(i)$ tal que

$$\frac{1}{2^{\omega+1}} = \frac{1}{3^{c(i)}} = 0. \quad (2)$$

Por (2), existe un entero infinito $a(i)$ tal que $\frac{1}{(b+1)^{a(i)+1}} = 0$. Y, por tanto, multiplicando en (1) por $(b + 1)^{a(i)}$, se tiene

$$\frac{(b+1)^{a(i)}}{b} = (b+1)^{a(i)-1} + \dots + 1 + 0. \quad (3)$$

Como el segundo miembro de (2) es entero infinito de la forma $k(i)$, entonces, el entero infinito $e(i) = (b+1)^{a(i)}$ tiene como factor al entero finito b . Sin embargo, $b+1$ y b no tienen factores comunes (son primos relativos).

De lo anterior se deduce que las fracciones infinitas que generan a los números de la forma $\sqrt[n]{m}$ (con m natural y no enésima potencia) son de la forma $\frac{a(i)}{b(i)}$ (o de la forma $\frac{a(t)}{b(t)}$) siendo $a(i) = (b+1)^{k(i)}$ con $nk(i) = c(i)$. Es decir, $\sqrt[n]{m} = \frac{(m+1)^{k(i)}}{b(i)}$ y $m = \frac{(m+1)^{c(i)}}{b(i)^n}$ ($(m+1)^{c(i)}$ contiene al factor m). Si la raíz es de la forma $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$, entonces la fracción $\frac{p}{q}$ es de la forma $\frac{p}{q} = \frac{d(i)^n(p+1)^{a(i)}}{b(i)^n(q+1)^{c(i)}}$, con $a(i) = nk(i)$ y $c(i) = ne(i)$ y la fracción $\frac{d(i)^n(p+1)^{a(i)}}{b(i)^n(q+1)^{c(i)}}$ se auto-simplifica. Por lo tanto, las demostraciones de irracionalidad que se dan de $\sqrt[n]{m}$, siendo m finito, tomando una igualdad de la forma: $\frac{p}{q} = \sqrt[n]{m}$ y suponiendo que la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible, son erróneas, pues no toman en cuenta a los enteros infinitos.

No obstante todo lo anterior, observe que no puede existir un entero infinito primo que sea de la forma $k^{a(i)}$ siendo k natural. Es decir, si $p(i)$ es un entero infinito primo, entonces, $p(i) \neq k^{a(i)}$. Por consiguiente, para los enteros infinitos primos no pueden existir factores ni finitos ni infinitos.

A.7. Una Reflexión para los Algebraistas

Para aquellos que puedan estar pensando que este libro le creará un grave problema al Álgebra abstracta, pueden estar tranquilos, pues, el álgebra continuará como hasta ahora, sólo que se deberá aceptar que todos los números reales son racionales y, por ende, algebraicos. El error, que se fue acumulando a través de los años, consistió en denotar a nuestras ecuaciones en la forma

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + jx + k = 0.$$

Y suponer que los coeficientes a, b, \dots, j, k eran números reales manipulables, es decir, finitos ($a(i), b(i)$, etc., también son de \mathbb{R} y no son manipulables). En consecuencia, no existen números trascendentes sino sólo racionales. Cualquier número de esos, a los que se les ha dado el nombre de trascendentes, es solución de alguna ecuación con coeficientes (enteros infinitos) $a(i), b(i)$, etc. En cuanto a las demostraciones de constructibilidad con *re-com*, ya hemos visto que es más sencillo hacerlo con la razón de continuidad.

Por otra parte, el conjunto \mathbb{R} deberá ser visto como un cuerpo de características especiales, pues, cumple con todas las especificaciones de cuerpo infinito y, sin embargo, tiene divisores de cero en el intervalo $(-1, 1)$. Además, una cantidad infinita de infinitésimos no tienen inverso en \mathbb{R} , como, por ejemplo, $\textcircled{0}, 2\textcircled{0}, \dots, n\textcircled{0}$, n natural finito. Esto es así porque $2^\omega > (\aleph_0)^n$ (n finito), por tanto, $1 / n\textcircled{0} = 2^\omega / n > \aleph_0 \notin \mathbb{R}$.

Asimismo, el que \mathbb{R} posea una razón de continuidad no elimina ningún aspecto de nuestra matemática; todo lo contrario, aclara algunos conceptos que quedaban opacos, como por ejemplo, el que un conjunto pueda ser cerrado y a la vez abierto, lo cual era una contradicción que mandaba a la papelera a uno de los tres principios universales conocido como ***principio de no contradicción***. Ahora sabemos que no es que sean abiertos y a la vez cerrados, sino que: ***todo conjunto abierto es equivalente a un conjunto cerrado***, por ejemplo, $(0, 1) = [\textcircled{0}, 1 - \textcircled{0}]$. Y el conjunto \mathbb{R} queda como un conjunto cerrado, ya que se tiene $\mathbb{R} = [-\Omega, \Omega]$. Así, el único conjunto abierto y cerrado a la vez es el conjunto vacío (el neutro en la teoría de conjuntos).