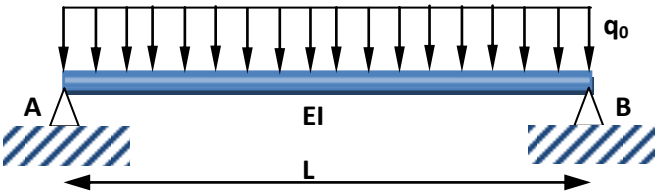
PROBLEMA MÉTODO APROXIMADO (RITZ – ERROR CUADRÁTICO).- *Para la viga doblemente apoyada, sometida a la acción de una fuerza distribuida constante de intensidad q_0, como se muestra en la figura adjunta, determine en forma analítica:*

- ***a*** *Distribución del momento flector M(x)*
- ***b*** *La ecuación de la flecha w(x) del eje neutro w(x)*
- ***c*** *La energía Acumulada en la viga en función de la rigidez a la flexión EI, la longitud L y la carga q_0.*
- ***d*** *Utilizando el método de los residuos ponderado (error cuadrático), se pide determinar la deflexión w(x), para la flecha utilice la siguiente aproximación.*

$$\tilde{w} = \sum_{i=1}^{N} a_i \, sen \frac{i\pi x}{L} = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \varphi_i(x) = a^T \varphi = a\varphi^T$$

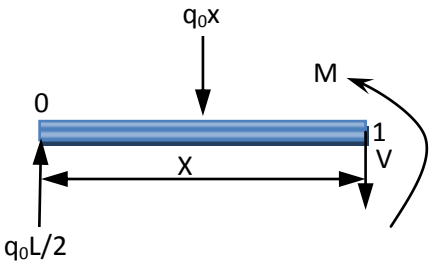
Tome solo los tres primeros términos del polinomio de aproximación.

Compare los resultados obtenidos mediante el método de residuos ponderados y los resultados analíticos en especial los momentos flectores, deflexiones y la energía interna acumulada, comente los resultados.



DESARROLLO

a.-



$$\sum M_1 = 0$$

$$M + q_0 x \left(\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{q_0 L}{2}\right) x = 0$$

$$M(x) = \frac{q_0 L x}{2} - \frac{q_0 x^2}{2}$$

b.- $EIw\ddot{(x)} = M(x)$

$$EIw(\ddot{x}) = \frac{q_0 Lx}{2} - \frac{q_0 x^2}{2}$$

$$EIw(\dot{x}) = \frac{q_0 Lx^2}{4} - \frac{q_0 x^3}{6} + C_1$$

$$EIw(x) = \frac{q_0 Lx^3}{12} - \frac{q_0 x^4}{24} + C_1 x + C_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (1)}$$

Aplicando las condiciones de borde tenemos lo siguiente:

Para:

- ✓ *X=0 se tiene w(x)=0 ……. (2)*
- ✓ *X=L se tiene w(x)=0 ……. (3)*

Remplazamos 2 y 3 en 1 y tenemos que:

$C_2=0$

$C_1=-q_0L^3/24$

De donde la ecuación de la deflexión será:

$$w(x) = -\frac{q_0 x}{24EI}(x^3 + L^3 - 2x^2 L)$$

c.-

$$EIw''''(x) = q(x) \quad Ecuacion\ Diferencial$$

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_0^L EIw''(x)^2 dx - \int_0^L q(x)w(x)dx$$

$$\Pi(w) : Minimo\ Potencial\ Elastico$$

d.-

A.-MÉTODO DE RITZ

Los pasos 1 y 2 ya están realizadas puesto que el potencial elástico Π(w) y la elección de las funciones de base son conocidos por el enunciado del problema.

Paso 03:

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_0^L EIw''(x)^2 dx - \int_0^L q(x)w(x)dx$$

$$\tilde{\Pi}(\tilde{w}) = \frac{1}{2}\int_0^L EIa^T \varphi'' \varphi''^T a dx - \int_0^L q(x)a^T \varphi dx$$

$$\tilde{\Pi}(\tilde{w}) = \frac{1}{2}a^T \int_0^L EI\varphi'' \varphi''^T dx a - a^T \int_0^L q(x)\varphi dx = \frac{1}{2}a^T \boldsymbol{K} a - a^T f$$

La matriz de rigidez K y el vector de carga f pueden ser calculados en forma muy sencilla

$$K = EI \int_0^L \varphi'' \varphi''^T dx$$

$$K = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EI \int_0^L \begin{bmatrix} sen\dfrac{\pi x}{L} \\ i^2 sen\dfrac{i\pi x}{L} \\ \vdots \\ N^2 sen\dfrac{N\pi x}{L} \end{bmatrix} \left[sen\frac{\pi x}{L}, \quad i^2 sen\frac{i\pi x}{L}, \quad \ldots \quad , N^2 sen\frac{N\pi x}{L} \right] dx$$

Para el elemento K_{ij} de la matriz de rigidez se tiene:

$$K_{ij} = EI \int_0^L \varphi(x)''_i \varphi(x)''_j dx$$

$$K = EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 (ij)^2 \int_0^L sen\frac{i\pi x}{L} sen\frac{j\pi x}{L} dx$$

Por

$$\int_0^L sen\frac{i\pi x}{L} sen\frac{j\pi x}{L} dx = \begin{cases} 1/2 & para \quad i = j \\ 0 & para \quad i \neq j \end{cases}$$

Son todos los K_{ij}=0 para $i \neq j$ y K se convierte en una matriz diagonal, el problema nos pide que aproximemos los tres primeros términos del polinomio.

$$K = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EIL \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2^4}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^4}{2} \end{bmatrix}$$

$$K = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EIL \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{81}{2} \end{bmatrix}$$

El vector de cargas F se obtiene:

$$f = \int_0^L \varphi q(x) dx$$

$$f = \int_0^L q_0 sen\frac{i\pi x}{L} dx$$

$$f = \frac{q_0 L}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^i}{i}\right)$$

$$f = \frac{q_0 L}{\pi}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Paso 04:

Determinaremos los coeficientes desconocidos a_i

$$\frac{EI}{q_0 L^4}\pi^5 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{81}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0.0164 \end{bmatrix} \frac{q_0 L^4}{EI\pi^5}$$

Paso 05:

Con los valores calculados hallamos la distribución de la flecha w(x)

$$\tilde{w}(x) = \frac{q_0 L^4}{EI\pi^5}\left[4sen\frac{\pi x}{L} + 0.0164sen\frac{3\pi x}{L}\right]$$

B.-MÉTODO DE RESIDUOS PONDERADOS ERROR CUADRÁTICO

Introduciendo la función de base seleccionada $\tilde{w}$ (x) en la ecuación diferencial encontramos la función de error ε(x)

$$\varepsilon(x) = EI\tilde{w}''''(x) - q(x)$$

$$\tilde{w} = \sum_{i=1}^{N} a_i\, sen\frac{i\pi x}{L} = \sum_{i=1}^{N} a_i\, \varphi_i(x) = a^T\varphi = a\varphi^T$$

El método del error cuadrático nos lleva a las siguientes ecuaciones de solución para los parámetros desconocidos a_i *de la solución aproximada* $\tilde{w}(x)$

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^L \varepsilon(x)^2 dx = 0 \quad es\ decir \quad 2\int_0^L \varepsilon(x)\varepsilon(x)_{.a} dx = 0$$

Las funciones de ponderación resultan de:

$$w_i(x) = \varepsilon(x)_{.a}$$

En el ejemplo tratado tenemos:

$$\varepsilon(x) = EIa^T\varphi'''' - q(x) = EI\varphi''''^T a - q(x)$$

$$\varepsilon(x)_{.a} = EI\varphi''''$$

$$EI\int_0^L \varphi''''\varphi''''^T dxa - \int_0^L \varphi'''' q(x)dx = 0$$

Ka-f=0

Entonces se tiene:

$$K = EI\int_0^L \varphi''''\varphi''''^T dx$$

$$f = \int_0^L \varphi'''' q(x)dx$$

Resolviendo K tenemos

$$\varphi(x) = sen\frac{i\pi x}{L}$$

$$\varphi'(x) = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^1 cos\frac{i\pi x}{L}$$

$$\varphi''(x) = -\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 sen\frac{i\pi x}{L}$$

$$\varphi'''(x) = -\left(\frac{i\pi}{L}\right)^3 cos\frac{i\pi x}{L}$$

$$\varphi''''(x) = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 sen\frac{i\pi x}{L}$$

$$K = EI\int_0^L \varphi''''\varphi''''^T dx$$

$$K = \left(\frac{\pi}{L}\right)^8 EI\int_0^L \begin{bmatrix} sen\frac{\pi x}{L} \\ i^4 sen\frac{i\pi x}{L} \\ \vdots \\ N^4 sen\frac{N\pi x}{L} \end{bmatrix} \left[sen\frac{\pi x}{L}, \quad i^4 sen\frac{i\pi x}{L}, \quad \ldots \quad , N^4 sen\frac{N\pi x}{L}\right] dx$$

Para el elemento K_{ij} de la matriz de rigidez se tiene:

$$K_{ij} = EI\int_0^L \varphi(x)''''_i \varphi(x)''''_j dx$$

$$K = EI\left(\frac{\pi}{L}\right)^8 (ij)^4 \int_0^L sen\frac{i\pi x}{L} sen\frac{j\pi x}{L} dx$$

Por

$$\int_0^L sen\frac{i\pi x}{L} sen\frac{j\pi x}{L} dx = \begin{cases} 1/2 & para \quad i = j \\ 0 & para \quad i \neq j \end{cases}$$

Son todos los K_{ij}=0 para $i \neq j$ y K se convierte en una matriz diagonal, el problema nos pide que aproximemos los tres primeros términos del polinomio.

$$K = \left(\frac{\pi}{L}\right)^8 EIL \begin{bmatrix} \frac{1^8}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2^8}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^8}{2} \end{bmatrix}$$

$$K = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EIL \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{256}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6561}{2} \end{bmatrix}$$

Desarrollo de f:

$$f = \int_0^L \varphi'''' q(x) dx$$

$$f = \int_0^L q_0 \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 sen\frac{i\pi x}{L} dx$$

$$f = \frac{q_0 \pi^3}{L^3} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 54 \end{bmatrix}$$

Determinaremos los coeficientes desconocidos a_i

$$\frac{EI}{q_0 L^4} \pi^5 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{256}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6561}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 54 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0.0164 \end{bmatrix} \frac{q_0 L^4}{EI\pi^5}$$

Con los valores calculados hallamos la distribución de la flecha w(x)

$$\tilde{w}(x) = \frac{q_0 L^4}{EI\pi^5}\left[4sen\frac{\pi x}{L} + 0.0164sen\frac{3\pi x}{L}\right]$$

e.- Comparación de resultados.

COMPARACIÓN DE MÉTODOS		
	RITZ - ERROR DE CUADRATURA	***SOLUCION EXACTA***
Xi/ L	$\tilde{w}(x_i) \Big/ \left(\frac{EI}{q_o L^4}\right)$	$w(x_i) \Big/ \left(\frac{EI}{q_o L^4}\right)$
1/8	*0.005052*	*0.005056*
1/4	*0.009281*	*0.009277*
3/8	*0.012056*	*0.012054*
1/2	*0.013017*	*0.013021*
5/8	*0.012056*	*0.012054*
3/4	*0.009281*	*0.009277*
7/8	*0.005052*	*0.005056*
Xi/ L	$\tilde{M}_f(x_i) \Big/ q_0 L^2$	$\tilde{M}_f(x_i) \Big/ q_0 L^2$
1/8	*0.053766*	*0.054688*
1/4	*0.094587*	*0.093750*
3/8	*0.117364*	*0.117188*
1/2	*0.124246*	*0.125000*
5/8	*0.117364*	*0.117188*
3/4	*0.094587*	*0.093750*
7/8	*0.053766*	*0.054688*

Tabla 01 – Cuadro de Comparaciones

CONCLUSIONES:

Al hacer las primeras comparaciones entre los métodos aproximados de Ritz y residuos ponderados pues demostramos que vienen a ser los mismos resultados a pesar de que Ritz trabajo con la segunda derivada y el residuo con la cuarta derivada de la función de base, esto se confirma con la igualdad de las constantes a, que son iguales por los dos métodos:

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0.0164 \end{bmatrix} \frac{q_0 L^4}{EI\pi^5}$$

Sobre la comparación con los resultados analíticos pues también podemos demostrar que hay una similitud de valores como se puede ver en el tabla 1 con errores que no superan el 1.7%, lo cual se confirma lo dicho con los métodos de aproximación.

Ing. Fredy Alan Ccarita Cruz
alan.ccarita@pucp.pe
Maestría en Ingeniería Mecánica
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERU
Lima, Octubre del 2011