

Título: ***MOMENTO DE INERCIA***
(FISICA – ESTÁTICA)

Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

MOMENTO DE INERCIA

El Momento de Inercia, también denominado Segundo Momento de Área; Segundo Momento de Inercia o Momento de Inercia de Área, es una propiedad geométrica de la sección transversal de los elementos estructurales.

Inercia : La inercia es la propiedad de la materia de resistir a cualquier cambio en su movimiento, ya sea en dirección o velocidad.

Inercia a la Rotación : Cualquier cuerpo que efectúa un giro alrededor de un eje, desarrolla inercia a la rotación, es decir, una resistencia a cambiar su velocidad de rotación y la dirección de su eje de giro. La inercia de un objeto a la rotación está determinada por su Momento de Inercia, siendo ésta “la resistencia que un cuerpo en rotación opone al cambio de su velocidad de giro”.

Momento de Inercia. Ejemplo : El momento de inercia realiza en la rotación un papel similar al de la masa en el movimiento lineal. Por ejemplo, si con una honda se lanza una piedra pequeña y una grande, aplicando la misma fuerza a cada una, la piedra pequeña se acelerará mucho más que la grande.

El momento de inercia es pues similar a la inercia, con la diferencia que es aplicable a la rotación más que al movimiento lineal. La inercia es la tendencia de un objeto a permanecer en reposo o a continuar moviéndose en línea recta a la misma velocidad.

La inercia puede interpretarse como una nueva definición de masa. El momento de inercia es, pues, masa rotacional y depende de la distribución de masa en un objeto. Cuanta mayor distancia hay entre la masa y el centro de rotación, mayor es el momento de inercia.

El momento de inercia se relaciona con las tensiones y deformaciones máximas producidas por los esfuerzos de flexión en un elemento estructural, por lo cual este valor determina la resistencia máxima de un elemento estructural bajo flexión junto con las propiedades de dicho material.

Momentos de inercia de figuras planas conocidas más utilizadas :

- **Rectángulo** de altura h y ancho b , respecto a los ejes que, siendo paralelos a los lados del mismo, pasan por su centro de gravedad:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$
$$I_y = \frac{1}{12}b^3h$$

- **Triángulo isósceles** de base b y altura h , respecto a los ejes que, siendo paralelos a base y altura, pasan por su centro de gravedad:

$$I_x = \frac{1}{36}bh^3$$
$$I_y = \frac{1}{48}b^3h$$

- **Triángulo rectángulo** de base b y altura h , respecto a los ejes que, siendo paralelos a los lados del mismo, pasan por su centro de gravedad:

$$I_x = \frac{1}{36}bh^3$$
$$I_y = \frac{1}{36}b^3h$$

- **Círculo** de radio R , respecto de cualquier eje que pase por su centro de gravedad:

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi R^4$$

- **Semicírculo** de radio R , respecto de los ejes que pasan por su centro de gravedad (el eje X paralelo al lado plano):

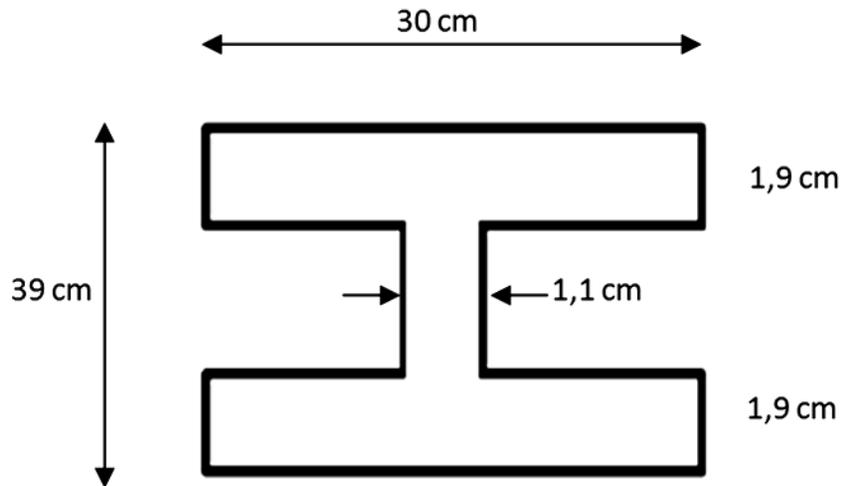
$$I_x = 0,10976R^4$$
$$I_y = \frac{1}{8}\pi R^4$$

- **Cuadrante** (Cuarto de círculo) de radio R , respecto a los ejes que, siendo paralelos a los lados planos, pasan por su centro de gravedad:

$$I_x = I_y = 0,0549R^4$$

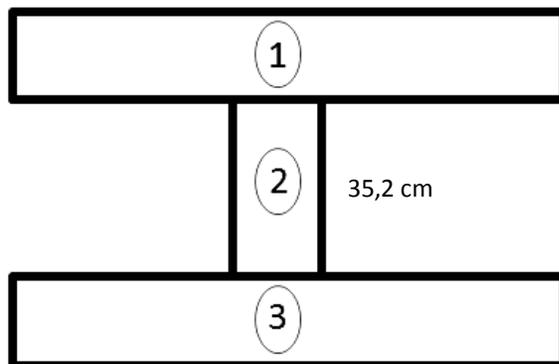
CÓMO CALCULAR EL MOMENTO DE INERCIA DE UNA FIGURA PLANA COMPUESTA :

Ejemplo 1 : Calcular el momento de inercia de la siguiente figura plana compuesta :



1er paso : Se divide la figura compuesta en figuras planas sencillas de las que conozcamos las fórmulas para calcular su área y su momento de inercia.

En este caso en particular podemos dividirla en 3 rectángulos :



2do paso : Se determinan las áreas de estas figuras simples y se identifican como A_1 , A_2 y A_3

$$A_1 = \text{base por altura} = 30 \times 1,9 = 57,00 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \text{base por altura} = 1,1 \times 35,2 = 38,72 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = \text{base por altura} = 30 \times 1,9 = 57,00 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = A_1 + A_2 + A_3 = 57 + 38,72 + 57 = 152,72 \text{ cm}^2$$

3er paso : Se Calcula la ubicación del centro de masa de la figura compuesta :

Las coordenadas del centro de masa de una figura plana compuesta vienen dadas por las siguientes formulas :

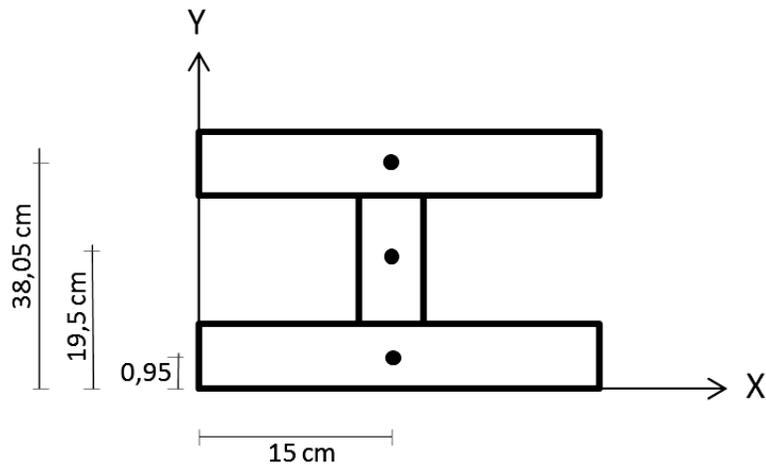
$$X_G = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3 + \dots + A_n \cdot X_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}$$

$$Y_G = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3 + \dots + A_n \cdot Y_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}$$

Donde "Ai" es el área de la figura simple estudiada, "Xi" es la abscisa del centro de masa de dicha figura simple y "Yi" la ordenada del centro de masa de la misma figura simple.

Fijamos un sistema rectangular de coordenadas e indicamos la distancia que hay desde el origen hasta el centro de masa de cada una de las figuras simples en las que dividimos la figura compuesta.

Recuerde que el centro de masa de un rectángulo está ubicado a un medio de su base y a un medio de su altura.



Para su posterior uso estas distancias son identificadas como :

- $X_1 = 15 \text{ cm}$
- $X_2 = 15 \text{ cm}$
- $X_3 = 15 \text{ cm}$
- $Y_1 = 38,05 \text{ cm}$
- $Y_2 = 19,5 \text{ cm}$
- $Y_3 = 0,95 \text{ cm}$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas :

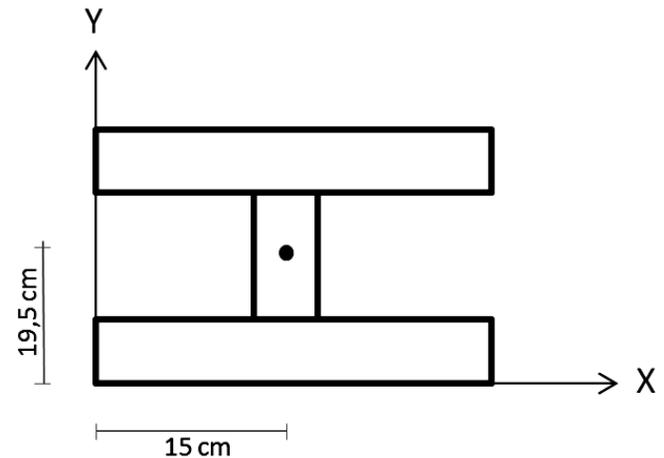
$$X_G = \frac{(57)(15) + (38,72)(15) + (57)(15)}{152,72}$$

$$X_G = \frac{855 + 580,8 + 855}{152,72} = \frac{2.290,8}{152,72} = \mathbf{15}$$

$$Y_G = \frac{(57)(38,05) + (38,72)(19,5) + (57)(0,95)}{152,72}$$

$$Y_G = \frac{2.168,85 + 755,04 + 54,15}{152,72} = \frac{2.978,04}{152,72} = \mathbf{19,5}$$

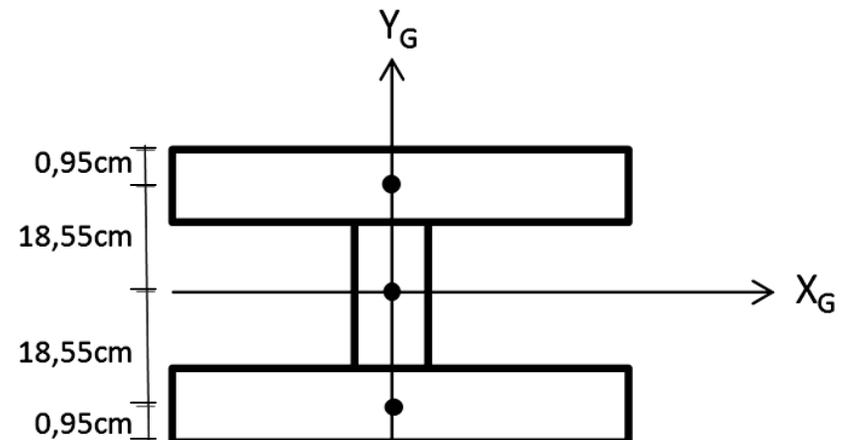
El centro de masa de la figura compuesta estará ubicado en las coordenadas **(15 , 19.5)**



Se confirma el enunciado que dice : “Si una figura plana posee un eje de simetría, su centro de masa estará ubicado sobre éste.”

Esta figura en particular posee un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical, luego su centro de masa estará ubicado en el punto de intersección de sus dos ejes de simetría.

4to paso : Se calculan las distancias que hay desde cada centro de masa de las figuras sencillas hasta el centro de masa de la figura compuesta.



En este caso notamos que todos los centros de masa de las figuras sencillas están contenidos en el eje "Y_G" del centro de masa de la figura compuesta, luego :

$$X_{1G}, X_{2G} \text{ y } X_{3G} = 0 \text{ cm}$$

Con relación a las distancias con el eje "X_G" :

$$Y_{1G} = 18,55 \text{ cm}$$

$$Y_{2G} = 0 \text{ cm}$$

$$Y_{3G} = 18,55 \text{ cm}$$

5to paso : Se calculan los momentos de inercia de las figuras sencillas con respecto a sus ejes (que serán paralelos a "Y_G" y "X_G"); para lo cual utilizaremos las fórmulas que se encuentran en la primera página de esta guía.

- **Rectángulo** de altura h y ancho b , respecto a los ejes que, siendo paralelos a los lados del mismo, pasan por su centro de gravedad:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}b^3h$$

Para la figura 1: $I_{1x} = \frac{(30)(1,9)^3}{12} = 17,1475 \text{ cm}^4$

$$I_{1y} = \frac{(30)^3(1,9)}{12} = 4.275 \text{ cm}^4$$

Para la figura 2: $I_{2x} = \frac{(1,1)(35,2)^3}{12} = 3.997,969 \text{ cm}^4$

$$I_{2y} = \frac{(1,1)^3(35,2)}{12} = 3,9043 \text{ cm}^4$$

Para la figura 3: $I_{3x} = \frac{(30)(1,9)^3}{12} = 17,1475 \text{ cm}^4$

$$I_{3y} = \frac{(30)^3(1,9)}{12} = 4.275 \text{ cm}^4$$

6to paso : Se calcula el momento de inercia de cada una de las figuras sencillas respecto a los ejes "X_G" e "Y_G" aplicando el teorema del eje paralelo, es decir el Teorema de Steiner.

$$\ddot{I}_{i,x} = I_{ix} + A_i(Y_{iG})^2$$

$$\ddot{I}_{i,y} = I_{iy} + A_i(X_{iG})^2$$

$$\ddot{I}_{1,x} = I_{1x} + A_1(Y_{1G})^2 = 17,1475 + 57(18,55)^2 = \mathbf{19.631 \text{ cm}^4}$$

$$\ddot{I}_{2,x} = I_{2x} + A_2(Y_{2G})^2 = 3.997,969 + (38,72)(0)^2 = \mathbf{3.998 \text{ cm}^4}$$

$$\ddot{I}_{3,x} = I_{3x} + A_3(Y_{3G})^2 = 17,1475 + 57(18,55)^2 = \mathbf{19.631 \text{ cm}^4}$$

$$\ddot{I}_{1,y} = I_{1y} + A_1(X_{1G})^2 = 4.275 + 57(0)^2 = \mathbf{4.275 \text{ cm}^4}$$

$$\ddot{I}_{2,y} = I_{2y} + A_2(X_{2G})^2 = 3,9043 + (38,72)(0)^2 = \mathbf{3,9043 \text{ cm}^4}$$

$$\ddot{I}_{3,y} = I_{3y} + A_3(X_{3G})^2 = 4.275 + 57(0)^2 = \mathbf{4.275 \text{ cm}^4}$$

7mo paso : Se calculan los momentos de inercia de la figura compuesta a partir de los momentos anteriores :

$$I_{x,\text{total}} = \sum \ddot{I}_{i,x}$$

$$I_{y,\text{total}} = \sum \ddot{I}_{i,y}$$

$$I_{x,\text{total}} = \ddot{I}_{1,x} + \ddot{I}_{2,x} + \ddot{I}_{3,x} = 19.631 + 3.998 + 19.631 \\ = \mathbf{43.260 \text{ cm}^4}$$

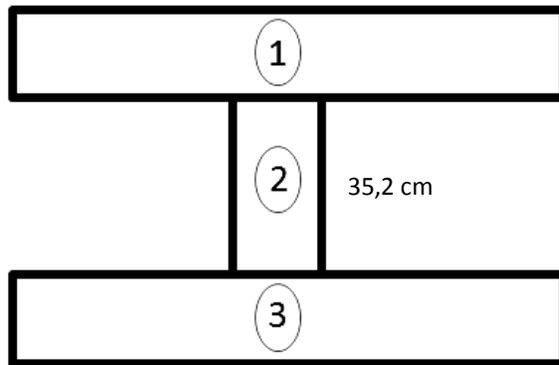
$$I_{y,\text{total}} = \ddot{I}_{1,y} + \ddot{I}_{2,y} + \ddot{I}_{3,y} = 4.275 + 3,9043 + 4.275 = \mathbf{8.554 \text{ cm}^4}$$

El conocimiento pleno de las definiciones y enunciados en materia de centro de masa, centro de gravedad, centroide y momentos de inercia nos permiten arribar a los resultados de una manera más rápida y segura.

A continuación resolveremos el ejercicio anterior por un “método resumido” que nos permitirá llegar a la misma solución :

1er paso : Se divide la figura compuesta en figuras planas sencillas de las que conozcamos las fórmulas para calcular su área y su momento de inercia.

En este caso en particular podemos dividirla en 3 rectángulos :



2do paso : Se determinan las áreas de estas figuras simples y se identifican como A_1 , A_2 y A_3

$$A_1 = \text{base por altura} = 30 \times 1,9 = 57,00 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \text{base por altura} = 1,1 \times 35,2 = 38,72 \text{ cm}^2$$

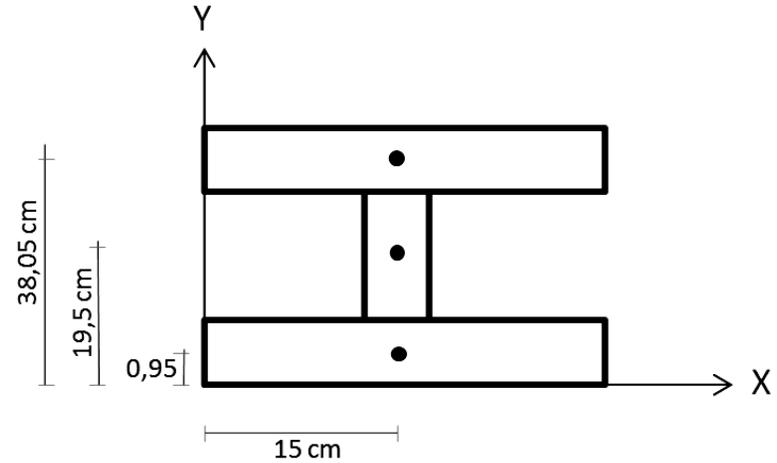
$$A_3 = \text{base por altura} = 30 \times 1,9 = 57,00 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = A_1 + A_2 + A_3 = 57 + 38,72 + 57 = 152,72 \text{ cm}^2$$

3er paso : Se calcula la ubicación del centro de masa de la figura compuesta :

Fijamos un sistema rectangular de coordenadas e indicamos la distancia que hay desde el origen hasta el centro de masa de cada una de las figuras simples en las que dividimos la figura compuesta.

Recuerde que el centro de masa de un rectángulo está ubicado a un medio de su base y a un medio de su altura.

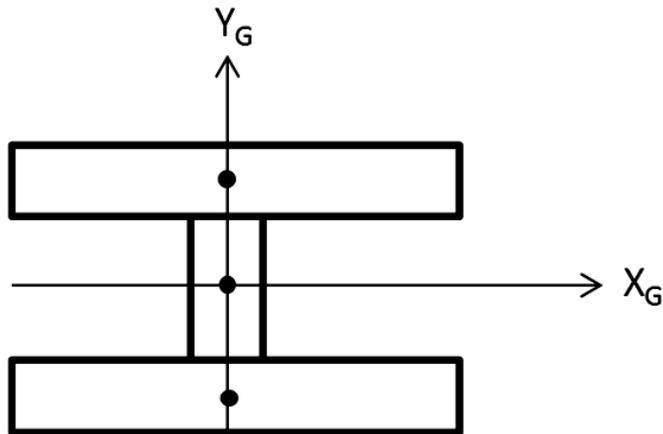


Para su posterior uso estas distancias son identificadas como :

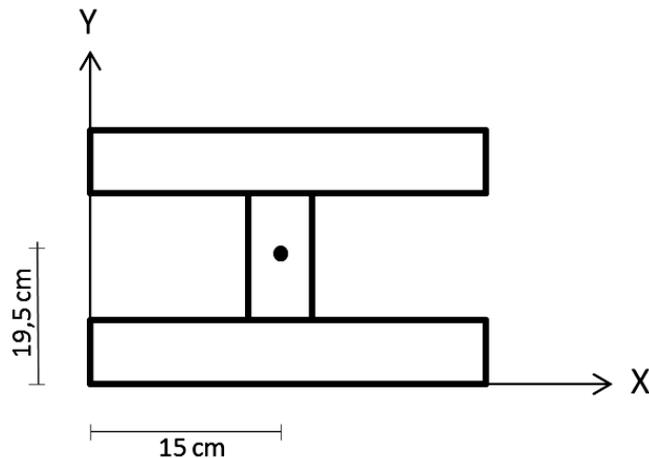
- $X_1 = 15 \text{ cm}$
- $X_2 = 15 \text{ cm}$
- $X_3 = 15 \text{ cm}$
- $Y_1 = 38,05 \text{ cm}$
- $Y_2 = 19,5 \text{ cm}$
- $Y_3 = 0,95 \text{ cm}$

Se debe tener presente que : “Si una figura plana posee un eje de simetría, su centro de masa estará ubicado sobre éste.”

Esta figura en particular posee un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical, luego su centro de masa estará ubicado en el punto de intersección de sus dos ejes de simetría.



El centro de masa de la figura compuesta estará ubicado en las coordenadas **(15 , 19.5)(X_G , Y_G)**



4to paso : Se calculan los momentos de inercia de las figuras sencillas con respecto a sus ejes (que serán paralelos a “Y” y “X”); para lo cual utilizaremos las fórmulas que se encuentran en la primera página de esta guía.

- **Rectángulo** de altura h y ancho b , respecto a los ejes que, siendo paralelos a los lados del mismo, pasan por su centro de gravedad:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}b^3h$$

Para la figura 1: $I_{1x} = \frac{(30)(1,9)^3}{12} = 17,1475 \text{ cm}^4$

$$I_{1y} = \frac{(30)^3(1,9)}{12} = 4.275 \text{ cm}^4$$

Para la figura 2: $I_{2x} = \frac{(1,1)(35,2)^3}{12} = 3.997,969 \text{ cm}^4$

$$I_{2y} = \frac{(1,1)^3(35,2)}{12} = 3,9043 \text{ cm}^4$$

Para la figura 3: $I_{3x} = \frac{(30)(1,9)^3}{12} = 17,1475 \text{ cm}^4$

$$I_{3y} = \frac{(30)^3(1,9)}{12} = 4.275 \text{ cm}^4$$

5to paso : Se calcula el momento de inercia de cada una de las figuras sencillas respecto a los ejes “X_G” e “Y_G” aplicando el teorema del eje paralelo, es decir el Teorema de Steiner.

$$\ddot{I}_{i,x} = I_{ix} + A_i(Y_i - Y_G)^2$$

$$\ddot{I}_{i,y} = I_{iy} + A_i(X_i - X_G)^2$$

$$\begin{aligned} \ddot{I}_{1,x} &= I_{1x} + A_1 (Y_1 - Y_G)^2 = 17,1475 + 57 (38,05 - 19,5)^2 \\ &= 19. 631 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{I}_{2,x} &= I_{2x} + A_2 (Y_2 - Y_G)^2 = 3.997,969 + (38,72) (19,5 - 19,5)^2 \\ &= 3. 998 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{I}_{3,x} &= I_{3x} + A_3 (Y_3 - Y_G)^2 = 17,1475 + 57 (0,95 - 19,5)^2 \\ &= \mathbf{19.631 \text{ cm}^4}\end{aligned}$$

$$\ddot{I}_{1,y} = I_{1y} + A_1 (X_1 - X_G)^2 = 4.275 + 57(15 - 15)^2 = \mathbf{4.275 \text{ cm}^4}$$

$$\begin{aligned}\ddot{I}_{2,y} &= I_{2y} + A_2 (X_2 - X_G)^2 = 3,9043 + (38,72) (15 - 15)^2 \\ &= \mathbf{3,9043 \text{ cm}^4}\end{aligned}$$

$$\ddot{I}_{3,y} = I_{3y} + A_3 (X_3 - X_G)^2 = 4.275 + 57(15 - 15)^2 = \mathbf{4.275 \text{ cm}^4}$$

6to paso : Se calculan los momentos de inercia de la figura compuesta a partir de los momentos anteriores :

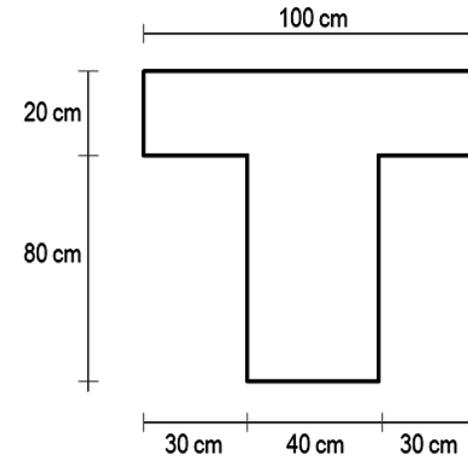
$$I_{x,\text{total}} = \sum \ddot{I}_{i,x}$$

$$I_{y,\text{total}} = \sum \ddot{I}_{i,y}$$

$$\begin{aligned}I_{x,\text{total}} &= \ddot{I}_{1,x} + \ddot{I}_{2,x} + \ddot{I}_{3,x} = 19.631 + 3.998 + 19.631 \\ &= \mathbf{43.260 \text{ cm}^4}\end{aligned}$$

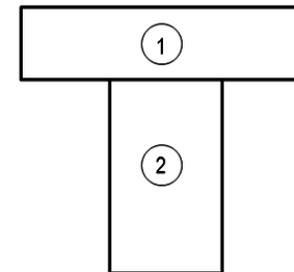
$$\begin{aligned}I_{y,\text{total}} &= \ddot{I}_{1,y} + \ddot{I}_{2,y} + \ddot{I}_{3,y} = 4.275 + 3,9043 + 4.275 \\ &= \mathbf{8.554 \text{ cm}^4}\end{aligned}$$

Ejemplo 2 : Calcular el momento de inercia de la siguiente figura plana compuesta :



1er paso : Se divide la figura compuesta en figuras planas sencillas de las que conozcamos las fórmulas para calcular su área y su momento de inercia.

En este caso en particular podemos dividirla en 2 rectángulos :



2do paso : Se determinan las áreas de estas figuras simples y se identifican como A_1 y A_2

$$A_1 = \text{base por altura} = 100 \times 20 = 2000 \text{ cm}^2$$

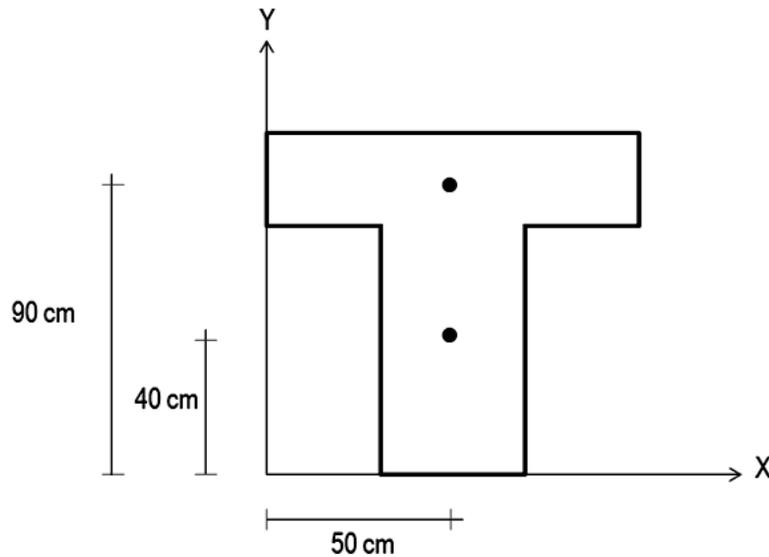
$$A_2 = \text{base por altura} = 40 \times 80 = 3200 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = A_1 + A_2 = 2000 + 3200 = 5200 \text{ cm}^2$$

3er paso : Se calcula la ubicación del centro de masa de la figura compuesta :

Fijamos un sistema rectangular de coordenadas e indicamos la distancia que hay desde el origen hasta el centro de masa de cada una de las figuras simples en las que dividimos la figura compuesta.

Recuerde que el centro de masa de un rectángulo está ubicado a un medio de su base y a un medio de su altura.



Para su posterior uso estas distancias son identificadas como :

- $X_1 = 50 \text{ cm}$
- $X_2 = 50 \text{ cm}$
- $Y_1 = 90 \text{ cm}$
- $Y_2 = 40 \text{ cm}$

Se debe tener presente que : “Si una figura plana posee un eje de simetría, su centro de masa estará ubicado sobre éste.”

Esta figura en particular posee un eje de simetría vertical, luego su centro de masa estará ubicado a 50 cm a la derecha del origen del sistema de coordenadas fijado.

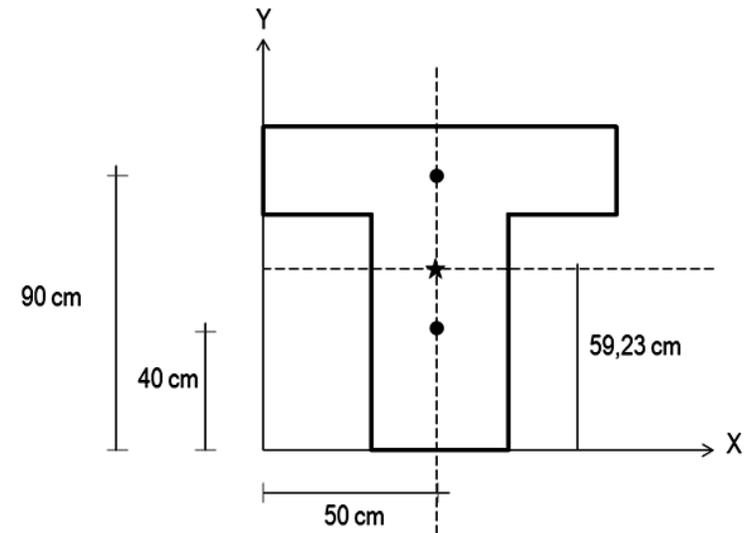
Nos faltaría ubicar la ordenada del centro de masa, para eso aplicamos la fórmula siguiente :

$$Y_G = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3 + \dots + A_n \cdot Y_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}$$

Donde “ A_i ” es el área de la figura simple estudiada, y “ Y_i ” la ordenada del centro de masa de la misma figura simple.

$$Y_G = \frac{(2000)(90) + (3200)(40)}{5200} = 59,23$$

El centro de masa de la figura compuesta estará ubicado en las coordenadas **(50 , 59.23).....(X_G , Y_G)**



4to paso : Se calculan los momentos de inercia de las figuras sencillas con respecto a sus ejes (que serán paralelos a “ Y ” y “ X ”); para lo cual

utilizaremos las fórmulas que se encuentran en la primera página de esta guía.

- **Rectángulo** de altura h y ancho b , respecto a los ejes que, siendo paralelos a los lados del mismo, pasan por su centro de gravedad:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}b^3h$$

Para la figura 1: $I_{1x} = \frac{(100)(20)^3}{12} = 66.667 \text{ cm}^4$

$$I_{1y} = \frac{(100)^3(20)}{12} = 1.666.667 \text{ cm}^4$$

Para la figura 2: $I_{2x} = \frac{(40)(80)^3}{12} = 1.706.667 \text{ cm}^4$

$$I_{2y} = \frac{(40)^3(80)}{12} = 426.667 \text{ cm}^4$$

5to paso: Se calcula el momento de inercia de cada una de las figuras sencillas respecto a los ejes "X_G" e "Y_G" aplicando el teorema del eje paralelo, es decir el Teorema de Steiner.

$$\ddot{I}_{i,x} = I_{ix} + A_i(Y_i - Y_G)^2$$

$$\ddot{I}_{i,y} = I_{iy} + A_i(X_i - X_G)^2$$

$$\ddot{I}_{1,x} = I_{1x} + A_1(Y_1 - Y_G)^2 = 66.667 + 2000(90 - 59,23)^2$$

$$= 1.960.253 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} \ddot{I}_{2,x} &= I_{2x} + A_2(Y_2 - Y_G)^2 = 1.706.667 + (3200)(40 - 59,23)^2 \\ &= 2.890.004 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{I}_{1,y} &= I_{1y} + A_1(X_1 - X_G)^2 = 1.666.667 + 2000(50 - 50)^2 \\ &= 1.666.667 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{I}_{2,y} &= I_{2y} + A_2(X_2 - X_G)^2 = 426.667 + (3200)(50 - 50)^2 \\ &= 426.667 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

6to paso: Se calculan los momentos de inercia de la figura compuesta a partir de los momentos anteriores:

$$I_{x,\text{total}} = \sum \ddot{I}_{i,x}$$

$$I_{y,\text{total}} = \sum \ddot{I}_{i,y}$$

$$I_{x,\text{total}} = \ddot{I}_{1,x} + \ddot{I}_{2,x} = 1.960.253 + 2.890.004 = 4.850.257 \text{ cm}^4$$

$$I_{y,\text{total}} = \ddot{I}_{1,y} + \ddot{I}_{2,y} = 1.666.667 + 426.667 = 2.093.334 \text{ cm}^4$$