

# Mecánica Clásica

( Partículas y Bipartículas )

Alejandro A. Torassa

Licencia Creative Commons Atribución 3.0  
(2011) Buenos Aires, Argentina  
atorassa@gmail.com

## Resumen

Este trabajo considera la existencia de bipartículas y presenta una ecuación general de movimiento, que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia no rotante (inercial o no inercial) sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

## Sistema de Referencia Universal

El sistema de referencia universal  $\mathring{S}$  es un sistema de referencia en el que la aceleración  $\mathring{\mathbf{a}}$  de cualquier partícula está dada por la siguiente ecuación:

$$\mathring{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

donde  $\mathbf{F}$  es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula y  $m$  es la masa de la partícula.

El sistema de referencia universal  $\mathring{S}$  es un sistema de referencia inercial. Por lo tanto, se puede afirmar que el sistema de referencia universal  $\mathring{S}$  es también un sistema de referencia no rotante.

## Ecuación General de Movimiento

La ecuación general de movimiento para dos partículas A y B es:

$$m_a m_b (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) = m_a m_b (\dot{\mathbf{r}}_a - \dot{\mathbf{r}}_b)$$

donde  $m_a$  y  $m_b$  son las masas de las partículas A y B,  $\mathbf{r}_a$  y  $\mathbf{r}_b$  son las posiciones de las partículas A y B con respecto a un sistema de referencia no rotante S,  $\dot{\mathbf{r}}_a$  y  $\dot{\mathbf{r}}_b$  son las posiciones de las partículas A y B con respecto al sistema de referencia universal  $\dot{S}$ .

Si  $m_a m_b = m_{ab}$ ,  $(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) = \mathbf{r}_{ab}$  y  $(\dot{\mathbf{r}}_a - \dot{\mathbf{r}}_b) = \dot{\mathbf{r}}_{ab}$ , entonces la ecuación anterior queda:

$$m_{ab} \mathbf{r}_{ab} = m_{ab} \dot{\mathbf{r}}_{ab}$$

La ecuación general de movimiento para un sistema de N partículas es:

$$\sum_i \sum_{j>i} m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \sum_i \sum_{j>i} m_i m_j (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j)$$

donde  $m_i$  y  $m_j$  son las masas de las partículas  $i$ -ésima y  $j$ -ésima,  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{r}_j$  son las posiciones de las partículas  $i$ -ésima y  $j$ -ésima con respecto a un sistema de referencia no rotante S,  $\dot{\mathbf{r}}_i$  y  $\dot{\mathbf{r}}_j$  son las posiciones de las partículas  $i$ -ésima y  $j$ -ésima con respecto al sistema de referencia universal  $\dot{S}$ .

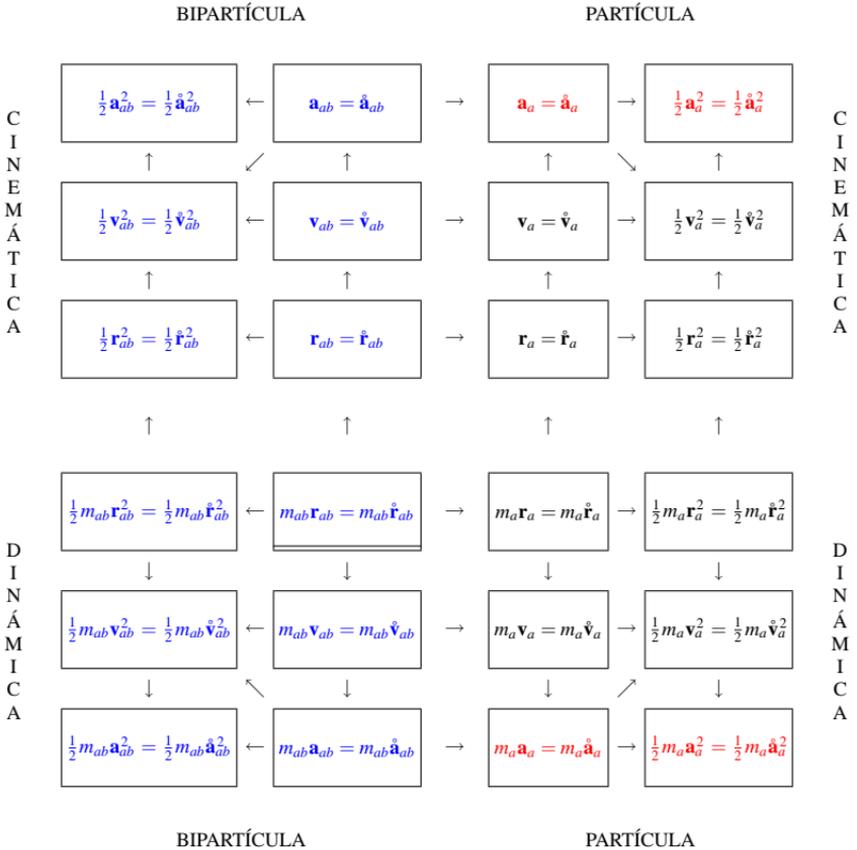
Si  $m_i m_j = m_{ij}$ ,  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \mathbf{r}_{ij}$  y  $(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) = \dot{\mathbf{r}}_{ij}$ , entonces la ecuación anterior queda:

$$\sum_i \sum_{j>i} m_{ij} \mathbf{r}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} m_{ij} \dot{\mathbf{r}}_{ij}$$

Un sistema de partículas forma un sistema de bipartículas. Por ejemplo, el sistema de partículas A, B, C y D forma el sistema de bipartículas AB, AC, AD, BC, BD y CD.

# Partículas y Bipartículas

A partir de la ecuación general de movimiento para dos partículas A y B (ecuación azul subrayada) se obtienen las siguientes ecuaciones:



Las ecuaciones azules son válidas en cualquier sistema de referencia no rotante, debido a que ( $\mathbf{r}_{ab} = \mathring{\mathbf{r}}_{ab}$ ), ( $\mathbf{v}_{ab} = \mathring{\mathbf{v}}_{ab}$ ) y ( $\mathbf{a}_{ab} = \mathring{\mathbf{a}}_{ab}$ )

Las ecuaciones rojas son válidas en cualquier sistema de referencia inercial, debido a que ( $\mathbf{a}_a = \mathring{\mathbf{a}}_a$ )

Las ecuaciones cinemáticas se obtienen de las ecuaciones dinámicas si consideramos que todas las partículas tienen la misma masa. Por lo tanto, las ecuaciones cinemáticas son un caso especial de las ecuaciones dinámicas.

La dinámica de partículas se obtiene de la dinámica de bipartículas si sólo consideramos bipartículas que tienen la misma partícula.

Por ejemplo:

Si consideramos un sistema de bipartículas AB, AC y BC, se tiene:

$$AB + AC + BC = \mathring{AB} + \mathring{AC} + \mathring{BC}$$

Considerando sólo las bipartículas que tienen la partícula C, sigue:

$$AC + BC = \mathring{AC} + \mathring{BC}$$

Aplicando la ecuación general de movimiento, se obtiene:

$$m_a m_c (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_c) + m_b m_c (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_c) = m_a m_c (\mathring{\mathbf{r}}_a - \mathring{\mathbf{r}}_c) + m_b m_c (\mathring{\mathbf{r}}_b - \mathring{\mathbf{r}}_c)$$

Derivando dos veces con respecto al tiempo, se deduce:

$$m_a m_c (\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_c) + m_b m_c (\mathbf{a}_b - \mathbf{a}_c) = m_a m_c (\mathring{\mathbf{a}}_a - \mathring{\mathbf{a}}_c) + m_b m_c (\mathring{\mathbf{a}}_b - \mathring{\mathbf{a}}_c)$$

Dividiendo por  $m_c$ , usando un sistema de referencia C fijo a la partícula C ( $\mathbf{a}_c = 0$  con respecto al sistema de referencia C) y asumiendo que el sistema de referencia C es inercial ( $\mathbf{a}_c = \mathring{\mathbf{a}}_c$ ), se obtiene:

$$m_a \mathbf{a}_a + m_b \mathbf{a}_b = m_a \mathring{\mathbf{a}}_a + m_b \mathring{\mathbf{a}}_b$$

Sustituyendo  $\mathring{\mathbf{a}} = \mathbf{F}/m$  y reordenando, finalmente se deduce:

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b = m_a \mathbf{a}_a + m_b \mathbf{a}_b$$

## Ecuación de Movimiento

A partir de la ecuación general de movimiento se deduce que la aceleración  $\mathbf{a}_a$  de una partícula A con respecto a un sistema de referencia S (no rotante) fijo a una partícula S, está dada por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{a}_a = \frac{\mathbf{F}_a}{m_a} - \frac{\mathbf{F}_s}{m_s}$$

donde  $\mathbf{F}_a$  es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula A,  $m_a$  es la masa de la partícula A,  $\mathbf{F}_s$  es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula S y  $m_s$  es la masa de la partícula S.

En contradicción con la primera y segunda ley de Newton, de la ecuación anterior se deduce que la partícula A puede estar acelerada aun si sobre la partícula A no actúa fuerza alguna y también que la partícula A puede no estar acelerada (estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme) aun si sobre la partícula A actúa una fuerza no equilibrada.

Por otro lado, de la ecuación anterior también se deduce que la primera y segunda ley de Newton son válidas en el sistema de referencia S sólo si la fuerza resultante que actúa sobre la partícula S es igual a cero. Por lo tanto, el sistema de referencia S es un sistema de referencia inercial sólo si la fuerza resultante que actúa sobre la partícula S es igual a cero.

## Bibliografía

**A. Einstein**, *Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General*.

**E. Mach**, *La Ciencia de la Mecánica*.

**R. Resnick y D. Halliday**, *Física*.

**J. Kane y M. Sternheim**, *Física*.

**H. Goldstein**, *Mecánica Clásica*.

**L. Landau y E. Lifshitz**, *Mecánica*.

# Apéndice

## Transformaciones

El sistema de referencia universal  $\hat{S}$  es un sistema de referencia inercial.

Cualquier sistema de referencia inercial es un sistema de referencia no rotante.

Cualquier sistema de referencia central  $S^{cm}$  (sistema de referencia fijo al centro de masa de un sistema de partículas) es un sistema de referencia no rotante.

Se puede pasar de las coordenadas  $x, y, z, t$  de un sistema de referencia  $S$  (no rotante) a las coordenadas  $x', y', z', t'$  de otro sistema de referencia  $S'$  (no rotante) cuyo origen de coordenadas  $O'$  se encuentra en la posición  $x_{o'}, y_{o'}, z_{o'}$  con respecto al sistema de referencia  $S$ , aplicando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}x' &= x - x_{o'} \\y' &= y - y_{o'} \\z' &= z - z_{o'} \\t' &= t\end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones, es posible transformar en forma vectorial las posiciones, velocidades y aceleraciones del sistema de referencia  $S$  al sistema de referencia  $S'$ , aplicando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_{o'} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_{o'} \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_{o'}\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{r}_{o'}$ ,  $\mathbf{v}_{o'}$  y  $\mathbf{a}_{o'}$  son la posición, velocidad y aceleración respectivamente del sistema de referencia  $S'$  con respecto al sistema de referencia  $S$ .

## Definiciones

	Partículas	Bipartículas
Masa	$M_i = \sum_i m_i$	$M_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} m_{ij}$
Posición vectorial	$\mathbf{R}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / M_i$	$\mathbf{R}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} m_{ij} \mathbf{r}_{ij} / M_{ij}$
Velocidad vectorial	$\mathbf{V}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i / M_i$	$\mathbf{V}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} m_{ij} \mathbf{v}_{ij} / M_{ij}$
Aceleración vectorial	$\mathbf{A}_i = \sum_i m_i \mathbf{a}_i / M_i$	$\mathbf{A}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} m_{ij} \mathbf{a}_{ij} / M_{ij}$
Posición escalar	$R_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{r}_i^2 / M_i$	$R_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} \frac{1}{2} m_{ij} \mathbf{r}_{ij}^2 / M_{ij}$
Velocidad escalar	$V_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 / M_i$	$V_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} \frac{1}{2} m_{ij} \mathbf{v}_{ij}^2 / M_{ij}$
Aceleración escalar	$A_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{a}_i^2 / M_i$	$A_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} \frac{1}{2} m_{ij} \mathbf{a}_{ij}^2 / M_{ij}$
Trabajo	$W_i = \sum_i \int m_i \mathbf{a}_i \cdot d\mathbf{r}_i$ $W_i = \Delta \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right)$	$W_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} \int m_{ij} \mathbf{a}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$ $W_{ij} = \Delta \left( \sum_i \sum_{j>i} \frac{1}{2} m_{ij} \mathbf{v}_{ij}^2 \right)$

## Relaciones

$$M_{ij} R_{ij} = M_i^2 \left( R_i - \frac{1}{2} \mathbf{R}_i^2 \right)$$

$$M_{ij} V_{ij} = M_i^2 \left( V_i - \frac{1}{2} \mathbf{V}_i^2 \right)$$

$$M_{ij} A_{ij} = M_i^2 \left( A_i - \frac{1}{2} \mathbf{A}_i^2 \right)$$

Si  $M_i^2 / M_{ij} = k$ , entonces las ecuaciones anteriores con respecto al sistema de referencia central  $S^{cm}$  quedan:

$$R_{ij}^{cm} = k R_i^{cm}$$

$$V_{ij}^{cm} = k V_i^{cm}$$

$$A_{ij}^{cm} = k A_i^{cm}$$

## Principios

Las posiciones, velocidades y aceleraciones (vectorial y escalar) de un sistema de bipartículas son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia no rotantes.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{ij} &= \mathring{\mathbf{R}}_{ij} = \mathbf{R}_{ij}^{cm} = \mathbf{R}'_{ij} & R_{ij} &= \mathring{R}_{ij} = R_{ij}^{cm} = R'_{ij} \\ \mathbf{V}_{ij} &= \mathring{\mathbf{V}}_{ij} = \mathbf{V}_{ij}^{cm} = \mathbf{V}'_{ij} & V_{ij} &= \mathring{V}_{ij} = V_{ij}^{cm} = V'_{ij} \\ \mathbf{A}_{ij} &= \mathring{\mathbf{A}}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}^{cm} = \mathbf{A}'_{ij} & A_{ij} &= \mathring{A}_{ij} = A_{ij}^{cm} = A'_{ij}\end{aligned}$$

A partir del principio anterior se deduce que la aceleración  $\mathbf{a}_a$  de una partícula A con respecto a un sistema de referencia no rotante S fijo a una partícula S, está dada por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{a}_a = \frac{\mathbf{F}_a}{m_a} - \frac{\mathbf{F}_s}{m_s}$$

donde  $\mathbf{F}_a$  es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula A,  $m_a$  es la masa de la partícula A,  $\mathbf{F}_s$  es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula S y  $m_s$  es la masa de la partícula S.

Las aceleraciones (vectorial y escalar) de un sistema de partículas son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales.

$$\mathbf{A}_i = \mathring{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}'_i \quad A_i = \mathring{A}_i = A'_i$$

A partir del principio anterior se deduce que la aceleración  $\mathbf{a}_a$  de una partícula A con respecto a un sistema de referencia inercial S, está dada por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{a}_a = \frac{\mathbf{F}_a}{m_a}$$

donde  $\mathbf{F}_a$  es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula A y  $m_a$  es la masa de la partícula A.

## Trabajo y Fuerza

El trabajo  $W_{ij}$  realizado por las fuerzas que actúan sobre un sistema de bipartículas con respecto a un sistema de referencia no rotante, está dado por:

$$W_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} \int m_i m_j \left( \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_j}{m_j} \right) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

El trabajo  $W_i$  realizado por las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas con respecto al sistema de referencia central, está dado por:

$$W_i = \sum_i \int \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$$

El trabajo  $W_i$  realizado por las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas con respecto a un sistema de referencia inercial, está dado por:

$$W_i = \sum_i \int \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$$

## Conservación de Energía Cinética

Si las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas no realizan trabajo con respecto al sistema de referencia central, entonces la energía cinética del sistema de partículas permanece constante con respecto al sistema de referencia central.

Si la energía cinética del sistema de partículas permanece constante con respecto al sistema de referencia central, entonces la energía cinética del sistema de bipartículas permanece constante con respecto a cualquier sistema de referencia no rotante.

Si las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas no realizan trabajo con respecto a un sistema de referencia inercial, entonces la energía cinética y la cantidad de movimiento (magnitud) del sistema de partículas permanecen constantes con respecto al sistema de referencia inercial; aun si la tercera ley de Newton no fuese válida.