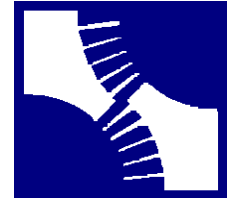




Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



1.3.- FLUJO DE ENTRADA Y FLUJO DESARROLLADO.

1.3.1.- FLUJO LAMINAR DESARROLLADO:

Cuando se consideran los flujos internos el interés se concentra principalmente en los flujos desarrollados en tuberías. Se dice que un flujo laminar desarrollado se presenta en el interior de una tubería cuando el **PERFIL** de velocidad **NO CAMBIA** en la dirección del flujo.

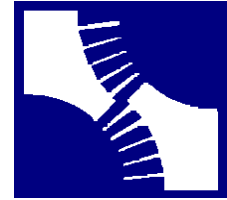
La figura nos muestra un flujo laminar desde la entrada a la tubería y donde se tiene un flujo completamente uniforme (no cambia el perfil de velocidad con la sección en 1) hasta la sección 3 (a una distancia L_E de la entrada) y donde YA tenemos un flujo laminar **COMPLETAMENTE DESARROLLADO**, existiendo entre estas dos secciones una zona de transición definida en el esquema mostrado en la sección 2.

El flujo tiene una velocidad **UNIFORME U** en la sección 1 de entrada a la tubería y en esta sección existe una delgada capa viscosa en la pared del tubo y en la zona de entrada y debido a la condición de **NO** deslizamiento, la velocidad del fluido en contacto con la pared es cero a lo largo de **TODO** el tramo de tubería.

La capa viscosa crece a lo largo del núcleo **INVISCIDO** L_i (sin viscosidad) debido a la fuerza de corte **RETARDADORA** que ejerce la superficie sólida de la pared del tubo sobre el flujo hasta que los esfuerzos viscosos dominan **TODA** la sección transversal.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



En secciones sucesivas a lo largo de la tubería en esta sección de entrada L_i , el efecto de la viscosidad y la superficie sólida se siente cada vez mas lejos dentro del flujo.

Para flujo incompresible, la ecuación de conservación de la masa requiere que la velocidad en la línea central de la tubería sea **MAXIMA** y que esta aumente con la distancia a partir de la entrada. La velocidad promedio en cualquier sección de la tubería U , debe ser igual a U_o , que es la velocidad uniforme en la entrada y tenemos que:

$$U = 1/A \int_A u \, dA ; \quad U = U_o$$

Suficientemente lejos de la entrada de la tubería (hasta L_i), la capa limite que se desarrolla en la pared de la tubería alcanza la línea central de la misma y el flujo se vuelve **ENTERAMENTE VISCOSO**. Luego el perfil de velocidades va cambiando en la zona de **DESARROLLO**, a causa de los efectos viscosos, hasta que logra transformarse en un perfil **COMPLETAMENTE DESARROLLADO** (distancia L_E) y de ahí en adelante el perfil se mantiene inalterable si el flujo es estable. La longitud del núcleo inviscido es de un cuarto a un tercio de la **LONGITUD de ENTRADA (L_E)**.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Para un flujo laminar circulando por una tubería circular y con un perfil **UNIFORME** en la entrada, la longitud de entrada (L_E) esta dada por:

$$L_E/D = 0.065 R_e ; R_e = UD/\nu$$

D = Diámetro tubería; U = Velocidad promedio; ν = Viscosidad cinemática

El flujo laminar en una tubería solo puede esperarse para $R_e < 2300$. Para esta situación la longitud de entrada para flujo laminar en tuberías puede llegar a ser:

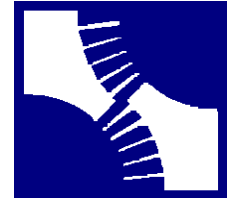
$$L_E = 0.065 R_e D \leq 0.06 (2300) D = 138 D$$

Para un flujo laminar en un canal de alta relacion de aspecto(ancho dividido por la altura) con un perfil uniforme a la entrada, L_E es:

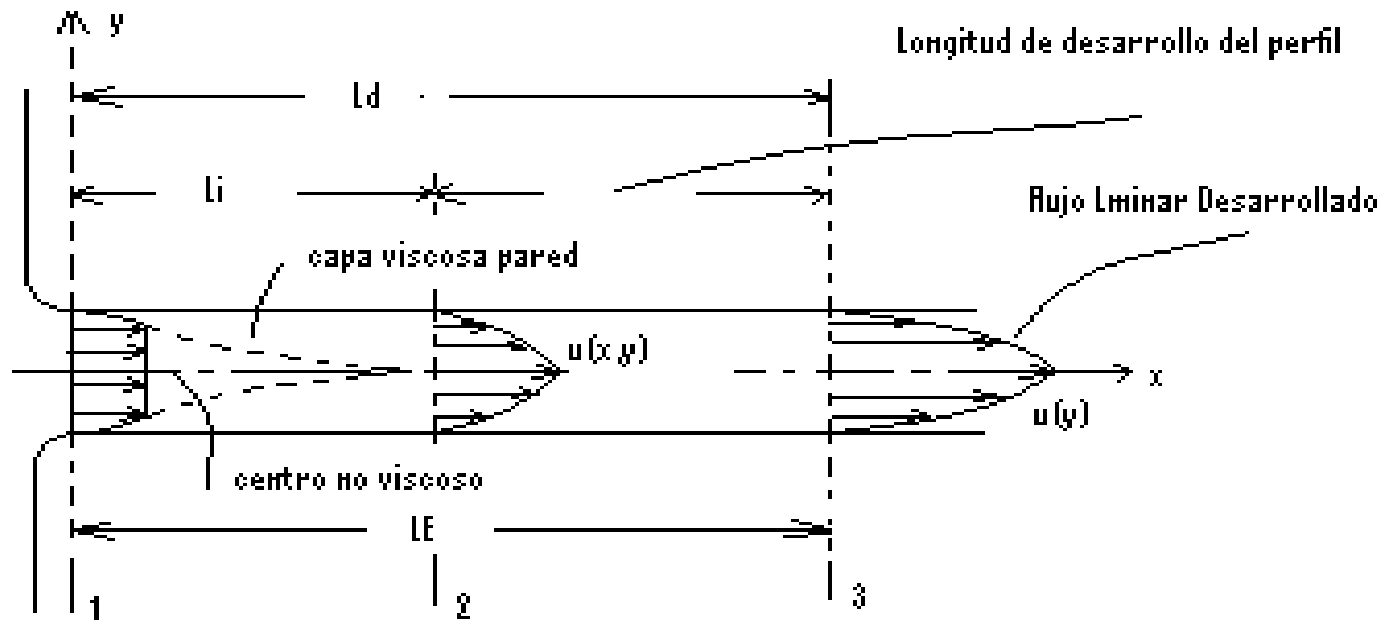
$$L_E/h = 0.04 R_e ; R_e = U h/\nu$$

h = Profundidad del canal; U = Velocidad promedio; ν = Viscosidad cinemática

La longitud del nucleo inviscido es aproximadamente un tercio de la longitud de entrada. No puede existir flujo laminar por encima de $R_e = 7700$.

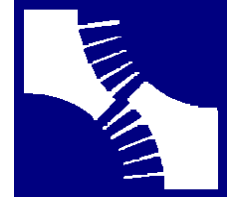


DESARROLLO EN FLUJO LAMINAR:

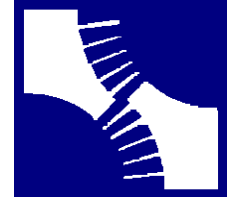




Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



- 1 → Entrada (Flujo **uniforme** pues existe capa viscosa delgada en la pared).
- 1 - 2 → La capa límite de pared viscosa **CRECE** a lo largo de la longitud de centro **NO VISCOSA (Li)** hasta que los esfuerzos viscosos **DOMINAN** toda la sección transversal del flujo.
- 2 - 3 → El perfil de velocidades **SIGUE** cambiando en la región de **DESARROLLO (Ld)** a causa de los efectos viscosos.
- 3 - ∞ → El perfil de velocidades **SIGUE** cambiando en la región de **DESARROLLO (Ld)** a causa de los efectos viscosos.



1.3.2.- FLUJO TURBULENTO DESARROLLADO:

Para flujo turbulento por una tubería la situación es un poco diferente y vemos lo que sucede con el perfil de velocidades entre la entrada y en la zona de desarrollo en la figura mas abajo. La mezcla creciente entre las capas de fluido, debido a la turbulencia, provoca el **CRECIMIENTO** mas rápido de la capa limite.

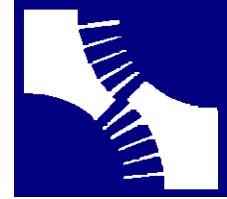
El núcleo inviscido también existe y va seguido de la región de desarrollo del perfil de velocidades, el cual termina cuando $x = L_d$, sin embargo se requiere de una longitud adicional para que se desarrolle la estructura detallada del flujo turbulento.

Los experimentos muestran que el perfil de velocidad media se vuelve **COMPLETAMENTE** desarrollado dentro de **25 a 40 diámetros** de tubería desde la entrada.

La estructura detallada es importante en ciertos cálculos de transferencia de calor por la pared del tubo



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



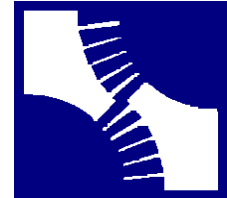
El núcleo inviscido existe y va seguido de la región de desarrollo del perfil de velocidad igual que en el caso laminar. Esta región termina cuando $x = L_d$ y después comienza la zona de flujo turbulento completamente desarrollado, requiriéndose para esto una longitud adicional para obtener el desarrollo.

Para un flujo con numero de Reynolds alto ($Re > 10^5$) por una tubería y donde las turbulencias se inician cerca de $x = 0$, tenemos que se cumple:

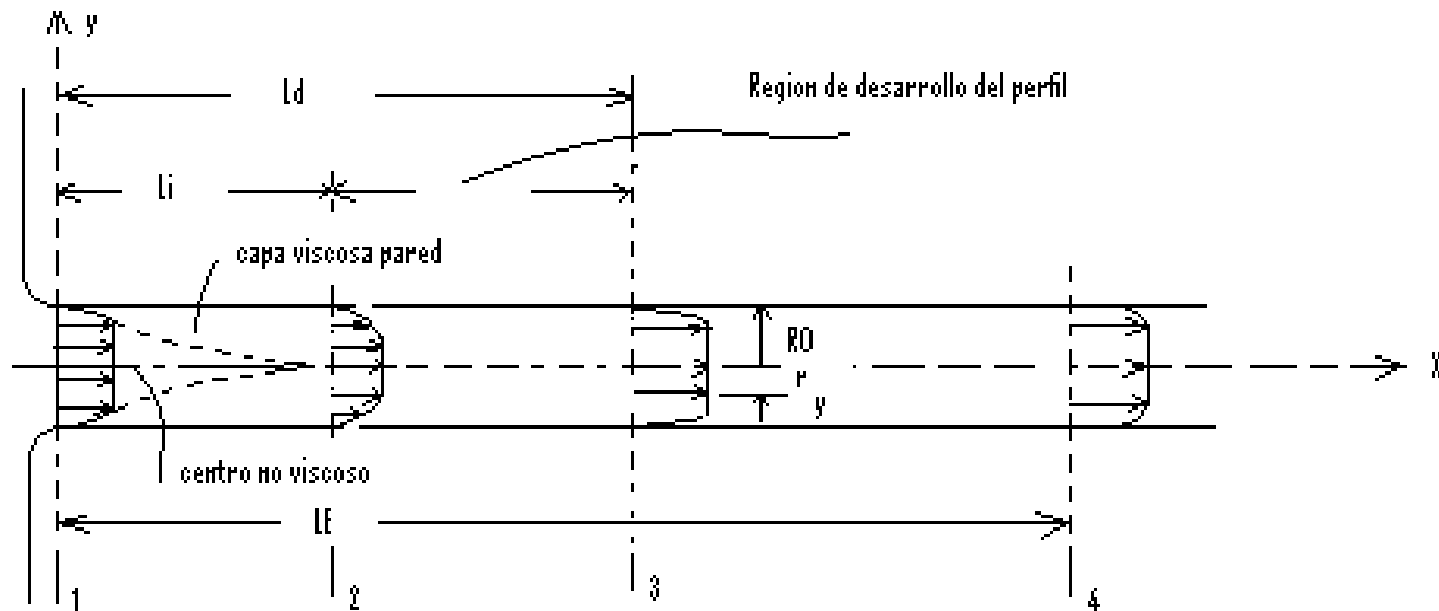
$$L_i / D \approx 10; \quad L_d / D \approx 10; \quad L_E / D \approx 10$$

Para flujos con $Re = 4000$, las longitudes de desarrollo serán mayores (aproximadamente por cinco), y esto es así pues con Re bajos, la transición a flujo turbulento ocurre en la región de desarrollo del perfil, pues una gran parte de la región de entrada es laminar con un cortante en la pared relativamente bajo.

En la figura, se observa el desarrollo del perfil de velocidad en flujo de un fluido turbulento por una tubería.



DESARROLLO EN FLUJO TURBULENTO





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



1- 2→La capa límite de pared viscosa **CRECE** a lo largo de la longitud de centro **NO VISCOSA (L_i)** hasta que los esfuerzos viscosos **DOMINAN** toda la sección transversal del flujo.

2- 3→El perfil de velocidades **SIGUE** cambiando en la región de **DESARROLLO (L_d)** a causa de los efectos viscosos, y $x = L_d$.

3- 4→Distancia ADICIONAL, para que el perfil **NO** cambie $x = L_E$

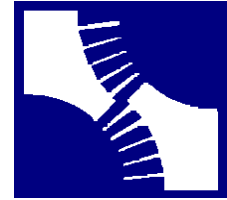
Para esta región la ecuación del perfil de velocidades es:

$$U(y) = U_{\max} (y / R_o)^{1/n} \quad 5 < n < 10$$

$$L_i / D \approx 10 ; \quad L_d / D \approx 40 ; \quad L_E / D \approx 120$$



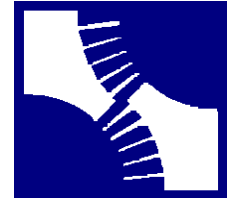
Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



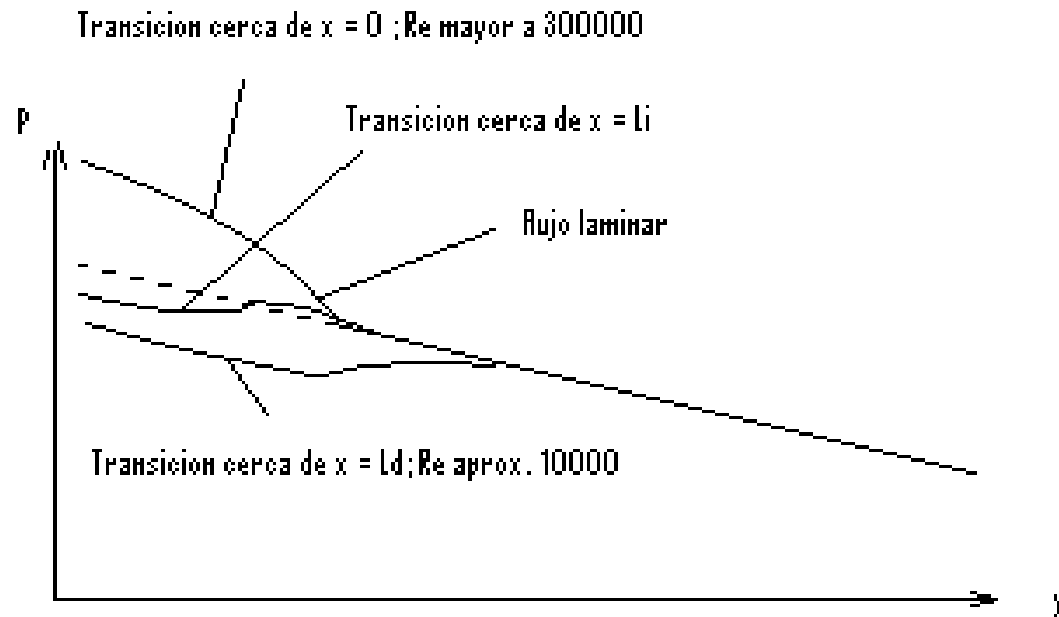
En la figura mas abajo se muestra la variación de presión en función de x desde la entrada a la tubería y se puede observar que a una distancia x mas o menos alejada de la entrada , la presión disminuye linealmente con x .

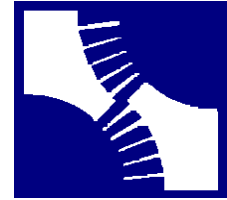
Si la transición a flujo turbulento ocurre cerca del origen (altos Re), la transición se inicia cerca de L_i y el gradiente de presión, (pendiente) en la región de entrada es mayor que en la zona de flujo desarrollado. Si la transición ocurre cerca de L_d (Re bajos), la variación lineal comienza al final del proceso de transición y el gradiente de presión en la región de entrada es menor que el del flujo desarrollado.

Para un flujo **laminar** la variación de la presión se parece cualitativamente a la asociada con grandes **Re** y el gradiente es mayor a la del flujo desarrollado a causa del **MAYOR** esfuerzo cortante en la pared y el flujo de cantidad lineal de movimiento creciente.



VARIACION DE LA PRESION EN FLUJO DE TUBERIAS HORIZONTAL PARA FLUJO LAMINAR Y TURBULENTO.





1.4.- FLUJO LAMINAR ENTRE PLACAS PARALELAS (FLUJO DE POISEUILLE).

Consideraremos el flujo laminar completamente desarrollado de un fluido continuo incompresible entre placas paralelas infinitas y ambas placas fijas (estacionarias) y el fluido moviéndose a causa de un gradiente de presión en forma estable y uniforme por las mismas y bajo un régimen laminar.

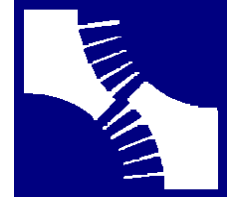
Sean dos laminas paralelas e infinitas, colocadas horizontalmente y entre las cuales fluye un liquido viscoso incompresible de densidad ρ y viscosidad dinámica μ . Se supone que las placas son infinitas y que existe un gradiente de presión **NO NULO**, que mantiene al fluido en flujo permanente y estable y el régimen es **LAMINAR**. Se postula, en consecuencia, que el fluido se mueve paralelamente a las dos laminas. Las ecuaciones funcionales fundamentales serán:

- Campo cinemática general:

$$\mathbf{u} = (u_x ; u_y ; u_z) = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



$$u_x = u_x (x, y, z, t); \quad u_y = u_y (x, y, z, t); \quad u_z = u_z (x, y, z, t)$$

- Las ecuaciones **DINAMICAS** del fluido se representan por las ecuaciones de **NAVIER-STOKES** (Ecuaciones dinámicas de un fluido Newtoniano) y cuya expresión vectorial y componentes son:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{G} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

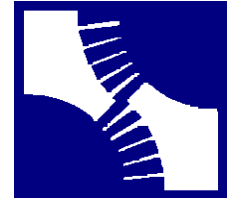
$$a_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + G_x + \nu \nabla^2 u_x + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

$$a_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + G_y + \nu \nabla^2 u_y + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \Theta}{\partial y}$$

$$a_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + G_z + \nu \nabla^2 u_z + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



- El termino Θ es: .

$$\Theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y + \partial u_z / \partial z$$

- Sabemos además que la ecuación de **continuidad** (Conservación de la masa) es:

$$d\rho / dt = \partial \rho / dt + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (\rho = \rho(x, y, z, t))$$

Si el fluido es Incompresible $\rightarrow d\rho / dt = 0$ ($\rho = \text{constante}$)

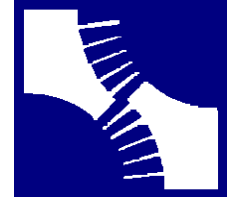
Si el flujo es **PERMANENTE** en el tiempo $\rightarrow \partial \rho / dt = 0$.

Por lo tanto la ecuación de continuidad para un fluido **incompresible, permanente y uniforme** es:

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



- La **aceleración** del fluido producida por el gradiente de presión expresada en forma vectorial (derivada sustancial del vector velocidad en el tiempo) es:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{u} / dt = \partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

Las componentes en coordenadas cartesianas serán:

$$a_x = du_x / dt = \partial u_x / \partial t + u_x \partial u_x / \partial x + u_y \partial u_x / \partial y + u_z \partial u_x / \partial z$$

$$a_y = du_y / dt = \partial u_y / \partial t + u_x \partial u_y / \partial x + u_y \partial u_y / \partial y + u_z \partial u_y / \partial z$$

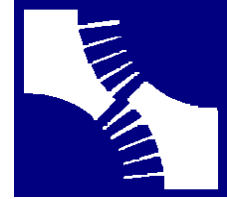
$$a_z = du_z / dt = \partial u_z / \partial t + u_x \partial u_z / \partial x + u_y \partial u_z / \partial y + u_z \partial u_z / \partial z$$

- Las componentes generalizadas de las **fuerzas de campo** (gravitatorias) son:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G} (G_x , G_y , G_z)$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



1. Todas estas ecuaciones debemos adaptarlas al problema planteado y así tener el modelo matemático de dicho problema. La condición de frontera entre líquido y pared sólida de las placas está definida por la condición de **NO DESLIZAMIENTO** en la pared debido a las fuerzas de corte viscosas:

$$y = 0 \rightarrow u_x = 0 ; \quad y = b \rightarrow u_x = 0$$

2. Para el modelo sugerido en este problema tenemos que las condiciones cinemáticas son:

$$u_x = u_x(x, y) ; \quad u_y = 0 ; \quad u_z = 0$$

3. La ecuación de continuidad aplicada a este problema nos indica que:

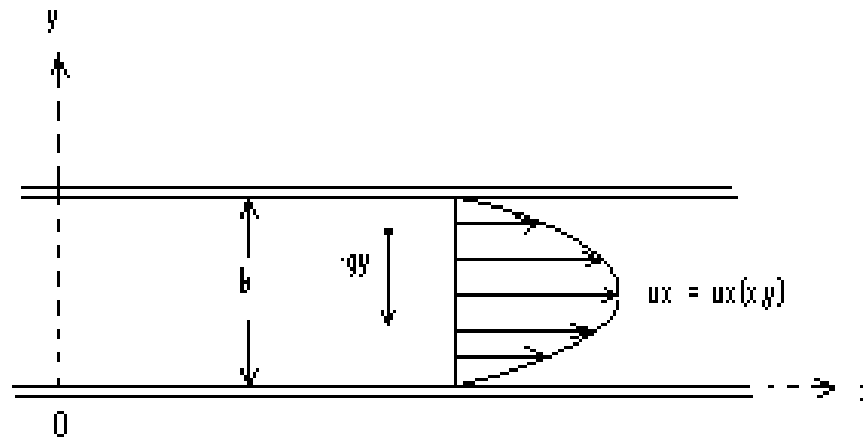
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y + \partial u_z / \partial z = 0$$

Como $u_y = 0 ; u_z = 0 \rightarrow \partial u_x / \partial x = 0 \rightarrow u_x = u_x(x)$

Flujo **TOTALMENTE** desarrollado en la dirección **x**

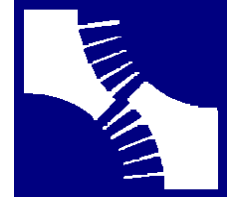


FLUJO ENTRE PLACAS PARALELAS





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



5. Ecuaciones del movimiento (Navier-Stokes):

$$\mathbf{a} = -1/\rho \nabla p + \mathbf{G} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$a_x = du_x/dt = \partial u_x / \partial t + u_x \partial u_x / \partial x + u_y \partial u_x / \partial y + u_z \partial u_x / \partial z = -1/\rho \partial p / \partial x + G_x + \nu \nabla^2 u_x$$

$$a_y = du_y/dt = \partial u_y / \partial t + u_x \partial u_y / \partial x + u_y \partial u_y / \partial y + u_z \partial u_y / \partial z = -1/\rho \partial p / \partial y + G_y + \nu \nabla^2 u_y$$

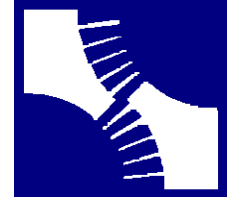
$$a_z = du_z/dt = \partial u_z / \partial t + u_x \partial u_z / \partial x + u_y \partial u_z / \partial y + u_z \partial u_z / \partial z = -1/\rho \partial p / \partial z + G_z + \nu \nabla^2 u_z$$

6. Campo de fuerzas gravitacionales: G_x , G_y , G_z

$$G_x = 0 \quad ; \quad G_y = -g \quad ; \quad G_z = 0$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



7. Las ecuaciones de Navier-Stokes quedan finalmente como:

$$1) \quad 0 = -1/\rho \, \delta p / \delta x + \nu \, \delta^2 u_x / \delta y^2$$

$$2) \quad 0 = -1/\rho \, \delta p / \delta y - g$$

$$3) \quad 0 = -1/\rho \, \delta p / \delta z \rightarrow \delta p / \delta z = 0 \rightarrow p = p(x, y)$$

8. Derivando las ecuaciones 1) ; 2) y 3) respecto a x tenemos que:

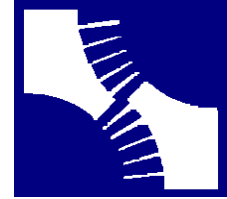
$$0 = -1/\rho \, \delta / \delta x (\delta p / \delta x)$$

$$0 = -1/\rho \, \delta^2 p / \delta x \delta y = -1/\rho \delta / \delta y (\delta p / \delta x) \rightarrow \delta p / \delta x = \text{Constante}$$

$$0 = -1/\rho \, \delta^2 p / \delta x \delta z = -1/\rho \delta / \delta z (\delta p / \delta x)$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



9. Se puede escribir por lo tanto que: $\delta p / \delta x = -K$ ($K > 0$)
Esta ecuación nos indica que la presión DISMINUYE en la dirección del movimiento y la causa es debido a las fuerzas disipativas viscosas.
10. De la ecuación 1) tenemos que:

$$\nu \frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{1}{\rho} \delta p / \delta x \quad (\text{se cambia } \delta \text{ por } d \text{ pues es unidimensional})$$

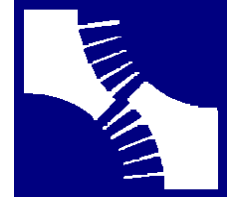
$$\frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{1}{(\rho \nu)} \delta p / \delta x = \frac{1}{\mu} \delta p / \delta x = -K / \mu$$

$$d/dy (du_x/dy) = -K / \mu \rightarrow \int d(du_x/dy) = - \int K/\mu dy \rightarrow du_x/dy = -K/\mu y + C_1$$

$$\int du_x = - \int (K/\mu) y dy + \int C_1 y \rightarrow u_x = - (K/\mu) y^2/2 + C_1 y + C_2$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



11. Condiciones de frontera:

$$y = 0 \rightarrow u_x = 0 ; \quad y = b \rightarrow u_x = 0$$

$$y = 0 \rightarrow u_x = 0 \rightarrow C_2 = 0 \rightarrow 0 = - (K/\mu)b^2/2 + C_1b \rightarrow \\ C_1 = Kb / (2\mu)$$

12. El campo de velocidades (distribución de velocidades) será:

$$u_x = K / (2\mu) [by - y^2] \text{ (distribucion parabolica)}$$

$$u_x(\text{max.}) \text{ si } y = b/2 \rightarrow u_x(\text{max.}) = Kb^2/(8\mu)$$

En las paredes; $u_x = 0$ (condicion de **No** deslizamiento)

13. Caudal o flujo Volumetrico (Q)

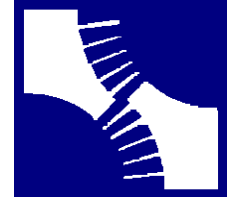
$$Q = \int^b \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \int^b u_x dy = (1/12) Kb^3/\mu$$

$$K = - \delta p / \delta x = - \Delta p / L \text{ y } \Delta p = p_2 - p_1 \rightarrow \Delta p < 0 \rightarrow K = \Delta p / L$$

$$Q = (1/12) Kb^3/\mu = (1/12) \Delta p / L b^3/\mu \text{ (caudal es función de } \Delta p)$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



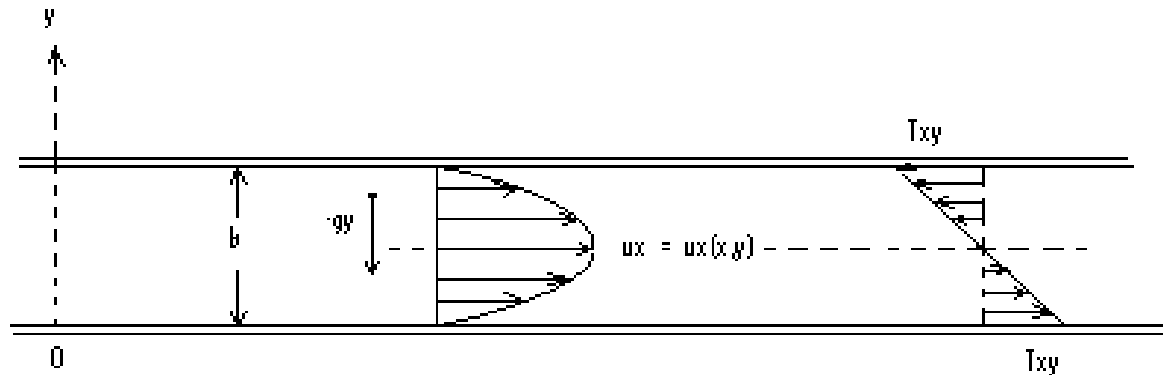
14. Distribucion de esfuerzos cortantes.

$$\lambda_{xy} = \mu \left[\delta u_y / \delta x + \delta u_x / \delta y \right] = \mu du_x / dy$$
$$\lambda_{xy} = \mu d/dy \left[K/(2\mu) (by - y^2) \right] = K/2 [b - 2y]$$

15. Condiciones de frontera.

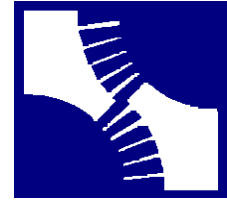
$$y = 0 = b \rightarrow \lambda \text{ max.} \rightarrow \lambda_{xy} \text{ max} = Kb/2 = - Kb/2 ; \text{ si } y = b/2 \rightarrow \lambda_{xy} = 0$$

16. DISTRIBUCION DE ESFUERZOS DE CORTE Y VELOCIDADES.





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica

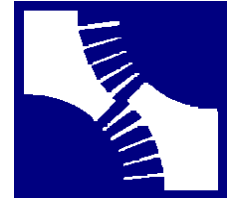


17. Disipación de energía por unidad de tiempo (Potencia disipada)

$$dW = \lambda \, du/dy \, dV = (\mu \, du/dy) \, du/dy \, dV = \mu \, (du/dy)^2 dV$$

$$dW/dV = \mu \, (du/dy)^2 = \mu \, d/dy [K/(2\mu) (by - y^2)]^2 = K^2/(4\mu) (b - 2y)^2$$

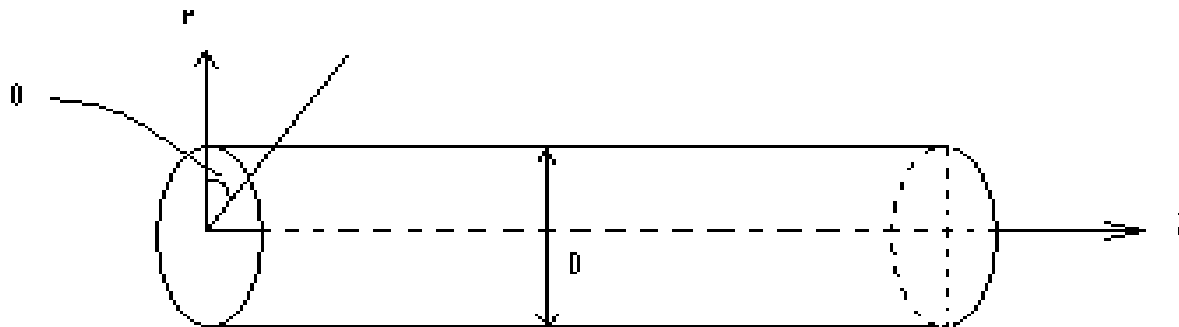
18. a) Las ecuaciones del movimiento junto a la ecuación de conservación de la masa nos dan: Campo de velocidades; campo de presiones; caudal volumico; distribución de los esfuerzos de corte.
- b) La velocidad máxima ocurre en el centro de la tubería y esta es proporcional al gradiente de presión y al cuadrado de la separación entre placas e inversamente proporcional a la viscosidad dinámica del fluido.
- c) El caudal volumico es proporcional al gradiente de presión, al cubo de la separación entre placas e inversamente proporcional a la viscosidad del fluido.
- d) El factor K (constante) es proporcional al gradiente de presión e inversamente a la longitud de la tubería.
- e) Los esfuerzos de corte varían linealmente y son proporcionales al factor K.
- f) La disipación de energía por unidad de volumen es proporcional al cuadrado del factor K e inversamente proporcional a la viscosidad.



1.5.- FLUJO LAMINAR EN CILINDRO (FLUJO TUBERIA).

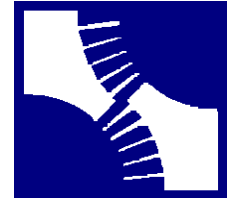
Consideraremos el flujo laminar completamente desarrollado de un fluido continuo incompresible desplazándose por una tubería y el fluido moviéndose a causa de un gradiente de presión en forma estable y uniforme por las mismas y bajo un régimen laminar. Por la geometría del problema es conveniente expresar las ecuaciones de Navier–stokes (ecuación del movimiento) y la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas.

FLUJO LAMINAR POR UNA TUBERIA





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



1. Ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible en coordenadas cilíndricas (Componente de la aceleración en la dirección z).

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \frac{u_\theta}{r} + u_z \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + G_z + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

2. Ecuación de continuidad para un fluido incompresible en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (r u_z)}{\partial z} = 0$$

3. Condiciones del problema.

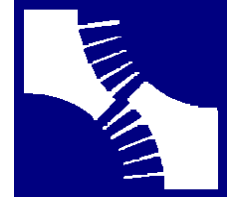
$$u_\theta = 0 ; u_r = 0 ; u_z = u_z(r, z, t) ; G_z = 0$$

4. De la ecuación de continuidad y con las condiciones del problema.

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \rightarrow u_z = u_z(r, t) ; \text{Como el flujo es permanente} \rightarrow u_z = u_z(r)$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



5. La ecuación de Navier-Stokes, tomando en cuenta las condiciones del problema nos queda como:

$$0 = -1/\rho(\partial p/\partial z) + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u_z}{\partial r})$$

6. Sabemos que $\partial p/\partial z = -K$ ($K > 0$) y como $u_z = u_z(r) \rightarrow$

$$0 = K/\rho + \nu/r \frac{d}{dr} (r \frac{du_z}{dr}) \rightarrow \frac{d}{dr} (r \frac{du_z}{dr}) = - (K/\mu) r \rightarrow$$

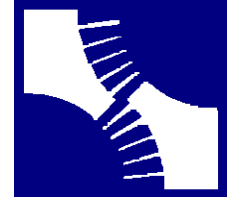
$$\int d(r \frac{du_z}{dr}) = - \int (K/\mu) r dr \rightarrow r \frac{du_z}{dr} = - (K/2\mu) r^2 + C_1 \rightarrow$$

$$\frac{du_z}{dr} = - (K/2\mu) r + C_1/r \rightarrow \int du_z = - (K/2\mu) \int r dr + \int (C_1/r) dr \rightarrow$$

$$u_z = - (K/2\mu) r^2/2 + C_1 \ln r + C_2$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



7. Condiciones de frontera (contorno).

$$u_z = 0 \rightarrow r = R ; u_z \text{ finito} \rightarrow r = 0 \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow 0 = - (K/2\mu) r^2/2 + C_2 \rightarrow$$

$$C_2 = (K/4\mu) R^2$$

8. Distribución de velocidades (Campo velocidades).

$$u_z = - (K/4\mu) r^2 + (K/4\mu) R^2 = K/4\mu [R^2 - r^2]$$

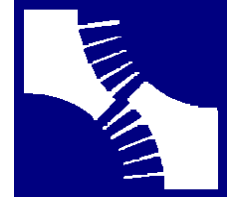
$$\text{Si } r = 0 \rightarrow u_z = K R^2 / 4\mu ; r = R \rightarrow u_z = 0$$

9. Caudal volúmico (Q).

$$Q = \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \int^R u_z 2\pi r dr = K 2\pi/4\mu \int^R (R^2 - r^2) r dr$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



$$Q = K\pi / (2 \mu) \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = K\pi / (2 \mu) [R^2 r^2/2 - r^4/4]_0^R = K\pi / (2 \mu) [R^4/2 - R^4/4]$$

$$Q = K\pi / (2 \mu) [(2R^4 - R^4) / 4] = K\pi / (2 \mu) R^4 / 4 = \mathbf{K\pi / (8 \mu) R^4 \text{ (Formula POISEULLI)}}$$

10. Velocidad media.

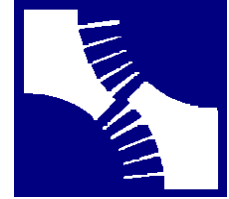
$$U_m = Q / A = Q / (\pi R^2) = K\pi R^4 / (8 \mu \pi R^2) = KR^2 / (8 \mu)$$

11. Perdida de Carga (h_f)

Un aspecto importante del flujo de fluidos por tuberías es la evaluación de la **PERDIDA DE PRESION** a lo largo de ella, debido a los **EFFECTOS VISCOSOS** y de **TURBULENCIA** y en este paso encontraremos una formula para evaluarla para un régimen de fluido laminar circulando por el interior de una tubería.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Sabemos que el gradiente de presión en flujos desarrollados, tanto laminares como turbulentos esta dado por la siguiente expresión.

$$\begin{aligned}\delta p / \delta z &= -K \rightarrow -dp/dz = K \rightarrow (p_1 - p_2)/L = (8 U_m \mu)/R^2 = (8 U_m \mu)/(D/2)^2 \\ K &= (8 U_m \mu)/R^2 = \Delta p / L = (p_1 - p_2)/L = (32 U_m \mu) / D^2 \text{ (perdida de presión por} \\ &\text{unidad de longitud a lo largo de la tubería).}\end{aligned}$$

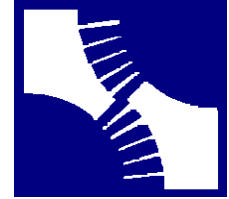
Por otro lado sabemos que: $h_f = \Delta p / \gamma$ (perdida de carga o perdida de energía por unidad de peso de fluido transportado) $\rightarrow \Delta p = \gamma h_f$

$$\begin{aligned}\text{Como } K &= \Delta p / L = \gamma h_f / L = (32 U_m \mu) / D^2 \rightarrow h_f = (32 U_m \mu L) / (\gamma D^2) \\ h_f &= (32 \mu L U_m) / (\gamma D^2) * (U_m / U_m) = 32 \mu L / (\rho g D^2) * (U_m^2 / U_m) * (2 / 2) \\ h_f &= (\mu / \rho) / (U_m D) 64 (L / D) (U_m^2 / 2g) = v / (U_m D) 64 (L / D) (U_m^2 / 2g)\end{aligned}$$

Sabemos que el numero de Reynolds es: $Re = U_m D / v$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Introduciendo el numero de Reynolds tenemos finalmente que:

$$h_f = (64 / Re) (L / D) (U_m^2 / 2g)$$

Esta es la formula para calcular la perdida de carga (perdida de energia por unidad de peso de fluido transportado por la tuberia) para un fluido newtoniano en regimen laminar.

Si llamamos $f = 64 / Re$ (adimensional), tenemos que.

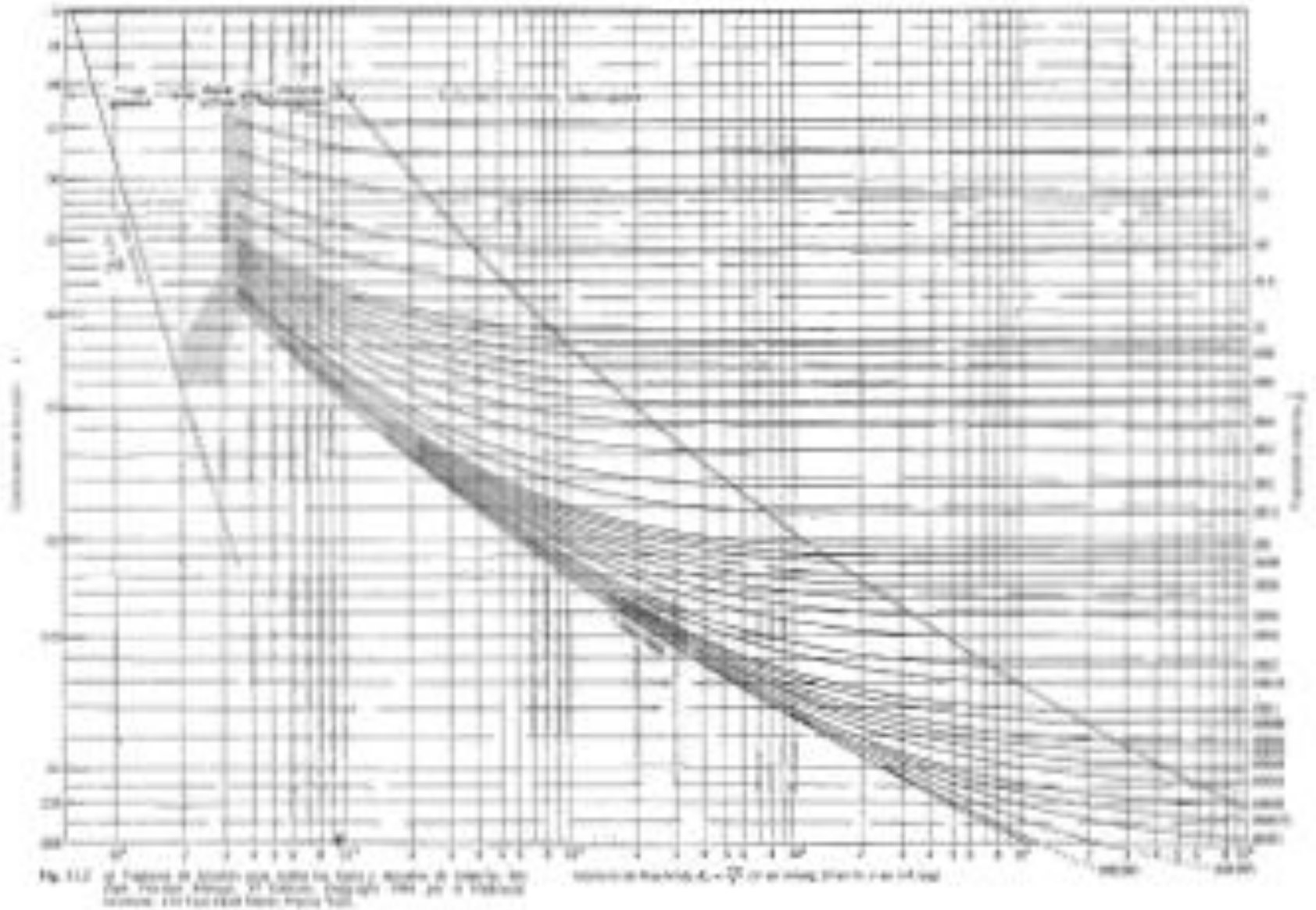
$$h_f = f (L / D) (U_m^2 / 2g)$$

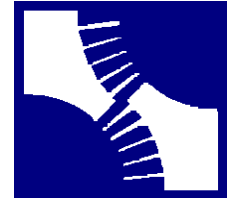
Donde f se conoce como el factor de friccion y es funcion de el numero de Reynolds y de la rugosidad relativa de la tuberia

$$f = f (Re ; \varepsilon / D)$$

DIAGRAMA DE MOODY

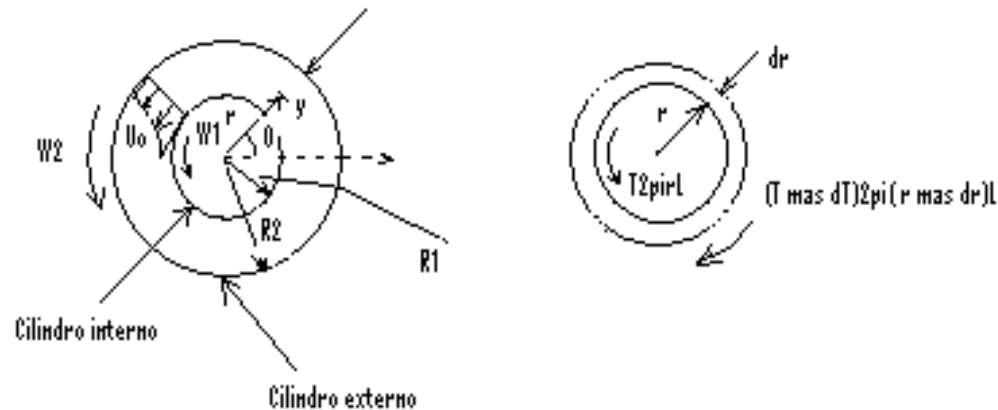
Tabla 10.3. DIAGRAMA DE MOODY





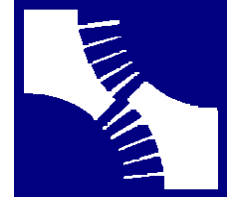
1.6.- FLUJO LAMINAR ENTRE CILINDROS ROTATORIOS.

Un flujo laminar de fluido totalmente desarrollado y continuo entre cilindros concéntricos rotatorios también tiene solución exacta de las ecuaciones de Navier – Stokes. Este modelo es el que se utiliza en la teoría de la lubricación (Tribología), donde el fluido es un aceite lubricante. La solución para flujo laminar es válida para $Re \leq 1700$ y la velocidad angular del cilindro externo $\omega = 0$. Se ignoran las fuerzas de campo ya que se supone los cilindros en posición vertical.





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



1. El momento de torsión resultante que actúa sobre este elemento de fluido es cero porque no existe aceleración angular, por lo tanto:

$$\lambda 2\pi r L \times r - (\lambda + d\lambda) 2\pi (r + dr) L \times (r + dr) = 0$$

La longitud L debe ser GRANDE respecto a la holgura ($R_2 - R_1$), así se puede modelar en el plano cilíndrico (consistente con la realidad). Si ignoramos los términos de mayor grado y en el límite la ecuación anterior se reduce a:

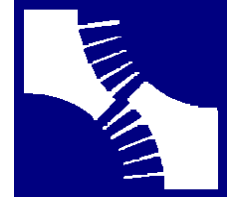
$$2\lambda + r \, d\lambda / dr = 0$$

2. La ecuación constitutiva unidimensional del esfuerzo de corte en coordenadas cilíndricas es (Ver tabla 5.1 Potter).

$$\lambda r_\theta = \mu \left[r \, \delta / \delta r (v_\theta / r) + 1/r (\delta v_r / \delta \theta) \right]$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Sabemos que los esfuerzos de corte son: $\lambda = -\lambda_{r\theta}$, por lo tanto de la ecuación constitutiva tenemos que:

$$\lambda = -\lambda_{r\theta} = -\mu r \frac{d}{dr} (v_{\theta}/r) \quad (v_r = v_z = 0)$$

3. Reemplazando en la ecuación de apartado 1 tenemos que:

$$-2\mu r \frac{d}{dr} (v_{\theta}/r) - r\mu \frac{d}{dr} [r \frac{d}{dr} (v_{\theta}/r)] = 0$$

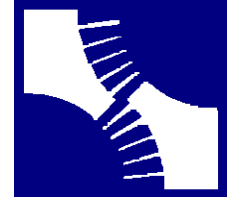
Dividiendo entre μr y multiplicando por dr e integrando, tenemos que:

$$2 (v_{\theta}/r) + r \frac{d}{dr} (v_{\theta}/r) = A$$

$$\frac{d}{dr} (v_{\theta}/r) = 1/r (dv_{\theta}/dr) - v_{\theta}/r^2$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



$$dv_{\theta} / dr + v_{\theta} / r = A \rightarrow 1/r d/dr (r v_{\theta}) = A$$

Multiplicando por rdr e integrando nuevamente tenemos que:

$$v_{\theta}(r) = (A/2) r + B/r$$

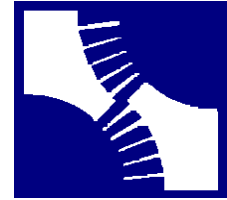
Las condiciones limites son: $v_{\theta} = R_1 \omega$ si $r = R_1$ y $v_{\theta} = R_2 \omega$ si $r = R_2$. Con estas condiciones evaluamos las constantes A y B .

$$A = 2 [(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) / (R_2^2 - R_1^2)] ; B = R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2) / (R_2^2 - R_1^2)$$

4. Aplicando Navier – Stokes en coordenadas cilindricas y suponiendo flujo uniforme y que las lineas de corriente son circulares y concentricas con los cilindros giratorios de modo que : $v_r = v_z = 0$; $v_{\theta} = v_{\theta}(r)$ y $\delta p / \delta \theta = 0$)



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



La ecuación de Navier – Stokes para la componente θ en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + (v_\theta/r) \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + v_r v_\theta / r = - 1/r (\partial p / \partial \theta) + \mu [\partial^2 v_\theta / \partial r^2 + 1/r (\partial v_\theta / \partial r) + 1/r^2 (\partial^2 v_\theta / \partial \theta^2) + \partial^2 v_\theta / \partial z^2 + 2/r^2 (\partial v_\theta / \partial \theta) - v_\theta / r^2]$$

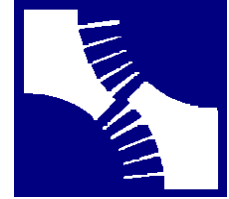
5. Condiciones del problema, flujo estable y uniforme:

$\partial v_\theta / \partial t = 0$ (Flujo permanente); $v_r = v_z = 0$ (líneas corrientes circulares y concéntricas con los cilindros giratorios); $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$ (flujo simétrico) ;
 $\partial p / \partial \theta = 0$ (no existe gradiente de presión en la dirección de rotación, no hay aceleración en esa dirección); $\partial^2 v_\theta / \partial z^2 = 0$ (cilindros largos por lo tanto la longitud L es mucho mayor que la holgura entre cilindros). Con estas condiciones la ecuación del movimiento queda como:

$$0 = \partial^2 v_\theta / \partial r^2 + 1/r (\partial v_\theta / \partial r) - v_\theta / r^2$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Reescribiendo la ecuación, tenemos que:

$$d^2v_\theta / dr^2 + d/dr (v_\theta / r) = 0$$

Integrando obtenemos que:

$$dv_\theta / dr + v_\theta / r = A \rightarrow (1/r) d/dr (r v_\theta) = A$$

Una segunda integración nos da:

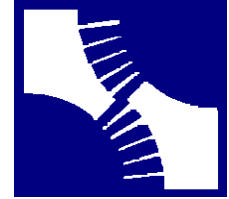
$$v_\theta = (A/2) r + B/r \text{ y aplicando condiciones de borde:}$$

$$A = 2 [(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) / (R_2^2 - R_1^2)] ; B = R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2) / (R_2^2 - R_1^2)$$

Mismo resultado anterior



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



6. Si el cilindro externo NO rota $\rightarrow \omega_2 = 0$ y la distribución de velocidades sería:

$$v_{\theta} = (R_1^2 \omega_1) / (R_2^2 - R_1^2) [(R_2^2 / r) - r]$$

7. El esfuerzo cortante λ_1 en el cilindro interno es:

$$\lambda_1 = -\lambda r_{\theta} = -[\mu r d/dr (v_{\theta}/r)]_{r=R_1} = \mu (2 / R_1^2) [(R_1^2 R_2^2 \omega_1 / (R_2^2 - R_1^2))]$$

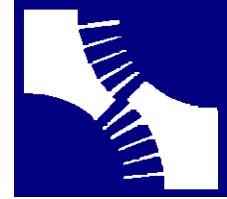
$$\lambda_1 = 2 \mu R_2^2 \omega_1 / (R_2^2 - R_1^2)$$

8. El momento de torsión T necesario para hacer girar el cilindro interno de longitud L es:

$$T = \lambda_1 A_1 R_1 = [2 \mu R_2^2 \omega_1 / (R_2^2 - R_1^2)] 2\pi R_1 L R_1$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



$$T = (4\pi \mu R_1^2 R_2^2 L \omega_1) / (R_2^2 - R_1^2)$$

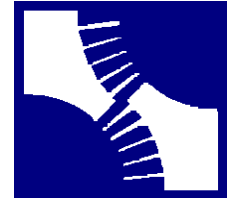
9. La potencia necesaria **W** para hacer girar el cilindro interno se encuentra multiplicando el momento de torsión por la velocidad angular de rotación:

$$W = T \omega_1$$

$$W = [(4\pi \mu R_1^2 R_2^2 L \omega_1) / (R_2^2 - R_1^2)] \omega_1$$

$$W = (4\pi \mu R_1^2 R_2^2 L \omega_1^2) / (R_2^2 - R_1^2)$$

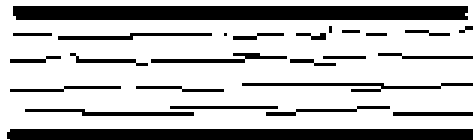
Se requiere esta potencia para poder vencer la resistencia producida por la viscosidad y como resultado de esto se incrementa la energía interna y por lo tanto la temperatura del fluido lubricante. Esa es la razón fundamental de la importancia de la lubricación y los lubricantes.



1.7.- FLUJO TURBULENTO EN TUBERIAS.

1.7.1. Introducción:

Se sabe que en el movimiento de un fluido viscoso por una tubería, el caso laminar **NO** es el único posible. Para una cierta velocidad, lo suficientemente grande, el flujo de fluido por el tubo se hace extremadamente **IRREGULAR** y las partículas de fluido y grupos enteros de ellas adquieren velocidades transversales totalmente variables y sin ninguna aparente ordenación. Las velocidades longitudinales también parecen **OSCILAR** en forma caótica con respecto a su valor promedio. A este fenómeno a gran escala y que es observable se le da el nombre de **TURBULENCIA**.



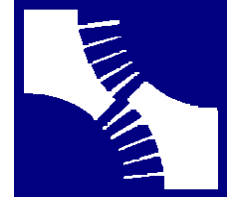
LAMINAR



TURBULENTO



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



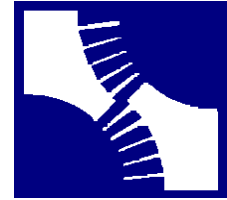
El estudio del flujo turbulento desarrollado de un fluido en tuberías es de gran interés para los ingenieros pues la mayoría de los flujos reales se comportan bajo este comportamiento hidráulico. Para visualizar mas esta situación se tiene por ejemplo que agua a 20 C, circulando por una tubería de 5 mm ($\frac{1}{4}$ ") y a una velocidad promedio de 0.8 m/seg (2 ft/seg) se comporta ya como un flujo turbulento.

El tratamiento matemático de la turbulencia es extremadamente difícil y **NO** se conocen soluciones **EXACTAS** que describan este tipo de flujo. El primero que trato de **CUANTIFICAR** este fenómeno de **INESTABILIDAD DINAMICA** fue **OSBORNE REYNOLDS**, quien encontró un criterio preciso para saber **CUANDO** un flujo laminar se hace inestable y se transforma en turbulento (y viceversa). Su experimento consistía en un deposito de agua conectado a una tubería de vidrio y por la cual circulaba el agua con caudal graduable y para hacer visible el movimiento del liquido inyectaba un colorante no miscible con el agua por el centro de la tubería.

Fuera de toda perturbación iniciaba el experimento haciendo pasar el colorante por la corriente de agua y observaba la traza: si esta era bien definida y rectilínea por el centro del tubo decía que existía un **FLUJO LAMINAR**.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Aumentando el caudal de agua (la velocidad) observaba que de repente el filete coloreado (la traza) comenzaba a ensancharse y/o a diluirse y mezclarse en el resto del fluido. Vio que estas perturbaciones **NO** perduraban y desaparecían a instantes regresando la traza coloreada a la condición de laminaridad. El régimen de fluido a esta velocidad había entrado a una **FASE DE TRANSICION** o de **CASI INESTABILIDAD**. Si se seguía aumentando el caudal (la velocidad), se observaba que esas perturbaciones se hacían mas frecuentes y de mayor tamaño hasta que llegaba un momento que **NO** se amortiguaban (inicio de la transición).

Llegaba un momento (aumentando el caudal gradualmente) en que el colorante se extendía a **TODA** la masa líquida en movimiento por la tubería y se producía una mezcla completa de las diferentes líneas de corriente, era el inicio del **FLUJO TURBULENTO**.

Llevando a cabo numerosos experimentos y haciendo variar los parámetros **REYNOLDS** observo que el inicio de la turbulencia estaba ligada a un parámetro **ADIMENSIONAL** y que es el número que lleva su nombre (número de Reynolds)

$$Re = UD/\nu = \rho UD/\mu$$

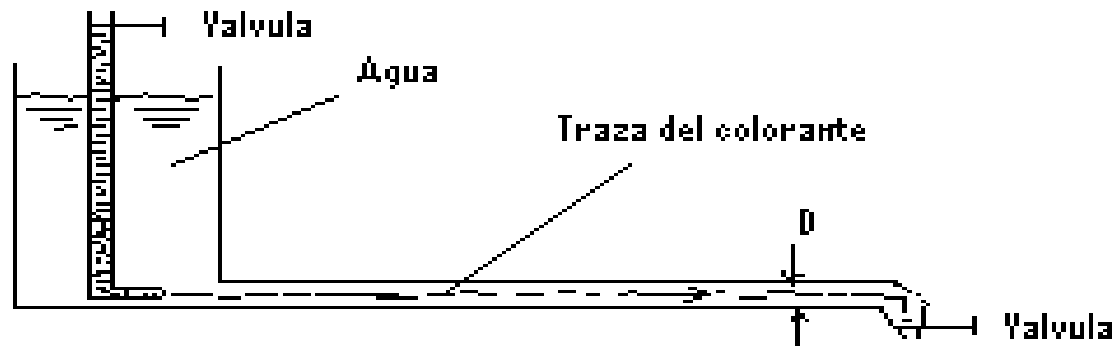


Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



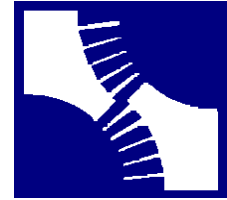
- $U \rightarrow$ Velocidad media del liquido (m/s) o (ft/s)
 $D \rightarrow$ Diametro de la tuberia m o ft
 $\mu \rightarrow$ Viscosidad dinamica del fluido@ la temperatura operación kg/(ms) o (Lbm/ft s)
 $\rho \rightarrow$ Densidad del fluido (Kg/m³) o (lbm/ft³)
 $\nu \rightarrow$ Viscosidad cinematica (m²/s) o (ft²/s)
 $Re < 2000$ (laminar); $Re >> 4000$ (turbulento); $2000 \leq Re \leq 4000$ (transitorio).

EXPERIMENTO DE REYNOLDS



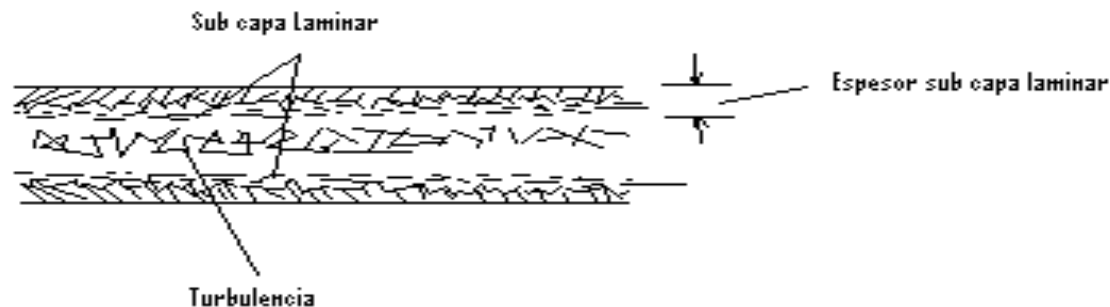


Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



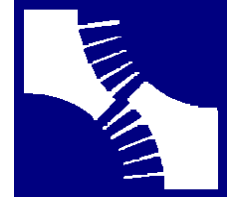
Se puede observar que en la descripción inicial del fenómeno de la **TURBULENCIA**, no se ha hecho mención alguna a la presencia de la pared de la tubería. Cerca de la pared el movimiento de las partículas de fluido es alterada por la presencia de la pared y mientras mas se acerca el flujo a ellas ya la turbulencia **NO** es posible. Esta zona de transición real influye en la distribución de velocidades ya que en la pared precisamente la velocidad de las partículas de fluido en una sección determinada y en un tiempo determinada es cero es una zona de muy pequeño espesor pero de una tremenda **SIGNIFICACION**. Se conoce como **SUB CAPA LAMINAR**. El espesor de la sub. capa laminar juega un importante papel en la hidrodinámica y la aerodinámica.

SUB CAPA LAMINAR





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



1.7.2.- Flujo Turbulento Unidimensional (Esfuerzos de Reynolds):

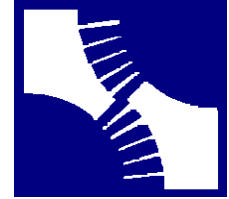
Sabemos que las ecuaciones de Navier – Stokes son las ecuaciones del movimiento para un fluido newtoniano y además ya han sido estudiadas las relaciones que han de existir en el seno de un fluido en movimiento entre las velocidades de deformación y los esfuerzos cortante que se generan como consecuencia del movimiento y la viscosidad y esta relaciones se llaman **ECUACIONES CONSTITUTIVAS** de los fluidos newtonianos.

La pregunta que debemos hacernos será: ¿ Se aplican las **ENS** al Flujo Turbulento..? y ¿Cómo entra en las **ENS** el fenómeno de la turbulencia..?. Para poder responder estas interrogantes es necesario realizar una descripción CINEMATICA de la turbulencia.

Si el fluido se está moviendo, quiere decir que tiene una velocidad de conjunto “**VISIBLE**”, que puede separarse de la “**PULSACION**” turbulenta. Veamos como varía en el tiempo la velocidad del fluido en la dirección x. la velocidad observada por un instrumento sensible puede indicarnos las **FLUCTUACIONES** temporales y obtendremos un gráfico con el indicado.



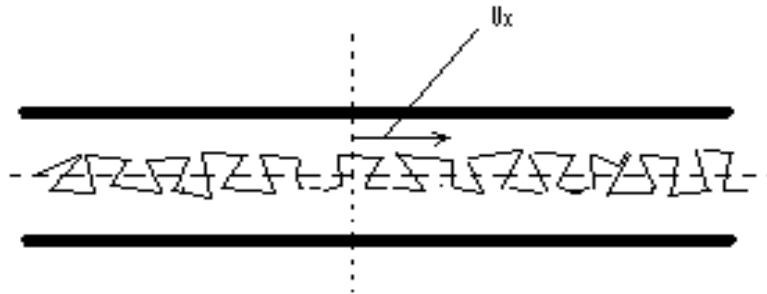
Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Observamos que $u_x = u_x(t)$, representa una variación totalmente irregular y en general de **ALTA** frecuencia alrededor de un valor promedio \bar{u}_x o media temporal definida por la ecuación;

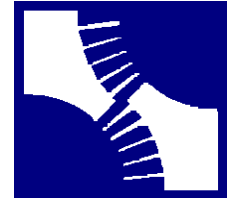
$$\bar{u}_x = 1/\Delta t \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} u_x(t) dt$$

FLUCTUACIONES DE LA VELOCIDAD EN X POR LA TURBULENCIA



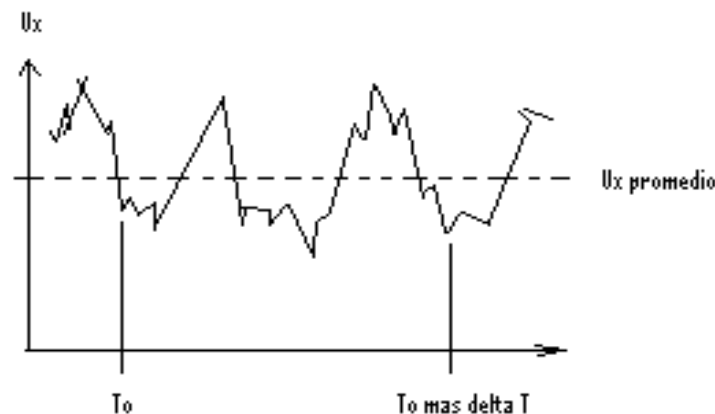


Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



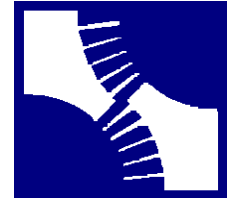
Δt es el intervalo de tiempo suficientemente grande para que las pulsaciones turbulentas puedan ser “**BORRADAS**” en ese valor promedio y suficientemente pequeño para que permita una variación de \bar{u}_x en el tiempo si se tratase de un flujo turbulento **NO** permanente. Un criterio para escoger Δt puede ser de que el resultado obtenido no dependa del valor inicial t_0 (tomado para calcular la integral) ni del propio Δt , es decir, un Δt lo suficientemente grande para eliminar la dependencia del tiempo de \bar{u}_x . El valor medio temporal \bar{u}_x así encontrado representa evidentemente la manera en que se transporta el fluido en promedio si no se toma en cuenta el vaiven desordenado de las pulsaciones turbulentas.

FLUCTUACIONES DE U_x





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica

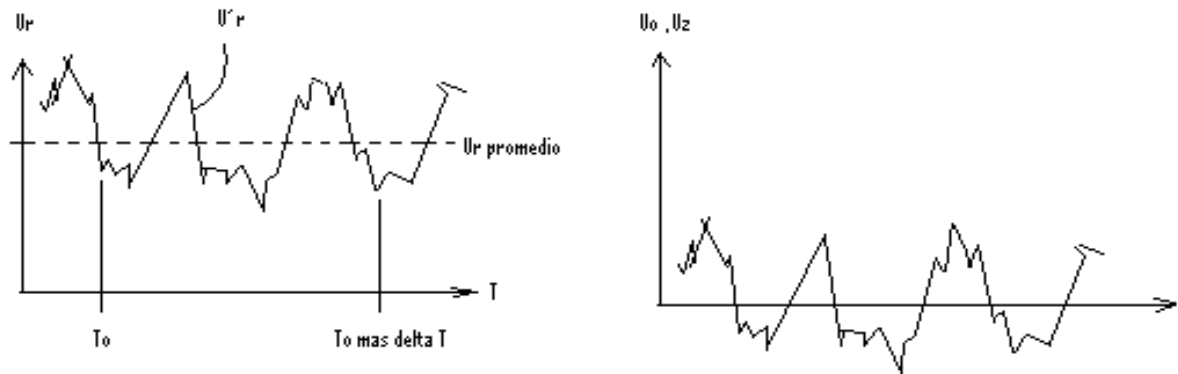


En un flujo turbulento las tres componentes de la velocidad (cartesianas o cilíndricas), no son cero. Si medimos las componentes u_r , u_θ y u_z en coordenadas cilíndricas tendríamos gráficos como los indicados en las figuras y como nos interesa, desde el punto de vista práctico, cantidades **PROMEDIADAS** con respecto al tiempo, las componentes de la velocidad (en ambos sistemas de coordenadas), se escriben como:

$$u_x = \tilde{u}_x + u_x ; u_y = \tilde{u}_y + u_y ; u_z = \tilde{u}_z + u_z \text{ (u velocidad pulsación)}$$

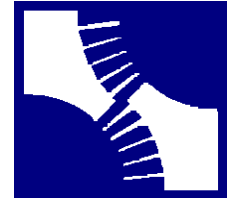
$$u_r = \tilde{u}_r + u_r ; u_\theta = \tilde{u}_\theta + u_\theta ; u_z = \tilde{u}_z + u_z$$

GRAFICO COMPONENTES VELOCIDAD EN REGIMEN TURBULENTO





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Así como existen pulsaciones de la velocidad estas mismas nos lleva a crear pulsaciones en la presión y la presión será:

$$p = \bar{p} + p' \quad (\bar{p} \text{ presión promedio})$$

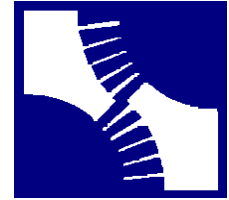
Para el caso de un fluido moviéndose por una tubería se cumple que: $\bar{u}_y, \bar{u}_z = 0$, pero u_y y $u_z \neq 0$ (pulsaciones turbulentas transversales).

Con esta descripción cinemática hemos respondido la pregunta.. ¿Cómo entra en las **ENS** el fenómeno de la turbulencia..?. Ahora se trata de responder la otra pregunta.. ¿ Se aplican las **ENS** al Flujo Turbulento..? . Como ya planteamos que si se pueden aplicar las **ENS** al flujo turbulento lo que debemos hacer es colocar las ecuaciones definidas en la descripción cinemática y las de presión en las **ENS** para ver en que se transforman.

En general podemos decir que se puede considerar al flujo turbulento como **GENERANDO** en el seno de un fluido en movimiento unos **ESFUERZOS CORTANTES ADICIONALES** (a los provocados por la viscosidad) y estos esfuerzos se conocen como los “**ESFUERZOS DE REYNOLDS**” y que se deben agregar a los esfuerzos cortantes generados por la viscosidad.



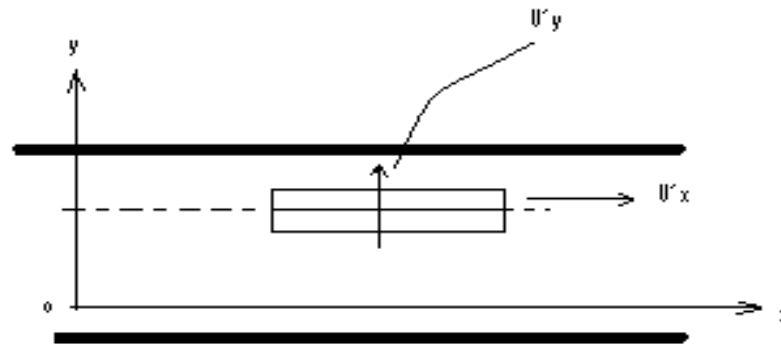
Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



La aparición de los esfuerzos de **REYNOLDS** debido a la turbulencia, se pueden hacer comprender en el caso de un flujo **UNIDIMENSIONAL** en una tubería mediante un razonamiento **INTUITIVO** del mismo tipo como el que explica el fenómeno de la viscosidad.

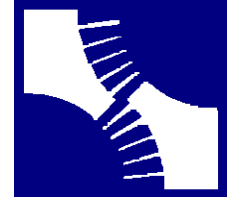
Consideremos una capa de fluido y sobre ella definamos un elemento de superficie ΔA . Si el movimiento turbulento del fluido en esa zona tiene unas pulsaciones u_x ; u_y , podemos interpretar a u_y , como la **DIFERENCIA** de velocidades que existe entre las dos caras del elemento de superficie ΔA , en la dirección **oy** (ver figura).

PULSACIONES TURBULENTAS TRANSVERSALES DE VELOCIDAD





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Si aplicamos el teorema de la cantidad lineal de movimiento a un volumen de control de altura infinitesimal y de base ΔA , se observa que al existir un caudal (debido a u_y), atravesando dicho elemento, se genera una fuerza en la dirección $0x$, dada por:

$$\Delta F_x = \rho \Delta A u_y u_x \quad (F = \int u \rho u \cdot dA)$$

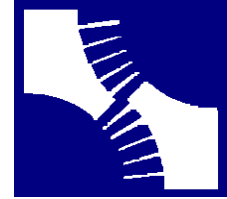
De esta forma se genera un **ESFUERZO CORTANTE** debido a la **TURBULENCIA** (pulsaciones cinemáticas), dado por:

$$\Delta F_x / \Delta A = \lambda_t = - \rho u_y u_x \text{ (esfuerzos turbulentos de Reynolds)}$$

La aparición de esfuerzos cortantes **ADICIONALES** en el flujo turbulento fue una de las primeras observaciones que se hicieron sobre este tipo de flujo por Reynolds y casi simultáneamente con él, **BOUSSINESQ** , había tratado de encontrar una expresión para λ_t .



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



La expresión de **BOUSSINESQ** , esta dada por:

$$\lambda_t = A_t \, d\tilde{u}_x / dy \quad (A_t \rightarrow \text{Viscosidad de remolino})$$

El coeficiente A_t , **NO** es una característica del fluido, sino del **FLUJO** y depende de cuan intensa es la turbulencia y además del tiempo.

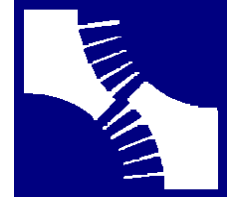
1.7.3.- Teoría de PRANDTL:

Para los efectos del estudio del flujo unidimensional de fluido en régimen turbulento por una tubería, la expresión de **REYNOLDS** de los esfuerzos turbulentos nos bastaría si ella arrojará directamente un valor de λ_t , pero las pulsaciones u_x , u_y , son desconocidas “**a priori**” y constituyen incógnitas adicionales a las que aparecían en la teoría del flujo **LAMINAR**.

PRANDTL, propuso una interpretación **FISICO – INTUITIVA**, que permite eliminar dichas incógnitas, aceptando algunas hipótesis conocidas como **HIPOTESIS DE PRANDTL**.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



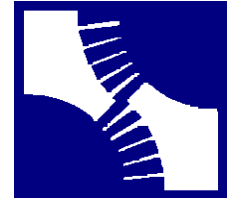
Consideremos un flujo de fluido turbulento **UNIDIMENSIONAL** con una velocidad media temporal \tilde{u}_x . Esta velocidad en las distintas capas del fluido es variable y por lo tanto:

$$\tilde{u}_x = \tilde{u}_x(y) \text{ (Ver figura)}$$

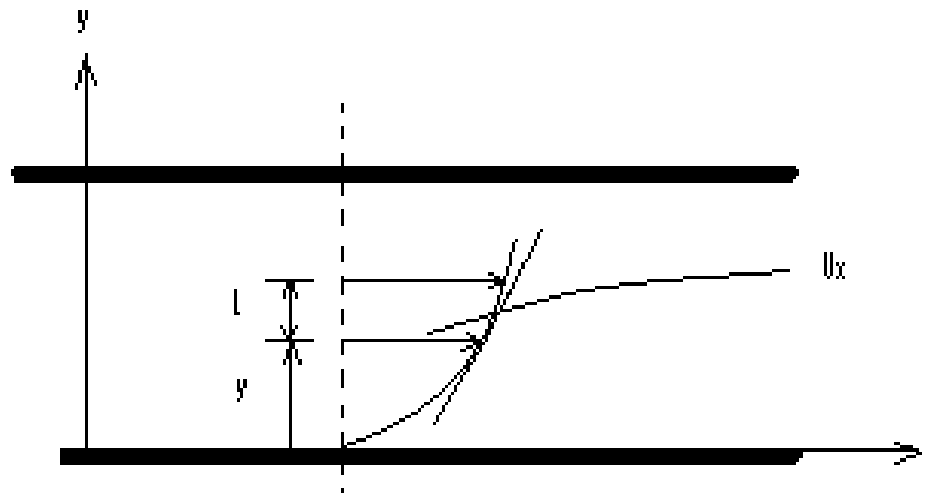
Debido a la turbulencia habrá una **TRANSFERENCIA LATERAL** de fluido entre una capa de fluido de ordenada y con la capa vecina ubicada a una distancia “ l ” de la primera. La velocidad en dicha capa sera (desarrollo en serie de **TAYLOR**)

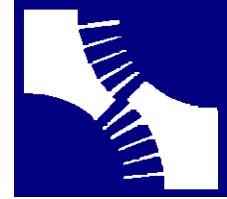
$$\tilde{u}_x(y + l) = \tilde{u}_x(y) + l \, d\tilde{u}_x/dy + \dots$$

La longitud “ l ”, se debe escoger de forma tal que una partícula de fluido que pasa de la primera capa “ y ”, a la segunda capa “ $y + l$ ”, llegue a esta capa **SIN** haber perdido sus características propias, en particular su velocidad \tilde{u}_x . Al llegar a la segunda capa con una velocidad diferente a la que tiene esa capa, esta partícula de fluido constituye un elemento de **PERTURBACION**



TRANSFERENCIA LATERAL DE FLUIDO EN REGIMEN TURBULENTO





PRIMERA HIPOTESIS DE PRANDTL:

Prandtl, llamo a l como **LONGITUD DE MEZCLA**, es decir, la máxima distancia que puede recorrer una partícula de fluido lateralmente **SIN** mezclarse con la capa a la cual va a llegar. Planteo entonces la hipótesis de que la diferencia de velocidad entre las dos capas de fluido es lo que **JUSTAMENTE** en la segunda capa puede considerarse una **PULSACION**, por lo tanto:

$$\tilde{u}_x(y + l) - \tilde{u}_x(y) = l \, d\tilde{u}_x/dy \rightarrow u_x = l \, d\tilde{u}_x/dy$$

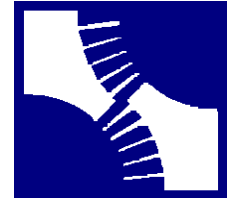
SEGUNDA HIPOTESIS DE PRANDTL:

Esta hipótesis, se refiere a la pulsación transversal u_y . Postuló que por razones de CONTINUIDAD, las dos pulsaciones u_x ; u_y , deben ser del mismo orden de magnitud pero de signo contrario.

$$u_y = -u_x$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica

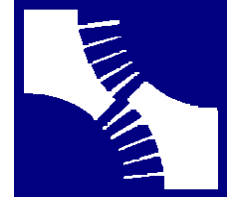


Si las expresiones dadas por las dos primeras hipótesis de **PRANDTL**, se introducen en la formula de los esfuerzos cortantes de **REYNOLDS**, tenemos que:

$$\lambda_t = - \rho u_y u_x = \rho l^2 d\tilde{u}_x/dy d\tilde{u}_x/dy$$

En esta formula, se ha procurado que haya coincidencia tanto en valor absoluto como en signo. Esta expresión presenta el inconveniente de que la longitud de mezcla “ l ”, es tambien desconocida, pero con toda seguridad ; $l = l(y)$, pero **NO** se conoce esta funcion.

La ventaja de la expresión anterior es que hace **DEPENDER** al esfuerzo cortante turbulento de la **VELOCIDAD MEDIA**. Para conocer “ l ”, se requieren hipotesis adicionales y en funcion de eso, analizaremos ahora el trabajo de **PRANDTL** para el flujo turbulento de fluidos en tuberias.



1.7.4.- Flujo turbulento según PRANDTL:

Consideremos el flujo turbulento por una tubería circular, por lo visto en la sección anterior sabemos que el esfuerzo de corte total λ , que actúa sobre un elemento de fluido se debe a los esfuerzos de corte de origen viscoso y a los esfuerzos de corte turbulentos de Reynolds (combinar los efectos debido a la viscosidad y a la turbulencia), por lo tanto:

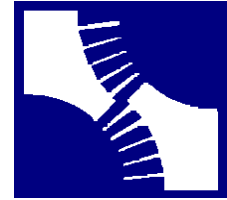
$$\lambda = \lambda_{\mu} + \lambda_t = \mu \, du_x/dy + \rho \, l^2 \, du_x/dy \, |du_x/dy|$$

Debido a la presencia de la pared de la tubería se dividirá en flujo de fluido en dos zonas; la zona de **SUB CAPA LAMINAR (δ_b)** y la zona **TURBULENTO**. En la zona de sub. capa laminar **NO** hay turbulencia debido a la cercanía de la pared y el flujo será laminar en esa zona, por lo tanto:

$$\lambda = \lambda_{\mu} = \mu \, du_x/dy$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



En la zona turbulenta se tiene en general que:

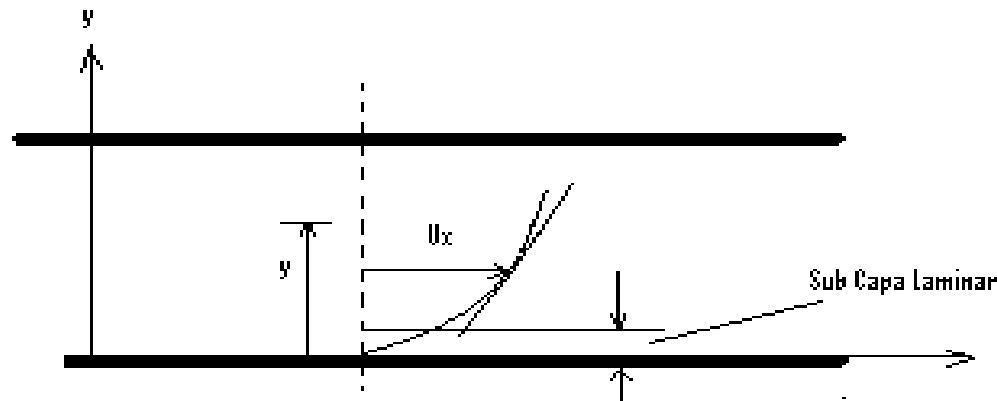
$$\mu \, du_x/dy \ll \rho \, l^2 \, (du_x/dy)^2$$

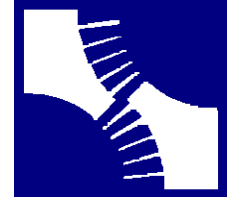
Para esta zona se puede adoptar la expresión:

$$\lambda = \rho \, l^2 \, du_x/dy \, |du_x/dy|$$

Puede existir una tercera zona, llamada zona de **TRANSICION** en la cual los términos viscosos y turbulentos serán del mismo orden de magnitud.

SUB CAPA LAMINAR (δ_b) ZONA TURBULENTA.





TERCERA HIPOTESIS DE PRANDTL:

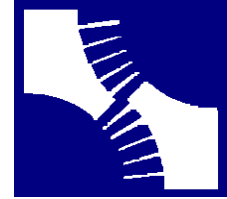
En esta hipótesis PRANDTL plantea que el esfuerzo cortante λ es CONSTANTE en todo el seno del fluido en movimiento y es igual al valor que tiene este esfuerzo en la pared. Admitiendo esta hipótesis y llamando λ_0 al esfuerzo de corte en la pared, se puede integrar la ecuación.

$$\lambda = \rho l^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 \text{ (Valor del esfuerzo cortante en la zona turbulenta)}$$

En función de lo anterior tenemos que:

$$du_x = \sqrt{(\lambda_0 / \rho)} \, dy/l$$

Para poder integrar esta ecuación es necesario saber como varia “ l ”, con la distancia a la pared.



CUARTA HIPOTESIS DE PRANDTL:

Para resolver el problema de la variable “ l ”, vista en la hipótesis tercera, **PRANDTL** planteó que la longitud de la mezcla l ha de ser **PROPORCIONAL** a la distancia “ y ” a la pared, por lo menos para distancias **NO** muy grandes.

$$l = k y \text{ (} k: \text{ Constante a determinar)}$$

Extendiendo esta hipótesis a **TODO** el fluido y de la ecuación:

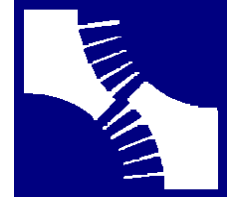
$$du_x = \sqrt{(\lambda_o / \rho)} \, dy/l = \sqrt{(\lambda_o / \rho)} \, dy / ky$$

Integrando esta ecuación, tenemos que:

$$u_x / \sqrt{(\lambda_o / \rho)} = (1/k) \ln y + C_1$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



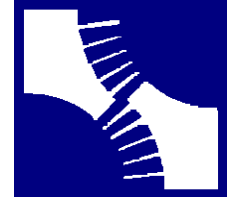
Este resultado sugiere las siguientes consideraciones:

- a) Las hipótesis tercera y cuarta **NO** forman realmente parte de la teoría de la longitud de mezcla, sino que son **ADICIONALES** a ella y **NO** son las únicas posibles, pero concuerdan muy bien con los resultados experimentales.
- b) Es evidente que la ecuación anterior **NO** es válida para $y = 0$ (no está definido el logaritmo natural para este valor), por lo cual la solución de esta ecuación debe ser “**EMPATADA**” con la correspondiente ecuación de la sub capa laminar.
- c) La cantidad $\sqrt{(\lambda_o / \rho)}$, tiene dimensiones de VELOCIDAD y se define entonces:

$$u^\# = \sqrt{(\lambda_o / \rho)} \quad (\text{Velocidad de corte})$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Se puede escribir la ecuación de distribución de velocidades en la zona **TURBULENTA** como:

$$u_x / u^\# = (1/k) \ln y + C_1$$

- d) En las consideraciones anteriores **NO** se ha tomado en cuenta las **RUGOSIDADES** en la pared de la tubería y que obviamente deben afectar las características del flujo y es evidente que esto deberá ser tomado en cuenta posteriormente (se supuso pared **LISA**).

1.7.5.- Distribución de velocidades en régimen turbulento:

a) Distribución de velocidades en la “SUB CAPA LAMINAR”.

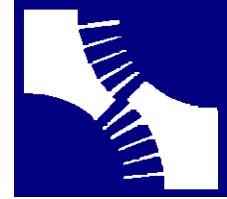
Para esta zona supondremos también que $\lambda = \lambda_o$ en TODA ella, por lo cual:

$$\lambda = \lambda_{\mu t} = \mu \, du_x / dy \rightarrow \lambda_o = \rho \nu \, du_x / dy \rightarrow du_x / dy = \lambda_o / \rho \nu$$

Sabemos que: $u^\# = \sqrt{(\lambda_o / \rho)}$ (Velocidad de corte)



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Por lo tanto: $du_x / dy = \lambda_o / \rho v = u^{\#2} / v$

Integrando y tomando en cuenta las condiciones de borde; $u_x = 0$ si $y = 0$

$$u_x / u^{\#} = (u^{\#} / v) y$$

b) Distribución de velocidades de “PRANDTL – VON KARMAN”

Las soluciones encontradas anteriormente y que son:

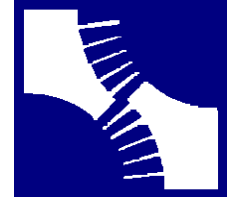
- 1) $u_x / u^{\#} = (1/k) \ln y + C_1$
- 2) $u_x / u^{\#} = (u^{\#} / v) y$

Deben “**EMPATARSE**” en la **SUB CAPA LAMINAR**, lo que significa para $y = \delta_b$, por lo cual ha de cumplirse que:

$$(u^{\#} / v) \delta_b = (1/k) \ln \delta_b + C_1$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Si despejamos tenemos que:

$$C_1 = (u^\# / v) \delta_b - (1/k) \ln \delta_b$$

Si llamamos; $n = (u^\# / v) \delta_b$ (Constante Adimensional)

$$C_1 = n - (1/k) \ln (n v / u^\#) = n - (1/k) \ln n - (1/k) \ln (v / u^\#)$$

Llevando este valor a la ecuación 1 y llamando $A = n - (1/k) \ln n \rightarrow$

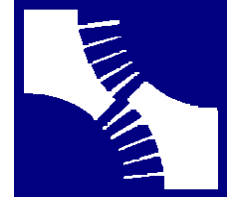
$$u_x / u^\# = (1/k) \ln y + C_1 = (1/k) \ln y + A - (1/k) \ln (v / u^\#) \rightarrow$$

$$u_x / u^\# = (1/k) \ln (u^\# y / v) + A$$

Este resultado depende de dos constantes **k** y **A**, que **NO** pueden ser deducidas **TEORICAMENTE**.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Los resultados de esta ecuación fueron comparados por **NIKURADSE** con numerosas mediciones experimentales y para varios números de **REYNOLDS** y encontró una coincidencia muy buena cuando se dan a las constantes **k** y **A** los valores; **k = 0.4** y **A = 5.5**. Incluyendo estos, la ecuación queda como:

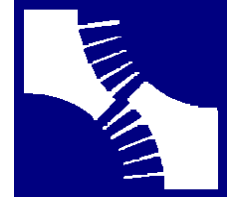
$$u_x / u^\# = 2.5 \ln (u^\# y / \nu) + 5.5$$

Esta formula del flujo turbulento es aplicable a **TODA** tubería **LISA**, es decir, cuando las rugosidades de las paredes son despreciables. En este análisis existe un equilibrio entre consideraciones teóricas y visiones intuitivas, definidas por muchos experimentos. Su método, (de **PRANDTL**) y su escuela de pensamiento se han definido como **SEMI-EMPIRICAS** o **FENOMENOLOGICAS**.

Es importante hacer notar los **INCONVENIENTES** que presenta la ecuación anterior.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



- a) Desde el punto de vista práctico la función logaritmo es INCOMODA para trabajos rutinarios.
- b) Desde el punto de vista teórico se observa que **NO** solo en la pared dicha fórmula es **INCORRECTA** y en la pared debe ser sustituida por la ecuación conseguida en la distribución de velocidades en la **SUB CAPA LAMINAR** y dada por:

$$u_x / u^\# = (u^\# / v) y$$

En el centro de la tubería la pendiente de $u_x = u_x(y)$, **NO** es nula

- c) Un hecho más contundente aún, es la variación de la longitud de mezcla l con la distancia a la pared, dada por la ecuación lineal:

$$du_x = \sqrt{(\lambda_o / \rho)} dy / l$$

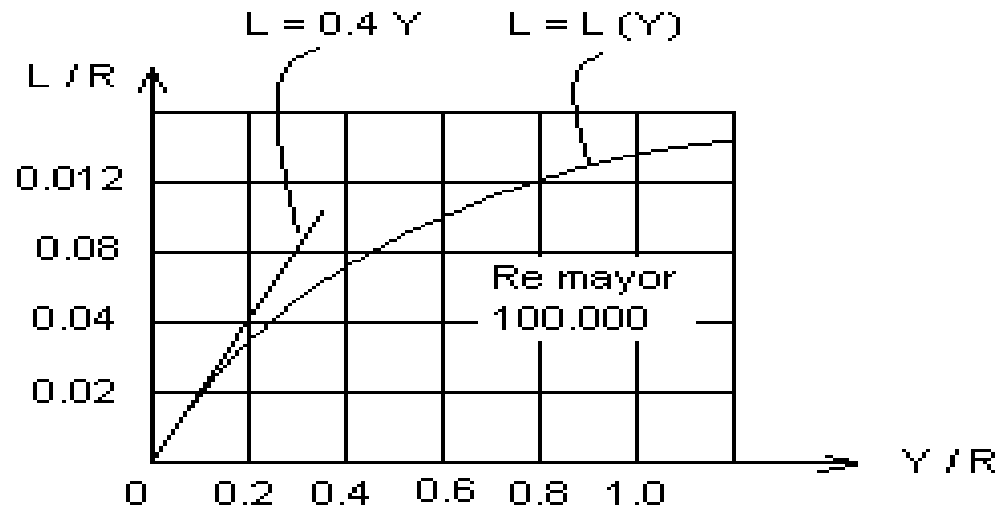


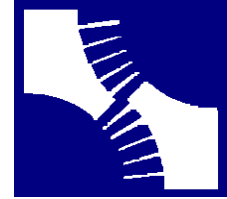
Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Los resultados experimentales de **NIKURADSE**, indican proporcionalidad en una zona muy vecina a la pared (Ver gráfica).

NIKURADSE; LONGITUD DE MEZCLA ($L = l(y)$)





C) Espesor de la SUB CAPA LAMINAR.

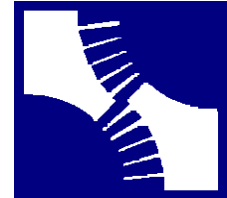
Según la definición dada, el espesor δ_b de la **SUB CAPA LAMINAR**, es aquel donde la velocidad en la sub. capa y en el flujo turbulento principal **SON IGUALES**, lo que significa matemáticamente que:

$$(u^\# / \nu) \delta_b = (1 / k) \ln \delta_b + C_1$$

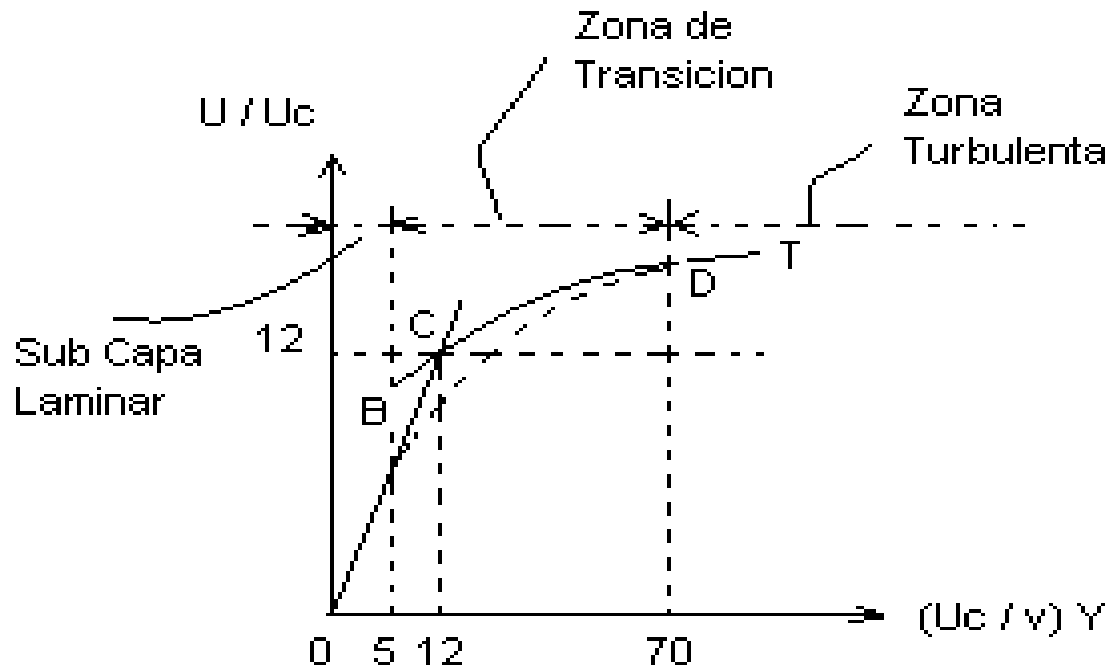
Si representamos gráficamente la distribución de velocidades en las zonas laminar y turbulenta el espesor δ_b queda definido por la intersección **C** de las curvas dadas por (mostrada en el grafico):

$$u_x / u^\# = (u^\# / \nu) y$$

$$u_x / u^\# = 2.5 \ln (u^\# y / \nu) + 5.5$$

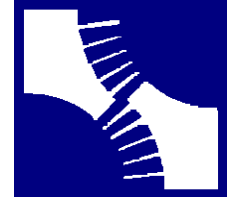


VARIACION DE LAS VELOCIDADES DEL FLUIDO Y DE CORTE





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica

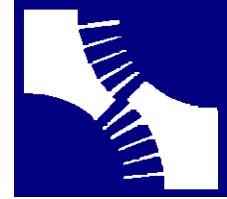


El valor de la abscisa de **C** esta dado por la ecuación:

$$(u^{\#} / v) \delta_b = 2.5 \ln (u^{\#} \delta_b / v) + 5.5 ; (u^{\#} / v) \delta_b \approx 12$$

Existe una zona de **TRANSICION** en la cual tanto la turbulencia como la viscosidad influyen en la distribución de velocidades. La **VERDADERA** distribución esta representada por la curva **OBDT**. En las deducciones de **PRANDTL**, tal como han sido representadas hasta aquí, **NO** se ha tomado en cuenta esta transición cuyos limites se definen aproximadamente como:

$$5 < u^{\#} y / v < 70$$

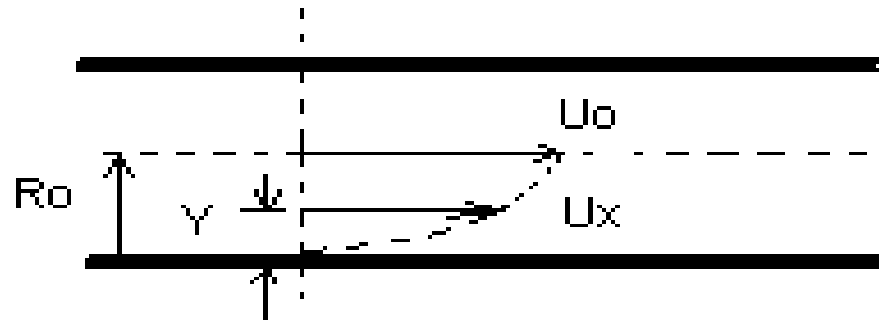


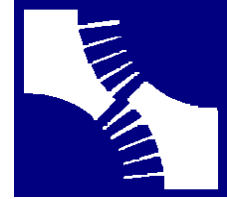
D) Formula empírica de PRANDTL

Conviene mencionar, pues se usa frecuentemente, una relación empírica que propuso **PRANDTL** en base a los trabajos de **BLASIUS** y que se utiliza como ley de distribución de velocidades. Esta ecuación tiene la ventaja que arroja; $u_x = 0$, para $y = 0$, pero presenta un punto anguloso en el centro de la tubería pero es fácil de utilizar.

$$u_x / U_0 = (y / R_0)^n \rightarrow n = 1/7 \text{ si } Re < 10^5; n < 1/7 \text{ si } Re > 10^5$$

DISTRIBUCION VELOCIDADES FORMULA EMPIRICA PRANDTL





E) Distribución de velocidades en paredes rugosas:

La teoría de **PRANDTL**, da la distribución de velocidades **LEJOS** de la pared y su ecuación es:

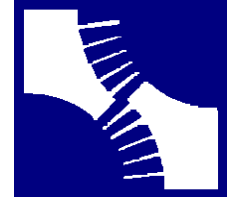
$$u_x / u^\# = 2.5 \ln (u^\# y / \nu) + 5.5$$

Es evidente que **CERCA** de una pared **RUGOSA**, **NO** se puede hablar de **SUBCAPA LAMINAR**. Para ir resolviendo este problema introduciremos el concepto de tamaño medio ϵ (mm) de La rugosidad de la tubería y sea $y_p = m \epsilon$, la distancia a partir de la cual se puede suponer que **YA** la rugosidad **NO** perturba el flujo turbulento. La constante m se llama **Factor de Forma** (toma en cuenta la estructura de la rugosidad). Se debe cumplir entonces que:

$$y = y_p \rightarrow u_x = u_p \text{ (Velocidad de pared)}$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Llevando estos valores de que $u_x = u_p$ en la ecuación:

$$u_x / u^\# = (1/k) \ln (u^\# y / \nu) + A$$

$$u_p / u^\# = (1/k) \ln [(u^\# / \nu) m \varepsilon] + A$$

Restando ambas ecuaciones :

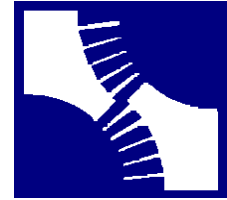
$$u_x / u^\# - u_p / u^\# = (1/k) \ln (y / m \varepsilon)$$

$$u_x / u^\# = (1/k) \ln (y / \varepsilon) - (1/k) \ln m - u_p / u^\#$$

Como los dos últimos términos son constantes.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



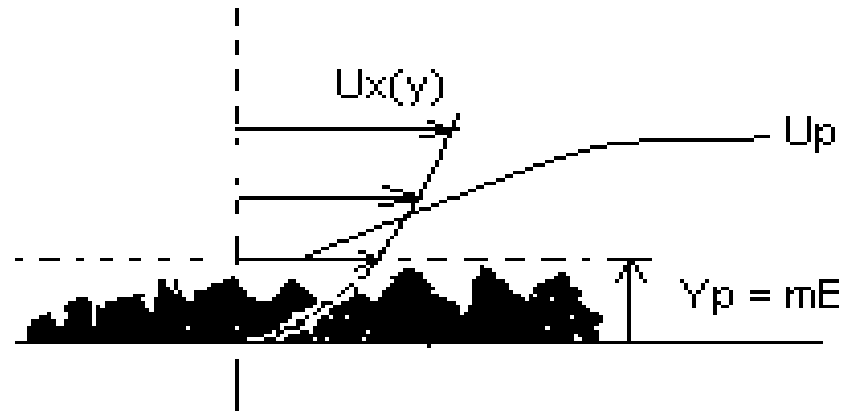
$$u_x / u^\# = (1/k) \ln (y / \epsilon) + B$$

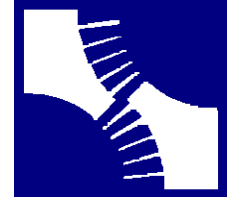
La experiencia demuestra la **VERACIDAD** de esta ecuación para tuberías con distintas rugosidades artificiales (granos de arena) obteniendo **NIKURADSE** los siguientes valores para las constantes; **k = 0.4** ; **B = 8.5**.

Para un flujo por una pared **RUGOSA** la distribución de velocidades es:

$$u_x / u^\# = 2.5 \ln (y / \epsilon) + 8.5$$

DISTRIBUCION VELOCIDAD CERCA PARED RUGOSA (Velocidad pared)



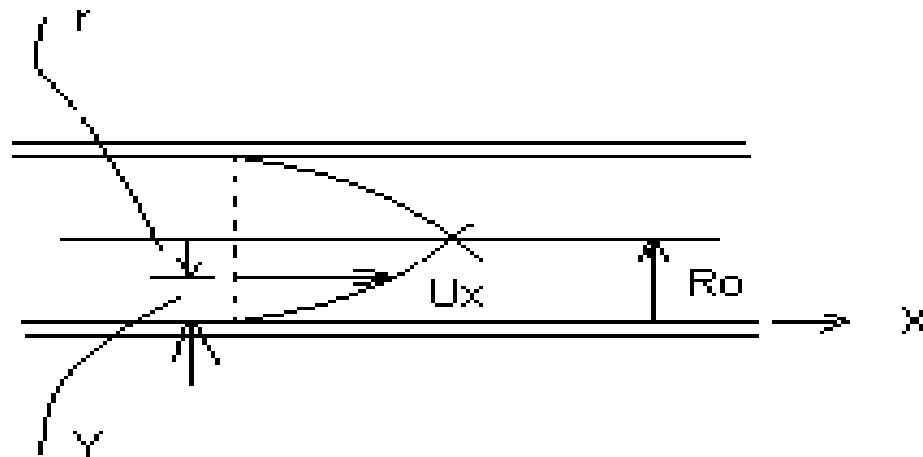


F) Velocidad media en una tubería lisa.

Volviendo a las tuberías lisas, veamos la utilización de la ecuación:

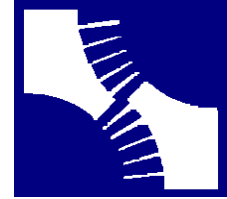
$$u_x / u^\# = 2.5 \ln (u^\# y / \nu) + 5.5$$

DISTRIBUCION DE VELOCIDADES EN PAREDES LISAS





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Para calcular el caudal y la velocidad media tenemos que:

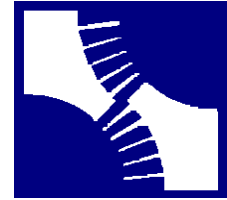
$$Q = \int u_x dA = \int_{R_o}^{R_o} 2\pi r u_x dr = 2\pi u^* \int_{R_o}^{R_o} [2.5 \ln (u^*(R_o - r)/\nu) + 5.5] dr$$

$$Q = \pi R_o^2 u^* [2.5 \ln (u^* R_o / \nu) + 1.75]$$

La velocidad media es; $U = Q / (\pi R_o^2)$

La distribución de velocidades en función de la velocidad media será:

$$U / u^* = 2.5 \ln (u^* R_o / \nu) + 1.75$$



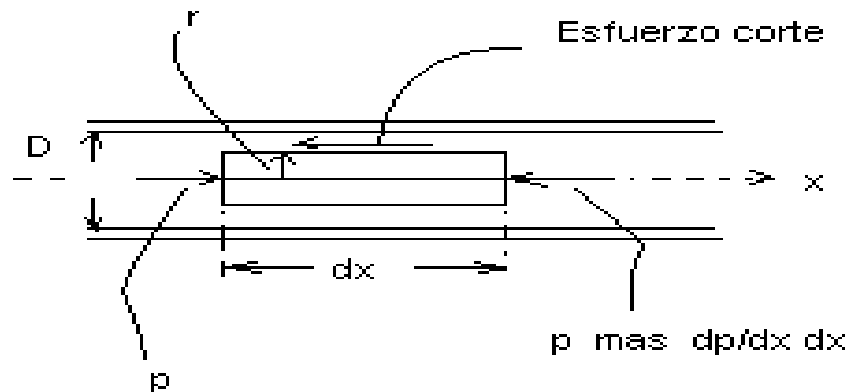
1.7.6.- Pérdida de carga en una tubería:

Una de las razones prácticas que condujeron al estudio **DETALLADO** de la **TURBULENCIA** en una tubería, fue el interés en determinar las **PERDIDAS DE CARGA** que se producen en este tipo de flujos.

Para ello se hacía necesario evaluar el esfuerzo cortante λ_o , que se produce en la pared del tubo, ya que conocido este valor se puede calcular el gradiente de presión y por lo tanto la **PERDIDA DE CARGA**.

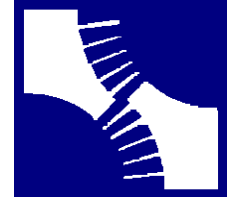
Consideremos una tubería horizontal y un elemento cilíndrico de radio r y longitud dx y colocado simétricamente con respecto al eje de la tubería.

DIAGRAMA DE FUERZAS EN UN ELEMENTO CILINDRICO DE FLUIDO





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Suponiendo un flujo de velocidad media constante y considerando **TODAS** las fuerzas que actúan sobre el elemento cilíndrico de fluido, tenemos que:

$$p \pi r^2 - [p + (\delta p / \delta x) dx] \pi r^2 - \lambda dx 2\pi r = 0$$

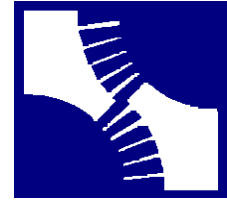
Simplificando y despreciando segundas derivadas:

$$- \delta p / \delta x - \lambda 2/r = 0$$

Pero: $\delta p / \delta x = -k (k > 0) \rightarrow k = \Delta p / L \rightarrow \lambda = k r / 2$

Haciendo $r = D / 2$; tenemos el esfuerzo cortante en la pared (λ_o). Recordando que la pérdida de carga h_f es; $h_f = \Delta p / \gamma$; y recordando que:

$$u^\# = \sqrt{(\lambda_o / \rho)} \text{ (Velocidad de corte)}$$



Tenemos que:

$$h_f = k L / \gamma = (4 \lambda_o / D) L / \gamma = (4 u^{\#2} / D g) L$$

Podemos observar que la determinación del esfuerzo cortante en la pared permite encontrar la **PERDIDA DE CARGA**, la que además se expresa en función de la velocidad de corte ($u^{\#}$).

A) Formula de DARCY – WEISBACH

Si trabajamos con la ecuación: $U / u^{\#} = 2.5 \ln (u^{\#} R_o / \nu) + 1.75$

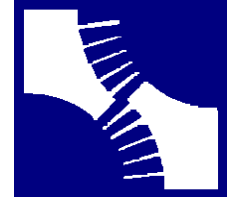
Sabemos del trabajo anterior que : $h_f = (4 u^{\#2} / D g) L = 8 (L/D) u^{\#2} / 2g$

Reemplazando la ecuación en $u^{\#}$, tenemos que:

$$h_f = [8 / (2.5 \ln (u^{\#} R_o / \nu) + 1.75)^2] (L / D) U^2 / 2g$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Esta expresión, deducida a partir de la formula de **PRANDTL – VON KARMAN**, sin ninguna otra hipotesis adicional, constituye una demostracion mas de la valides de la formula de **DARCY – WEISBACH** :

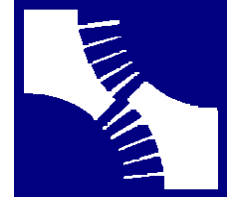
$$hf = f (L / D) U^2 / 2g$$

Para el caso de flujo turbulento en tuberías lisas, tenemos que **f** (factor de fricción) es:

$$f = 8 / (2.5 \ln (u^* R_o / \nu) + 1.75)^2$$

Para flujo laminar, encontramos integrando las **ENS** que:

$$f = 64 / Re$$



B) Coeficientes de fricción:

La teoría de **PRANDTL**, nos ha permitido encontrar una demostración de la formula descubierta **EMPIRICAMENTE** por **DARCY – WEIBACH** y al mismo tiempo ha proporcionado una expresion para el coeficiente de friccion para tuberias lisas. La expresion de f , debe ser mejorada para eliminar u^* . Si sacamos la raiz cuadrada de la expresion f e invertimos, tenemos que:

$$1 / \sqrt{f} = (2.5 \ln (u^* R_o / \nu) + 1.75) / \sqrt{8}$$

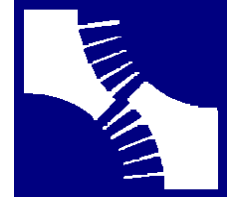
Comparando ahora : $hf = f (L / D) U^2 / 2g$ con $hf = (4 u^{*2} / D g) L$

Tenemos que: $f (L / D) U^2 / 2g = (4 u^{*2} / D g) L$

$$u^* = \sqrt{(\lambda_o / \rho)} = (\sqrt{f}) U / \sqrt{8}$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Por lo tanto tenemos que:

$$u^* R_o / \nu = \sqrt{f} (U / (2\sqrt{8})) D / \nu$$

Observando que : $U D / \nu = Re$; El flujo en la tubería se escribe como:

$$1 / \sqrt{f} = (1 / \sqrt{8}) (2.5 \ln (Re \sqrt{f} / (2\sqrt{8})) + 1.75)$$

$$1 / \sqrt{f} = 0.884 \ln Re \sqrt{f} - 0.95$$

Esta expresión corregida **LIGERAMENTE** mediante valores experimentales es la que se usara en cálculos relativos a flujo turbulento en tuberías lisas y se ha verificado en los ensayos.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



1.7.7.- Calculo de tuberías.

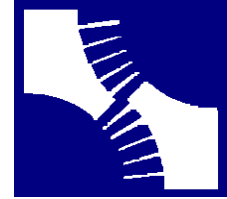
El calculo de una tubería significa la determinación de una cierta cantidad de parámetros de flujo partiendo de otros conocidos: diámetro (**D**) ; Caudal (**Q**), material, espesor (**t**), isometría (**longitud y accesorios**), golpe ariete, expansión térmica, aislamiento, economía. Para estos cálculos es necesario realizar **BALANCE DE MASA** (determinación del **Dn** (Diámetro nominal) en función de un rango de velocidades preestablecido) y un **BALANCE ENERGIA** (determinar las perdidas por fricción por longitud de tubería y perdidas localizadas en los accesorios).

Una vez realizado el balance de masa y energía del sistema de tuberías (**SISTEMA**), se pueden determinar y especificar los equipos rotativos que le suministraran la energía al fluido a ser transportado por la tubería con los parámetros de diseño preestablecidos.

Para determinar las perdidas de fricción se utiliza la ecuación de **BERNOULLI** generalizada y para evaluar las perdidas por fricción la ecuación de **DARCY – WEISBACH**:



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



$$hf = f (L / D) U^2 / 2g \quad (\text{Formula } \mathbf{DARCY - WEISBACH})$$

$$U_1^2/2g + p_1/\gamma + z_1 + Hb = U_2^2/2g + p_2/\gamma + z_2 + hf_{12} \quad (\text{Formula } \mathbf{BERNOULLI})$$

$$f = 64 / Re \quad (\text{Flujo } \mathbf{LAMINAR} \text{ con } Re < 2000)$$

$$1 / \sqrt{f} = 0.86 \ln Re \sqrt{f} - 0.80 \quad (\text{perdida de fricción turbulenta en } \mathbf{PARED LISA})$$

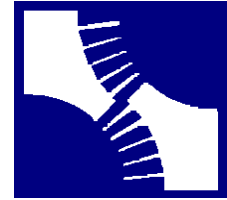
Si el flujo es **TURBULENTO** en **PARED RUGOSA**, se puede partir de la ecuación:

$$u_x / u^\# = 2.5 \ln (y / \epsilon) + 8.5$$

Analizaremos la forma **ESTRUCTURAL** del **DIAGRAMA DE MOODY** que agrupa en forma grafica **TODOS** los casos que se pueden presentar.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Para entender lo que ocurre en una tubería **RUGOSA**, hay que considerar el espesor δ_b de la sub. capa laminar y compararlo con el tamaño de la rugosidad absoluta de la tubería ϵ

- a) Si el tamaño ϵ de la rugosidad absoluta es mucho **MENOR** que el espesor δ_b de la sub. capa laminar, el flujo turbulento en la tubería está “**AISLADO**” de las rugosidades del tubo y la pared se comporta como si fuese **LISA**, y entonces el factor de fricción f se calcula por:

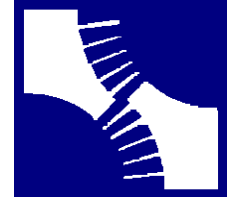
$$1 / \sqrt{f} = 0.86 \ln Re \sqrt{f} - 0.80 \quad (\text{si } \epsilon < 2/5 \delta_b)$$

- a) Si el tamaño ϵ de la rugosidad absoluta es mucho **MAYOR** que el espesor δ_b de la sub. capa laminar, el factor de fricción f que dependerá de las rugosidades de la tubería, se calcula por:

$$1 / \sqrt{f} = 1.14 - 0.86 \ln \epsilon/D \quad (\text{si } \epsilon > 6 \delta_b)$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



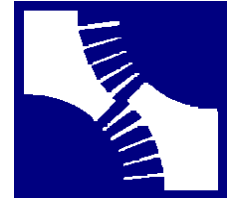
- c) Entre los valores dados por: $2/5 \delta_b < \epsilon < 6 \delta_b$; existe una zona intermedia y en esta zona las características del flujo turbulento dependen tanto de la rugosidad como del espesor de la sub. capa laminar (es decir, de **Re**). Para este caso **f** esta dado por la formula de **COLEBROOK**

$$1 / \sqrt{f} = - 0.86 \ln [(\epsilon / D) / 3.71 + 2.51 / (Re \sqrt{f})]$$

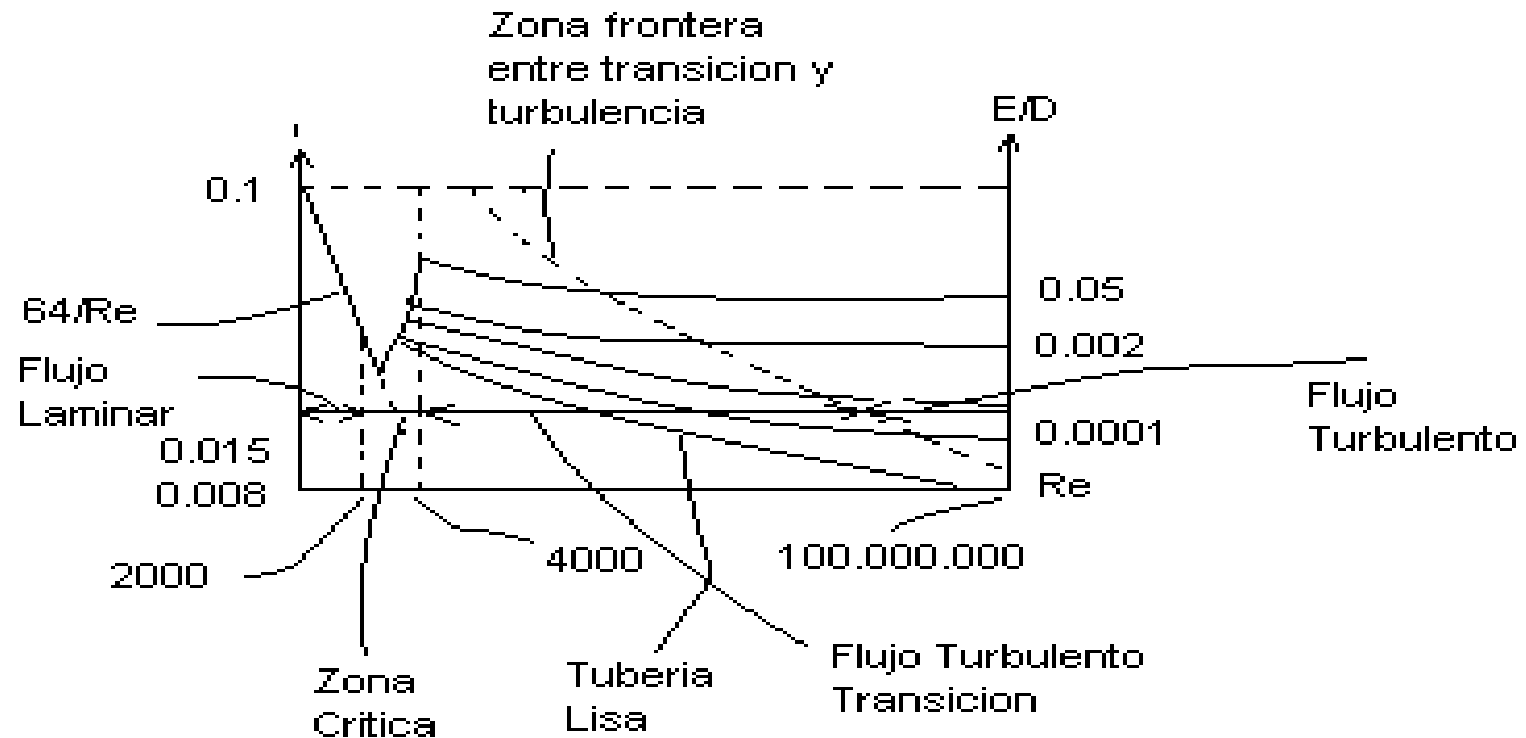
- d) Si el tamaño ϵ de la rugosidad absoluta es mucho **MAYOR** que el espesor δ_b de la sub. capa laminar, el factor de fricción **f** que dependerá de las rugosidades de la tubería, se calcula por:

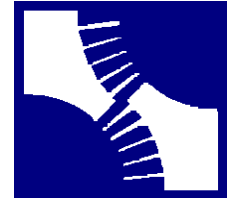
$$1 / \sqrt{f} = 1.14 - 0.86 \ln \epsilon/D \quad (\text{si } \epsilon > 6 \delta_b)$$

NOTA: Para utilizar **MOODY**, es necesario conocer la rugosidad absoluta de la tubería (para acero normal $\epsilon \approx 0.045$) y con este valor y el diámetro se calcula la rugosidad relativa ϵ / D , y así entrar en el diagrama de **MOODY**. La curva frontera entre los casos c y d esta dada por ; **$Re \sqrt{f} \epsilon / D = 200$** .



ESTRUCTURA DIAGRAMA MOODY



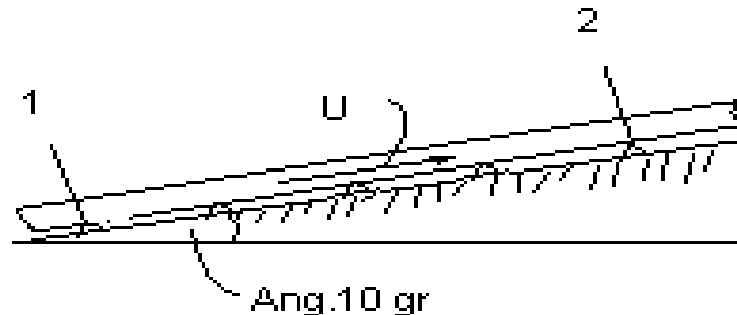


1.7.8 .- Problemas.

Una tubería de hierro fundido de 300 m de longitud y 200 mm de diámetro y por la cual circula un fluido de densidad relativa 0.86 a 30° C. Si el caudal es de 5000 l/min. y la tubería se encuentra en un plano inclinado a 10° con respecto al plano horizontal, se pide:

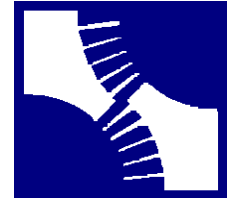
- 1) Cual es la pérdida de carga en la tubería.
- 2) Si la presión inicial en la sección 1 es de 10 bar, encuentre cual será la presión en la sección 2.
- 3) Dibuje los diagramas energéticos a lo largo de la tubería.

PROBLEMA 1





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



1) $h_f = f (L / D) U^2 / 2g$; $L = 300 \text{ m}$; $D = 200 \text{ mm}$

A) Conservación de la masa (Continuidad)

$$U = 4Q / (\pi D^2) \text{ (ecuación de continuidad)}$$

$$U = 4 * (5000 \text{ l/min.} / 60 \text{ seg./min.}) * ! / (\pi * 0.2^2 \text{ m}^2) = 2.65 \text{ m / seg.}$$

B) Diagrama MOODY (Coeficiente fricción $f = f(Re ; \epsilon / D)$

ϵ (Rugosidad absoluta) $\rightarrow 0.3$ (Tablas hierro fundido)

$$\epsilon / D = 0.3 / 200 = 0.0015$$

$$Re = U D / \nu = 2.65 * 0.2 / 7 * 10^{-6} = 7.6 \times 10^{-4} \text{ (Turbulento) } \rightarrow f = 0.024$$

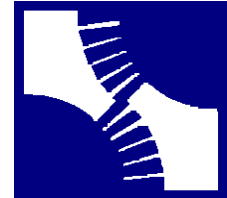
$$h_f = 0.024 \times 300 / 0.2 * 2.65^2 / (2 * 9.8) = 12.9 \text{ m}$$

2) Ecuación de BERNOLLI \rightarrow podemos determinar p_2

$$U_1^2/2g + p_1/\gamma + z_1 + H_b = U_2^2/2g + p_2/\gamma + z_2 + h_{f_{12}}$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



a) Condiciones del problema:

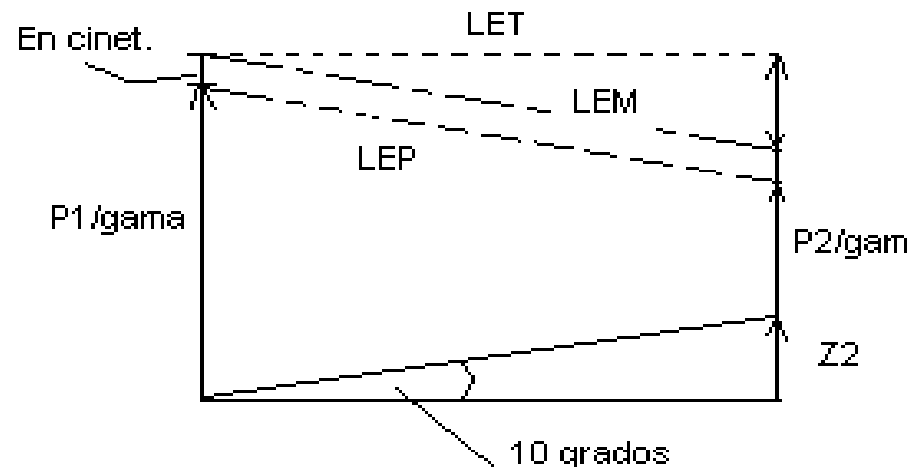
$U_1 = U_2$ (Continuidad) ; $Z_1 = 0$ (nivel cero energía potencial)

$H_b = 0$ (No existe equipo rotativo entregando energía al sistema)

$$p_2 / \gamma = p_1 / \gamma - Z_2 - hf_{12}$$

$$p_2 / \gamma = (10 \text{ bar} \times 10^5) / (9800 \times 0.86) - 52.09 - 12.4 \rightarrow p_2 = 4.52 \text{ bar}$$

3.- Diagrama de Energía



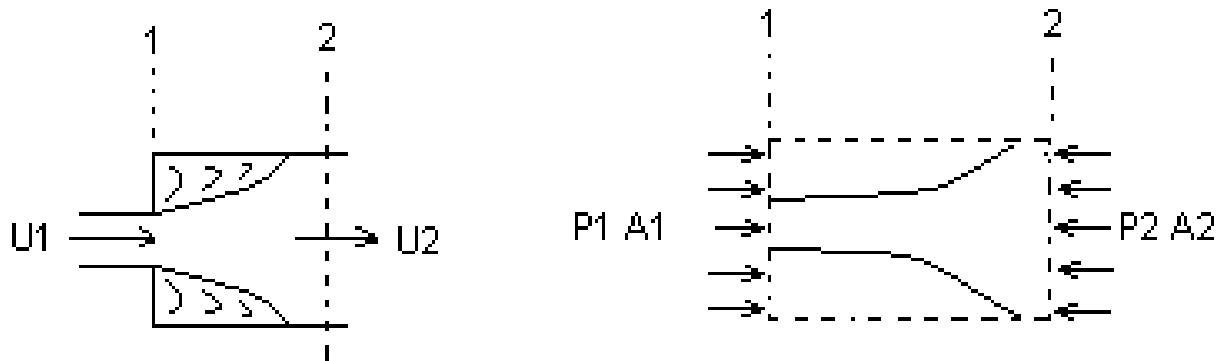


1.7.9 .- Perdidas localizadas

Se llama si a las perdidas de carga en los accesorios de las tuberías: valvulas, codos, expansiones, contracciones, bifurcaciones, etc. Se expresan en funcion de un coeficiente de perdidas (k) que se determina experimentalmente.

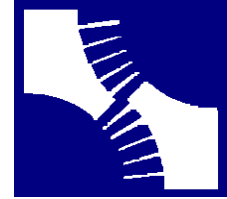
a) Expansión brusca: El dibujo indica esquemáticamente el tipo de flujo que se produce en la expansión brusca. Tomamos el volumen de control indicado y aplicamos la ecuación de cantidad de movimiento.

EXPANSION BRUSCA





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



$$p_1 A_1 - p_2 A_2 = \rho A_2 U_2 (U_2 - U_1) \text{ (cantidad lineal de movimiento)}$$

$$U_1^2/2g + p_1/\gamma = U_2^2/2g + p_2/\gamma + hf_{12} \text{ (Ecuación Bernoulli)}$$

$$hf_{12} = (p_1 - p_2) / \gamma - (U_2^2 - U_1^2) / 2g$$

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 \text{ (Ecuación continuidad)} \rightarrow U_2 = U_1 A_1 / A_2$$

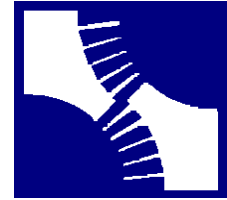
Trabajando con las expresiones anteriores, tenemos que.

$$hf_{12} = U_1^2/2g [1 - A_1 / A_2]^2 \rightarrow hf_{12} = K U_1^2/2g$$

$$K = [1 - A_1 / A_2]^2 \text{ (Formula de BORDA – CARNOT)}$$



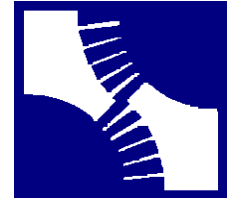
Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



En general para todo tipo de accesorios se cumple que

$$h_f = K \frac{U^2}{2g} \quad (K \text{ coeficiente que varia para cada accesorio})$$

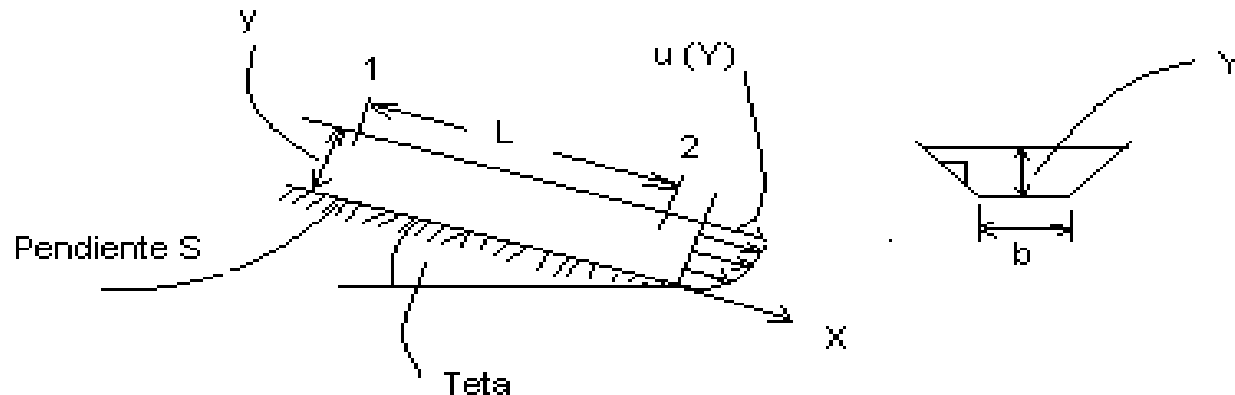
ACCESORIOS	k
CODO 180°	2.2
CODO 90° RADIO CORTO	0.75
CODO 90° RADIO LARGO	0.6
EMPALME T	1.8
VALVULA ESFERICA	10.0
VALVULA ANGULO	5.0
VALVULA RETENCION	2.5
VALVULA COMPUERTA	0.2



1.7.10 .- Flujo Uniforme turbulento en canales abiertos.

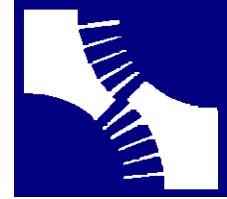
Analizaremos como ultimo tema el flujo uniforme continuo (profundidad constante) en un canal abierto (ver figura).

FLUJO EN CANALES ABIERTOS





Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Aplicando la ecuación de la energía entre las dos secciones del canal:

$$U_1^2/2g + p_1/\gamma + z_1 = U_2^2/2g + p_2/\gamma + z_2 + hf_L$$

Como $U_1 = U_2$ y $p_2 = p_1 = p_o \rightarrow$ La pérdida carga hidrostática es:

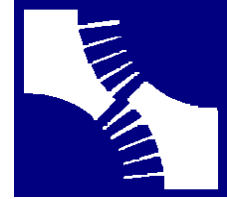
$$hf_L = z_1 - z_2 = L \sen \theta = L S$$

Donde **L** es la longitud del canal entre las dos secciones y **S** es la pendiente del canal, la que se supone pequeña, de modo que. $\theta \approx S$. La ecuación de **DARCY – WEISBACH**, toma la forma:

$$hf_L = LS = f (L / 4R) U^2 / 2g \rightarrow RS = (f / 8g) U^2$$



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Donde **R** es el **RADIO HIDRAULICO**. Como los canales abiertos son casi siempre bastante grandes y con **Re** altos el factor de fricción es invariablemente constante (flujo completamente turbulento). Por lo tanto la ecuación anterior se escribe como:

$$U = C \sqrt{(RS)}$$

Donde el **COEFICIENTE de CHEZY C** , es una constante dimensional y esta ecuación se conoce como **ECUACION DE CHEZY**. El coeficiente de **CHEZY** esta relacionado con la **RUGOSIDAD** del canal y el radio **HIDRAULICO**.

$$C = (c_1 / n) R^{1.6}$$

La constante dimensional **c₁** tiene un valor de 1 si se utilizan unidades SI y de 1.49 si se utilizan unidades inglesas. La constante sin dimensiones **n** esta directamente relacionada con la rugosidad de la pared y se conoce como **CONSTANTE DE MANNING**.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica

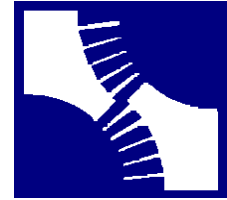


VALORES PROMEDIOS DE LA CONSTANTE DE MANNING

Material pared	n
Madera bruta	0.013
Concreto bruto	0.014
Tierra comun	0.022
Tierra con piedras	0.035



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



El caudal de fluido por el canal abierto se define por la ecuación de **CHEZY – MANNING** como:

$$Q = (c_1 / n) A R^{2/3} S^{1/2}$$

$c_1 = 1.0$ para unidades en SI

$c_1 = 1.49$ para unidades inglesas

Para canales de superficies lisas no se aconseja el uso de la ecuación de **CHEZY – MANNING**, pues implícitamente asume paredes rugosas. Los cálculos para canales de superficies lisas tales como vidrio o plástico deberán basarse en la relación de **DARCY – WEISBACH**.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Resumen.

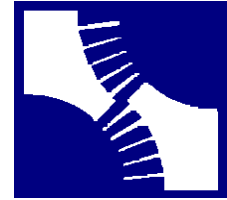
En este capítulo planteamos y definimos los conceptos de flujo desarrollado tanto en régimen laminar como turbulento.

Se integraron las ecuaciones de **NAVIER-STOKES** en varias aplicaciones de flujo laminar a objeto de encontrar el campo de velocidades, el campo de presiones y así conseguir la distribución de estos parámetros. Se analizaron los casos de flujo laminar entre placas paralelas, cilindros rotatorios (fundamental en Tibología) y cilindro circular. En este último caso se encontró la importante expresión de **DARCY – WEISBACH** para el cálculo de pérdida de carga en régimen laminar por tuberías.

Se analizó el flujo turbulento en tuberías, definiendo los esfuerzos cortantes de **REYNOLDS** y se aplicó a estos la **TEORIA TURBULENTO de PRANDTL – VON KARMAN**, desarrollando las 4 hipótesis de **PRANDTL** a objeto de dilucidar las incógnitas de la expresión de los esfuerzos cortantes de **REYNOLDS**. Se definió el concepto de **SUB CAPA LAMINAR, VELOCIDAD DE CORTE y LONGITUD DE MEZCLA**. Se plantearon los trabajos experimentales de **NIKURADSE** y se encontró la distribución de velocidades turbulentas en paredes lisas y rugosas.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



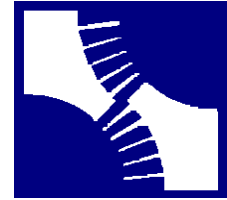
Se analizo el importante concepto de perdida de carga en flujo turbulento y se comprobó la expresión de **DARCY –WEISBACH** para este tipo de flujo y se encontro el factor de friccion en flujo turbulento por tuberias con paredes lisas y rugosas. Se analizo la estructura del importante diagrama de **MOODY** en el cual se reflejan **TODAS** las situaciones de flujo para difrentes **REYNOLDS** y se puede encontrar el valor del factor de friccion para regimen laminar, transicion y turbulento tanto en paredes lisas y rugosas en funcion de **REYNOLDS** y la **RUGOSIDAD RELATIVA**. Se analizo tambien las perdidas de carga en los accesorios de tuberias.

Se realizaron ejemplos de cálculos básicos de tuberías aplicando los conceptos fundamentales de **BALANCE DE MASA** (continuidad) y **BALANCE DE ENERGIA** (Ecuación de **BERNOULLI**) incluyendo la introducción de maquinas rotativas energéticas en la tubería (Bombas, Compresores).

Finalmente se estudio el concepto de Flujo turbulento uniforme en **CANALES ABIERTOS**, encontrándose los factores de **CHEZY** y la ecuación de **CHEZY – MANNING** para encontrar el caudal de fluido por estos canales.



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Conceptos básicos.

Flujo Desarrollado

Flujo desarrollado laminar y turbulento

Flujo Laminar Desarrollado

Flujo Turbulento Desarrollado

Ecuaciones **NAVIER-STOKES**

Distribución de Velocidades

Esfuerzos cortantes de **REYNOLDS** Hipótesis **PRANDTL**

Velocidad de Corte

Longitud de Mezcla

Factor de fricción

Perdida de Carga

Factor de Fricción

Diagrama de **MOODY**

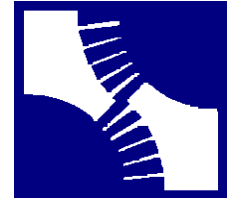
Perdidas Localizadas

Flujo Uniforme en Canales Abiertos

CALCULO DE TUBERIAS Y APLICACIÓN BALANCE DE MASA Y ENERGIA



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica



Problemas.

Estudiar y analizar en **profundidad** los siguientes problemas desarrollados en el **POTTER & WIGGERT** (3era edición); **7.1 – 7.2 - 7.3 – 7.4 -7.5 – 7.6 – 7.7 – 7.8 - 7.9 – 7.10 – 7.11 – 7.12 – 7.13 – 7.14 – 7.15 – 7.16 – 7.17 -7.18 – 7.19 – 7.20**

Estudiar y analizar en **profundidad** los siguientes problemas desarrollados en el **ROCA VILA** (1era edición); **8.5 a – 8.5 b - Ejemplo 1 (pag 368) - Ejemplo 2 (pag 370) – Ejemplo 3 (pag 372) - Ejemplo 4 (pag 379).**

Desarrollar completamente y analizar los siguientes problemas (Pág.. 293 a 304) en el **POTTER & WIGGERT** (3era edición); **7.1 – 7.4 - 7.7 – 7.11 -7.15 – 7.23 – 7.33 – 7.40 -7.44 – 7.50 – 7.52 – 7.55 – 7.61 – 7.71 – 7.81 – 7.87 – 7.95 -7.99 – 7.105 – 7.109 - 7.112 - 7.116 – 7.120 – 7.130 – 7.134 – 7.145**