

DISTRIBUCIONES DISCRETAS CON EXCEL Y WINSTATS

A) INTRODUCCIÓN

Una distribución de probabilidad es una representación de todos los resultados posibles de algún experimento y de la probabilidad relacionada con cada uno.

Una distribución de probabilidad es discreta cuando los resultados posibles del experimento son obtenidos de variables aleatorias discretas, es decir, de variables que sólo puede tomar ciertos valores, con frecuencia números enteros, y que resultan principalmente del proceso de conteo.

Ejemplos de variables aleatorias discretas son:

Número de caras al lanzar una moneda

El resultado del lanzamiento de un dado

Número de hijos de una familia

Número de estudiantes de una universidad

Ejemplo ilustrativo

Sea el experimento aleatorio de lanzar 2 monedas al aire. Determinar la distribución de probabilidades del número de caras.

Solución:

El espacio muestral es $S = \{CC, CS, SC, SS\}$

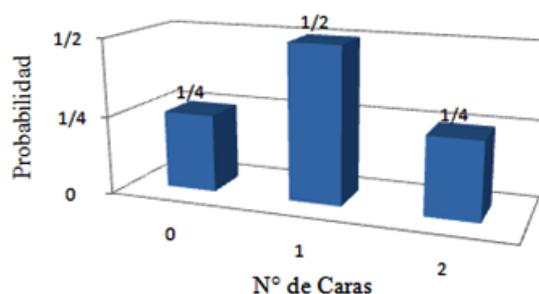
La probabilidad de cada punto muestral es de $1/4$, es decir, $P(CC) = P(CS) = P(SC) = P(SS) = 1/4$

La distribución de probabilidades del número de caras se presenta en la siguiente tabla:

Resultados (N° de Caras)	Probabilidad
0	$1/4 = 0,25 = 25\%$
1	$2/4 = 0,50 = 50\%$
2	$1/4 = 0,25 = 25\%$

El gráfico de distribuciones de probabilidad en 3D elaborado en Excel se muestra en la siguiente figura:

GRÁFICO DE DISTRIBUCIONES DE
PROBABILIDAD DE LANZAR 2 MONEDAS AL AIRE



Interpretación:

La probabilidad de obtener 0 caras al lanzar 2 monedas al aire es de $1/4 = 0,25 = 25\%$

La probabilidad de obtener una cara al lanzar 2 monedas al aire es de $2/4 = 0,5 = 50\%$

La probabilidad de obtener 2 caras al lanzar 2 monedas al aire es de $1/4 = 0,25 = 25\%$

B) LA MEDIA Y LA VARIANZA DE LAS DISTRIBUCIONES DISCRETAS

i) Media

La media llamada también valor esperado, esperanza matemática o simplemente esperanza de una distribución de probabilidad discreta es la media aritmética ponderada de todos los resultados posibles en los cuales los pesos son las probabilidades respectivas de tales resultados. Se halla multiplicando

cada resultado posible por su probabilidad y sumando los resultados. Se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$\mu = E(X) = \Sigma(x_i \cdot P(x_i))$$

Donde:

$\mu = E(X)$ = Media, Valor Esperado, Esperanza Matemática o simplemente Esperanza

x_i = Posible resultado

$P(x_i)$ = Probabilidad del posible resultado

ii) Varianza

La varianza es el promedio de las desviaciones al cuadrado con respecto a la media. La varianza mide la dispersión de los resultados alrededor de la media y se halla calculando las diferencias entre cada uno de los resultados y su media, luego tales diferencias se elevan al cuadrado y se multiplican por sus respectivas probabilidades, y finalmente se suman los resultados. Se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = \Sigma[(x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)]$$

Nota: La varianza se expresa en unidades al cuadrado, por lo que es necesario calcular la desviación estándar que se expresa en las mismas unidades que la variable aleatoria y que por lo tanto tiene una interpretación más lógica de la dispersión de los resultados alrededor de la media. La desviación estándar se calcula así: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Ejemplo ilustrativo:

Hallar la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar del número de caras al lanzar tres monedas al aire.

Solución:

El espacio muestral es $S = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$

La probabilidad de cada punto muestral es de $1/8$

Se elabora las distribuciones de probabilidad y se realiza los cálculos respectivos. Estos resultados se presentan en la siguiente tabla:

x_i	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$	$(x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$
0	1/8	$0 \cdot 1/8 = 0$	$(0-1,5)^2 \cdot 1/8 = 0,281$
1	3/8	$1 \cdot 3/8 = 3/8$	$(1-1,5)^2 \cdot 3/8 = 0,094$
2	3/8	$2 \cdot 3/8 = 3/4$	$(2-1,5)^2 \cdot 3/8 = 0,094$
3	1/8	$3 \cdot 1/8 = 3/8$	$(3-1,5)^2 \cdot 1/8 = 0,281$
Total	1	1,5	0,750

Observando la tabla se tiene:

$$\mu = E(X) = 1,5 ; \sigma^2 = 0,75$$

Y calculando la desviación estándar se obtiene:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,75} = 0,866$$

Los cálculos en Excel de la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	x_i	$P(x_i)$	$(x_i - \mu)^2$		
2	0	1/8	2,25	$=(A2-\$B\$7)^2$	
3	1	3/8	0,25	$=(A3-\$B\$7)^2$	
4	2	3/8	0,25	$=(A4-\$B\$7)^2$	
5	3	1/8	2,25	$=(A5-\$B\$7)^2$	
6					
7	E(X)	1,5		$=SUMAPRODUCTO(A2:A5;B2:B5)$	
8	σ^2	0,75		$=SUMAPRODUCTO(C2:C5;B2:B5)$	
9	σ	0,866		$=RAIZ(B8)$	

Interpretación:

El valor de $\mu = E(X) = 1,5$ significa que si se promedian los resultados del lanzamiento de las tres monedas (teóricamente, un número infinito de lanzamientos), se obtendrá 1,5.

Los valores de $\sigma^2 = 0,75$ y $\sigma = 0,866$ miden la dispersión de los resultados de lanzar las tres monedas alrededor de su media.

TAREA DE INTERAPRENDIZAJE

- 1) Elabore un organizador gráfico sobre las distribuciones discretas
- 2) Al ser la esperanza matemática una media aritmética ponderada, explique el por qué en su fórmula no aparece la división por la suma de los pesos como en cualquier fórmula de la media aritmética ponderada.

3) Sea el experimento aleatorio de lanzar un dado al aire.

3.1) Elabore un gráfico de distribuciones de probabilidad en 2D de manera manual y empleando Excel



3.2) Elabore un gráfico de distribuciones de probabilidad en 3D empleando Excel



3.3) Calcule la esperanza matemática, la varianza y desviación estándar de manera manual y empleando Excel.

$$E(X) = 3,5 ; \sigma^2 = 2,917 ; \sigma = 1,71$$

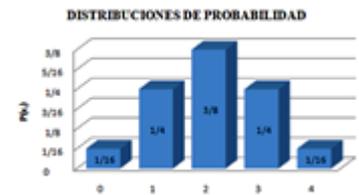
4) Dada las distribuciones de probabilidad

x_i	$P(x_i)$
0	x
1	$\frac{1}{4}$
2	6x
3	4x
4	$\frac{1}{16}$

4.1) Calcular el valor de x

1/16

4.2) Elabore un gráfico de distribuciones de probabilidad en 3D empleando Excel



4.3) Calcule la esperanza matemática, la varianza y desviación estándar de manera manual y empleando Excel.

$$E(X) = 2 ; \sigma^2 = 1; \sigma = 1$$

5) El número de automóviles que la empresa D & M vendió mensualmente varió de 4 a 12 junto con la frecuencia de ventas que se muestra en la siguiente tabla:

N° meses	Automóviles (x_i)
6	4
8	8
12	10
10	12
8	14
4	12

En meses anteriores el número promedio de ventas mensuales fue de 8 con una variabilidad de 4,2. Empleando las cifras presentadas, determine que ha pasado el promedio mensual de ventas y su variabilidad de la empresa D & M en comparación con los meses anteriores. Realice los cálculos empleando Excel.

Como $E(X) = 10,167$ y $\sigma = 2,995$ se evidencia que la empresa ha incrementado su promedio mensual de ventas y ha reducido su variabilidad en comparación con los meses anteriores.

C) DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

i) Definición:

Cuando se dispone de una expresión matemática, es factible calcular la probabilidad de ocurrencia exacta correspondiente a cualquier resultado específico para la variable aleatoria.

La *distribución de probabilidad binomial* es uno de los modelos matemáticos (expresión matemática para representar una variable) que se utiliza cuando la variable aleatoria discreta es el número de éxitos en una muestra compuesta por n observaciones.

ii) Propiedades:

- La muestra se compone de un número fijo de observaciones n

- Cada observación se clasifica en una de dos categorías, *mutuamente excluyentes* (los eventos no pueden ocurrir de manera simultánea. Ejemplo: Una persona no puede ser de ambos sexos) y *colectivamente exhaustivos* (uno de los eventos debe ocurrir. Ejemplo: Al lanzar una moneda, si no ocurre cruz, entonces ocurre cara). A estas categorías se las denomina éxito y fracaso.

- La probabilidad de que una observación se clasifique como *éxito*, p , es constante de una observación a otra. De la misma forma, la probabilidad de que una observación se clasifique como *fracaso*, $1-p$, es constante en todas las observaciones.

- La variable aleatoria binomial tiene un rango de 0 a n

iii) Ecuación:

$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

Donde:

$P(X)$ = Probabilidad de X éxitos, dadas n y p

n = Número de observaciones

p = Probabilidad de éxitos

$1 - p$ = Probabilidad de fracasos

X = Número de éxitos en la muestra ($X = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n$)

iv) Media de la distribución binomial

La media μ de la distribución binomial es igual a la multiplicación del tamaño n de la muestra por la probabilidad de éxito p

$$\mu = np$$

v) Desviación estándar de la distribución binomial

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{np(1-p)}$$

Ejemplos ilustrativos

1) Determine $P(X = 8)$ para $n = 10$ y $p = 0,5$

Solución:

Aplicando la ecuación se obtiene:

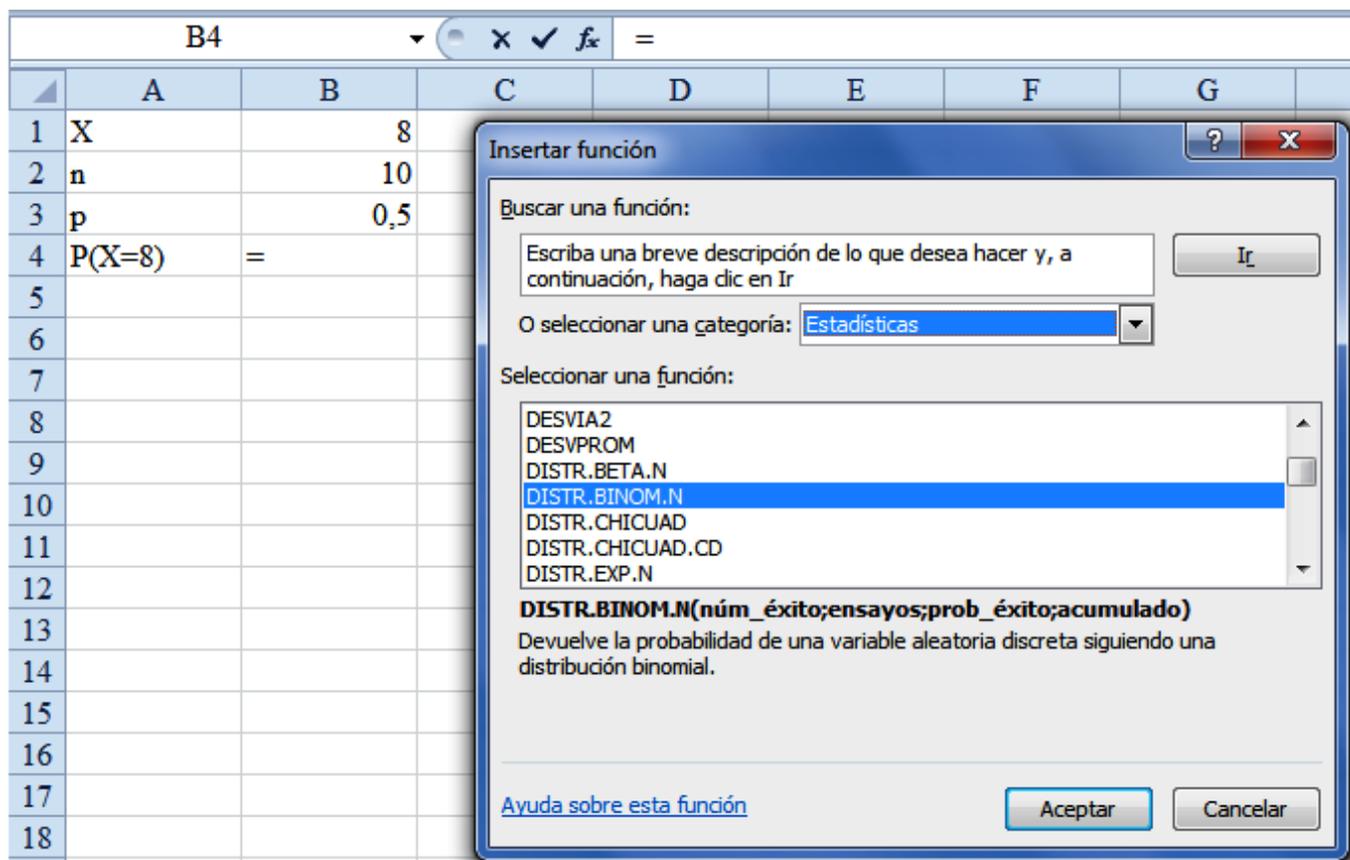
$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(X = 8) = \frac{10!}{8!(10-8)!} \cdot 0,5^8 \cdot (1-0,5)^{10-8}$$

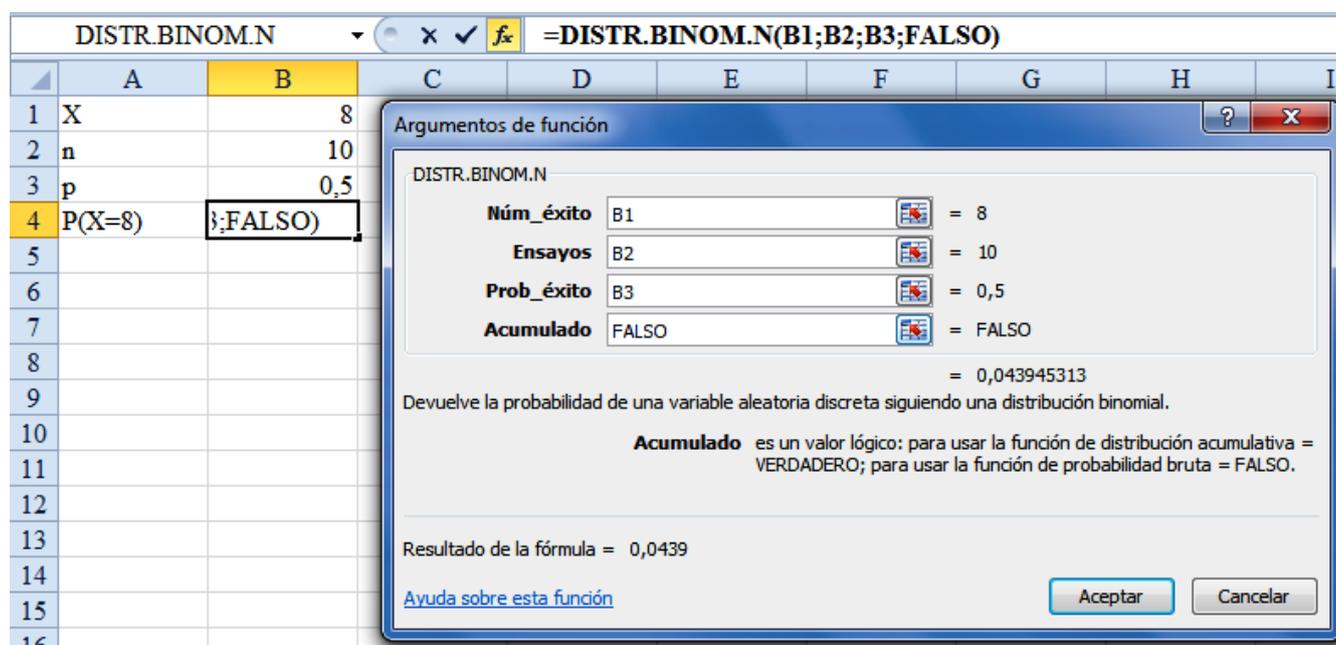
$$P(X = 8) = 45 \cdot 0,003906 \cdot 0,25 = 0,0439$$

En Excel se calcula de la siguiente manera:

a) Se escribe los datos y se inserta la función DISTR.BINOM.N como se muestra en la siguiente figura:



b) Clic en Aceptar. Los argumentos de la función escribir como se muestra en la figura:

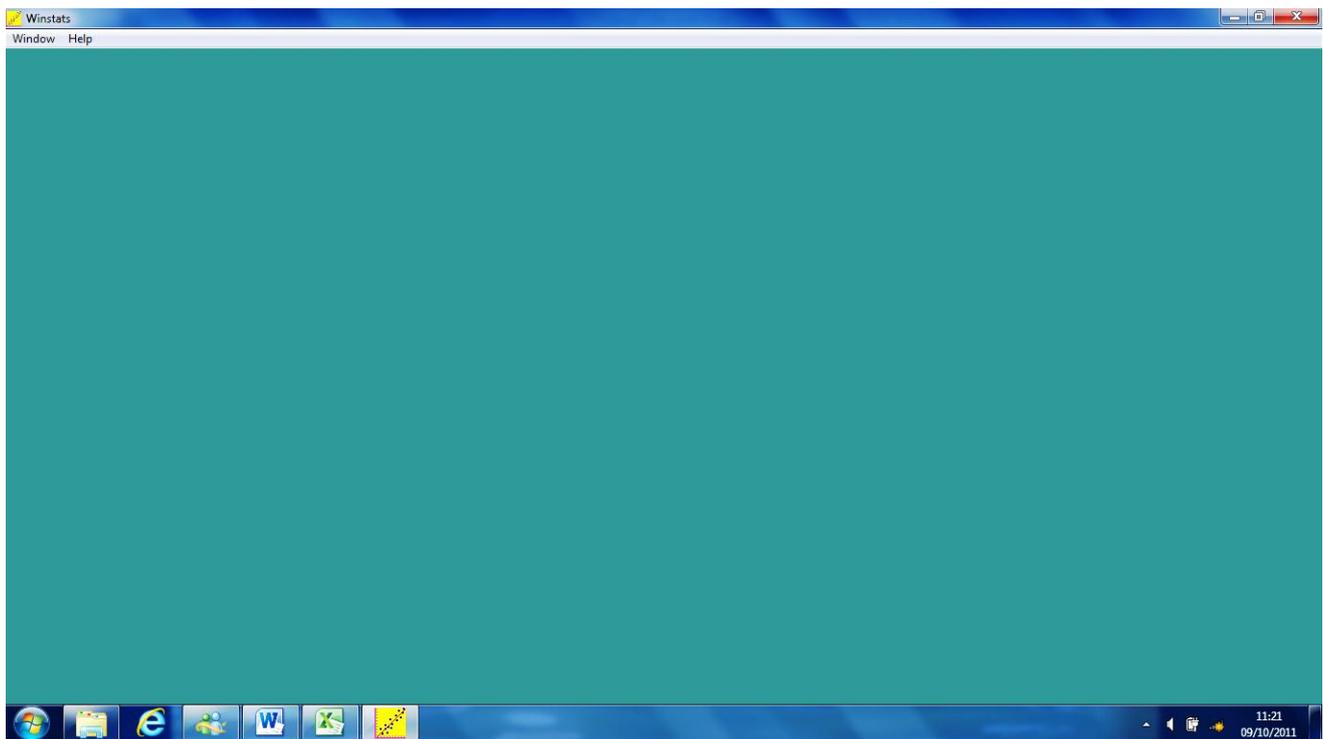


c) Clic en Aceptar

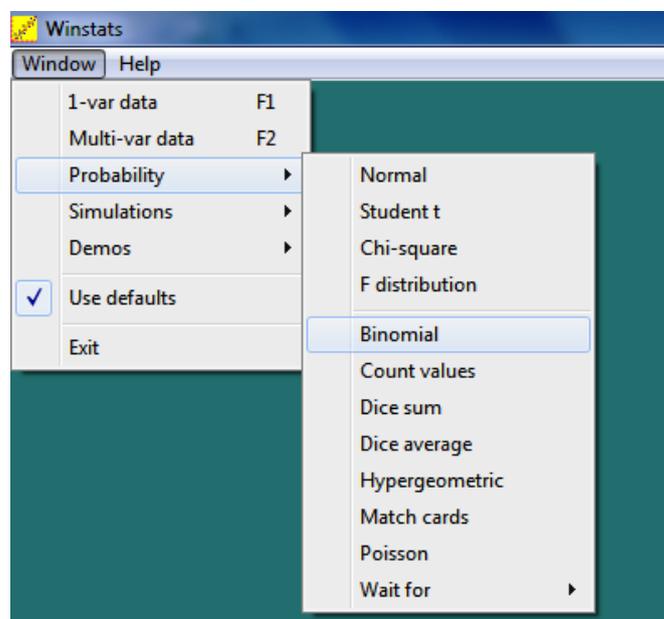
	A	B	C	D	E
1	X		8		
2	n		10		
3	p		0,5		
4	P(X=8)		0,0439	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)	

En Winstats se procede de la siguiente manera

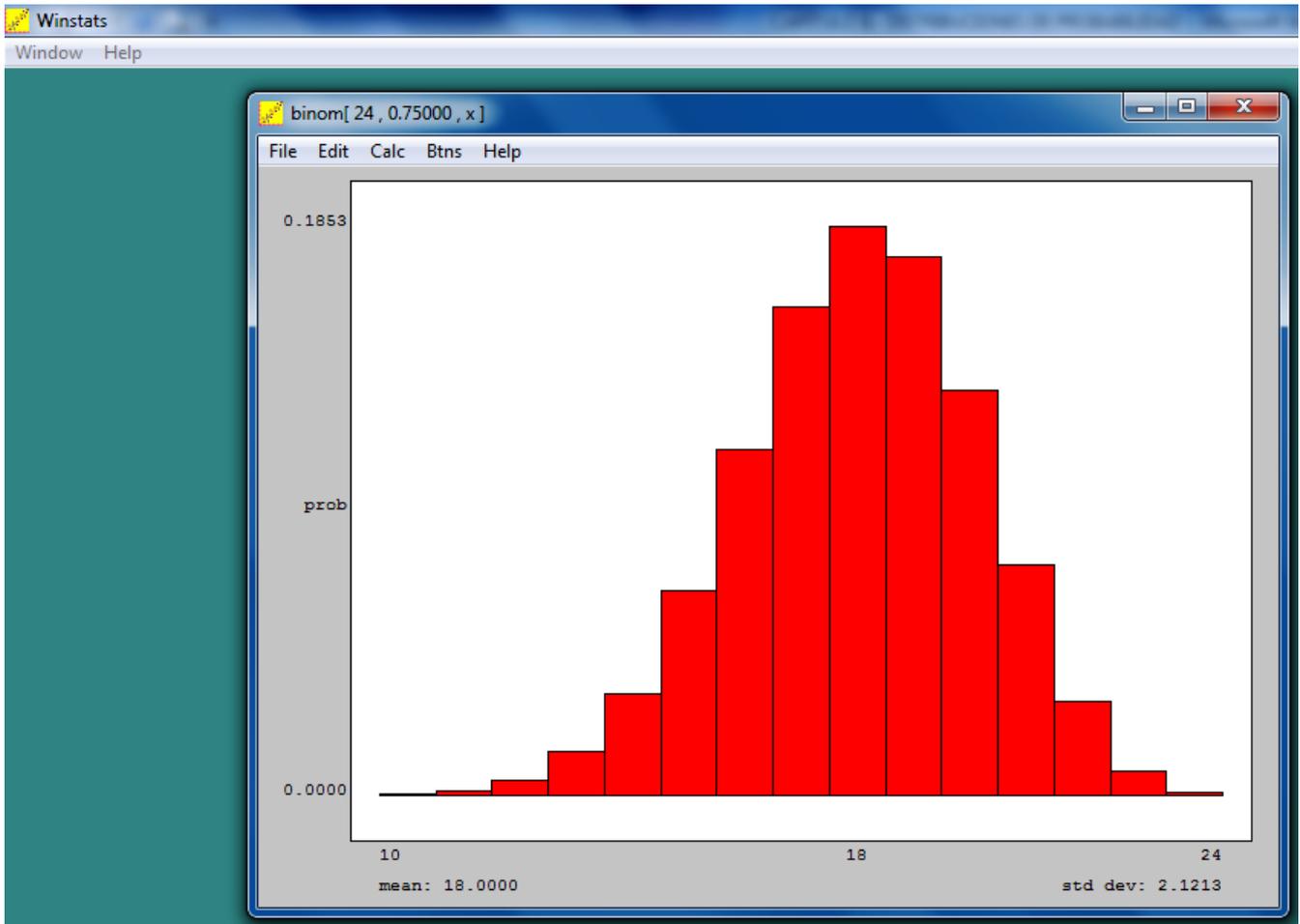
a) Se ingresa al programa Winstats



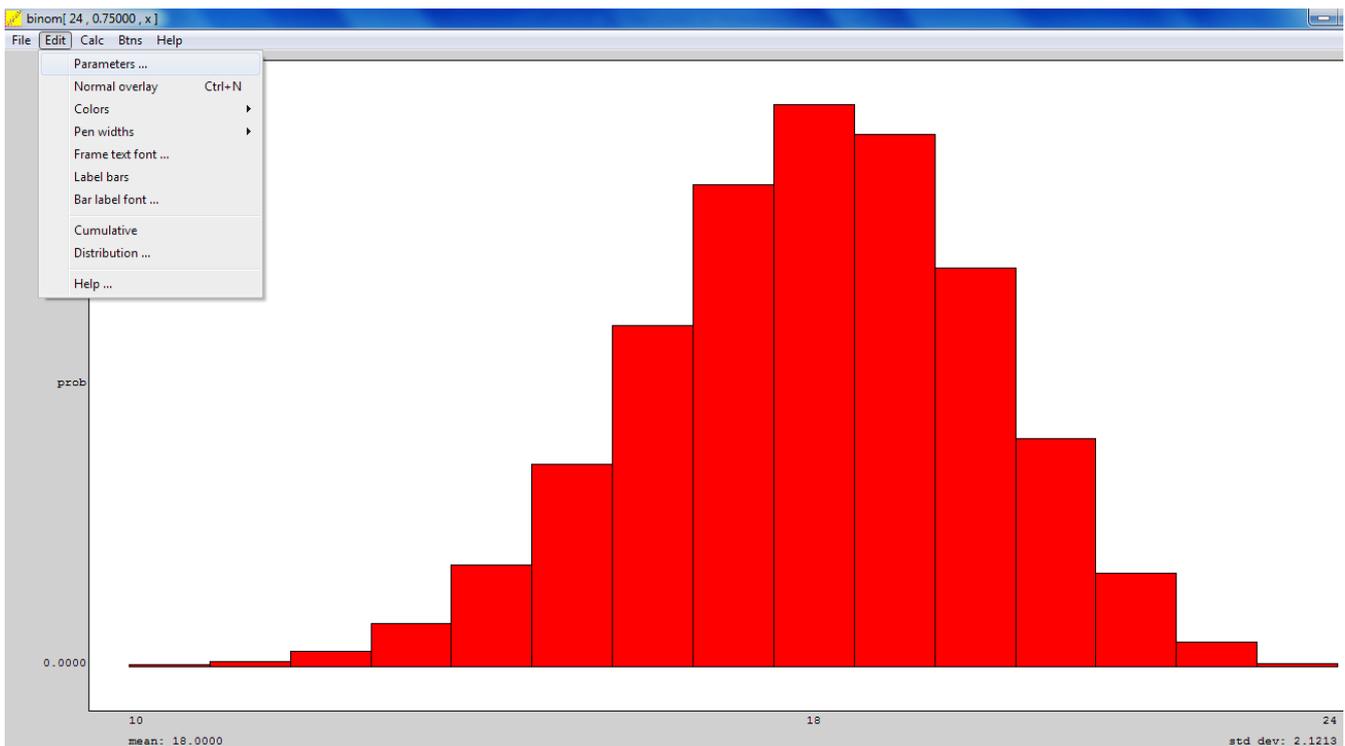
b) Clic en Window y luego en Probability



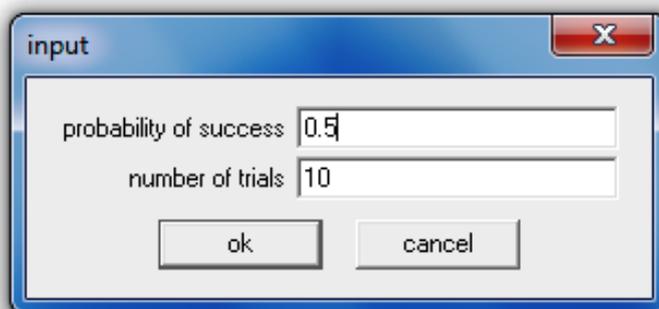
c) En Probability escoger Binomial



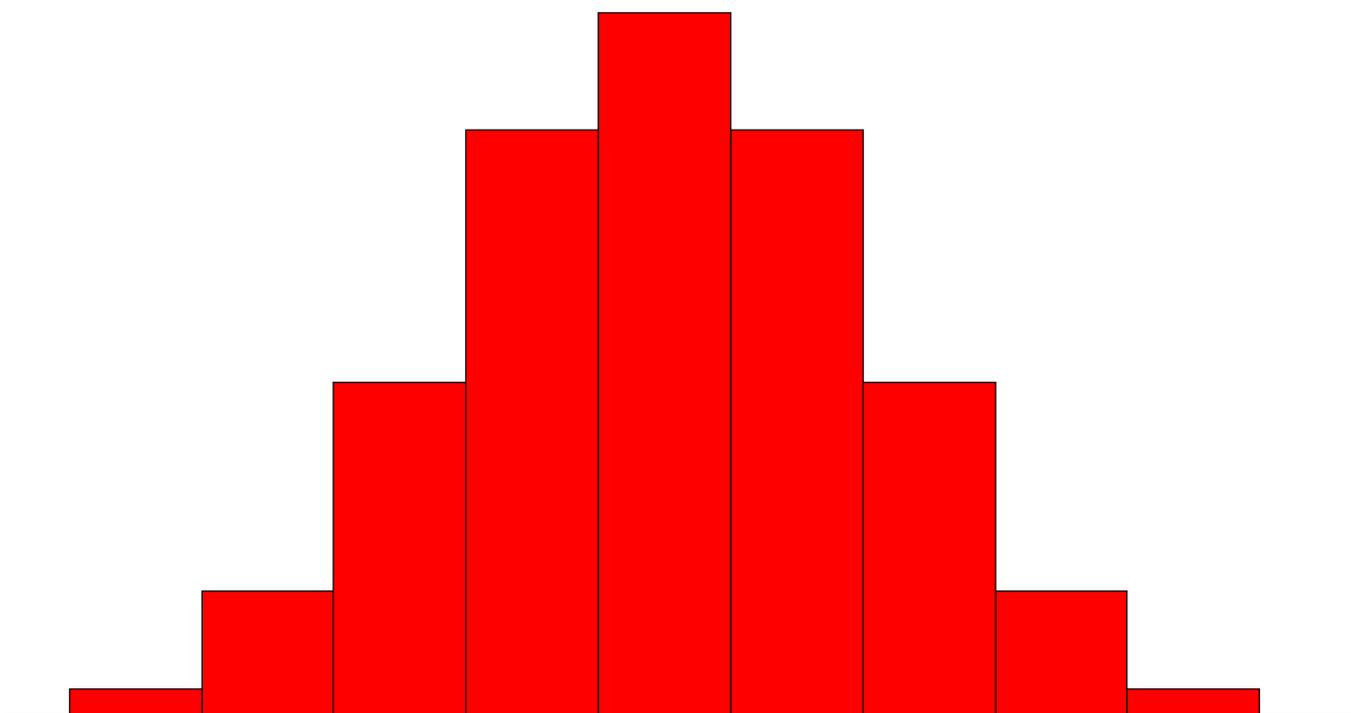
d) Clic en Edit.



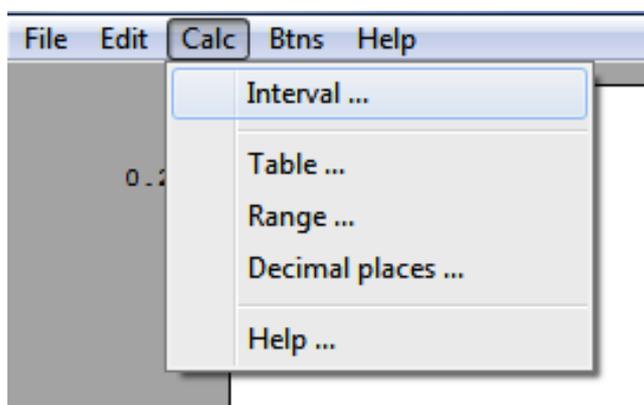
e) Clic en Parameters. En la casilla en probability of success escribir 0,5 y en number of trials escribir 10



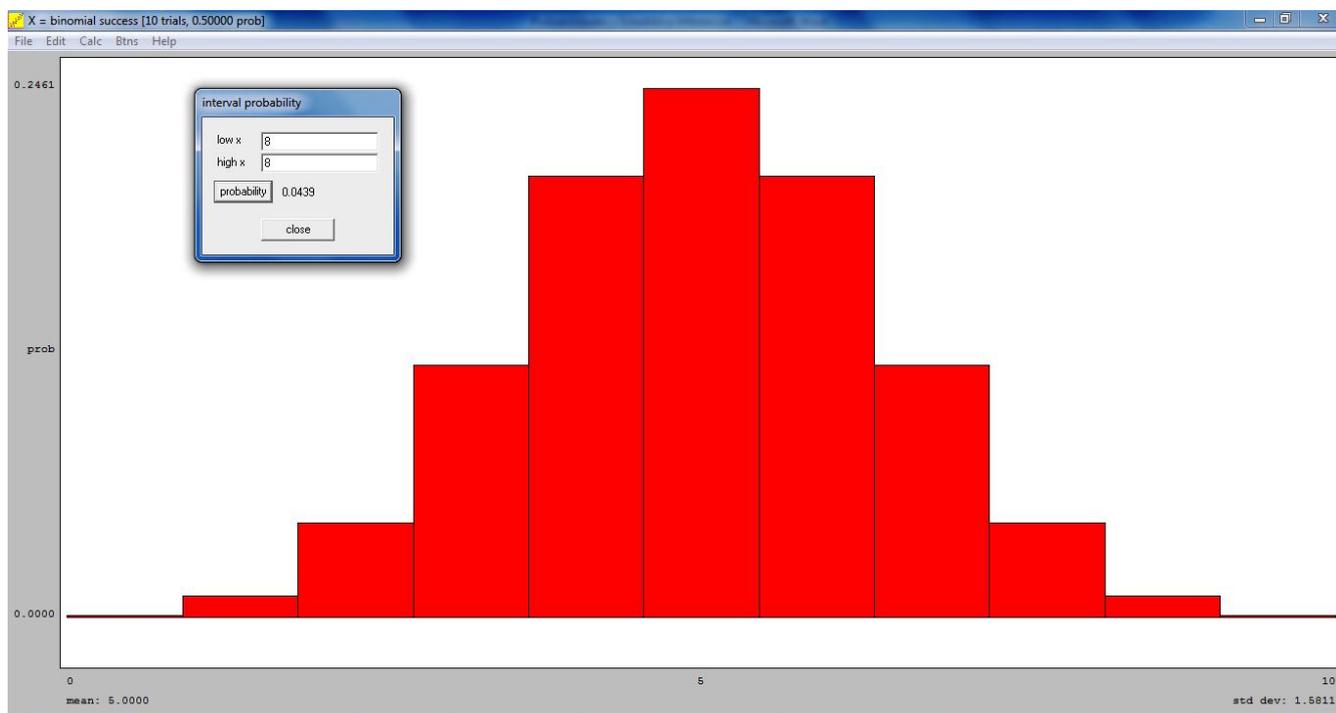
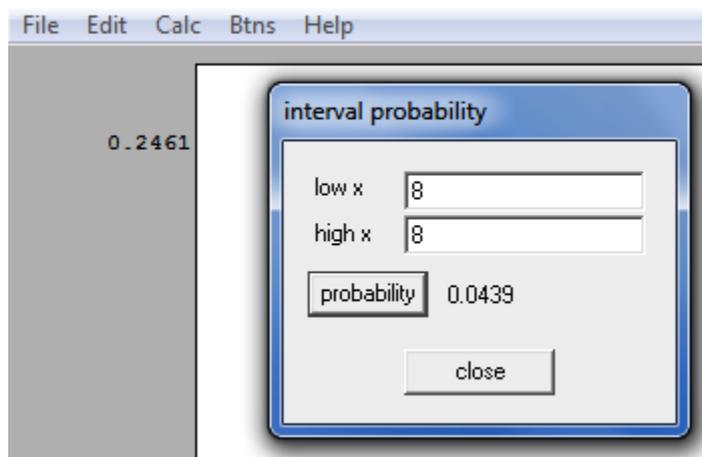
f) Clic en ok



g) Clic en Calc



h) Clic en Intervalo. En la casilla low x escribir 8 y en la casilla high x escribir 8. Clic en probability



2) Determinar $P(X \leq 3)$ para $n=4$ y $p=0,45$

Solución:

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

Se puede aplicar la ecuación para cada probabilidad, pero para ahorrar tiempo se recomienda encontrar las probabilidades con lectura en la tabla de probabilidades binomiales.

TABLA Nº 1
PROBABILIDADES BINOMIALES

Para $n = 4$ y $p = 0,45 \Rightarrow P(X = 2) = 0,3675$

n	X	P									
		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
1	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
2	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
2	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
3	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
3	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
3	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
4	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500

Realizando la lectura en la tabla de $P(X=0)$ con $n=4$ y $p = 0,45$ se obtiene 0,0915. Continuando con la respectivas lecturas en la tabla se obtiene: 0,2995 para $P(X=1)$, 0,3675 para $P(X=2)$ y 0,2005 para $P(X=3)$.

Por lo tanto $P(X \leq 3) = 0,0915 + 0,2995 + 0,3675 + 0,2005 = 0,9590$

Para que aparezca la tabla en Winstats se hace clic en Edit y luego en parámetros. En la ventana de parámetros, en la casilla trials, escribir 4 y en success prob escribir 0,45. Finalmente clic Calc y luego en table

X = binomial success [4 trials, 0.4500 prob]

File Edit Calc Btms Help

0.3675

input

probability of success: 0.4500

number of trials: 4

ok cancel

X = binomial success [4 trials, 0.4500 prob]

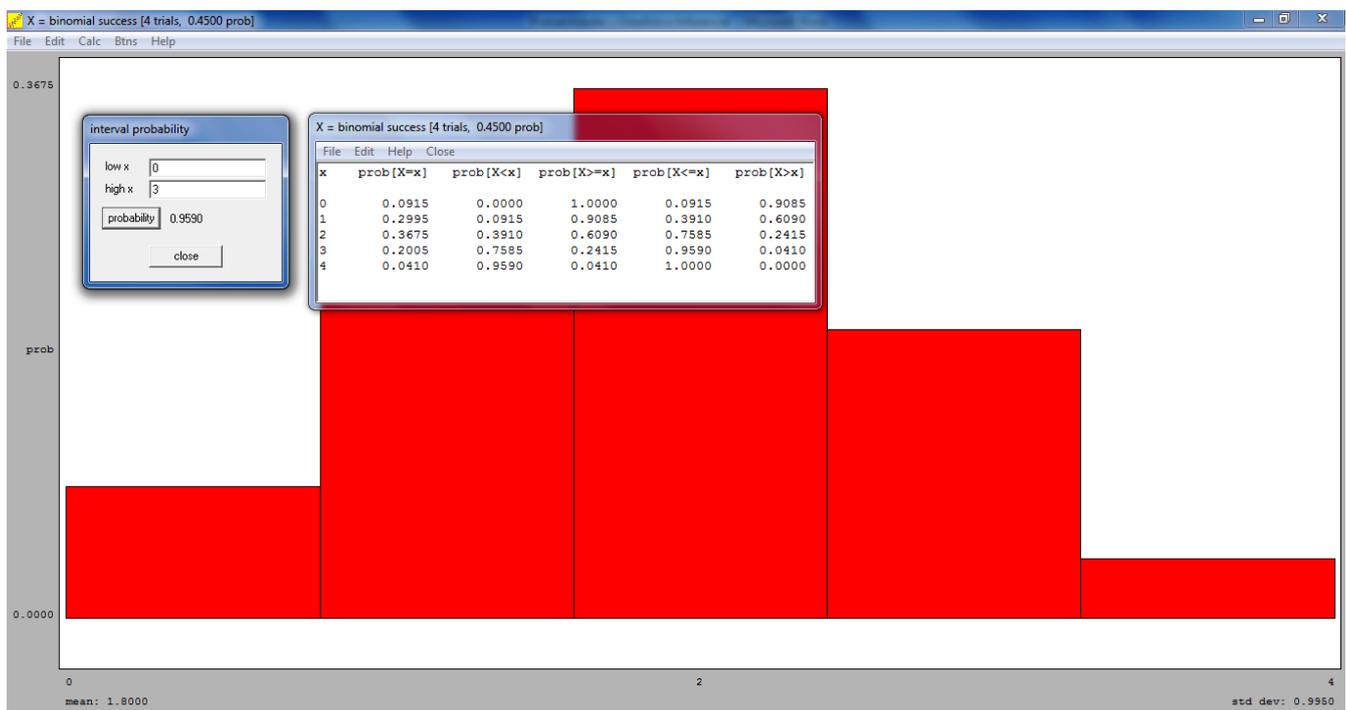
File Edit Help Close

x	prob [X=x]	prob [X<x]	prob [X>=x]	prob [X<=x]	prob [X>x]
0	0.0915	0.0000	1.0000	0.0915	0.9085
1	0.2995	0.0915	0.9085	0.3910	0.6090
2	0.3675	0.3910	0.6090	0.7585	0.2415
3	0.2005	0.7585	0.2415	0.9590	0.0410
4	0.0410	0.9590	0.0410	1.0000	0.0000

Los cálculos realizados en Excel se muestran en la siguiente figura:

Portapapeles		Fuente		Alineación			
DISTR.BINOM.N		=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;VERDADERO)					
	A	B	C	D	E	F	G
1	X	3					
2	n	4					
3	p	0,45					
4	$P(X \leq 3)$	0,9590	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;VERDADERO)				

Los cálculos realizados Winstats se muestran en la siguiente figura:



3) Se lanza ocho dados.

3.1) Calcular la probabilidad de obtener 2 seis

3.2) Calcular la probabilidad de obtener máximo 2 seis

3.3) Calcular la probabilidad de obtener al menos 2 seis

Solución:

3.1)

$$P(X = 2) = ? ; n = 8; p = \frac{1}{6}$$

Aplicando la fórmula se obtiene:

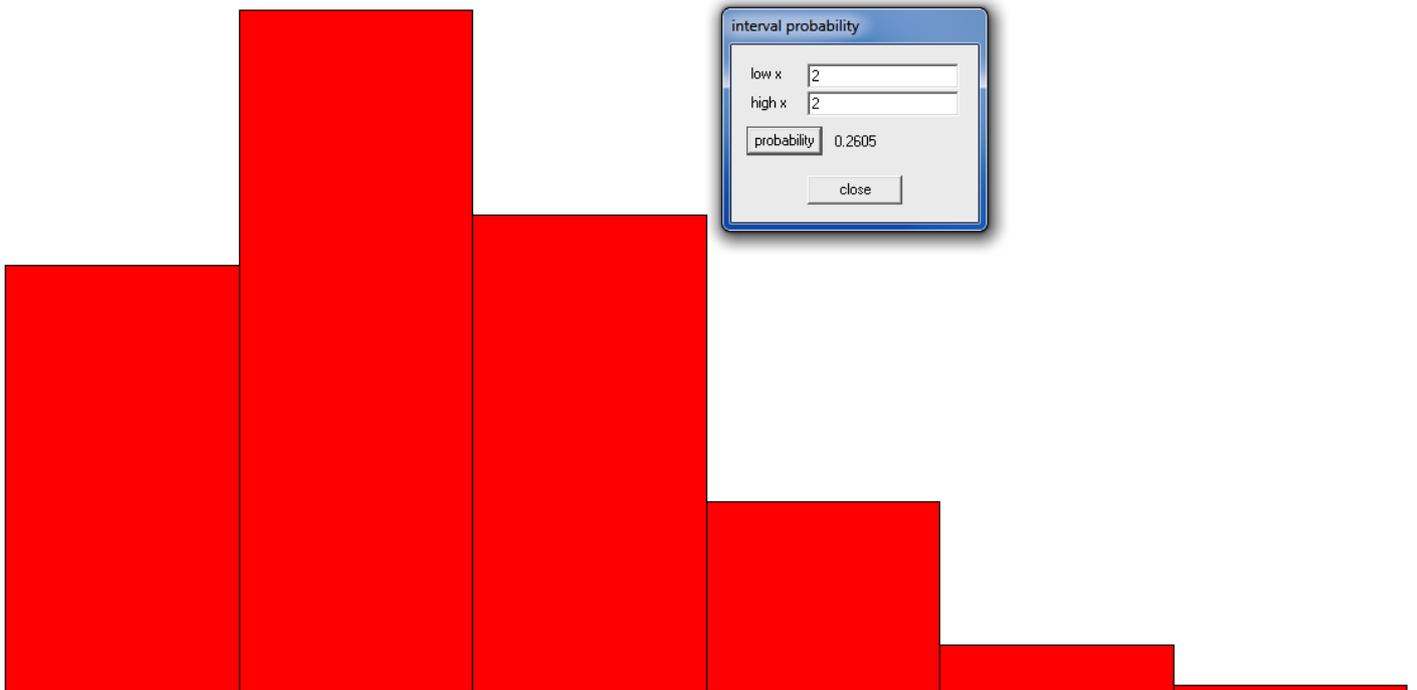
$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(X = 2) = \frac{8!}{2!(8-2)!} \cdot \frac{1^2}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{8-2} = 0,2605$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	2			
2	n	8			
3	p	1/6			
4	P(X=2)	0,2605	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

Los cálculos en Winstats se muestran en la siguiente figura:



3.2)

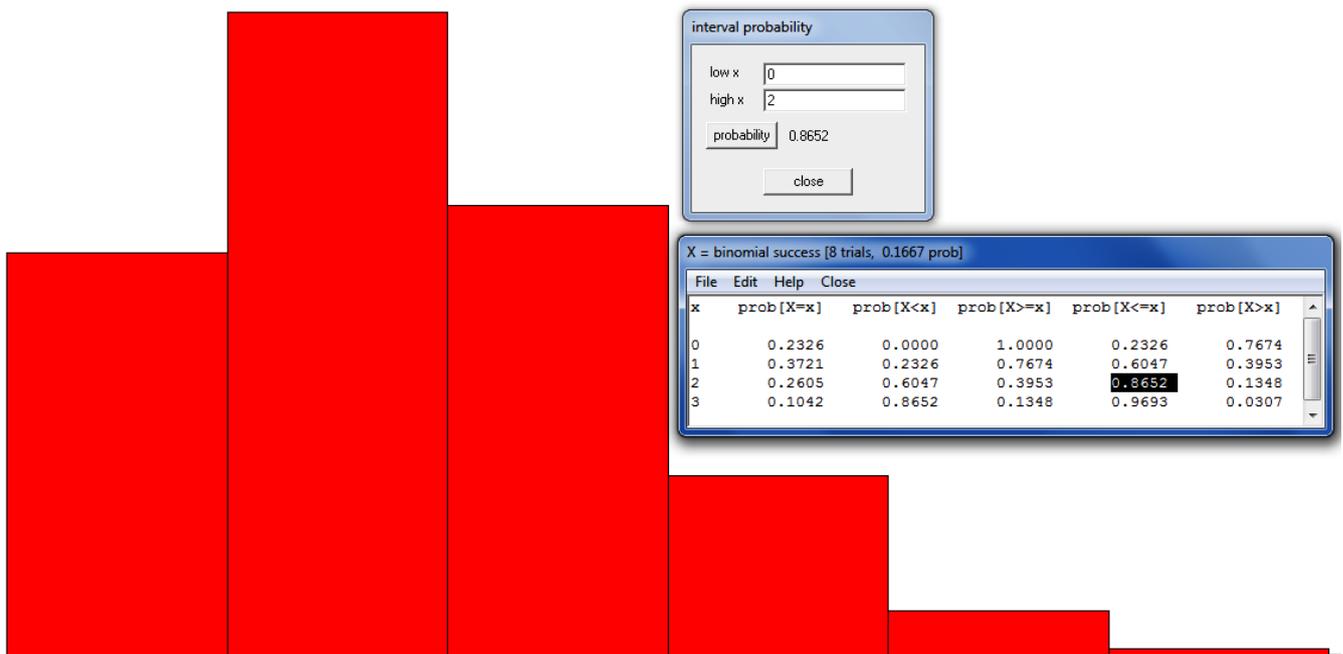
$$P(X \leq 2) = ? ; n = 8; p = \frac{1}{6}$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F
1	X	2				
2	n	8				
3	p	1/6				
4	P(X ≤ 2)	0,8652	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;VERDADERO)			

Los cálculos en Winstats se muestran en la siguiente figura:



3.3)

$$P(X \geq 2) = ? ; n = 8; p = \frac{1}{6}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - P(X \leq 1)$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F
1	X	1				
2	n	8				
3	p	1/6				
4	$P(X \leq 1)$	0,6047	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;VERDADERO)			
5	$P(X \geq 2)$	0,3953	=1-B4			

4) Se lanzan simultáneamente tres monedas, calcular la probabilidad de que se obtengan:

- 4.1) Tres caras.
- 4.2) Dos caras y un sello
- 4.3) Una cara y dos sellos
- 4.4) Tres sellos
- 4.5) Al menos una cara

Solución:

Designando por C = cara y por S = sello se tiene:

Espacio muestral = $S = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$, entonces, $n(S) = 8$

Cada una de estos puntos muestrales son igualmente probables, con probabilidad de $1/8$

Todas las probabilidades individuales se representan en la siguiente tabla:

Monedas			n(E)	P(E)
1ra	2da	3ra		
C	C	C	1	1/8
C	C	S	3	3/8
C	S	S	3	3/8
S	S	S	1	1/8
Total			8	1

4.1) Tres caras.

Observando la tabla se obtiene que $P(CCC) = 1/8$

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X = 3) = P(CCC); n = 3; p = \frac{1}{2}$$

$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(CCC) = \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot \frac{1^3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-3} = 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	3			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=3)	1/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.2) Dos caras y un sello

Observando la tabla se obtiene que $P(CCS) = 3/8$

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X = 2) = P(CCS); n = 3; p = \frac{1}{2}$$

$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(CCS) = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{1^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	2			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=2)	3/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.3) Una cara y dos sellos

Observando la tabla se obtiene que $P(CSS) = 3/8$

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X = 1) = P(CSS); n = 3; p = \frac{1}{2}$$

$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(CSS) = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \frac{1^1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	1			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=1)	3/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.4) Tres sellos

Observando la tabla se obtiene que $P(SSS) = 1/8$

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X = 0) = P(SSS); n = 3; p = \frac{1}{2}$$

$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(SSS) = \frac{3!}{0!(3-0)!} \cdot \frac{1^0}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-0} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	0			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=0)	1/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.5) Al menos una cara

Observando la tabla se obtiene que:

$$P(\text{Al menos C}) = P(CCC) + P(CCS) + P(CSS) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$$

$$\text{O también } P(\text{Al menos C}) = 1 - P(SSS) = 1 - 1/8 = 7/8$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C
1	X	0	
2	n	3	
3	p	1/2	
4	P(X=0)	1/8	
5	P(X ≥ 1)	7/8	=1-B4

TAREA DE INTERAPRENDIZAJE

- 1) Realice un organizador gráfico sobre la distribución binomial
- 2) Calcule de manera manual y empleando Excel. Realice los gráficos en Winstats

2.1) Para $n = 4$ y $p = 0,12$, ¿cuánto es $P(X = 0)$?

R: 0,5997

2.2) Para $n = 10$ y $p = 0,40$, ¿cuánto es $P(X = 9)$?

R: 0,0016

2.3) Para $n = 10$ y $p = 0,50$, ¿cuánto es $P(X = 8)$?

R: 0,0439

3) En una muestra de 4 pedidos, se observa el siguiente resultado:

1er pedido	2do pedido	3er pedido	4to pedido
Marcado	Marcado	Sin marcar	Marcado

3.1) Llenar la tabla de manera manual y empleando Excel

n	p	X	$\frac{n!}{X!(n-X)!}$	p^X	$(1-p)^{n-X}$	$P(X)$
4	0,1	0				0,6561
		1				
		2				0,0486
		3				
		4				0,0001

Empleando la anterior tabla, resuelva los siguientes ejercicios de manera manual, empleando Excel y Winstats.

3.2) ¿Qué probabilidad existe de que haya tres formatos marcados?

$$P(X = 3) = 0,0036$$

3.3) ¿Qué probabilidad existe de que haya menos de tres formatos marcados?

$$P(X < 3) = 0,9963$$

3.4) ¿Qué probabilidad existe de que haya más de tres formatos marcados?

$$P(X > 3) = 0,0001$$

3.5) ¿Qué probabilidad existe de que haya tres o más formatos marcados (es decir, al menos tres, por lo menos tres, o mínimo tres)?

$$P(X \geq 3) = 0,0037$$

3.6) ¿Qué probabilidad existe de que haya tres o menos formatos marcados? (es decir, a lo más tres)?

$$P(X \leq 3) = 0,9999$$

3.7) Calcular la desviación estándar

$$\sigma = 0,6$$

4) Crear y resolver de forma manual y empleando Excel y Winstats un problema similar al anterior.

5) El 60% de profesionales leen su contrato de trabajo, incluyendo las letras pequeñas. Suponga que el número de empleados que leen cada una de las palabras de su contrato se puede modelar utilizando la distribución binomial. Considerando un grupo de cinco empleados:

5.1) Llenar la tabla manera manual y empleando Excel

n	p	X	$\frac{n!}{X!(n-X)!}$	p^X	$(1-p)^{n-X}$	$P(X)$
		0				0,0102
		1				
		2				
		3				0,3456
		4				
		5				

5.2) Resuelva de manera manual, empleando Excel y Winstats la probabilidad de que:

- a) Los cinco lean cada una de las palabras de su contrato 0,0778
- b) Al menos tres lean cada una de las palabras de su contrato 0,6826
- c) Dos lean cada una de las palabras de su contrato 0,0870

6) ¿Cuáles serían los resultados para los incisos de la pregunta anterior, si la probabilidad de que un empleado lea cada una de las palabras de su contrato es de 0,80?. Resolver los siguientes ejercicios de manera manual, empleando Excel y Winstats.

0,3277; 0,9421; 0,0067

7) Un examen de estadística de elección múltiple contenía 20 preguntas y cada una de ellas 5 respuestas. Si un estudiante desconocía todas las respuestas y contestó al azar, calcular de manera manual, empleando Excel y Winstats la probabilidad de que:

- a) Conteste correctamente a 5 preguntas 0,1746
- b) Conteste correctamente a lo más 5 preguntas 0,8042
- 8) Crear y resolver de de manera manual, empleando Excel y Winstats un problema similar al anterior.

9) Se lanza simultáneamente 6 dados, calcular la probabilidad de manera manual, empleando Excel y Winstats de que se obtengan:

- 9.1) Exactamente 2 cincos 0,201
- 9.2) Exactamente 0 cincos 0,335
- 9.3) Menos de 2 cincos 0,737
- 9.4) Más de 2 cincos 0,062
- 9.5) Máximo 2 cincos 0,938
- 9.6) Por lo menos 2 cincos 0,263

10) Se lanza simultáneamente 10 dados, calcular la probabilidad de manera manual, empleando Excel y Winstats de que se obtengan:

10.1) Exactamente 7 sietes	0,00025
10.2) Exactamente 0 sietes	0,16151
10.3) Menos de 7 sietes	0,99973
10.4) Más de 7 sietes	0,00002
10.5) Máximo 7 sietes	0,99998
10.6) Por lo menos 7 sietes	0,00027

11) Se lanzan simultáneamente cinco monedas, calcular la probabilidad de manera manual, empleando Excel y Winstats de que se obtengan:

11.1) Cinco caras	1/32
11.2) Tres caras y dos sellos	5/16
11.3) Una cara y cuatro sellos	5/32
11.4) Cinco sellos	1/32
11.5) Al menos una cara	31/32

12) Se lanzan simultáneamente seis monedas, calcular la probabilidad de manera manual, empleando Excel y Winstats de que se obtengan:

12.1) Dos caras	15/64
12.2) Al menos dos caras	57/64
12.3) Menos de dos caras	7/64
12.4) Más de dos caras	21/32

13) Plantee y resuelva de manera manual, empleando Excel y Winstats un ejercicio sobre dados y otro sobre monedas empleando la distribución binomial.

D) DISTRIBUCIÓN DE POISSON

i) Introducción.- Muchos estudios se basan en el conteo de las veces que se presenta un evento dentro de *un* área de oportunidad dada. El *área de oportunidad* es una unidad continua o intervalo de tiempo o espacio (volumen o área) en donde se puede presentar más de un evento. Algunos ejemplos serían los defectos en la superficie de un refrigerador, el número fallas de la red en un día, o el número de pulgas que tiene un perro. Cuando se tiene un área de oportunidad como éstas, se utiliza la *distribución de Poisson* para calcular las probabilidades si:

- Le interesa contar las veces que se presenta un evento en particular dentro de un área de oportunidad determinada. El área de oportunidad se define por tiempo, extensión, área, volumen, etc.
- La probabilidad de que un evento se presente en un área de oportunidad dada es igual para todas las áreas de oportunidad.
- El número de eventos que ocurren en un área de oportunidad es independiente del número de eventos que se presentan en cualquier otra área de oportunidad.
- La probabilidad de que dos o más eventos se presenten en un área de oportunidad tiende a cero conforme esa área se vuelve menor.

ii) Fórmula.- La distribución de Poisson tiene un parámetro, llamado λ (letra griega lambda minúscula), que es la media o el número esperado de eventos por unidad. La varianza de la distribución de Poisson también es igual a λ , y su desviación estándar es igual a $\sqrt{\lambda}$. El número de eventos X de la variable aleatoria de Poisson fluctúa desde 0 hasta infinito.

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^X}{X!}$$

Donde:

$P(X)$ = Probabilidad de X eventos en un área de oportunidad

λ = Número de eventos esperados

X = Número de eventos

e = Constante matemática base de los logaritmos naturales aproximadamente igual a 2718281828....

Este número es de gran importancia, tan sólo comparable a la del número π (*pi*), por su gran variedad de aplicaciones. El número e suele definirse como el límite de la expresión:

$$(1 + 1/n)^n$$

Cuando n tiende hacia el infinito. Algunos valores de esta expresión para determinados valores de la n se muestran en la tabla siguiente:

VALOR NUMÉRICO DE $(1 + 1/n)^n$ PARA VALORES CRECIENTES DE n		
n	$(1 + 1/n)^n$	Valor numérico
1	$(1 + 1/1)^1$	2
3	$(1 + 1/3)^3$	2,369
5	$(1 + 1/5)^5$	2,489
20	$(1 + 1/20)^{20}$	2,653
40	$(1 + 1/40)^{40}$	2,684
50	$(1 + 1/50)^{50}$	2,691
100	$(1 + 1/100)^{100}$	2,705
1000	$(1 + 1/1000)^{1000}$	2,717
10000	$(1 + 1/10000)^{10000}$	2,718
∞	2,71828....

Observando la columna de la derecha de la tabla anterior, se puede ver que a medida que n crece el valor de la expresión se aproxima, cada vez más, a un valor límite. Este límite es 2,7182818285....

Ejemplos ilustrativos

1) Suponga una distribución de Poisson. Si $\lambda = 1$, calcular $P(X = 0)$

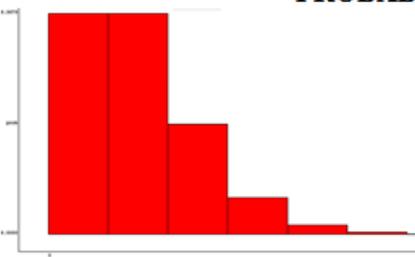
Solución:

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^X}{X!} = \frac{2,71828^{-1} \cdot 1^0}{0!} = 0,3679$$

También se puede obtener con lectura de la tabla de probabilidades de Poisson

**TABLA N° 2
PROBABILIDADES DE POISSON**



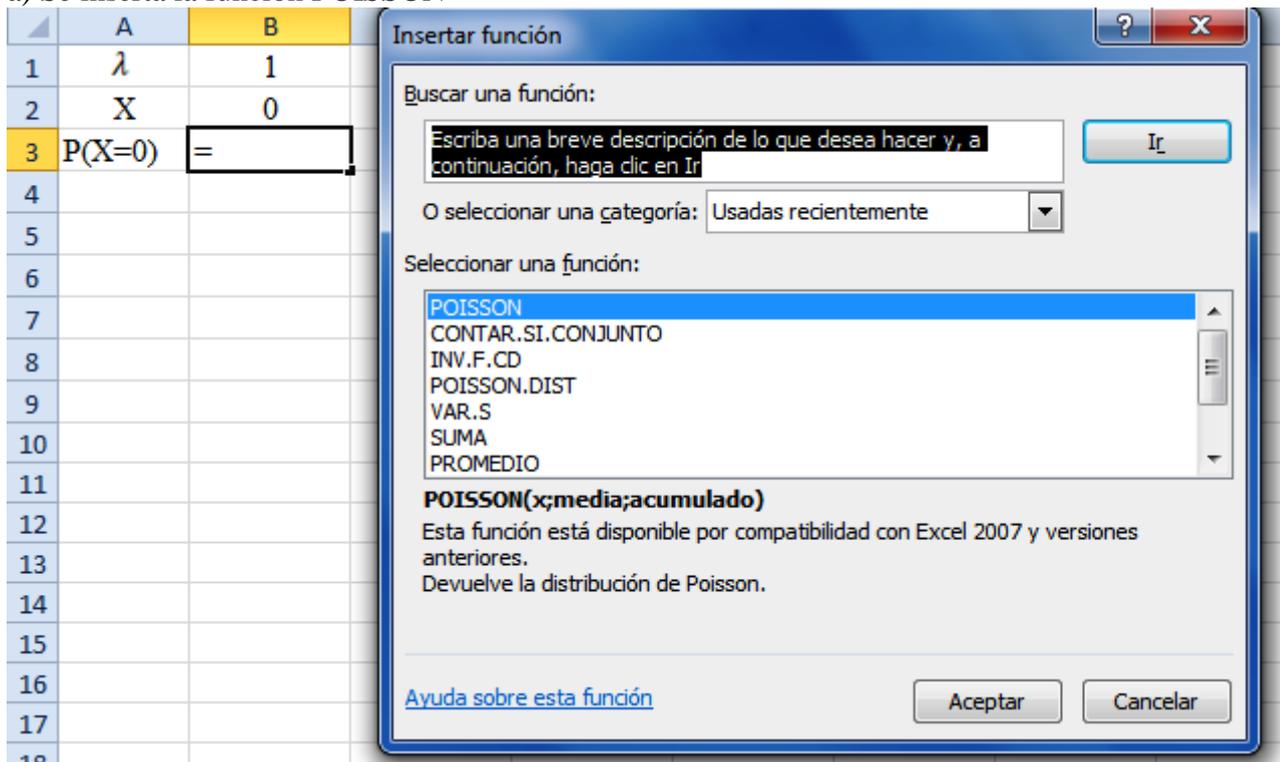
Para $\lambda = 1$ y $X = 0 \Rightarrow P(X = 0) = 0,3679$

	λ									
X	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,9950	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139
1	0,0050	0,0099	0,0196	0,0291	0,0384	0,0476	0,0565	0,0653	0,0738	0,0823
2	0,0000	0,0000	0,0002	0,0004	0,0008	0,0012	0,0017	0,0023	0,0030	0,0037
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

	λ									
X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679

El cálculo de $P(X = 0)$ con $\lambda = 1$ en Excel se realizan de la siguiente manera:

a) Se inserta la función POISSON



b) Clic en Aceptar. En la ventana de Argumentos de la función, en X seleccionar B2 en Media escribir o seleccionar B1 y en Acumulado escribir Falso.

The screenshot shows the Excel interface with the POISSON function dialog box open. The spreadsheet data is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	λ	1								
2	X	0								
3	P(X=0)	=B1,falso								

The dialog box 'Argumentos de función' for POISSON shows:

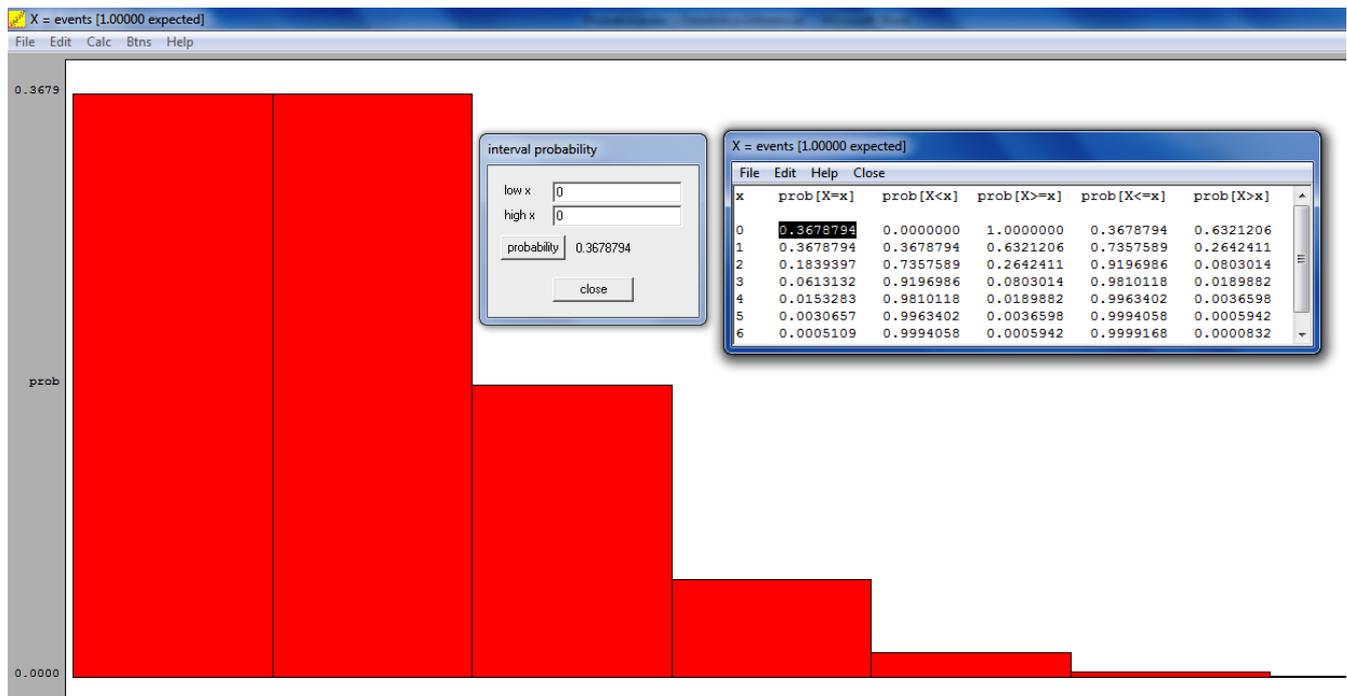
- X: B2 = 0
- Media: B1 = 1
- Acumulado: falso = FALSO

Resultado de la fórmula = 0,367879441

c) Clic en Aceptar

	A	B	C	D	E
1	λ	1			
2	X	0			
3	P(X=0)	0,3678794	=POISSON(B2;B1;FALSO)		

Los cálculos en Winstats se muestran en la siguiente figura:



2) Suponga una distribución con $\lambda = 5$. Determine $P(X \geq 10)$

Solución:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$$

$$P(X \leq 9) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \dots + P(X = 9)$$

Aplicando la fórmula o con lectura en la tabla de la distribución de Poisson se obtiene:

$$P(X \leq 9) = 0,0067 + 0,0337 + 0,0842 + 0,1404 + 0,1755 + 0,1755 + 0,1462 + 0,1044 + 0,0653 + 0,0363$$

$$P(X \leq 9) = 0,9682$$

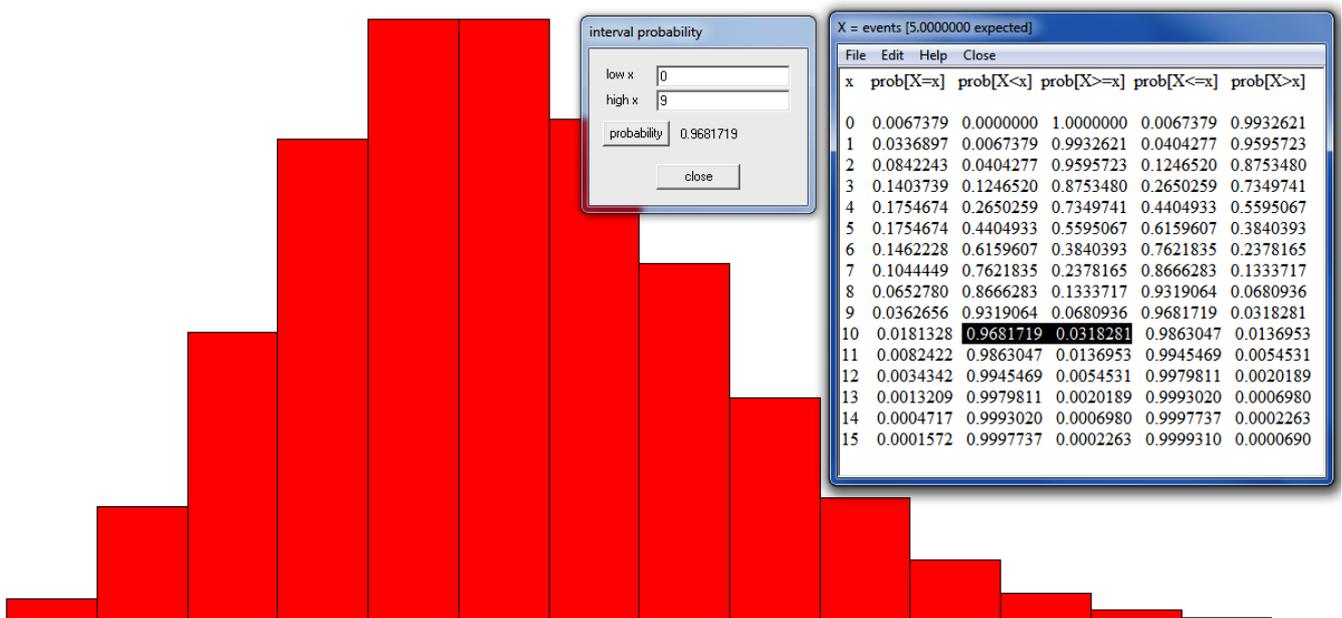
Entonces:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0,9682 = 0,0318$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	λ	5			
2	X	9			
3	$P(X \leq 9)$	0,9681719	=POISSON(B2;B1;VERDADERO)		
4	$P(X \geq 10)$	0,0318281	=1-B3		

Los cálculos en Winstats se muestran en la siguiente figura:



TAREA DE INTERAPRENDIZAJE

1) Defina con sus propias palabras:

- 1.1) Área de oportunidad
- 1.2) Distribución de Poisson
- 1.3) Número e

2) Escriba 5 ejemplos de área de oportunidad

3) Investigue sobre la biografía de Siméon Denis Poisson y realice un organizador gráfico de la misma.

4) Calcule empleando la fórmula de la distribución de Poisson, Excel y Winstats

4.1) $P(X = 8)$ si $\lambda = 8$

4.2) $P(X = 1)$ si $\lambda = 0,5$	0,3033
4.3) $P(X = 0)$ si $\lambda = 3,7$	0,0247
5) Calcule empleando la tabla, Excel y Winstats. Suponga una distribución con $\lambda = 5$.	
5.1) $P(X = 1)$	0,0337
5.2) $P(X < 1)$	0,0067
5.3) $P(X > 1)$	0,9596
5.4) $P(X \leq 1)$	0,0404
6) Suponga que la media de clientes que llega a un banco por minuto durante la hora que va del mediodía a la 1 pm es igual a 3. Calcular empleando la tabla y Winstats.	
6.1) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente dos clientes durante un minuto?	0,2240
6.2) ¿Y cuál es la probabilidad de que lleguen más de dos clientes durante un minuto dado?	0,5768
7) El gerente de control de calidad de una empresa que elabora galletas inspecciona un lote de galletas con chispas de chocolate que se acaban de preparar. Si el proceso de producción está bajo control, la media de chispas de chocolate por galleta es 6. Calcular empleando la tabla y Excel. ¿Cuál es la probabilidad de que en cualquier galleta inspeccionada.	
7.1) Se encuentre menos de cinco chispas?	0,2851
7.2) Se encuentren exactamente cinco chispas?	0,1606
7.3) Se encuentren cinco o más chispas?	0,7149
7.4) Se encuentren cuatro o cinco chispas?	0,2945
8) El departamento de transporte registra las estadísticas de las maletas maltratadas por cada 1000 pasajeros. En 2003, una empresa de transporte tuvo 3,21 maletas maltratadas por cada 1000 pasajeros. Calcular empleando la fórmula, Excel y Winstats. ¿Cuál es la probabilidad de que, en los próximos 1000 pasajeros, aquella empresa tenga	
8.1) Ninguna maleta maltratada?	0,0404
8.2) Al menos una maleta maltratada?	0,9596
8.3) Al menos dos maletas maltratadas?	0,8301
9) Plantee y resuelva 3 ejercicios de aplicación sobre la distribución de Poisson de manera manual y empleando Excel y Winstats.	

E) DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

i) Definición

La distribución binomial es apropiada sólo si la probabilidad de un éxito permanece constante. Esto ocurre si el muestreo se realiza con reemplazo en una población grande. Sin embargo, si la población es pequeña y ocurre sin reemplazo, la probabilidad de éxito variará, y la distribución hipergeométrica es que se utiliza.

ii) Fórmula

Se calcula empleando la siguiente fórmula:

$$P(X) = \frac{C_X^r \cdot C_{n-X}^{N-r}}{C_n^N}$$

Donde:

C = combinación

N = tamaño de la población

r = número de éxitos en la población

n = tamaño de la muestra

X = número de éxitos en la muestra

Notas:

- Si se selecciona una muestra sin reemplazo de una población grande conocida y contiene una proporción relativamente grande de la población, de manera que la probabilidad de éxito varía de una selección a la siguiente, debe utilizarse la distribución hipergeométrica.

- Cuando tamaño de la población (N) es muy grande, la distribución hipergeométrica tiende aproximarse a la binomial.

Ejemplo ilustrativo

Si se extraen juntas al azar 3 bolas de una urna que contiene 6 bolas rojas y 4 blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean extraídas 2 bolas rojas?.

Solución:

Los datos son: N = 10; r = 6; n = 3 y X = 2

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X) = \frac{C_X^r \cdot C_{n-X}^{N-r}}{C_n^N}$$
$$P(X = 2) = \frac{C_2^6 \cdot C_{3-2}^{10-6}}{C_3^{10}} = \frac{C_2^6 \cdot C_1^4}{C_3^{10}} = \frac{2! \cdot 6! \cdot 1! \cdot 4!}{10!} = \frac{2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 3!}{10!} = \frac{15 \cdot 4}{120} = 0,5$$

El cálculo de P(X=2) en Excel se muestra en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	N	10			
2	r	6			
3	n	3			
4	X	2			
5	P(X=2)	0,5	=DISTR.HIPERGEOM(B4;B3;B2;B1)		

TAREA DE INTERAPRENDIZAJE

- 1) ¿En qué se diferencia la distribución binomial con la distribución hipergeométrica?
- 2) Realice un organizador gráfico de la distribución hipergeométrica.
- 3) Resolver los siguientes ejercicios de manera manual y empleando Excel.
- 3.1) En un local de venta de automóviles existen 20 vehículos de los cuales 8 son de la preferencia de Mathías. Si Mathías selecciona 3 vehículos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que un vehículo sea de su preferencia?.
- 0,4632
- 3.2) En un aula de 40 estudiantes hay 16 hombres. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una muestra de 12 en la cual 8 sean hombres?
- 0,0245
- 3.3) De un grupo de 9 personas 4 son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una muestra de 3 personas en la cual no más que una mujer sea seleccionada?
- 0,5952
- 3.4) De 100 establecimientos educativos, 70 disponen de canchas deportivas. Si se pregunta si disponen de canchas deportivas a una muestra aleatoria de 20 establecimientos educativos, calcular la probabilidad de que:
- a) Exactamente 8 dispongan de canchas deportivas
- 0,00152
- b) Exactamente 8 no dispongan de canchas deportivas
- 0,11618
- 3.5) De 40 estudiantes de una clase de Estadística, a 30 les gusta la asignatura. Si se pregunta por la preferencia a esta asignatura a una muestra aleatoria de 8 estudiantes, calcular la probabilidad de que:
- a) Exactamente a 6 les gusta la asignatura
- 0,34744
- b) Mínimo a 6 les gusta la asignatura
- 0,68826
- c) Exactamente a 6 no les gusta la asignatura
- 0,00119
- d) Mínimo a 6 no les gusta la asignatura
- 0,46439
- 4) Plantee y resuelva 3 ejercicios de aplicación sobre la distribución hipergeométrica de manera manual y empleando Excel.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SUÁREZ, Mario, (2012), Interaprendizaje de Probabilidades y Estadística Inferencial con Excel, Winstats y Graph, Primera Edición. Imprenta M & V, Ibarra, Ecuador.