**BREVE
DISERTACIÓN
SOBRE “TEORÍA
DE CONJUNTOS”**

Dimas Herrera

Septiembre, 2012. Cojedes. Venezuela

Tabla de contenido

1. INTRODUCCIÓN.....	3
2. DEVELANDO DEBILIDADES EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS.....	3
3. DEFINICIONES QUE PERMITIRÍAN MEJORAR LA TEORÍA DE CONJUNTOS.....	5
3.1. Objetos bien determinados (obds).....	5
3.2. Conjuntos.....	6
3.3. Cardinal de un conjunto.....	7
3.4. Funciones. Aplicación y re-aplicación.....	7
3.5. Propiedad de las funciones en sus dominios.....	8
4. DEVELANDO LA FALSEDAD DE LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO.....	9
4.1. Consecuencias del teorema de Cantor.....	9
4.2. La relación ordenadora.....	10
4.2.1. Condiciones para poder usar la relación ordenadora.....	13
4.2.2. La inversa de la relación ordenadora.....	14
4.2.3. La relación ordenadora vista como una biyección.....	14
4.2.4. Resumen de las características de la relación ordenadora.....	16
4.3. Teorema de las biyecciones de un conjunto A en sí mismo.....	16
4.4. Teorema 1.1 (equipotencia e inyecciones).....	18
4.5. Teorema 1.2 (equipotencia y sobreyecciones).....	21
4.6. Teorema 1.3 (del cardinal menor).....	22
4.7. Teorema 1.4 (de las sobreyecciones no inyectivas).....	23
4.8. Teorema 1.5 (de los cardinales de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$).....	23
4.9. Teorema 1.6 (de los cardinales de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}$).....	24
4.10. A manera de conclusión.....	24

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace mucho tiempo se ha tratado de tener a la **teoría de conjuntos** como el pilar fundamental de ese frondoso árbol que denominamos **matemática**. Por ello se ha trabajado con mucho afán en su completa elaboración. Fue **Georg Cantor** quien sembró esta teoría por allá en el siglo XIX y desde entonces un gran número de muy buenos matemáticos han desfilado por ella haciendo nuevos e interesantes aportes. Sin embargo, al aplicar las leyes de la lógica junto a las del álgebra, seguimos encontrando absurdos como los siguientes:

a) $2 \in 3$ o $2 \subset 3$

b) $\{0, 1\} \in \{0, 1, 2\}$; etc.

El siguiente trabajo pretende corregir o subsanar al anterior, titulado “PROYECTO PARA MEJORAR LA TEORÍA DE CONJUNTOS”, publicado en la página web “monografías.com”. En éste de ahora se exhibe una dúctil propuesta sobre cómo evitar los absurdos que se presentan en tan bella teoría, y se acepta que los conjuntos de conjuntos (conjuntos cuyos elementos son conjuntos) pueden seguir llamándose conjuntos, pero adicionando algunas definiciones que le atañen. Dicha propuesta no es exhaustiva, pues, es imposible serlo en un trabajo de una dimensión tan pequeña como el que acá se exhibe. Pero queda abierta la posibilidad de seguirla expandiendo hasta hacerla absoluta. Se supone conocido por el lector todo lo referente a teoría de conjuntos.

2. DEVELANDO DEBILIDADES EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Al estudiar la teoría de conjuntos aprendemos que “para todo conjunto A, si existe una función cualquiera $f: A \rightarrow B$, entonces

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}.” \quad (I)$$

Como lo anterior es $\forall A$ y $\forall f$ aplicada a A, y, además, se nos enseña que todo objeto es un conjunto, entonces, si A y B son equipotentes, para una función

$$f: A \rightarrow B, \text{ siendo } A = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\} \text{ y } B = \{\{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 2, 3\}\}$$

Podemos suponer que

$$f(\{0, 1\}) = \{1, 2, 3\}. \quad (1)$$

Ahora tenemos que $A_1 = \{0, 1\}$. $f(\{0, 1\}) = f(A_1) = B_1$. Nuestra pregunta ahora es: ¿Cómo evitar que alguien le aplique a $f(A_1)$ la definición de (1)? No es posible evitarlo, pues, en $f(A_1)$ se tiene una función f aplicada al conjunto A_1 , que por (1) es

$$f(A_1) = \{f(x) / x \in A_1\}. \quad (2)$$

Ahora por (1) y (2) se tiene

$$\{f(0), f(1)\} = \{1, 2, 3\}. \quad (3)$$

Y en (3) tenemos un absurdo, pues, tenemos un conjunto binario igual a uno ternario.

Ahora bien, meditemos un poco sobre el absurdo anterior. Usted como matemático tal vez razonaría así: No es posible ese absurdo porque la función f es para el conjunto A , es decir, f es una función $f: A \rightarrow B$, y no para ningún elemento A_1 de A . Por su parte, otro actor podría razonar así: La imagen del conjunto A_1 , por medio de la función f , es el conjunto B_1 , es decir, $f(A_1) = \{1, 2, 3\} = B_1$. Entonces existe $f: A_1 \rightarrow B_1$. En consecuencia, es aplicable la igualdad (1). Y de esta manera, nuestra formalidad es muy débil para detener el absurdo anterior. Para evitar esto, es necesaria una definición que nos obligue a ver al conjunto A_1 como a un objeto y no como a un conjunto; dicha definición se expondrá más adelante.

Otro absurdo que podemos obtener de nuestra teoría se da por el hecho de aceptar que los números naturales son conjuntos. Veamos.

Sabemos que

$$2 = \{0, 1\} \quad (a) \quad \text{y} \quad 3 = \{0, 1, 2\} \quad (b).$$

Pero

$$\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\} \quad (c) \quad \text{y} \quad 2 \in \{0, 1, 2\} \quad (d).$$

Ahora, por (a), (b), (c), (d) y el principio de identidad, se tiene

$$\{0, 1\} \in \{0, 1, 2\}; 2 \in 3 \text{ y } 2 \subset 3. \quad (1)$$

Y las tres expresiones de (1) son incorrectas (un absurdo).

Ahora bien, el absurdo anterior sólo tiene una manera de soslayarlo y es aceptando que cada número natural es un objeto y no un conjunto. Por otra parte, al tomar a cualquier objeto como un conjunto debemos especificar qué cosas o elementos pertenecen a dicho conjunto. En consecuencia, si un punto A, por poner un ejemplo, es un conjunto, ¿qué cosas pertenecen al punto A? Puesto que un punto es nada, al ser un conjunto, sus elementos son nada. Por lo tanto, un punto es un conjunto de puntos y esto es una falsedad.

Todo lo anterior nos hace inferir que nuestra teoría de conjuntos necesita algunas correcciones. Pero estas correcciones no se deben cimentar en explicar que *“lo de tomar a un objeto cualquiera como conjunto es sólo una forma de hablar”*. En una ciencia como la matemática, en la cual siempre está implícita la lógica, una cosa es *“por lo que es”* y no por una mera forma de hablar.

3. DEFINICIONES QUE PERMITIRÍAN MEJORAR LA TEORÍA DE CONJUNTOS

3.1. Objetos bien determinados (obds)

Se entenderá por objeto bien determinado (obd) a cualquier elemento con una propiedad específica. Por ejemplo, un punto A (que pertenece a una recta, a un plano, etc.). Ahora bien, una vez que los puntos de una recta se constituyen en dicha recta, ésta pasa a ser un obd. De manera que una recta, al igual que un plano, se puede ver como un conjunto de puntos o como un obd si se toma a dicha recta como elemento de un plano o del espacio; o a dicho plano como elemento del espacio. Un hombre es un conjunto de átomos, pero una vez que los átomos se

agrupan y forman al hombre, éste se puede tomar como un obd. Otros obds son: un plano, una letra de nuestro alfabeto, un libro, una silla, etc.

De manera que la propuesta es: **no tomar a toda cosa como conjunto, sino como objeto**. Al hacer esto, tal vez se necesite un nuevo axioma que rece: “Para todo obd (objeto bien determinado), existe al menos un conjunto que lo contiene”. Y de allí en adelante, los demás axiomas de la teoría, ya sea ZF o NBG.

3.2. Conjuntos

En nuestra teoría de conjuntos los conceptos: **elemento**, **conjunto** y **pertenencia** no se definen. Sin embargo, es necesario especificar lo que se entenderá como conjunto. Se entenderá como **conjunto** a una colección o reunión de obds. Ejemplo: el conjunto V de las vocales $V = \{a, e, i, o, u\}$; el conjunto de integrantes de un equipo de beisbol. Un par ordenado, (a, b) , es un obd y una colección de pares ordenados, $\{(a, b), (a, c), \dots\}$ es un conjunto. El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto es un conjunto, etc. Así, existen cosas que son conjuntos y cosas que no lo son.

Observe el lector, que a los conjuntos de conjuntos se les puede seguir llamando conjuntos. Pero para evitar el primer absurdo que vimos en la sección 2 debemos dar algunas definiciones, en cuanto a las funciones, que no aparecen en nuestra teoría de conjunto tradicional. Por otra parte, a los conjuntos que son elementos de un conjunto se les deberá tratar como si fueran obds. Veamos por qué. Sean A y B dos conjuntos dados como sigue

$$A = \{\{1\}, \{1, 2\}\} \text{ y } B = \{0, 1\}.$$

Entonces

$$A \cup B = C = \{0, 1, \{1\}, \{1, 2\}\}.$$

Si ahora decimos que los elementos del conjunto C son conjuntos, estaríamos aceptando que 0 y 1 son conjuntos y ya vimos que no debe ser así. En consecuencia, a los elementos de C se les debe ver, sencillamente, como objetos.

Esto nos dice que si A es un conjunto y $A_1 \subset A$, entonces $A_1 \in P(A)$ y, por tanto, A_1 debe ser visto como un objeto de $P(A)$, al aplicar f a $P(A)$, y no como un conjunto.

3.3. Cardinal de un conjunto

El cardinal de un conjunto A es el número de elementos que posee dicho conjunto. Se puede denotar por $\#A$ o por $n(A)$. El cardinal del conjunto V de vocales, del apartado anterior, es $n(V) = 5$ o $\#V = 5$.

Si al conjunto anterior, $V = \{a, e, i, o, u\}$, le extraemos un elemento, por ejemplo la u , nos queda un conjunto diferente a V , $V' = \{a, e, i, o\}$. Si ahora le extraemos a V' todos los elementos nos queda otro conjunto diferente a V' , $V'' = \{\}$. A este conjunto se le llama conjunto vacío y se le denota por ϕ . Luego $n(\phi) = 0$.

En la teoría de conjuntos tradicional, algunos matemáticos no definen cardinal de un conjunto A al número de elementos que éste posee cuando A es infinito. La pregunta es ¿qué cosa es el cardinal de un conjunto A , $\#A$, cuando A es infinito? Una vez que podamos demostrar que la hipótesis del continuo es falsa, veremos que tanto para conjuntos finitos como para infinitos, se puede definir el cardinal de un conjunto como el número de elementos que dicho conjunto posee. Por ello la definición anterior.

3.4. Funciones. Aplicación y re-aplicación

Sabemos que una función $f: A \rightarrow B$ es una correspondencia que a cada elemento del conjunto A le asigna una y sólo una imagen en el conjunto B .

Ahora bien, si el dominio sólo contiene obds, se tiene

$f: A \rightarrow B$, entonces, $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$. (**Aplicación**)

Para aquellos dominios cuyos elementos son conjuntos, se tendría

$f: A \rightarrow B$, entonces, $f(A) = \{f(A_i) / A_i \in A\}$. (**Aplicación**)

$f(A_i) = \{f(x) / x \in A_i\}$. (**Re-aplicación**) (II)

Pero ahora la igualdad (II) no es posible puesto que ninguna función es **re-aplicable**. Esto, porque ahora el elemento A_i no es un conjunto sino un objeto, ya que $A_i \in A$.

3.5. Propiedad de las funciones en sus dominios

En $f: A \rightarrow B$, el conjunto A es el dominio de la función f y sabemos que se cumple

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}.$$

Ahora, si $A = A' \cup A''$, es decir, $A', A'' \subset A$, entonces

$$f(A) = f(A') \cup f(A''). \quad (I)$$

Sin embargo, si $A_1 \in A$, es decir, A_1 es elemento de A , y $A_1 = C' \cup C''$, entonces

$$f(A_1) \neq f(C') \cup f(C''). \quad (II)$$

Lo anterior nos dice que para conjuntos que no son dominios ni subconjuntos del dominio, sino elementos de éste, no se cumple la igualdad (I).

Esto nos permite evitar absurdos como el siguiente

Sean $A = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$, $B = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$. Como A y B son equipotentes, existe, forzosamente, una biyección $f: A \rightarrow B$ tal que, por ejemplo

$$f(\{0\}) = \{0, 1\}. \quad (a)$$

$$f(\{1\}) = \{0, 2\}. \quad (b)$$

$$f(\{0, 1\}) = \{1, 2\}. \quad (c)$$

Si decimos que en (c) se cumple la igualdad (I), se tiene que

$$f(\{0, 1\}) = f(\{0\} \cup \{1\}) = f(\{0\}) \cup f(\{1\}). \quad (1)$$

Ahora, por (a), (b), (c) y (1) se tiene

$$\{1, 2\} = \{0, 1\} \cup \{0, 2\} = \{0, 1, 2\}. \quad (2)$$

Y en (2) tenemos el absurdo que deseamos evitar al definir la igualdad (I) sólo para dominios y subconjuntos de éste y no para conjuntos que son elementos de dicho dominio; puesto que al ser elementos pasan a ser objetos.

Con todo lo visto en cada apartado de esta sección 3 parece que ya se pueden evitar los absurdos encontrados en la sección 2. No obstante, se debe aclarar lo siguiente: Al no poder aceptar que el número natural 0 está determinado por el conjunto vacío y que, además, ningún natural es un conjunto, entonces no es correcta la construcción

$$1 = s(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\}.$$

$$2 = s(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}, \text{ etc.}$$

En consecuencia, la existencia del conjunto $\mathbb{N}$ se tendrá que postular sin construcción o encontrar otra forma de construirlo. Asimismo, como ahora no todos los obds son conjuntos, se debería incorporar un axioma que nos permita asignar cada obd a un conjunto. Así, cada obd podrá ser asignado a un cierto conjunto y, como cada conjunto también se puede ver como un obd, dicho axioma vale también para todo conjunto. De esta manera, no debemos decir que todo objeto es un conjunto, sino: “**todo conjunto se puede ver como un obd**”.

4. DEVELANDO LA FALSEDAD DE LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

4.1. Consecuencias del teorema de Cantor

El teorema de Cantor sobre la cardinalidad de un conjunto A cualquiera y el cardinal de su conjunto de partes nos dice que

$$\#A < \#P(A), \text{ es decir, } \#A < 2^{\#A}.$$

El teorema anterior unido a la función (supuestamente biyectiva)

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par o } 0 \\ \frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

fueron los incentivos para que **Cantor** introdujera su bendita hipótesis del continuo; la cual acá probaremos que es falsa.

4.2. La relación ordenadora

Para los científicos, ninguna ciencia está completamente terminada. Si lo aplicamos a la matemática, podemos decir que siempre habrá algo nuevo por descubrir en alguna de las ramas de esta disciplina. Por ello, en este apartado veremos que existe una relación de un conjunto A en sí mismo que, tal vez por sus características, nadie se había fijado en ella. Y es que esta relación lo que hace en realidad es permutar a los elementos del conjunto A tomados de dos en dos, o de uno en uno.

Para que el lector o lectora de este trabajo pueda comprender mejor lo expuesto, primero veremos cómo opera esta singular relación en algunos conjuntos finitos y luego la aplicaremos en conjuntos infinitos. Una vez que tengamos dominio de lo que es en verdad nuestra nueva correspondencia, veremos que parece como un jueguito de niños sin ninguna consecuencia importante en la matemática. Pero nada más lejos de la realidad, pues, mediante esta sencilla relación lograremos demostrar que ningún subconjunto propio de A puede generarlo mediante alguna función. Es decir, si X es un subconjunto propio del conjunto A , no existe ninguna función $f: X \rightarrow A$ tal que $f(X) = A$.

Para definir la relación referida anteriormente, que llamaremos **ordenadora** (o permutadora si alguien la quiere llamar así), necesitaremos un conjunto, A , cualquiera y una función $f: X \subseteq A \rightarrow A$ la cual debe ser una biyección. Nótese que f debe ser, forzosamente, una biyección. Ya explicaremos la razón.

Vamos a explicar con algunos ejemplos cómo opera la relación ordenadora,

que podemos escribir ${}_x h_{f(x)}$, cuando existe $f: X \subseteq A \rightarrow A$ y f es una biyección.

Sea el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f: X \subseteq A \rightarrow A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

Observemos que $f(X) = A$, es decir

$$f(1) = 3, f(2) = 4, f(3) = 1 \text{ y } f(4) = 2.$$

Coloquemos el conjunto X (dominio) frente al conjunto A (rango) en forma de tabla y de manera que cada elemento del dominio esté frente a su imagen. Ver tabla

Dominio = X	Rango = A
1	3
2	4
3	1
4	2

Tabla 1.

Ahora, sea ${}_x h_{f(x)}$ la relación que denominaremos *ordenadora* la cual se aplicará de la siguiente manera: si en el rango no está el 1 frente al 1 del dominio, entonces h llevará al elemento que está frente al 1 (en este caso es el 3) hasta donde está el 1 y el 1 lo llevará y lo colocará frente al 1 del dominio. De esta forma lo que hace la relación h es permutar dos elementos; el 1 y el 3. Al hacer la misma operación con cada uno de los demás elementos del rango se obtiene a dicho conjunto con el mismo orden que hay en el dominio, es decir, el elemento x del rango frente al elemento x del dominio; quedando ahora la tabla de la siguiente manera:

Dominio = X	Rango permutado = A
1	1
2	2
3	3
4	4

Tabla 2.

Veamos la secuencia de pasos que da la relación h para efectuar su trabajo. Primero hemos de tener presente que todo conjunto es bien ordenado, es decir,

tiene un elemento mínimo que lo llamaremos primer elemento. La relación en cuestión comienza en 1 y, como $f(1) = 3$, el elemento que está frente al 1 del dominio es el 3. Por lo tanto, h lleva al 3 hasta donde está el 1, en este caso hasta frente al 3 ($f(3) = 1$), y al 1 lo lleva y lo coloca frente al 1. Así, el 1 del rango queda frente al 1 del dominio (${}_1h_3$). El 3 del rango quedó frente al 3 del dominio y, por tanto, cuando h se aplica al elemento 3 (fila donde está el 3 en el dominio) lo que hace es permutar éste consigo mismo (${}_3h_3$). Cuando h se aplica a la fila donde está el 2 del dominio se consigue con el elemento 4, por tanto, lleva al 4 hasta donde está el 2 (en este caso hasta el 4), lo deja allí y al 2 lo lleva frente al 2 del dominio (${}_2h_4$). Así, el 4 del rango también queda frente al 4 del dominio y, cuando h llega a la fila del 4, lo que hace es permutar a éste consigo mismo (${}_4h_4$). Veamos en la tabla 3 la secuencia anterior. En las columnas grises aparecen entre paréntesis los elementos que se han permutado. En la columna 3ra está el resultado de la primera permutación. En la columna 7ma se observa cómo quedó todo después de finalizar las permutaciones.

Tabla 3.

Dominio = X	Rango y Pasos de h					
1	(3) 1	1	1	1	1	1
2	4	4	(4) 2	2	2	2
3	(1) 3	3	3	(3) 3	3	3
4	2	2	(2) 4	4	(4) 4	4

Ahora bien, el elemento que guía a h para que efectúe su operación es el x del dominio. Por lo tanto, la ley de formación de h se puede denotar por: $h_x(f(x)) = x$. Donde se entenderá que h cambia a $f(x)$ por x . Sin embargo, algunas veces, por causa de las permutaciones que efectúa h , frente a un elemento z del dominio puede quedar otro elemento que no es $f(z)$ sino $f(\lambda)$, por ejemplo. Así, cuando h se aplique al $f(\lambda) \in A$ que está frente a z , cambiará a $f(\lambda)$ por z . Por lo tanto, se tiene $h_z(f(\lambda)) = z$. Pudiéndose usar las dos notaciones, $h_x(f(x)) = x$ o $h_x(f(\lambda)) = x$ (donde se puede dar que $\lambda = x$) indistintamente. Veamos otro ejemplo sólo en forma de tabla, donde existe una biyección $f: X \subseteq A \rightarrow A$ y hemos empleado la relación h .

X	A	Pasos de h_x					A (permutado)
1	4	(4) 1	1	1	1	1	$h_1(f(1) = 4) = 1$
2	5	5	(5) 2	2	2	2	$h_2(f(2) = 5) = 2$
3	1	(1) 4	4	(4) 3	3	3	$h_3(f(1) = 4) = 3$
4	2	2	(2) 5	5	(5) 4	4	$h_4(f(2) = 5) = 4$
5	3	3	3	(3) 4	(4) 5	(5) 5	$h_5(f(2) = 5) = 5$

Tabla 4.

En la tabla anterior la permutación de h_1 fue el 4 por el 1. En h_2 fue el 5 por el 2. En h_3 fue el 4 (que había sido colocado frente al 3) por el 3. En h_4 fue el 5 (que había sido colocado frente al 4) por el 4. Finalmente, en h_5 el 5 se permutó consigo mismo, pues ya había sido colocado el 5 frente al 5. Esto se ve en la última columna, donde podemos observar que cada $x \in A$ (A permutado) es un $h_x(f(\lambda))$.

4.2.1. Condiciones para poder usar la relación ordenadora

En las operaciones anteriores se observa que h_x se aplica a cada $f(\lambda) \in A$ que está frente a un $x \in X$ una sola vez. Esto, porque cuando h_x coloca a x del rango frente al x del dominio, ya no vuelve a encontrarse en su camino al elemento x . Por otra parte, para que se pueda aplicar h a cada $f(\lambda) \in A$, $f(\lambda)$ debe estar frente a un x del dominio. Por lo tanto, f tiene que ser sobreyectiva. Además, si f no es inyectiva, se tendrá que $f(x) = f(z) = w$, con $x \neq z$. Como debe ser, forzosamente, $w \neq x$ o $w \neq z$, entonces h no sabrá qué hacer, pues debe colocar a x frente a x y z frente a z en la misma operación. De manera que f debe ser también inyectiva. Así, f debe ser, necesariamente, una biyección y, además, todo $x \in X$ debe estar en A .

Supongamos ahora que, dada la función $f: X \rightarrow A$, se usó ${}_A h_A$ tal que h es la relación ordenadora. Como $h_x(f(\lambda)) = x, \forall x \in X$ y $\forall f(\lambda) \in A$, entonces, a cada $x \in X$, h lo encontró en A frente a un $\rho \in X$ y efectuó la permutación en cada $f(\lambda) \in A$ (en cada lugar donde halló un elemento de A). Por lo tanto, $X \subseteq A$ y, además, f es biyectiva.

De los dos párrafos anteriores deducimos que las condiciones necesarias y suficientes para poder emplear la relación ordenadora, dada una función $f: X \rightarrow A$, son:

1) Que X esté contenido en A ($X \subseteq A$).

2) Que f sea una biyección.

4.2.2. La inversa de la relación ordenadora

Ahora, veamos cómo opera la relación inversa $h_x^{-1}(x) = f(x)$. Obsérvese, primero, que, sea cual sea la notación de la relación h ($h_x(f(x)) = x$ o $h_x(f(\lambda)) = x$), la notación de la relación inversa será $h_x^{-1}(x) = f(x)$, puesto que esta es la ley que deshace el trabajo de h . Para visualizar la operación de h_x^{-1} usemos la función f de la tabla 4 anterior (acá h_x^{-1} ha permutado, sin embargo, se puede aplicar directamente).

Tabla 5.

X	A	A permutado ($h_x(f(\lambda))$)	Pasos de $h_x^{-1}(x) = f(x)$				
			(1) 4	4	4	4	4
1	4	1	2	(2) 5	5	5	5
2	5	2	3	3	(3) 1	1	1
3	1	3	(4) 1	1	(1) 3	(3) 2	2
4	2	4	5	(5) 2	2	(2) 3	(3) 3
5	3	5					

Veamos la secuencia de $h_x^{-1}(x)$. En las columnas grises están los cinco pasos o permutaciones de h_x^{-1} . Como $h_1^{-1}(1) = f(1) = 4$, el 1 fue llevado frente al 4 y el 4 fue traído frente al 1. Observe que el 1 quedó frente al 4 del dominio. Para el 2, $h_2^{-1}(2) = f(2) = 5$. Por lo tanto, el 2 fue llevado frente al 5 y el 5 traído frente al 2 del dominio. Para el 3, $h_3^{-1}(3) = f(3) = 1$. El 3 fue llevado donde estaba el 1, en este caso había quedado frente al 4, quedando el 3 frente al 4 y el 1 fue llevado frente al 3 del dominio. Para 4, $h_4^{-1}(4) = f(4) = 2$. Como frente al 4 estaba el 3, éste fue llevado donde estaba el 2 (estaba frente al 5) y el 2 fue llevado frente al 4. Así quedó el 2 frente al 4 y el 3 frente al 5. Para $h_5^{-1}(5) = f(5) = 3$. Como el 3 ya estaba frente al 5, éste se permutó consigo mismo. Así, $h_x^{-1}(x)$ volvió a colocar el orden original del rango. Luego, llamando el orden original del dominio *orden a* y el del rango *orden b*, h_x pasó del *orden b* al *orden a* y h_x^{-1} pasó del *orden a* al *orden b*.

4.2.3. La relación ordenadora vista como una biyección

De todo lo anterior, a la relación ${}_A h_A$ la podemos tratar como una biyección

$h:A \rightarrow A$ si sólo tomamos en cuenta el lugar del $f(x)$ y no a éste. Para ello, vamos a deducir la inyectividad y la sobreyectividad cuando A es un conjunto cualquiera.

Inyectividad: Si $x, y \in A$ y $x \neq y$, entonces la permutación de x con $f(\lambda)$ será distinta a la de y con $f(\lambda)$ si, para x , $f(\lambda)$ es $f(x)$ y, para y , $f(\lambda)$ es $f(y)$. Además, cuando h haya colocado a x del rango frente a x del dominio, ya no volverá a encontrarse con el elemento x nunca más. Es decir, si x (del rango) ya fue puesto frente a x (del dominio), para el elemento que viene en el orden, digamos $z \neq x$, h tendrá que buscarlo en los restantes elementos que faltan por ordenar, pues, en los elementos ya ordenados nunca estará z , ya que A no tiene elementos repetidos. Por lo tanto, h es inyectiva. Nótese que h puede cambiar de lugar a un $f(\lambda) \in A$ muchas veces, pues, a h sólo le importa el lugar, para continuar el orden, y no el elemento. Por ejemplo, si $h_x(a) = x$ y $h_z(a) = z$, escribiremos $h_x(f(x)) = x$ y $h_z(f(z)) = z$.

Sobreyectividad: Por otra parte, $\forall x \in X \subseteq A$ (dominio), entonces, $x, f(x) \in A$ (rango). Por lo que h siempre podrá encontrar a x en el rango y colocarlo frente a x del dominio. Aclaremos un poco más esto. Supongamos por un momento que el conjunto A es infinito. Aceptemos también que en algún momento no se cumple que $h_u(f(\rho)) = u$ para un determinado u de X . Entonces, esto significa que h no puede permutar a $f(\rho)$ y u . Como esto sólo puede suceder si u no está en A (porque $f(\rho)$ sí está), entonces $X \not\subseteq A$, en contra de lo supuesto. Pero como $X \subseteq A$, esto nos asegura que siempre se cumplirá que $h_x(f(\lambda)) = x, \forall f(\lambda) \in A$, ya que todo $x \in X$ siempre estará frente a un $f(\lambda) \in A$ y, por tanto, h se aplica en todo A . Como lo que hace h es permutar todos los elementos del conjunto A y esto no altera a dicho conjunto, entonces $h(A) = A$. Por lo que h es sobreyectiva. Además, es fácil probar que, para cualquier conjunto A , cuando h llega (supongamos que llega si A es infinito) al elemento que está de último en A , éste está frente a su igual en X , por lo que h permuta a dicho elemento consigo mismo. En efecto, sea $u \in X$ el último elemento de X y sea $u' \in A$ el elemento que queda de último en A . Si $u \neq u'$, entonces h no podrá encontrar a u en ningún lugar de A , pues ya los demás elementos de A han sido ordenados. En consecuencia, $u \in X$ y $u \notin A$, de donde $X \not\subseteq A$. Como esto es una

contradicción, no puede ser $u \neq u'$ y, por tanto, $u' = u$.

4.2.4. Resumen de las características de la relación ordenadora

$$X \subseteq A \wedge f: X \rightarrow A / f \text{ es biyectiva.} \quad (I)$$

$$h: A \rightarrow A / h_x(f(\lambda)) = x, \forall f(\lambda) \in A \wedge \forall x \in X \subseteq A. \quad (II)$$

$$h \text{ permuta a } f(\lambda) \text{ y } x \text{ dentro de } A. \quad (III)$$

Usemos la relación h en conjuntos infinitos mediante la función

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} / f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{si } n \text{ es par ó } 0 \\ n - 1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

En esta función la imagen de cada par es un impar y la de cada impar es un par. Es fácil verificar que f es inyectiva y también sobreyectiva, por lo que h siempre podrá colocar a cada n del rango frente a cada n del dominio. Esto, porque $\forall n \in \mathbb{N}$ (dominio), entonces, $n, f(n) \in \mathbb{N}$ (rango). Acá h lleva al 1 donde está el 0 (está frente al 1) y trae al 0 y lo coloca frente al 0 del dominio. Una permutación igual es posible con cada columna donde está n . Por lo tanto, siempre se tiene que $h_n(f(m)) = n$. Ver tabla 6.

Dominio = N	Rango = N	Rango permutado = N
0	1	$0 = h_0(f(0)) \cdot {}_0h_1$
1	0	$1 = h_1(f(0)) \cdot {}_1h_1$
2	3	$2 = h_2(f(2)) \cdot {}_2h_3$
3	2	$3 = h_3(f(2)) \cdot {}_3h_3$
4	5	$4 = h_4(f(4)) \cdot {}_4h_5$
5	4	$5 = h_5(f(4)) \cdot {}_5h_5$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Tabla 6.

4.3. Teorema de las biyecciones de un conjunto A en sí mismo

Sea A un conjunto cualquiera y $X \subseteq A$. Sea $f: X \rightarrow A$ tal que f es biyectiva. Entonces $X = A$.

Para demostrar esto sólo debemos emplear la relación *ordenadora* en el conjunto A y luego, mediante otra función, probar que $A \subseteq X$. Nótese que aunque h no sea una función siempre podrá ser aplicada como tal.

Para $x \in X \rightarrow x, f(x) \in A$. Además, f es una función biyectiva. Luego, podemos aplicar $h: A \rightarrow A$ tal que $h_x(f(\lambda)) = x$. Como esta relación ordenadora se puede ver como una biyección, entonces tenemos $f: X \rightarrow A$ y $h: A \rightarrow A$. Como $\forall x \in A$ (A permutado) lo podemos ver como un $h_x(f(\lambda))$, podemos formar una función $g: A \rightarrow X$ definida de la siguiente manera (acá A es el conjunto ya permutado)

$$g: A \rightarrow X / g(h_x(f(\lambda))) = x. \quad (1)$$

Como

$$h_x(f(\lambda)) = x, \forall f(\lambda) \in A \wedge \forall x \in X \subseteq A. \quad (2)$$

Entonces, por (1) y (2)

$$g(x) = x. \quad (3)$$

Por (1), (2) y (3), es fácil verificar que g es inyectiva. Veamos que también es sobreyectiva. En efecto $\forall \alpha \in X$, α siempre estará al frente de un elemento de A que llamaremos $f(w)$ (porque $A = f(X)$). Por lo tanto

$$\forall \alpha \in X, h_\alpha(f(w)) = \alpha. \quad (4)$$

Por (1), (2), (3) y (4) se tiene que

$$g(h_\alpha(f(w))) = g(\alpha) = \alpha. \quad (5)$$

Por (4) y (5) g es sobreyectiva y, por tanto, una biyección de A en X . Nos falta verificar que se aplica en todo A y no en un subconjunto de éste. Veamos

Por (1), cuando f recorre todos los x de X y sabiendo que $f(X) = A$, $h_x(A) = A$ y al recorrer todos los $x \in X$ obtenemos el conjunto X , se tiene

$$g(h_x(f(X))) = g(h_x(A)) = g(A) = X. \quad (6)$$

Por (6), g se aplica en todo A y, por tanto

$$\forall \beta \in A \rightarrow g(\beta) = \beta \in X. \quad (7)$$

Por (7), todo elemento de A está en X . En consecuencia

$$A \subseteq X. \quad (8)$$

Por (8) y ser $X \subseteq A$ se tiene que

$$X = A. \quad \blacklozenge$$

4.4. Teorema 1.1 (equipotencia e inyecciones)

Si $\#A = \#B$ y $f: A \rightarrow B$ es inyectiva, entonces f es sobreyectiva.

Demostración

Por hipótesis

$$f: A \rightarrow B \wedge f \text{ inyectiva.} \quad (1)$$

Como $\#A = \#B$ (A y B equipotentes), existe una biyección de A en B . Es decir

$$\exists g: A \rightarrow B / g(A) = B \wedge g \text{ inyectiva.} \quad (2)$$

Ahora, denotaremos por x_g a un elemento cualquiera de A al cual se aplica g , y por x_f al que se le aplique f . Como $f(A) \subseteq g(A) = B$, entonces (acá “ $\exists!$ ” Se lee “existe un único”)

$$\text{Si } x_f \in A, f(x_f) = x_B \in B \wedge \exists! x_g \in A / g(x_g) = x_B. \quad (3)$$

Por (3) se tiene que

$$f(x_f) = g(x_g) = x_B \in B. \quad (4)$$

Sea $h: X \subseteq A \rightarrow A$ la función que convierte a cada x_g en x_f cuando $g(x_g) = f(x_f)$. X es el conjunto tal que si $g(x_g) = f(x_f)$, entonces, $x_g \in X$. Es decir

$$h: X \subseteq A \rightarrow A / h(x_g) = x_f \Leftrightarrow g(x_g) = f(x_f). \quad (5)$$

Por la inyectividad de f , h es una función. En efecto, si fuese $h(x_g) = x_f$ y $h(x_g) = y_f$ con $x_f \neq y_f$, por lo cual h no sería una función, entonces $g(x_g) = f(x_f) = f(y_f)$ y f no sería inyectiva. Luego, h es una función. Veamos que esta h es biyectiva.

Prueba de la Sobreyectividad

Si $x_f \in A$, $f(x_f) = x_B \in B \wedge \exists! x_g \in A / g(x_g) = x_B \rightarrow g(x_g) = f(x_f) \rightarrow x_g \in X$

$$\rightarrow h(x_g) = x_f \text{ (por (5)). (6)}$$

Prueba de la Inyectividad

Sean $x_g, y_g \in X \subseteq A$ con $h(x_g) = x_f$ y $h(y_g) = y_f$. Si $h(x_g) = h(y_g) \rightarrow x_f = y_f$ (por (5))

$$\rightarrow f(x_f) = f(y_f) \text{ (porque } f \text{ es función)}$$

$$\rightarrow g(x_g) = g(y_g) \text{ (por (5))}$$

$$\rightarrow x_g = y_g \text{ (porque } g \text{ es inyectiva). (7)}$$

Por (6) y (7), h es biyectiva y, por 4.3, $X = A$. En consecuencia, existe la inversa $h^{-1}: A \rightarrow A$ tal que

$$h^{-1}(x_f) = x_g, \forall x_g, x_f \in A \wedge g(x_g) = f(x_f). \quad (8)$$

Aplicando g a ambos miembros de (8), se tiene

$$g(h^{-1}(x_f)) = g(x_g) = f(x_f), \forall x_f \in A. \quad (9)$$

Por (9), ser $g \circ h^{-1}: A \rightarrow B$ y $f: A \rightarrow B$, se tiene

$$f(x_f) = g \circ h^{-1}(x_f), \forall x_f \in A. \quad (10)$$

Como $g(A) = B$ y $h^{-1}(A) = A$, entonces

$$f(A) = g(h^{-1}(A)) = g(A) = B. \quad (11)$$

Por (11) y ser $f: A \rightarrow B$

f es sobreyectiva. ♦

Antes de demostrar el teorema 1.2, es necesario que demos demos los siguientes dos lemas opcionales, los cuales son proposiciones ya demostradas por diferentes autores.

Lema 1 (opcional)

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces $A - B = A \cap B^c$.

Demostración

En efecto, sabemos que: $A - B = \{x \in A / x \notin B\}$, luego

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in (A \cap B^c). \quad (1)$$

Por (1)

$$A - B = A \cap B^c. \quad \diamond$$

Lema 2 (opcional)

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces, $(A \cup B) - B = A$

Demostración

$$A - A \cap B = A \cap (A \cap B)^c \text{ (lema 1).}$$

$$= A \cap (A^c \cup B^c) \text{ (leyes de De Morgan)}$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \text{ (distributividad)}$$

$$= \emptyset \cup (A - B) \text{ (propiedades y lema 1)}$$

$$= A - B. \quad (1)$$

Por otra parte

$$(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B^c \text{ (lema 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) \text{ (distributividad)} \\
&= (A - B) \cup \emptyset \text{ (lema 1 y propiedades)} \\
&= A - B. \tag{2}
\end{aligned}$$

Por (1) y (2)

$$(A \cup B) - B = A - A \cap B. \tag{3}$$

Por (3) y ser $A \cap B = \emptyset$, así como $A - \emptyset = A$, se tiene

$$(A \cup B) - B = A. \quad \blacklozenge$$

4.5. Teorema 1.2 (equipotencia y sobreyecciones)

Si $\#A = \#B$ y $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva ($f(A) = B$), entonces f es inyectiva.

Demostración

Como $\#A = \#B$, entonces, por equipotencia de conjuntos

$$\exists g: A \rightarrow B / g(A) = B \wedge g \text{ es inyectiva.} \tag{1}$$

Supongamos, como **hipótesis temporal**, que f no es inyectiva. Es decir

$$\#A = \#B, f: A \rightarrow B, f(A) = B \wedge f \text{ no es inyectiva.} \tag{2}$$

Como f no es inyectiva en A , A se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos, A' y C , tales que f es inyectiva en A' , y C contiene a todos los elementos de A que generan las mismas imágenes que algunos (o todos los) elementos de A' . Es decir, si existen pares, tríadas, etc., de elementos de A que generan la misma imagen en B , dejamos (suponemos) uno de ellos en A' y los otros en C . Así, $f(C) \subset f(A')$ y $\forall x, y \in A'$, si se tiene que $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$. Luego

$$A = A' \cup C \text{ (} C \neq \emptyset, \text{ supuesto)}. \tag{3}$$

Por (3)

$$g(A) = g(A' \cup C) = g(A') \cup g(C) = B. \quad (4)$$

Como $g(C) \neq \emptyset$ y $g(C) \subset B$, entonces, por (4)

$$g(A') \cup g(C) - g(C) = B - g(C) \neq B. \quad (5)$$

Por (5) y ser $g(A') \cap g(C) = \emptyset$ (porque $A' \cap C = \emptyset$ y g es inyectiva), al aplicar el lema 2 se tiene

$$g(A') \neq B. \quad (6)$$

Por otra parte, al aplicar f en (3), se tiene

$$f(A) = f(A') \cup f(C) = B. \quad (7)$$

Como $f(C) \subset f(A')$, entonces, $f(A') \cup f(C) = f(A')$. Luego, por (7)

$$f(A) = f(A') = B. \quad (8)$$

Al aplicar $f: A' \rightarrow B$ y usando (8), se tiene (ahora $\forall x, y \in A'$, si $x \neq y$ también será $f(x) \neq f(y)$)

$$f: A' \rightarrow B, f(A') = B \text{ y } f \text{ es inyectiva en } A'. \quad (9)$$

Por (9), f es **biyectiva** en A' . Luego, $\#A' = \#B$ y, al aplicar $g: A' \rightarrow B$ se tiene

$$\#A' = \#B, g: A' \rightarrow B \text{ y } g \text{ es inyectiva.} \quad (10)$$

Ahora las igualdades (10) y (6) contradicen al teorema 1.1. Como esta contradicción la generó la hipótesis temporal (2), donde se supone a f no inyectiva, se concluye que esto es falso y, por tanto

f es inyectiva. ♦

4.6. Teorema 1.3 (del cardinal menor)

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera tales que $\#A < \#B$ y $f: A \rightarrow B$ es una función cualquiera, entonces $f(A) \neq B$.

Demostración

Por una propiedad de $f(A)$ que nos asegura que $\#f(A) \leq \#A$, se tiene

$$\# f(A) \leq \# A. \quad (1)$$

Y por hipótesis

$$\# A < \# B. \quad (2)$$

Por (1) y (2) no puede ser: $f(A) = B$ porque sería $\#f(A) = \#B$ y se tendría

$$\#B = \# f(A) \leq \#A < \# B. \quad (3)$$

Como (3) es absurdo, entonces

$$f(A) \neq B. \quad \blacklozenge$$

4.7. Teorema 1.4 (de las sobreyecciones no inyectivas)

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Si existe una función $f: A \rightarrow B$ la cual es sobreyectiva, es decir, $f(A) = B$, y f es **no inyectiva**, entonces $\# A > \# B$.

Demostración:

Sea $f: A \rightarrow B / f(A) = B$ y f es **no inyectiva**.

La cardinalidad de A , con respecto a la de B , puede ser:

i) $\# A = \# B$; ii) $\# A < \# B$ ó iii) $\# A > \# B$.

Si sucede i, entonces, como $f(A) = B$, por el teorema 1.2, f es inyectiva; lo que contradice a la hipótesis. Luego, no puede suceder i. Si sucede ii, el teorema 1.3 nos asegura que, para toda función f de A en B , $f(A) \neq B$; y esto también contradice a la hipótesis. Por lo tanto, no puede suceder ii. Como únicamente queda la posibilidad iii, se concluye entonces que $\# A > \# B$. $\blacklozenge$

4.8. Teorema 1.5 (de los cardinales de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$)

El cardinal de $\mathbb{Z}$ es mayor que el de $\mathbb{N}$

Demostración:

Sea la función $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n \geq 0 \\ -n, & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

En esta función se tiene que $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$, por tanto, es una función sobreyectiva y, como $f(n) = f(-n)$ siendo $n \neq -n$, $\forall n \neq 0$, dicha función es no inyectiva. Por el teorema anterior se tiene que $\# \mathbb{Z} > \# \mathbb{N}$. ♦

4.9. Teorema 1.6 (de los cardinales de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}$)

El cardinal de $\mathbb{R}$ es mayor que el de $\mathbb{Z}$

Demostración:

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es entero} \\ [x], & \text{si } x \text{ no es entero} \end{cases}$$

Donde $[x]$ es el entero inmediatamente menor que x (parte entera de x).

Acá $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ y f es no inyectiva. Luego, por el teorema 1.4, $\# \mathbb{R} > \# \mathbb{Z}$. ♦

Así, de una manera sencilla se ha demostrado que la hipótesis del continuo es falsa, pues, hemos probado que $\# \mathbb{N} < \# \mathbb{Z} < \# \mathbb{R}$, sólo usando cardinalidad y la teoría de **Cantor**.

Ahora se puede probar que $\# \mathbb{N}^* < \# \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}^*$ sólo posee un elemento que no está en $\mathbb{N}$, entonces, haciendo $\# \mathbb{N}^* = \omega$, se tendrá que $\omega < \omega + 1 = 1 + \omega = \aleph_0$ (tanto por la derecha como por la izquierda), argumento que echa por tierra toda la inmensa teoría sobre la aritmética de cardinales.

4.10. A manera de conclusión

Todo lo anterior nos deja una cosa bien clara: la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par o } 0 \\ \frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

no es sobreyectiva. Sin embargo, durante muchos años se vio a esta función como una biyección entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. ¿Cuál fue el motivo para que todos los matemáticos creyeran esta falsedad? Sencillamente uno solo: el dejar que la mano todopoderosa del infinito arreglara las cosas que no quedaban claras. Es decir, se pensaba que por muy grande que fuera $m \in \mathbb{Z}$ siempre habría un $n \in \mathbb{N}$ para el cual $f(n) = m$, lo cual ha quedado probado que no es así. Un análisis del porqué esta función no es sobreyectiva se puede ver en “EL CÁLCULO MODERNO DE UNA Y VARIAS VARIABLES CON LA RAZÓN DE CONTINUIDAD” en la página web “monografías.com”.

Septiembre, 2012. Cojedes, Venezuela