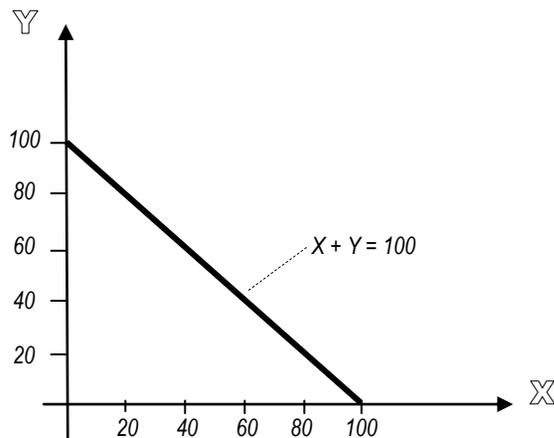


# COMO GRAFICAR UNA DESIGUALDAD O INECUACIÓN (PROGRAMACIÓN LINEAL)

Para fijar mejor la idea procederemos a mostrar varios ejemplos de menor a mayor grado de dificultad.

**EJEMPLO 1:** Determinar gráficamente el área que cumple con la siguiente desigualdad:  $X + Y \leq 100$

El primer paso consiste en graficar la recta  $X + Y = 100$ , recordando que en Programación Lineal solo se estudia el primer cuadrante ya que los valores que pueden tomar las variables son positivos o iguales a cero ( $X \geq 0$ ,  $Y \geq 0$ ).

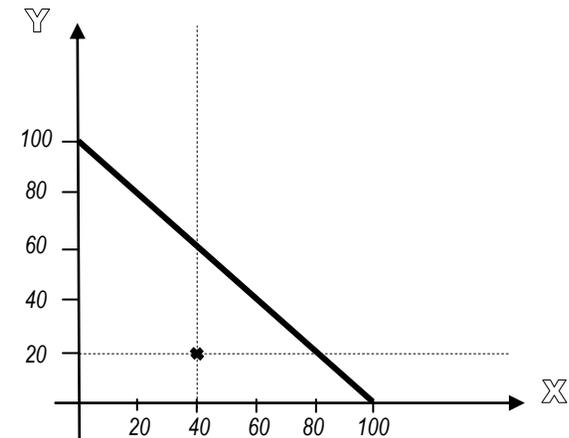


Una expresión matemática del tipo " $aX + bY > c$ " ó " $aX + bY < c$ " divide al plano " $XY$ " en dos áreas, una que cumple con la expresión y otra que no cumple, la separación de dichas áreas está representada por la recta " $aX + bY = c$ ".

Para determinar estas áreas basta con escoger cualquier punto en el plano e introducir sus valores en la desigualdad.

Si se cumple para dicho punto se cumplirá para todos los puntos que se encuentran de ese mismo lado. Si no se cumple, tampoco se cumplirá para ninguno de los otros puntos de ese mismo lado.

En este caso escogeremos el punto  $(40, 20)$  para determinar si cumple o no con  $X + Y \leq 100$

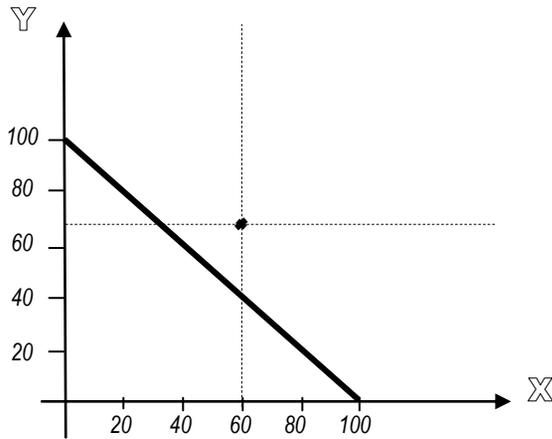


Sustituyendo estos valores  $(40, 20)$  en la desigualdad tendremos:  
 $40 + 20 \leq 100$  ;  $60 \leq 100$

Como si se cumple la desigualdad (60 es menor que 100) quiere decir que todos los puntos que se encuentran a la izquierda y debajo de la recta cumplen con la desigualdad  $X + Y < 100$ . Los puntos que se encuentran a la derecha y por encima de la recta no cumplirán.

Probemos con un punto que se encuentre por encima de la recta para verificar que es cierto lo que hemos dicho anteriormente: es decir **NO DEBE CUMPLIR** con  $X + Y < 100$ .

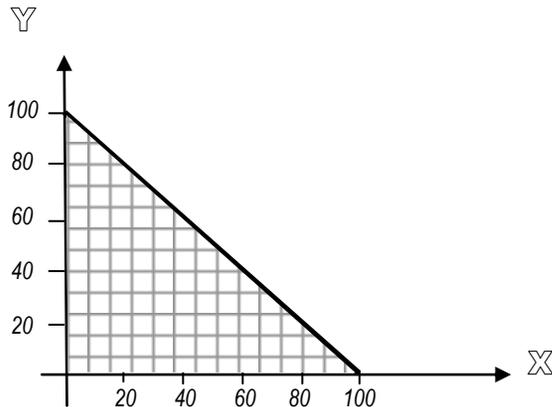
Estudiando el punto (60,70):



Sustituyendo estos valores (60,70) en la desigualdad tendremos:  
 $60 + 70 \leq 100$  ;  $130 \leq 100$

**NO** se cumple la desigualdad (130 **NO** es menor que 100).

El plano quedará dividido de la siguiente manera:



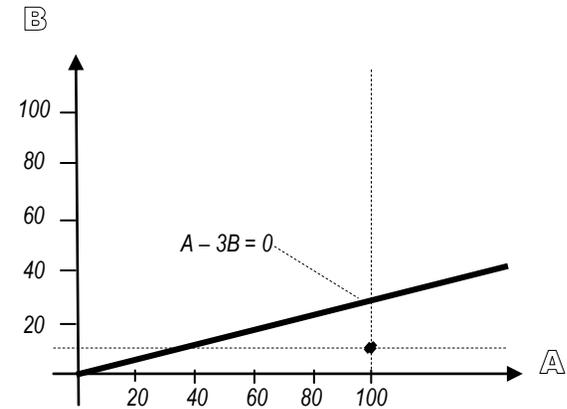
La parte sombreada representará el área del plano que cumple con la desigualdad " $X + Y < 100$ ", y esta misma área más los puntos contenidos en la recta cumplen con la desigualdad " $X + Y \leq 100$ ".

Para determinar las áreas que cumplen o no con la desigualdad basta estudiar un solo punto. En el ejemplo anterior trabajamos con dos puntos para fijar bien la idea.

**Recuerde:** Si se cumple para un punto se cumplirá para todos los que estén de ese mismo lado. Si no se cumple para un punto no se cumplirá para ninguno de los que estén de ese mismo lado.

**EJEMPLO 2:** Determinar gráficamente el área que cumple con la siguiente desigualdad:  $A - 3B \leq 0$

Graficamos la recta  $A - 3B = 0$  :



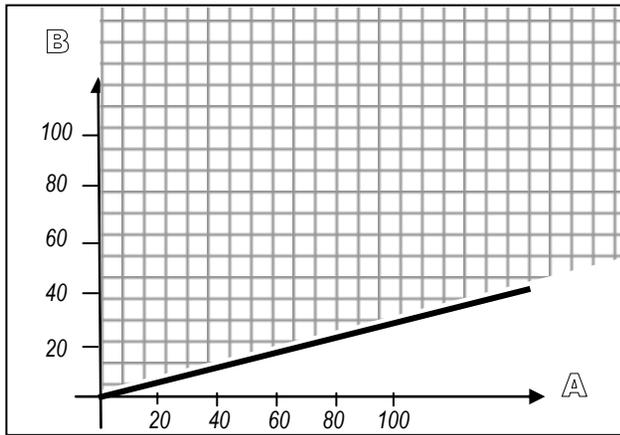
Estudiando el punto (100,10) tendremos:

$$A - 3B \leq 0 ; 100 - 3(10) \leq 0 ; 100 - 30 \leq 0 ; 70 \leq 0$$

Como 70 **NO** es menor que cero, quiere decir que **NO** cumple con la desigualdad y por consiguiente todos los puntos que están debajo de la recta " $A - 3B = 0$ " tampoco cumplen.

En atención a lo dicho anteriormente, la zona que cumple con la expresión " $A - 3B \leq 0$ " será la que se encuentra ubicada por encima de la recta graficada más los puntos contenidos en ella.

El área sombreada cumple con la desigualdad: " $A - 3B \leq 0$ ":

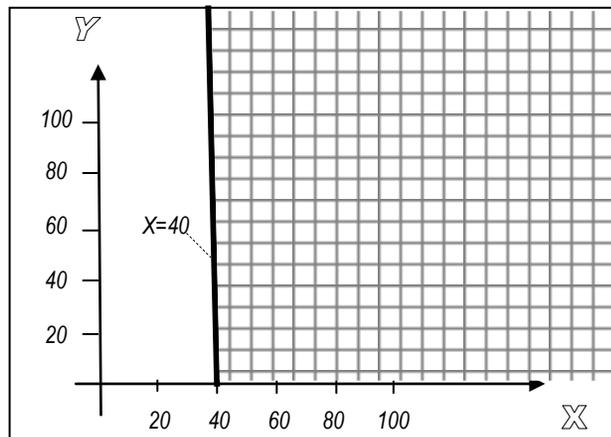


Escoja cualquier punto que esté en esta área sombreada y verifique que si cumple con  $A - 3B \leq 0$ .

**EJEMPLO 3:** Determinar gráficamente el área que cumple con la siguiente desigualdad :

$$"X \geq 40"$$

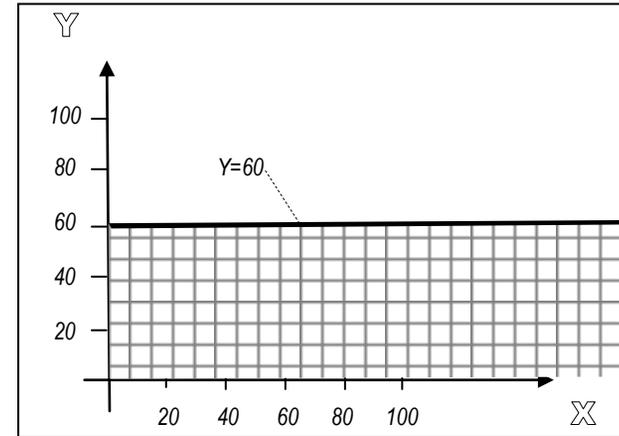
Primero grafico la recta " $X = 40$ " y observo que los valores mayores a 40 se encontrarán a la derecha de esta recta. Dicha área sombreada es la que cumple con " $X \geq 40$ ".



**EJEMPLO 4:** Determinar gráficamente el área que cumple con la siguiente desigualdad :

$$"Y \leq 60"$$

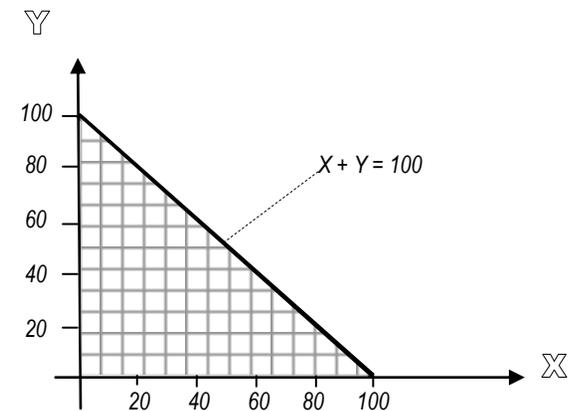
Primero grafico la recta " $Y = 60$ " y observo que los valores menores a 60 se encontrarán por debajo de esta recta.:



**EJEMPLO 5:** Determinar gráficamente el área que cumple con las siguientes desigualdades :

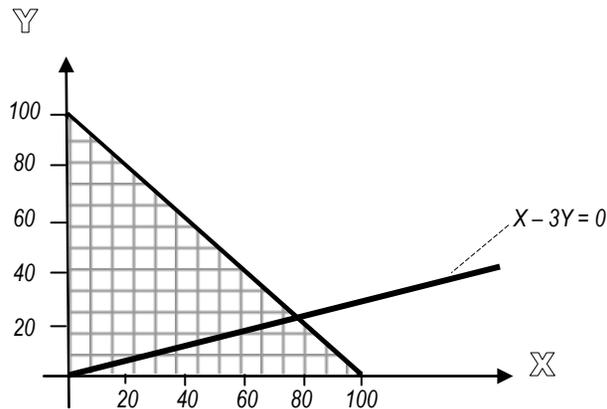
$$"X + Y \leq 100" \text{ y } "X - 3Y \leq 0"$$

Primero estudio la primera desigualdad (" $X + Y \leq 100$ ") y determino el área que cumple con ella:



Sobre esta misma gráfica estudio la otra desigualdad teniendo presente que el área a determinar debe cumplir con las dos desigualdades al mismo tiempo.

Graficando la recta " $X - 3Y = 0$ " tenemos:



Quando estudiamos la segunda desigualdad " $X - 3Y \leq 0$ " notamos que los puntos que cumplen con ella están ubicados por encima de la recta " $X - 3Y = 0$ ".

Quiere decir que el área sombreada por debajo de la recta " $X - 3Y = 0$ " cumple con la primera desigualdad " $X + Y \leq 100$ " pero no con la segunda (entonces no forma parte del área buscada).

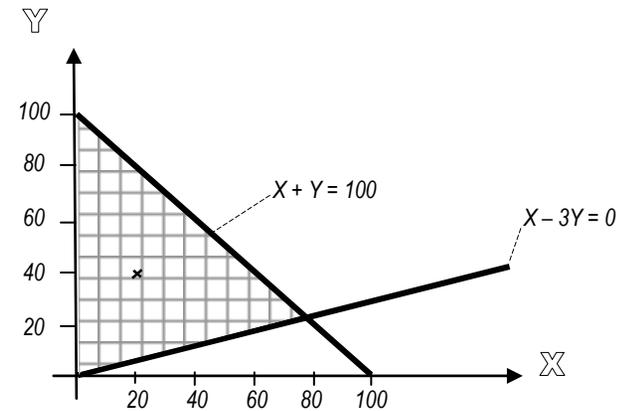
De igual forma notamos que hay dos áreas ubicadas por encima de la recta " $X - 3Y = 0$ ", una que está sombreada (cumple con la primera desigualdad " $X + Y \leq 100$ ") y otra que está en blanco (no cumple con la primera desigualdad pero cumple con la segunda).

Como debemos indicar el área que cumple con las dos desigualdades no tomo en cuenta la que está ubicada por encima de la recta " $X - 3Y = 0$ " (cumple con la segunda desigualdad " $X - 3Y \leq 0$ ") y que no cumple con " $X + Y \leq 100$ ".

En otras palabras dejo la que está sombreada y no tomo en cuenta la que está en blanco.

**Quedará sombreada únicamente el área que cumpla con las dos desigualdades.**

El área que cumple las desigualdades " $X + Y \leq 100$ " y " $X - 3Y \leq 0$ " será la que se muestra sombreada a continuación:



Para comprobar que esta zona cumple con las dos restricciones utilice cualquier punto que esté ubicado en la zona sombreada e introdúzcalo en las dos desigualdades.

Probemos con el punto (20,40), que está resaltado en el gráfico anterior dentro del área sombreada:

$$X + Y \leq 100 \quad ; \quad 20 + 40 \leq 100 \quad ; \quad 60 \leq 100$$

$$X - 3Y \leq 0 \quad ; \quad 20 - 3(40) \leq 0 \quad ; \quad -100 \leq 0$$

Notamos que al sustituir los valores (20,40) en las dos desigualdades ambas se cumplen.

Probemos con el punto (60,80), que está ubicado fuera del área sombreada:

$$X + Y \leq 100 \quad ; \quad 60 + 80 \leq 100 \quad ; \quad 140 \leq 100$$

$$X - 3Y \leq 0 \quad ; \quad 60 - 3(80) \leq 0 \quad ; \quad -180 \leq 0$$

Notamos que al sustituir los valores (60,80) en las dos desigualdades, se cumple en la segunda pero **NO** en la primera.

**EJEMPLO 6:** Determinar gráficamente el área que cumple con las siguientes desigualdades :

$$A_1 + A_2 \leq 500 \quad (1)$$

$$-A_1 + A_2 \geq 0 \quad (2)$$

$$-2A_1 + A_2 \geq 0 \quad (3)$$

$$A_1 \geq 100 \quad (4)$$

Y a la condición de no negatividad que implica que todas las variables de decisión sean positivas (valores mayores o iguales a cero)

$$A_1, A_2 \geq 0 \quad (5)$$

### Solución Gráfica:

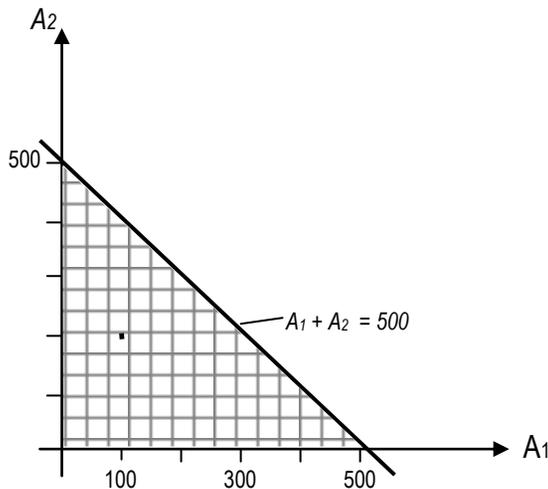
El problema tiene solamente dos variables de decisión,  $A_1$  y  $A_2$ , y por lo tanto sólo dos dimensiones, así que podemos usar un procedimiento gráfico para resolverlo.

Dicho proceso consiste en dibujar un gráfico en dos dimensiones, utilizando a  $A_1$  y  $A_2$  como los ejes. El primer paso consiste en identificar los valores de  $A_1$  y  $A_2$  permitidos por las restricciones, esto es, la región o área factible de solución determinada por las restricciones.

Recuerde que las restricciones de no negatividad ( $A_1 \geq 0$  ;  $A_2 \geq 0$ ) limitarán la región factible a estar en el cuadrante positivo (conocido como primer cuadrante).

#### - Estudiando la primera restricción

$$A_1 + A_2 \leq 500 \quad (1)$$



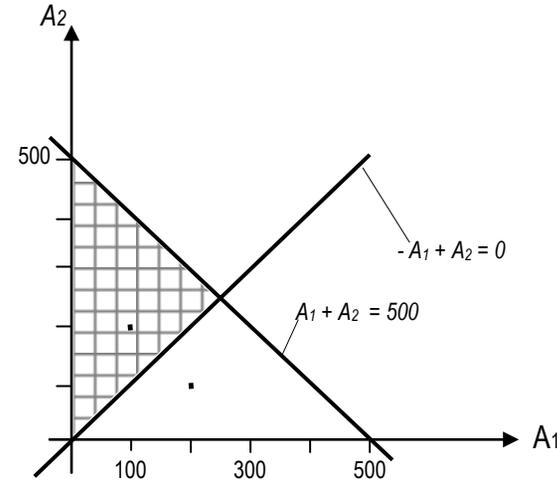
El área sombreada representa el espacio de solución factible de  $A_1 + A_2 \leq 500$

El procedimiento más recomendado consiste en trazar la recta ("generada por la restricción") y sombrear el lado factible y a medida que vayamos graficando nuevas rectas "borramos" el área sombreada anteriormente que no cumpla con esta nueva restricción.

En el gráfico anterior notamos que el punto (100,200) cumple con la restricción (100 + 200 < 500) por lo que todos los que están en el primer cuadrante y del lado izquierdo de la recta también.

#### - Estudiando la restricción 2:

$$-A_1 + A_2 \geq 0 \quad (2)$$



El área sombreada representa el espacio de solución factible de  $A_1 + A_2 \leq 500$  y  $-A_1 + A_2 \geq 0$

El punto (100,200) cumple con la restricción dos ( $-100 + 200 > 0$ ) y ya vimos que cumple con la restricción 1. Sin embargo el punto (200,100) cumple con la restricción 1... (200+100 < 500) pero **NO** cumple con la restricción 2... ( $-200 + 100$  no es mayor que 0) por lo tanto no estará dentro del espacio de solución.

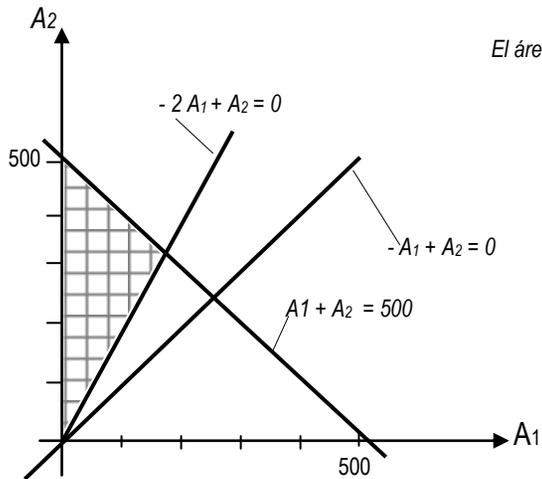
El estudiante debe recordar que para formar parte del espacio de solución o área factible los puntos deben cumplir con todas las restricciones que se vayan estudiando.

El último aspecto señalado permite garantizar que la solución encontrada cumpla con todas las restricciones o limitaciones que impone el Modelo Matemático.

Nótese también que a medida que se van analizando las restricciones el espacio factible (área sombreada) se hace menor. **JAMAS** crecerá.

- **Estudiando la restricción 3:**

$$-2A_1 + A_2 \geq 0 \quad (3)$$

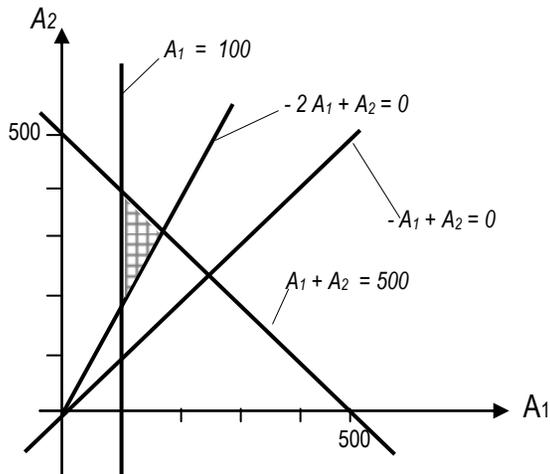


El área sombreada representa el espacio de solución factible de

- $2A_1 + A_2 \geq 0$
- $A_1 + A_2 \leq 500$
- $A_1 + A_2 \geq 0$

- **Estudiando la restricción 4:**

$$A_1 \geq 100 \quad (4)$$



El área sombreada representa el espacio TOTAL de solución

Definida como ha sido el área total de factibilidad, el último paso consiste en escoger el punto de dicha región que maximiza o minimiza el valor de la función objetivo.