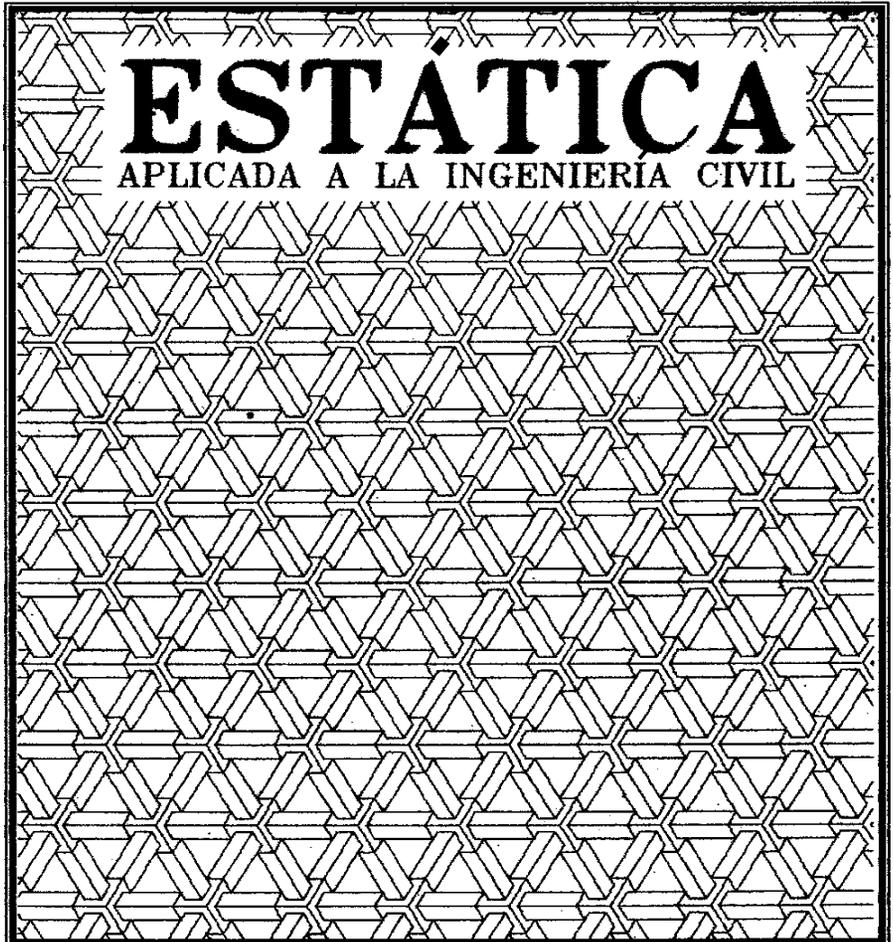


# **ESTÁTICA**

**APLICADA A LA ING. CIVIL**

## **ESTÁTICA** APLICADA A LA INGENIERÍA CIVIL



**MECÁNICA**

**FUERZA - MOMENTO**

**EQUILIBRIO ESTÁTICO**

**ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS**

**ARMADURAS**

**DIAGRAMAS DE FUERZAS**

**DIAGRAMA DE MOMENTO**

**ING. José Luis Albornoz Salazar**

A U T O R  
**José Luis Albornoz Salazar**  
Teniente Coronel (GN)  
Licenciado en Ciencias y Artes Militares (EFOFAC)  
Ingeniero Civil (IUPFAN)

*Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo el problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter.*

*Por ello, un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y los ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.*

***Un estudiante cuyos estudios incluyan cierto grado de matemáticas tiene también una particular oportunidad. Dicha oportunidad se pierde, claro está, si ve las matemáticas como una materia de la que tiene que presentar un examen final y de la cual no volverá a ocuparse una vez pasado éste.*** Puede descubrir, sin embargo, que un problema de matemáticas puede ser tanto o más divertido que un crucigrama. Habiendo degustado el placer de las matemáticas, ya no las olvidará fácilmente, presentándose entonces una buena oportunidad para que las matemáticas adquieran un sentido para él, ya sean como un pasatiempo o como herramienta de su profesión, o su profesión misma o la ambición de su vida.

**G. POLYA.**

*“Aunque ya hayas tirado muchas veces con el arco, continúa prestando atención a la manera cómo colocas la flecha, y cómo tensas la cuerda.*

*Cuando un estudiante está consciente de sus necesidades, termina siendo más inteligente que el profesor distraído”.*

**LAO TZU.**

# ***INTRODUCCIÓN***

Todo libro de texto debería empezar con una nota de incentivo para el estudiante, que bien pudiera expresarse en términos de comprender los fundamentos científicos que han sido desarrollados en dicha Ciencia, o expresarse en términos de "insinuación" de que la materia no está revestida de grandes dificultades y que su estudio y comprensión resulta "entretenido" para la especialidad escogida.

Partiendo de la premisa anterior este texto trata de hacer "agradable" el estudio de la Mecánica de Cuerpos Rígidos que ha sido denominada como **Estática** y cuya comprensión y manejo resulta esencialmente importante para los estudiantes de las diversas ramas de la ingeniería y herramienta imprescindible para el Cálculo Estructural en la ingeniería civil.

En tal sentido, hemos hecho un enfoque sencillo pero tratando de cubrir los aspectos esenciales y necesarios en la materia objeto de estudio.

En el **Capítulo I** encontrarás la definición y comentario de los términos fundamentales de la materia, los cuales constituyen la

base primordial del estudio de la estática. Recomendamos que prestes especial atención a todos los aspectos indicados, pues, aunque son muy sencillos y de fácil comprensión, te permitirán abordar sin dificultad los ejercicios y problemas propuestos más adelante.

El **Capítulo II** contiene problemas resueltos de equilibrio estático, los mismos se presentan bajo un procedimiento que hemos denominado "paso a paso". El mismo persigue abarcar todos aquellos criterios que deben ser tomados en cuenta a la hora de resolver cualquier problema relacionado con la estática. Este capítulo persigue generar en el alumno una lógica metodología en la resolución de problemas.

El **Capítulo III** se refiere al análisis de estructuras, sobre todo a la más usada en la estática (armadura), donde las condiciones de estudio son más profundas que las utilizadas en los capítulos anteriores pero son hechas con un procedimiento similar ("paso a paso"), apoyándonos en ejemplos ilustrativos para "fijar" de una manera eficiente el procedimiento de resolución de problemas.

El **Capítulo IV** abarca lo relacionado a las características de sollicitación de un cuerpo rígido, mejor conocidas como Diagramas de Fuerzas Normales, Fuerzas Cortantes y Momentos Flexionantes. Se indican las suposiciones para el análisis de vigas, las generalizaciones para la construcción de los diagramas y la convención de signos utilizados. Se presentan ejemplos ilustrativos ("paso a paso") de menor a mayor grado de dificultad.

El **Capítulo V** presenta 10 ejercicios resueltos que han sido propuestos por alumnos de la asignatura.

# ***CAPÍTULO I***

## ***DEFINICIÓN Y COMENTARIO DE TÉRMINOS FUNDAMENTALES***

### **DEFINICIÓN Y COMENTARIO DE TÉRMINOS FUNDAMENTALES**

**MECÁNICA** : Puede definirse como la Ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. Se divide en tres partes: mecánica de cuerpos rígidos , mecánica de cuerpos deformables y mecánica de fluidos.

La mecánica de cuerpos rígidos se divide en Estática y Dinámica; la primera estudia los cuerpos en reposo y la segunda los cuerpos en movimiento.

La Estática tiene por objeto el estudio, por medios geométricos y matemáticos, de las fuerzas, separadamente o en conjunto para establecer sus condiciones de equilibrio, analizando sus elementos y formas de acción.

**FUERZA** : Es cualquier acción que se ejerce sobre un objeto y que tiende a moverlo, detenerlo o cambiar de algún modo su velocidad o la dirección de su movimiento. Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede ejercerse por contacto real o a distancia, como en el caso de las fuerzas gravitacionales y magnéticas.

Una fuerza se caracteriza por su punto de aplicación, su magnitud, dirección y sentido y se representa por un vector (la fuerza es una magnitud vectorial).

Con la producción de fuerzas aplicadas a determinados fines, pueden lograrse los estados deseados en el comportamiento de los cuerpos.

Con la supresión de fuerzas o la oposición de nuevas fuerzas contra otras existentes, puede llegarse a la obtención del reposo y la estabilidad.

Graficamente se representan por un segmento de recta con un punto en su extremo posterior y dos aletas en el anterior, o sea una flecha (fig.1).



FIGURA 1

Los caracteres o características de las fuerzas, determinados por la longitud, inclinación y extremos de la flecha, establecen los elementos de las fuerzas.

Los elementos otorgan a las fuerzas su forma de actuar, el poder con que lo hacen y señalan el sitio donde influyen:

**El punto de aplicación** es la parte o lugar donde la fuerza ejerce su acción. Por esta causa, debe hacerse el dibujo de la fuerza con su extremo posterior aplicado directamente al sitio del cuerpo donde actúa (fig. 2a). Pero si en lugar de indicar el extremo posterior aplicado a ese sitio, indicamos aplicado al extremo anterior, no se ha variado en nada la influencia de la fuerza en el mencionado sitio (fig. 2b).

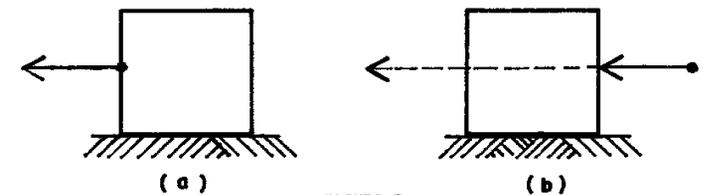


FIGURA 2

Esto significa que no es imprescindible representar la fuerza con su punto de aplicación coincidiendo con el lugar en que obra, sino que al definir "punto de aplicación" se refiere a señalar la sección o parte del cuerpo donde descarga su efecto (lo que de ahora en adelante llamaremos "Linea de acción o aplicación de una Fuerza" ).

**Dirección** es la inclinación con que opera la fuerza, inclinación relacionada con la horizontal o la vertical. La dirección está determinada por el segmento de recta de la flecha representativa y se le designa por las expresiones : dirección vertical (fig. 3a), dirección horizontal (fig. 3b) y dirección inclinada (fig. 3c); en la dirección inclinada, suele indicarse los grados del ángulo de inclinación.

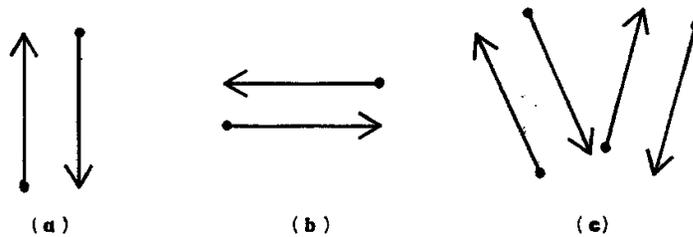


FIGURA 3

**El sentido** establece hacia dónde se ejerce la acción, esto es, hacia la izquierda o hacia la derecha, hacia arriba o hacia abajo y está indicado por las aletas del extremo anterior de la flecha representativa (punta de la flecha).

**La magnitud o intensidad** es la acción en kilogramos, con que las fuerzas influyen.

## **CLASIFICACIÓN DE LAS FUERZAS :**

Según que las fuerzas produzcan o se opongan al movimiento , se clasifican en motoras o resistentes; por la duración de la acción se clasifican en instantaneas, accidentales y permanentes; por su distribución sobre los cuerpos pueden ser concentradas o repartidas.

Son concentradas cuando todo el efecto se produce en una superficie o longitud pequeña, tal como el de un objeto suspendido o colgado de una viga a través de una cuerda (figura 4).

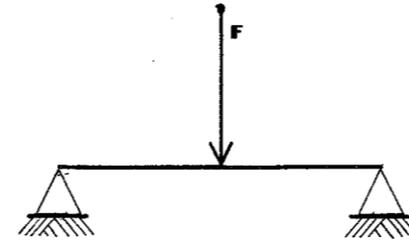


FIGURA 4

Repartidas, en cambio, son las que abarcan una superficie o una longitud considerable, ejemplo: un muro construido sobre una viga, el agua de un tanque pesando sobre el fondo. Las fuerzas repartidas pueden ser uniformes o no uniformes.

Fuerzas uniformemente repartidas son aquellas distribuidas en extensión considerable con el mismo valor en todas sus partes (fig. 5).

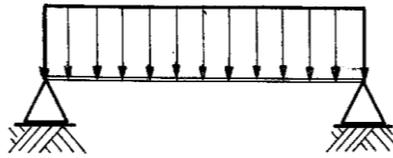


FIGURA 5

Fuerzas no uniformemente repartidas, en cambio, tienen la misma repartición que las anteriores, pero con valor distinto en las distintas partes (fig. 6).

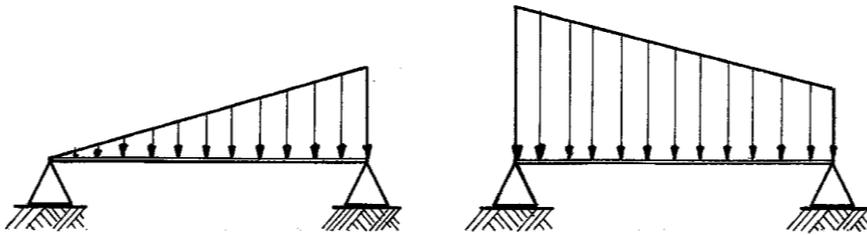


FIGURA 6

### **COMPONENTES DE UNA FUERZA :**

Una fuerza puede ser reemplazada por dos o mas fuerzas componentes que al actuar juntas produzcan el mismo efecto que ella.

El bloque de la izquierda en la figura 7, está sujeto a una fuerza de tracción de 20 kg; pueden reemplazarla los componentes de 50 kg y de 30 kg que aparecen actuando sobre

el bloque de la derecha. El efecto de los dos componentes (50 kg y 30 kg) es exactamente el mismo que el de la fuerza aislada de 20 kg.

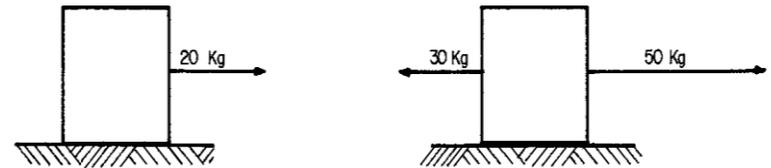


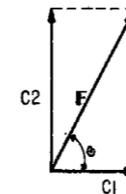
FIGURA 7

Los problemas de estática suelen simplificarse descomponiendo fuerzas en componentes perpendiculares alineados con determinado Sistema de Coordenadas. La figura 8.a muestra un Vector Fuerza (F). Este puede descomponerse en componentes perpendiculares alineados en cualquier dirección escogida. La figura 8.b muestra dos posibles pares de componentes. Obsérvese que C1 y C2 difieren en longitud y dirección, según el Eje de Coordenadas seleccionado. Si el ángulo entre F y C1 es  $\theta$ , entonces por las relaciones de los triángulos rectángulos:

$$C1 = F * \text{COS } \theta \quad \text{y} \quad C2 = F * \text{SEN } \theta$$



(a)



(b)

## PRINCIPIOS DE LA ESTÁTICA GRÁFICA

**Ejemplo 1:** La figura E.1 presenta una fuerza (F) que actúa con un ángulo  $\theta$  respecto al eje horizontal. Si  $F = 20 \text{ kg}$  y  $\theta = 25$  grados, encuentrense las dos componentes de F a lo largo de los ejes horizontal y vertical.

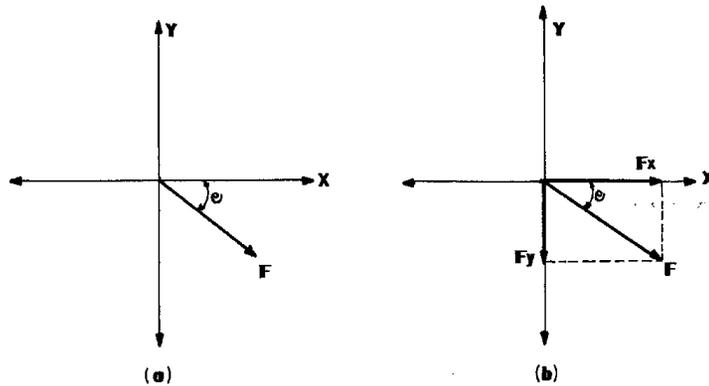


FIGURA E.1

**Solución:** En la figura E.1b hemos reemplazado F por componentes perpendiculares, a lo largo de los ejes vertical y horizontal.

$$F_x = F \cos \theta = (20 \text{ kg}) * (\cos 25) = (20) * (0,906) = 18,12$$

$$F_x = 18,12 \text{ kg}$$

$$F_y = F \sin \theta = (20 \text{ kg}) * (\sin 25) = (20) * (0,423) = 8,46$$

$$F_y = 8,46 \text{ kg}$$

**NOTA:** El efecto de los componentes  $F_x$  y  $F_y$  es exactamente el mismo que el de la fuerza aislada F.

El descomponer dicha fuerza en "componentes perpendiculares" alineados en un sistema cartesiano nos facilitará la determinación de las condiciones de equilibrio de cualquier cuerpo sometido a un sistema de fuerzas.

**PRIMERO:** Dos fuerzas de la misma intensidad con dirección y sentidos opuestos y punto de aplicación común, están en equilibrio.

En la figura 9 están representadas dos fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  cuyas direcciones se encuentran sobre una misma recta, su punto de aplicación es el mismo, sus intensidades son iguales y sus sentidos contrarios.

Se comprende fácilmente que ninguna de las dos fuerzas prevalecerá sobre la otra y el cuerpo donde estuvieran aplicadas no se moverá en ningún sentido por efecto de cualquiera de ellas.

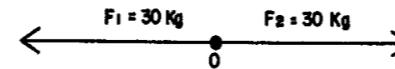


FIGURA 9

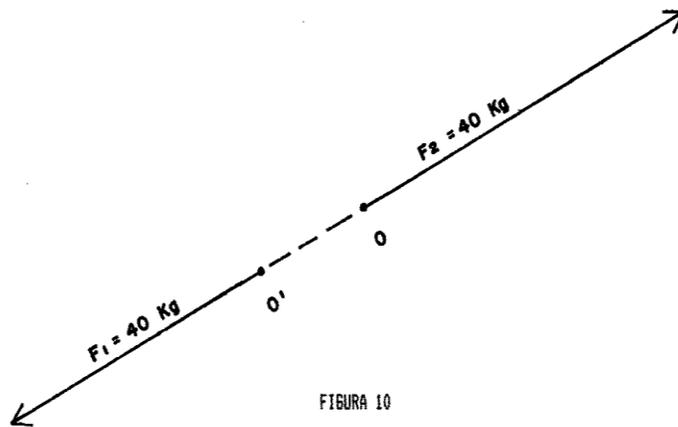
Prácticamente se demuestra este principio si dos personas con la misma fuerza tiraran contrariamente de los extremos de una cuerda; naturalmente ninguno arrastrará al otro. La intensidad estaría representada por la fuerza igual de cada persona, la dirección sería la cuerda, el sentido la oposición con que ambos tiran, y el punto de aplicación teóricamente la mitad de la distancia entre las dos personas.

**SEGUNDO:**  
\*\*\*\*\*

Dos fuerzas de la misma intensidad, sentido contrario, distintos puntos de aplicación y direcciones congruentes, están en equilibrio.

La figura 10 muestra dos fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  en las condiciones que establece el enunciado.

Lo mismo que en el principio anterior, la teoría explicativa es igual y la demostración práctica podría hacerse si las dos personas del ejemplo, tiraran de dos cuerdas atadas a partes opuestas de un bulto u objeto indeformable.



**TERCERO:**  
\*\*\*\*\*

En una fuerza dada, puede ser trasladado su punto de aplicación sobre la recta de acción sin que sus efectos varíen.

Si sobre un cuerpo está aplicada una fuerza  $F_2$ , fig.10, en un punto  $O$  y a este punto lo llevamos al lugar  $O'$

trasladando a ese punto la fuerza  $F_2$ , su acción sobre el cuerpo no cambiará en lo más mínimo.

Se puede comprobar esto si suponemos un objeto, un cajón por ejemplo, que se empuja con una fuerza de 50 kg, si en lugar de empujarlo quisieramos tirarlo (halarlo) de la parte anterior y a la misma altura con una fuerza igual de 50.kg, el cajón sería arrastrado de la misma manera.

**CUARTO:**  
\*\*\*\*\*

Si varias fuerzas actúan coincidentes en sus direcciones con una misma recta y unas cuantas tienen un mismo sentido y las restantes sentido contrario, la resultante tendrá una dirección coincidente también con la misma recta y su sentido e intensidad equivaldrá a la suma algebraica de todas las fuerzas. Para esto es necesario designar con el signo (+) a un grupo de fuerzas, por ejemplo las que tienen sentido hacia la derecha o hacia arriba y con signo (-) las otras.

La figura 11 ilustra este principio. Las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  tienen la misma dirección, el sentido es igual para todas orientado hacia la derecha y hacia arriba, y la intensidad es de 25 kg, 40 kg y 30 kg respectivamente; las fuerzas  $F_4$  y  $F_5$  tienen su dirección similar y coincidiendo con la recta de las direcciones de las precedentes, su sentido es hacia la izquierda y hacia abajo y la intensidad es de 35 kg y 20 kg respectivamente. La resultante tendrá la dirección concordante con la de todas las fuerzas, el sentido

hacia la derecha y hacia arriba y su intensidad será de 40.kg; esto resulta de que la suma de las fuerzas F1, F2 y F3 es mayor que la suma de las otras dos de sentido opuesto y la resta de las intensidades de ambos grupos de fuerzas es igual a 40 kg.

$$R = F_1 + F_2 + F_3 - F_4 - F_5$$

$$R = 25 + 40 + 30 - 35 - 20$$

$$R = 95 - 55$$

$$R = 40 \text{ KG}$$

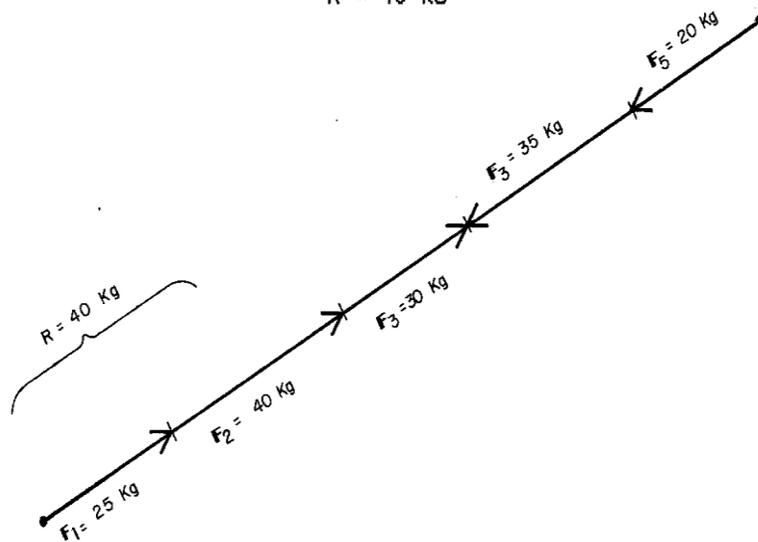


FIGURA 11

En el caso de la cuerda tirada por dos personas, del principio primero, supongamos que de un lado tiran tres personas y del otro dos; no es de dudar que las tres personas arrastrarán a las dos del extremo, aceptando que la fuerza desarrollada por cada una fuera más o menos la misma.

**QUINTA:**  
\*\*\*\*\* En un grupo o sistema de fuerzas que están en equilibrio, cualquiera de ellas contrarresta o equilibra la acción de las restantes.

Esto se demuestra con el ejemplo indicado en la figura 12, en la que están representadas las fuerzas F1, F2, F3 y F4 de intensidades iguales y direcciones coincidentes y sentidos contrarios de dos en dos. Es un sistema de cuatro fuerzas en equilibrio.

Supongamos que queremos reemplazar por F2 el efecto de las demás; por el principio primero las F1 y F3 se equilibran sin afectar por lo tanto a aquella; queda solo la F4 que es opuesta a F2 y por tanto, a su vez, la equilibra; en consecuencia, F2 equilibra el efecto de las otras tres.

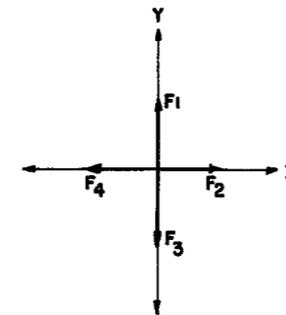


FIGURA 12

**SEXTO:**  
\*\*\*\*\* Si dos fuerzas de la misma intensidad actúan sobre un punto de aplicación común, formando entre sí un ángulo cualquiera, la resultante será la bisectriz del ángulo abierto entre las fuerzas.

En la figura 13 las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  tienen la misma intensidad, la dirección de ambas determina un ángulo y sus sentidos son respectivamente hacia arriba y la derecha para  $F_1$  y hacia abajo y a la derecha para  $F_2$ . La dirección de la resultante será hacia la derecha y su "línea de acción" la bisectriz del ángulo abierto entre  $F_1$  y  $F_2$ .

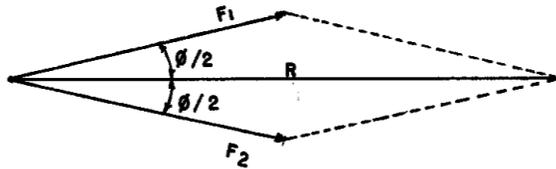


FIGURA 13

## MOMENTO DE UNA FUERZA

EL momento de una fuerza puede definirse como el efecto de giro que produce sobre un cuerpo alrededor de un punto. Generalmente sus unidades son kilogramos.metros.

Consideremos el cuerpo rígido de la figura 14 y el efecto de la fuerza  $F$  que actúa sobre él. Un efecto sería la tendencia a producir un movimiento en la dirección de  $F$ . Si el cuerpo estuviese sujeto al punto  $A$  mediante un pasador, entonces  $F$  produciría una rotación alrededor de  $A$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

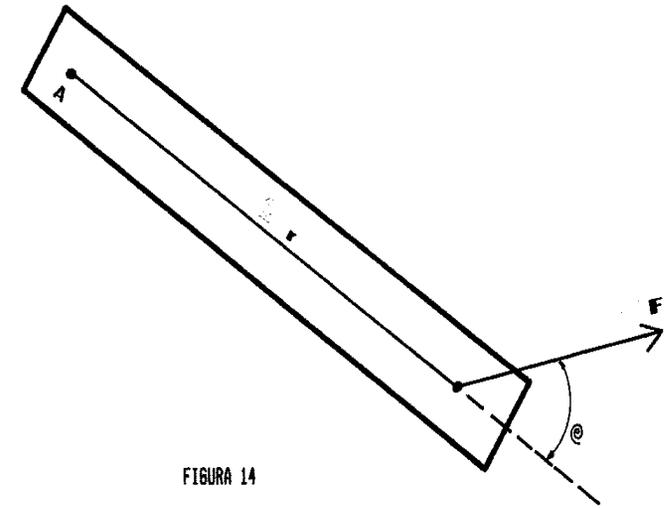


FIGURA 14

La magnitud de este efecto rotatorio depende tanto de las magnitudes como de las direcciones de  $F$  y  $r$ . Si la línea de acción de  $F$  pasa por el punto  $A$ , el momento con respecto a este punto es cero, o sea que no existe efecto de giro. Una forma simple de calcular el efecto de giro consiste en resolver  $F$  en sus componentes, una de ellas que pase por el punto  $A$  y que no producirá efecto de giro y la otra, que será la responsable de la rotación del cuerpo, normal (perpendicular) al vector de posición  $r$ . Lo anterior debe llevarse a cabo en la forma que se ilustra en la figura 15, donde se muestra el plano que contiene a  $r$  y  $F$ . La magnitud del momento es:

$$r * F_y = r * F * \text{Sen } \theta$$

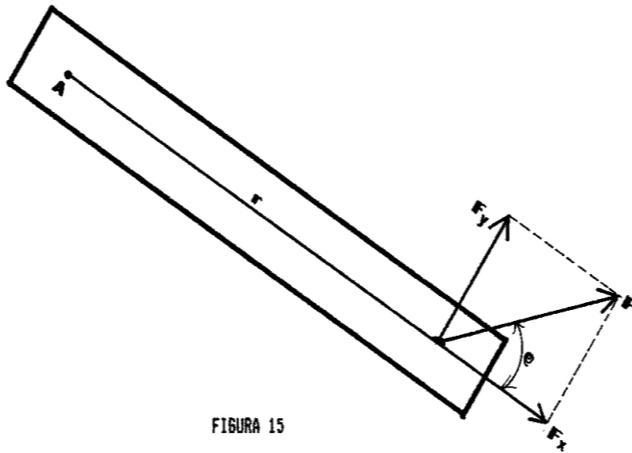


FIGURA 15

Las consideraciones anteriores son de vital importancia para el estudio del Momento Estático y es la forma "más facil" como enfocaremos el análisis de las características de sollicitación en los cuerpos rígidos sometidos a sistemas de fuerzas.

Cabe destacar que en este "texto" trabajaremos con cuerpos prismáticos pero para su estudio indicaremos en el plano solamente su eje.

Conocidos los principios de la Estática Gráfica (señalados anteriormente) debemos tener presente que el momento estático es el producto de multiplicar la intensidad de la fuerza por su brazo o distancia al punto en referencia, y que el momento estático de la resultante con respecto a un punto ubicado en el plano en que están contenidas la resultante y las fuerzas, es igual a la suma algebraica de los momentos estáticos de las componentes con respecto al mismo punto.

**Ejemplo 2:**

La figura E.2 muestra un puente simple con una fuerza que actúa sobre los soportes. Encuentrense los momentos debidos a la fuerza de 2500 kg alrededor de A y B.

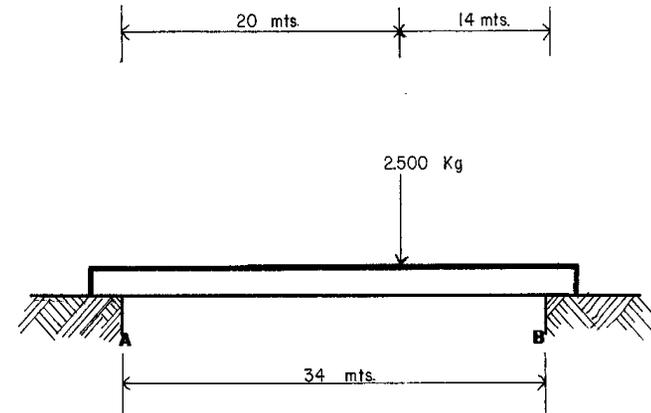


FIGURA E.2

Solución: las dimensiones mostradas están medidas desde los soportes del puente, denominados A y B. El momento alrededor de A puede designarse como MA y el momento alrededor de B como MB.

$$M_A = (2500 \text{ kg}) \times (20 \text{ mts}) = 50.000 \text{ kg.mts (en el sentido de las manecillas del reloj)}$$

$$M_B = (2500 \text{ kg}) \times (14 \text{ mts}) = 35.000 \text{ kg.mts (en sentido contrario de las manecillas del reloj)}$$

**Ejemplo 3:**

La figura E.3 muestra una viga simplemente apoyada con una fuerza que actúa en el punto C. Encuentrense los momentos debidos a la fuerza de 21,3 kg y  $\theta = 25$  grados, alrededor de A y B.

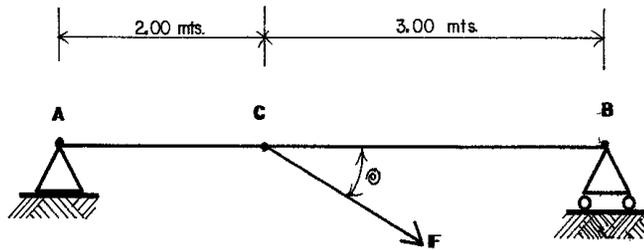


FIGURA E.3

Solución: Como se apuntó anteriormente (Componentes de una Fuerza) los problemas de estática suelen simplificarse descomponiendo fuerzas en componentes perpendiculares alineados con determinado sistema de coordenadas.

En este caso es recomendable tomar el "eje de la viga" como nuestro eje (X) y calcular los componentes  $F_x$  y  $F_y$  de la fuerza actuante  $F$ .

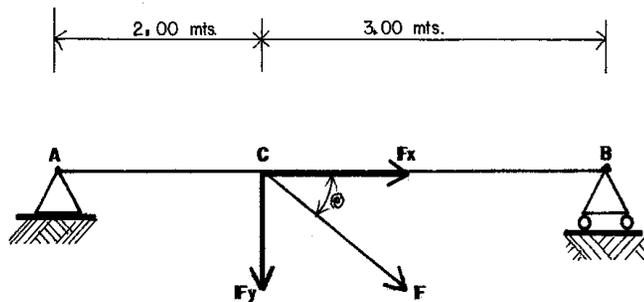


FIGURA E.3.1

$$F_x = F * \cos \theta = (21,3 \text{ kg}) * (\cos 25) = (21,3) * (0,906)$$

$$F_x = 19,3 \text{ kg}$$

$$F_y = F * \sin \theta = (21,3 \text{ kg}) * (\sin 25) = (21,3) * (0,423)$$

$$F_y = 9 \text{ kg}$$

El efecto de estas dos componentes es exactamente el mismo que el de la fuerza  $F$  que actúa sobre la viga de acuerdo a lo señalado en la figura E.3.

Esto nos permite enfocar ahora el problema según lo que podemos observar en la figura E.3.2.

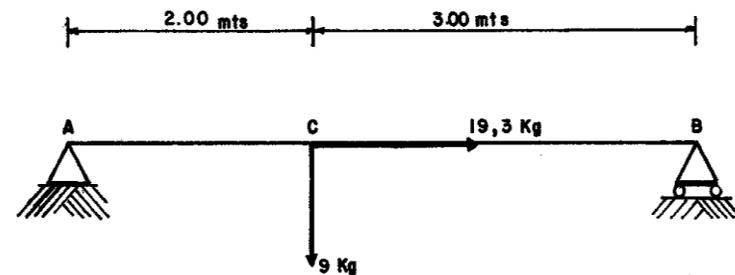


FIGURA E.3.2

Notamos inmediatamente que hemos facilitado el planteamiento del problema.

Cálculo de los momentos en los extremos A y B

La "línea de acción" de  $F_x = 19,3 \text{ kg}$  pasa por el eje de la viga y por ende por los puntos A, B y C, por esto su

## EQUILIBRIO ESTÁTICO

"brazo" es igual a cero y en consecuencia no existe efecto de giro en A ni en B y por lo tanto el momento de esta fuerza con respecto a los dos puntos mencionados es igual a cero.

La "línea de acción" de  $F_y = 9 \text{ kg}$  es perpendicular al eje de la viga y el cálculo del efecto de giro que ella produce se limita a una simple multiplicación.

Momento = Fuerza \* Brazo

$$M_A = (9 \text{ kg}) * (2 \text{ mts}) = 18 \text{ kg.mts en sentido horario.}$$

$$M_B = (9 \text{ kg}) * (3 \text{ mts}) = 27 \text{ kg.mts en sentido antihorario}$$

$$M_A = 18 \text{ kg.mts ( } \curvearrowright \text{ ) (*)}$$

$$M_B = 27 \text{ kg.mts ( } \curvearrowleft \text{ ) (*)}$$

( \* ) Es importante y facilita la comprensión de los resultados, indicar graficamente el sentido del efecto de giro o momento que se produce en el punto sometido a estudio al señalar los resultados.

La palabra Estática significa "que no se mueve". Así pues, el tema de este "texto" lo constituyen los objetos y las estructuras que no se mueven.

Las fuerzas que actúan sobre los cuerpos tienden a moverlos y acelerarlos; por lo tanto, cuando se trata de problemas en estática la suma algebraica de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en **equilibrio estático**, así como la de los momentos producidos por esas fuerzas, deben ser iguales a cero.

$$R = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

En algunos problemas es preferible separar en los componentes mutuamente perpendiculares las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Cuando se hace esto la suma algebraica de las fuerzas en cada una de las direcciones debe ser igual a cero.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

Todos los problemas de este libro (y la mayoría de los problemas en nuestra vida profesional) se refieren a sistemas de fuerzas Coplanares. En tales sistemas existen tres condiciones para el equilibrio estático:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

Es por eso que : dado un cuerpo rígido en el plano, sometido a un sistema de fuerzas y momentos; se dice que está en equilibrio estático si y solo si:

1. La sumatoria de las fuerzas cuya "línea de acción" sea el eje X es nula:

$$\Sigma F_x = 0$$

2. La sumatoria de las fuerzas cuya "línea de acción" sea el eje Y es nula:

$$\Sigma F_y = 0$$

3. La sumatoria de los momentos que producen las fuerzas anteriores sea igual a cero:

$$\Sigma M_o = 0$$

Para escribir las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo rígido, es esencial identificar correctamente las fuerzas que actúan sobre él y trazar el **diagrama de cuerpo libre** correspondiente.

En este capítulo examinaremos primero el equilibrio de estructuras bidimensionales sometidas a fuerzas contenidas en sus planos y aprenderemos a trazar sus diagramas de cuerpo libre. Además de las fuerzas "aplicadas" a la estructura, consideraremos las "**reacciones**" ejercidas sobre la estructura por sus apoyos. Aprenderemos a asociar una reacción

específica con cada tipo de apoyo y a determinar cuando la estructura está apoyada adecuadamente, de manera que podamos saber de antemano si las ecuaciones de equilibrio pueden resolverse realmente para las fuerzas y reacciones desconocidas.

## **DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE**

Para resolver un problema concerniente al equilibrio de un cuerpo rígido, habrá que tener en cuenta **todas** las fuerzas que actúan sobre el cuerpo; también es importante excluir cualquier fuerza que no se aplique directamente sobre el cuerpo. La omisión o la adición de otra fuerza extraña afectaría las condiciones de equilibrio. Por consiguiente, el primer paso en la solución del problema consistirá en trazar el Diagrama de Cuerpo Libre del cuerpo rígido en consideración.

En vista de su importancia en la solución de problemas de equilibrio resumiremos aquí los pasos que deben seguirse para trazar el Diagrama de Cuerpo Libre.

En primer lugar debe hacerse una definición clara de la elección del cuerpo libre. Luego se le aísla del piso y de cualquier otro cuerpo y se traza el contorno del cuerpo aislado, indicando las fuerzas externas. Estas representan la acción ejercida **sobre** el cuerpo libre **por** el piso y por los cuerpos que se han separado; las fuerzas deben aplicarse en los distintos puntos donde el cuerpo libre estuvo apoyado al piso o conectado con los otros cuerpos. El **peso** del cuerpo libre debe incluirse también entre las fuerzas externas ya que representa la atracción ejercida por la tierra sobre las

distintas partículas que lo forman; el peso debe aplicarse en el centro de gravedad del cuerpo. Cuando el cuerpo libre está formado por varias partes no deben incluirse las fuerzas que se ejercen entre éstas con las fuerzas externas, ya que dichas fuerzas son internas con respecto al cuerpo libre.

La magnitud y dirección de las **fuerzas externas** conocidas deben marcarse claramente en el diagrama de cuerpo libre. Se debe tener mucho cuidado en indicar el sentido de las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre y no el de las fuerzas ejercidas por él.

Las fuerzas externas conocidas son, casi siempre, el peso del cuerpo libre y las fuerzas aplicadas con un propósito específico.

Las **fuerzas externas desconocidas** consisten en las **reacciones** (algunas veces llamadas fuerzas de restricción) por medio de las cuales el piso y los otros cuerpos se oponen a un posible movimiento del cuerpo libre, obligándolo a permanecer en la misma posición. Las reacciones se ejercen en los puntos donde el cuerpo libre se apoya o conecta a otros cuerpos.

El Diagrama de Cuerpo Libre debe incluir también las dimensiones, ya que pueden necesitarse en el cálculo de los momentos de las fuerzas.

Habiendo fijado la noción de cuerpo libre, consideremos alguno de los tipos más comunes de **apoyos ideales** usados.

Se pueden clasificar los apoyos sobre la base de la clase de movimiento relativo que impiden entre un cuerpo y su Sistema de Referencia. Describiremos las tres condiciones de apoyo más comunes para las estructuras planas.

El apoyo ideal de rodillos (vínculo bilateral) se muestra en la figura 16. Este apoyo impide el movimiento relativo (normal o perpendicular a la superficie de apoyo) entre el punto P perteneciente al cuerpo y su Sistema de Referencia. El efecto de este apoyo puede sustituirse por una fuerza que pase por el punto P, de magnitud no determinada y en la dirección Y. Queda entendido que los apoyos de rodillos evitan el movimiento en cualquier sentido (+) (-) Y.

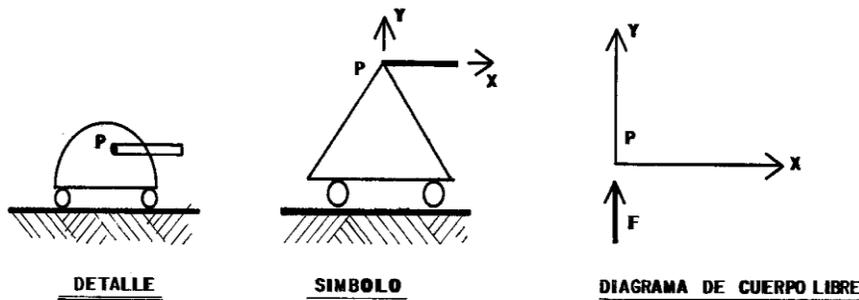


FIGURA 16

El apoyo ideal de pasador (articulación fija) se muestra en la figura 17. Este apoyo impide el movimiento relativo en las direcciones "Y" y "X" entre un punto

perteneciente al cuerpo y su Sistema de Referencia. El efecto de este apoyo puede sustituirse por dos fuerzas que pasen por el punto P, de magnitud no determinada, una en la dirección "Y" y la otra en la dirección "X". Estas dos fuerzas son equivalentes a una sola fuerza en el plano XY, de magnitud y dirección no determinada y que pasa por el punto P.

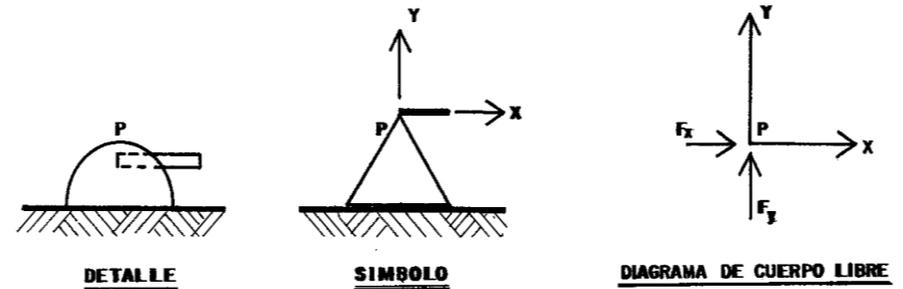


FIGURA 17

El apoyo ideal fijo (empotramiento) se muestra en la figura 18. Este apoyo impide el movimiento relativo en las direcciones "Y" y "X" entre un punto P perteneciente al cuerpo y un Sistema de Referencia y también impide la rotación (efecto de giro) de una línea en dicho sistema de referencia. El efecto de este apoyo puede sustituirse por dos fuerzas que pasen por el punto P, de magnitud no determinada, una en la dirección "X" y otra en dirección "Y" y un momento no determinado alrededor de P.

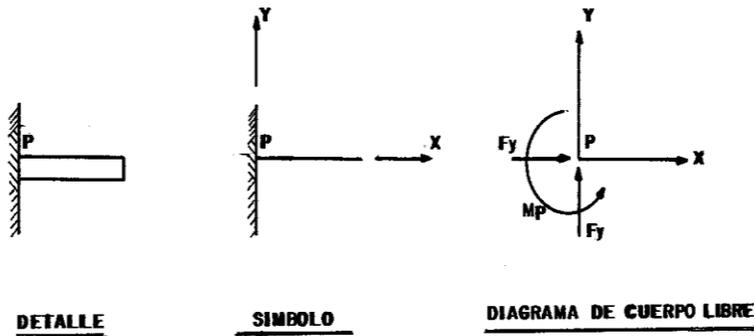


FIGURA 18

El apoyo de una estructura real generalmente puede aproximarse a alguna condición ideal de apoyo. Sin embargo, debe tenerse presente que la introducción de un apoyo ideal es una hipótesis que exige comprobación.

Se han descrito los tres tipos comunes de apoyo para sistemas planos. Es conveniente hacer notar que pueden concebirse apoyos ideales que proporcionan cualquier combinación de restricciones y en esta caso sería recomendable hablar del apoyo conocido como "barra de conexión" o viela, por el uso continuo que haremos de él en el transcurso de "nuestras clases" de Estática.

En la figura 19. se muestra el apoyo de barra de conexión (viela). Este apoyo impide el movimiento relativo entre el punto P perteneciente al cuerpo y su Sistema de

Referencia en la dirección del eje de la barra. El efecto de este apoyo puede sustituirse por una fuerza de magnitud y sentido no determinado que actúa a lo largo del eje de la barra.

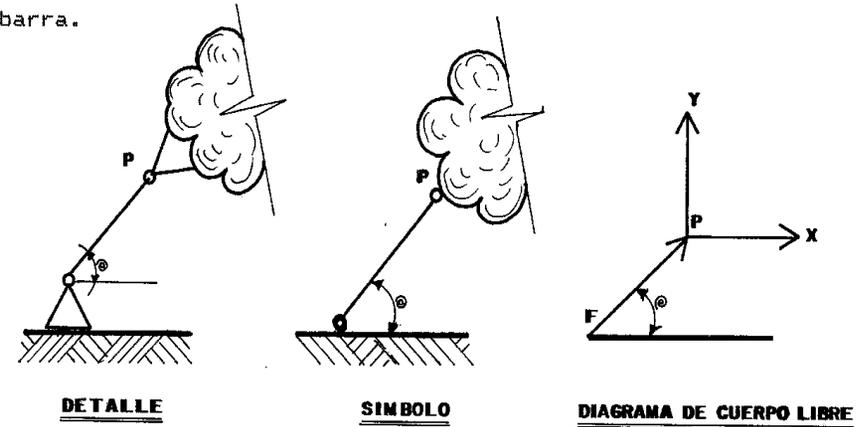


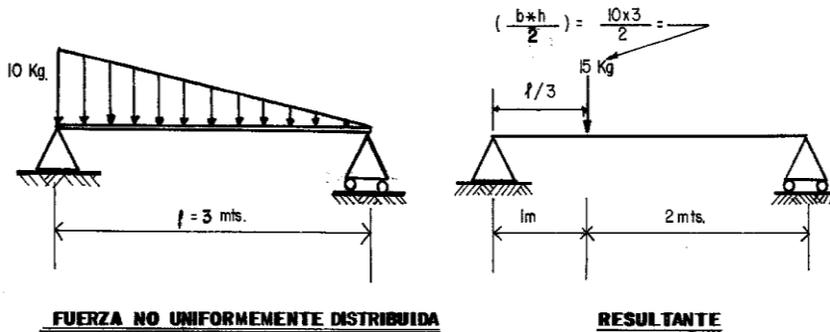
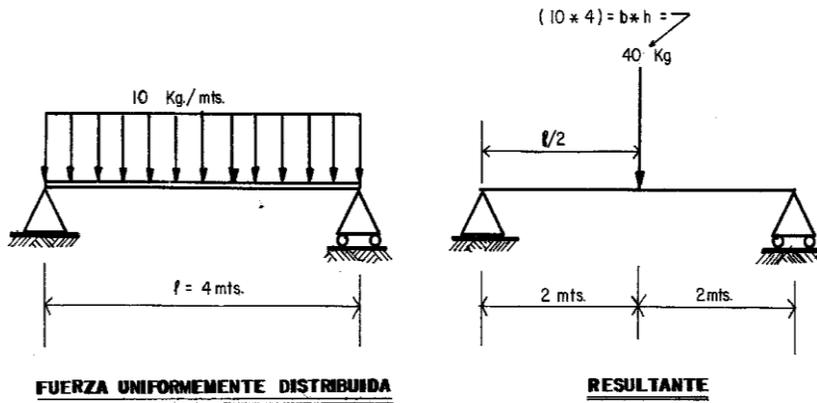
FIGURA 19

En el estudio del equilibrio estático y sobre todo en la elaboración del diagrama de cuerpo libre se hace necesario calcular la "resultante de las fuerzas distribuidas o repartidas" que actúan sobre el cuerpo rígido para facilitar los cálculos.

Esta "idealización" la usamos para comprobar si en el cuerpo rígido se cumplen las tres condiciones necesarias para hablar de equilibrio estático, pero más adelante veremos que esta idealización no es posible utilizarla cuando entremos al estudio de las Características de Sollicitación, en donde estudiaremos las fuerzas distribuidas tal y como se presentan.

La Resultante de las fuerzas distribuidas que actúan sobre un cuerpo rígido, pasará por el centro de gravedad de la figura que ellas forman y su intensidad o magnitud la conformará el valor absoluto del área de dicha figura .

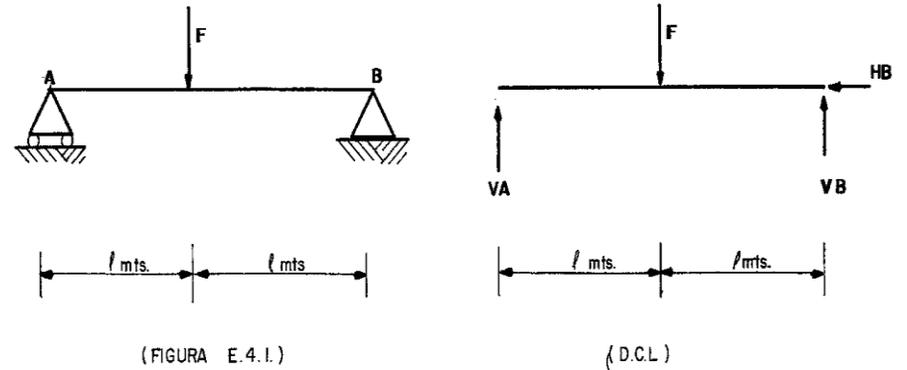
Los siguientes ejemplos nos permiten aclarar la idea anterior.



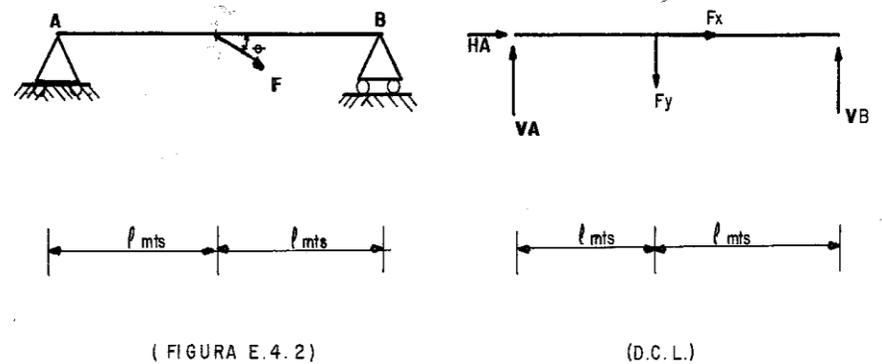
Como complemento a lo explicado en este Capítulo, a continuación realizaremos varios ejercicios cuya finalidad principal es la elaboración de sus respectivos Diagramas de Cuerpo Libre.

**Ejemplo 4:** Construyanse los Diagramas de Cuerpo Libre de los cuerpos rígidos sometidos a Sistemas de Fuerza que se muestran en las figuras siguientes:

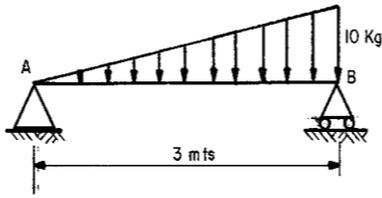
**E.4.1.**



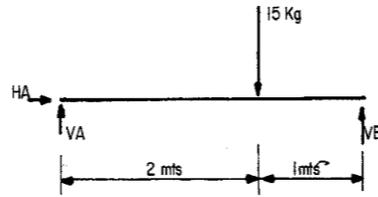
**E.4.2.**



**E.4.3.**

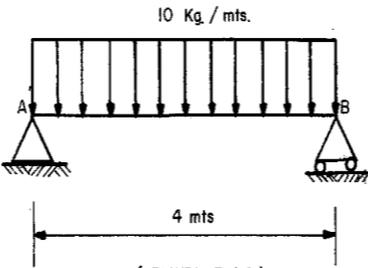


(FIGURA E.4.3.)

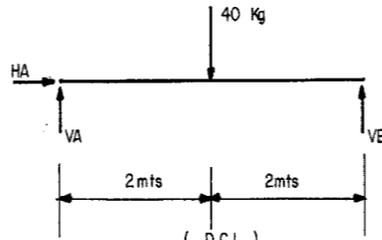


( D.C.L. )

**E.4.4.**

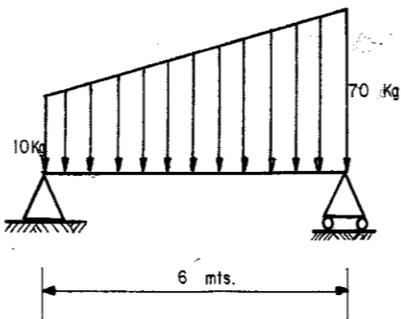


( FIGURA E.4.4. )

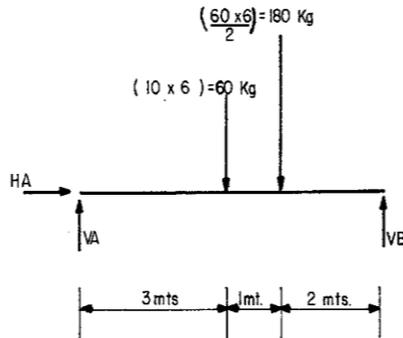


( D.C.L. )

**E.4.5.**

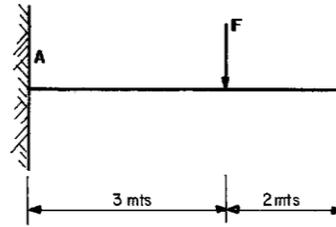


( FIGURA E.4.5 )

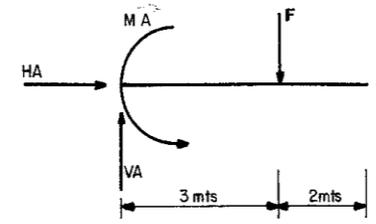


( D.C.L. )

**E.4.6.**

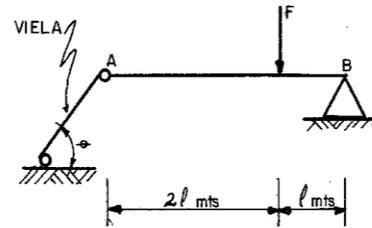


( FIGURA E.4.6. )

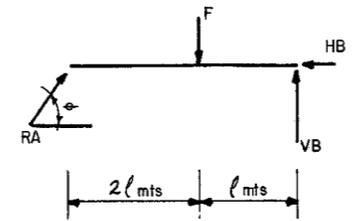


( D.C.L. )

**E.4.7.**

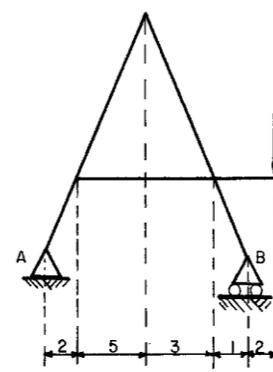


( FIGURA E.4.7. )

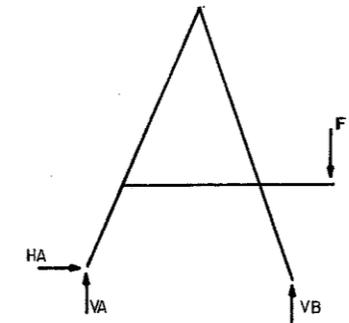


( D.C.L. )

**E.4.8.**

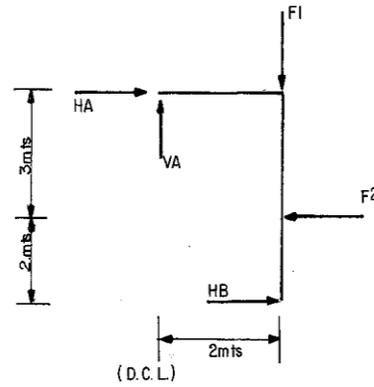
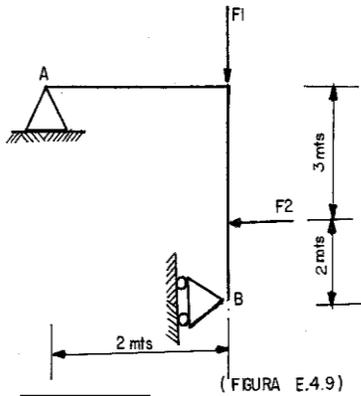


( FIGURA E.4.8. )

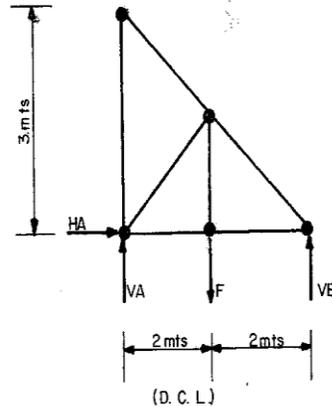
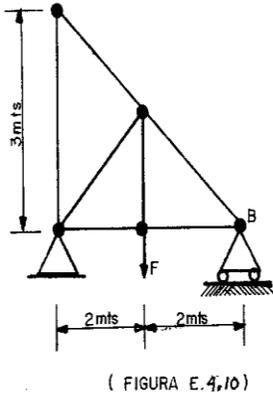


( D.C.L. )

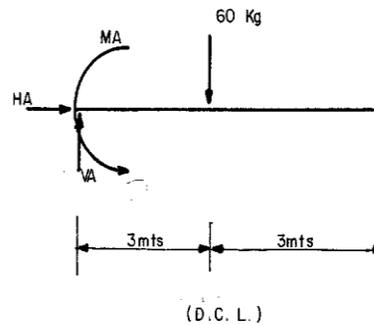
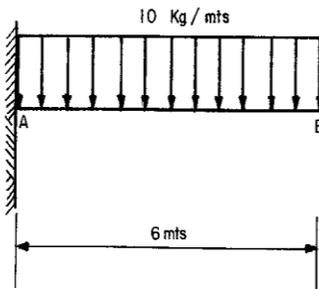
**E.4.9.**



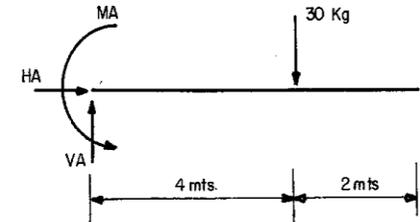
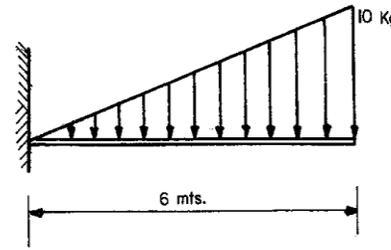
**E.4.10.**



**E.4.11.**



**E.4.12.**



Una vez conocidos los movimientos impedidos por los apoyos o vínculos (fuerzas externas desconocidas o reacciones) hemos considerado necesario hablar de los cuerpos en función de éstos y hacer unos comentarios que puedan facilitar el estudio y análisis de los cuerpos rígidos:

Todo cuerpo rígido en el plano, posee tres (3) grados de libertad, es decir, puede moverse de tres maneras distintas con respecto a un punto de referencia:

1. Movimiento horizontal (hacia la izquierda o hacia la derecha).
2. Movimiento vertical (hacia arriba o hacia abajo).
3. Rotación alrededor de un punto (efecto de girar).

Una de las primeras consideraciones que se hacen en la estática es analizar los grados de libertad que se le

restringen al cuerpo rígido, para determinar si su estudio y análisis está "enmarcado" en el campo de la estática.

En otras palabras, un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas puede ser estudiado con la utilización de las "herramientas" de la estática si y solo si ha sido restringido de los tres (y solamente tres) grados de libertad que posee en el plano.

Generalmente este "estudio superficial" consiste en observar los grados de libertad que restringen los vínculos o apoyos de acuerdo a las siguientes consideraciones:

GL = Grados de Libertad = Grados de libertad que posee el cuerpo rígido en el plano (3) menos (-) Grados de libertad restringidos por los apoyos o vínculos.

- \*  $GL > 0$  : Cuerpo "Hipostático"
- \*  $GL < 0$  : Cuerpo "Hiperestático"
- \*  $GL = 0$  : Cuerpo "Isostático"

En estática es posible estudiar únicamente los cuerpos clasificados como "Isostáticos".

Esta consideración la hacemos debido a que contamos con "tres Ecuaciones de Equilibrio o de la Estática" (dos de traslación y una de rotación) y que cuando hacemos el análisis del equilibrio del cuerpo rígido debemos tener

tantas incógnitas como ecuaciones del equilibrio se desprendan de dicho análisis.

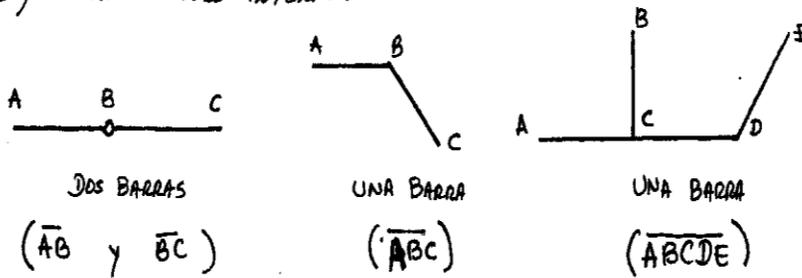
Sin embargo, aunque la condición anterior es necesaria, no es suficiente. En otras palabras, el hecho de que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones no garantiza que el cuerpo rígido esté completamente restringido o inmovilizado o que las reacciones en sus apoyos sean estaticamente determinadas.

Podemos apuntar (para reafirmar lo dicho anteriormente) que un cuerpo rígido se haya restringido inapropiadamente, siempre que los soportes o apoyos, aunque puedan proporcionar un número suficiente de reacciones, estén distribuidos en tal forma que las reacciones sean concurrentes sobre una misma recta de acción. Los problemas P.2.13, P.2.14 y P.2.15, que encontraremos en las páginas 67, 70 y 73, respectivamente, fueron hechos con la intención de complementar y reafirmar esta explicación.

PARA ACLARAR LO RELACIONADO A LO APUNTADO EN LA PAGINA 38 DE ESTE LIBRO (REACCIONES CONCURRENTES SOBRE UNA MISMA RECTA DE ACCIÓN) APUNTAremos lo siguiente:

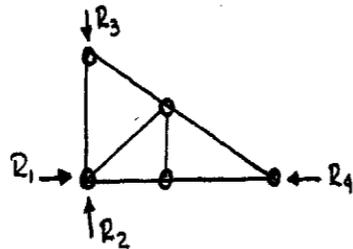
Dicho criterio se utiliza cuando los ejes de las barras en donde se generan las reacciones se localicen íntegramente en la misma dirección de la "recta de acción" a la que hacemos referencia.

En este "texto" consideramos que la continuidad de la barra se pierde únicamente con la presencia de una articulación intermedia (las juntas o soldaduras no son articulaciones intermedias) o un vínculo interno.



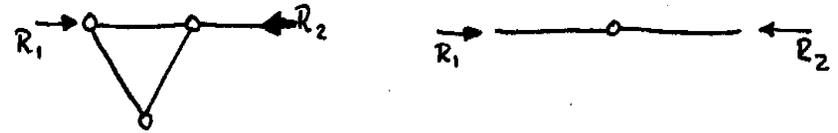
Utilizaremos el criterio de reacciones concurrentes sobre una misma línea o recta de acción en:

- UNA SOLA BARRA.
- CADENAS CINEMÁTICAS CERRADAS.



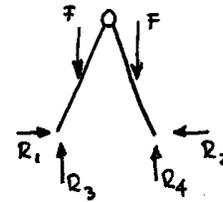
$R_1$  concurrente con  $R_4$   
 $R_2$  concurrente con  $R_3$

- CADENAS CINEMÁTICAS ABIERTAS Y CADENAS CINEMÁTICAS MIXTAS CUANDO LAS REACCIONES QUE CONCURRIEN SEAN GENERADAS POR DOS O MAS BARRAS QUE SE ENCUENTREN PERFECTAMENTE ALINEADAS.

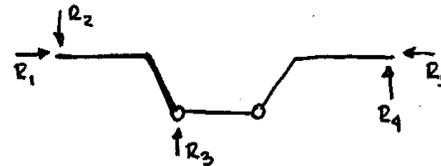


NO utilizaremos el criterio de reacciones concurrentes sobre una misma recta de acción en:

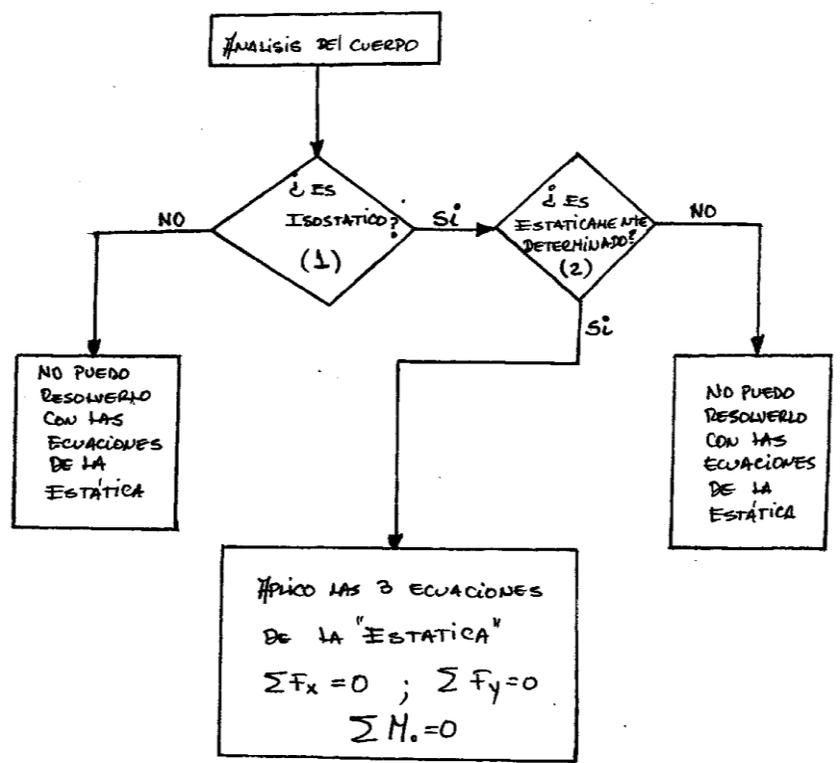
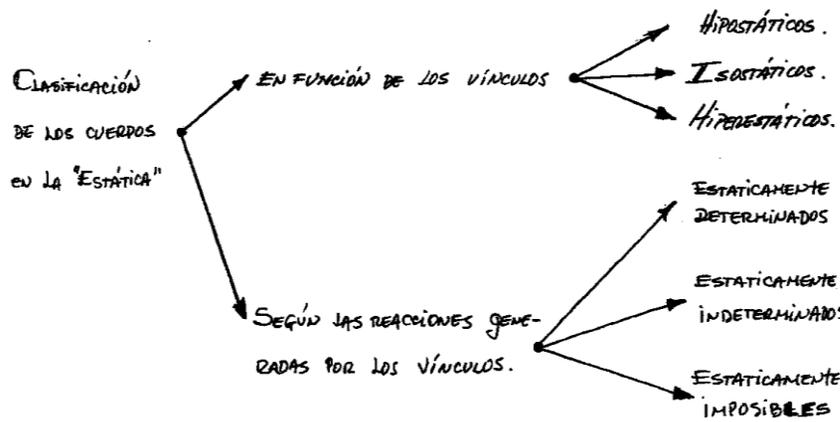
- CADENAS CINEMÁTICAS ABIERTAS Y MIXTAS CUANDO LAS REACCIONES QUE CONCURRIEN EN UNA MISMA RECTA DE ACCIÓN SEAN GENERADAS POR BARRAS QUE NO ESTEN ALINEADAS PERFECTAMENTE O QUE SUS EJES NO SEAN CONTINUOS.



Aunque  $R_1$  y  $R_2$  son concurrentes **NO** generan indeterminación estática.



Aunque  $R_1$  y  $R_5$  son concurrentes sobre una misma recta de acción **NO** generan indeterminación estática.



- (1) ⇒ ¿GRADOS DE LIBERTAD QUE POSEE EL CUERPO MENOS LOS GRADOS DE LIBERTAD RESTRINGIDOS POR LOS VÍNCULOS = 0?
- (2) ⇒ ¿ SOBRE UNA MISMA BARRA O SOBRE BARRAS PERFECTAMENTE ALINEADAS HAY REACCIONES CONCURRENTES SOBRE UNA MISMA LINEA O RECTA DE ACCIÓN? (SI LAS HAY NO ES DETERMINADO).

METODO DE ESTUDIO RECOMENDADO

El autor de cualquier libro, guía o texto en general, conoce mejor que nadie el método de estudio o la forma más adecuada de afrontar las ideas que ha querido hacer llegar a los demás.

Partiendo de esta premisa me permito recomendar lo siguiente:

Al resolver los ejercicios y ejemplos que se encuentren en el texto, hágalo en su cuaderno de prácticas a medida que vaya leyendo los mismos. Esto le permitirá leer las recomendaciones que se dan sin perder la secuencia de resolución.

*Albergo*

# CAPÍTULO II

## PROBLEMAS RESUELTOS DE EQUILIBRIO ESTÁTICO ( "paso a paso" )

**PROBLEMA P.2.1:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.1  
(Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

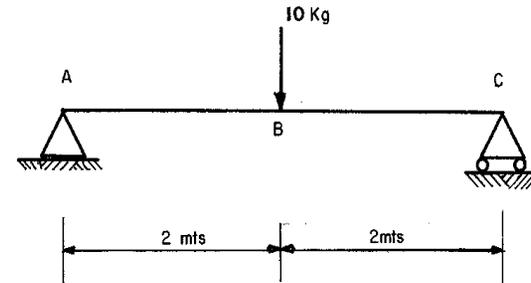


FIGURA P.2.1

Solución:

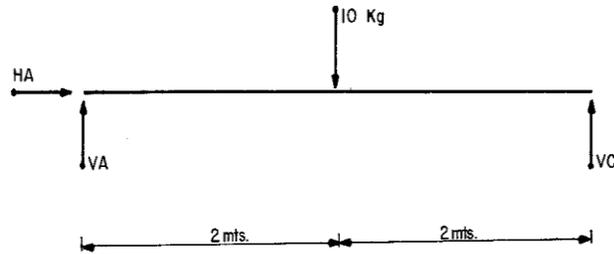
Primero estudio el cuerpo de acuerdo a los movimientos o grados de libertad que restringen los vínculos.

\* Vínculo doble en A restringe 2 grados de libertad (movimiento vertical y horizontal).

\* Vínculo simple (rodillo) en C restringe el movimiento vertical.

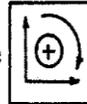
Como están restringidos los tres grados de libertad de la viga (en el plano) se dice que el cuerpo es "Isostático" y podemos hacer su estudio a través de la Estática.

Segundo: Elaboración del Diagrama de Cuerpo libre



D.C.L

Ahora fijo "mi" Sistema de Referencia de Signos:



- \* Fuerza Vertical hacia arriba: positiva.
- \* Fuerza Vertical hacia abajo: negativa.
- \* Fuerza Horizontal hacia la derecha: positiva.
- \* Fuerza Horizontal hacia la izquierda: negativa.
- \* Momento en sentido horario: positivo.
- \* Momento en sentido anti-horario: negativo.

Si tomo "A" como primer punto de referencia para el estudio de las condiciones de equilibrio puedo decir que la  $\sum MA = 0$  (sumatoria de momentos en A es igual a cero); en consecuencia, observo todas las fuerzas que producen efecto de giro en la viga con respecto al punto A.

$$MA = + (10 \text{ kg}) (2 \text{ mts}) - (Vc) (4 \text{ mts}) = 0$$

- La reacción "VA" pasa por el punto "A", por lo tanto no hay brazo ni efecto de giro.

- La reacción "HA" pasa por el punto "A", por lo tanto no hay brazo ni efecto de giro.

- La fuerza de 10 kg. es perpendicular a la viga y su brazo es de 2 mts. y su efecto de giro es en sentido horario con respecto al punto "A".

$$\langle + (10 \text{ kg}) * (2 \text{ mts}) \rangle$$

- La reacción "Vc" es perpendicular a la viga y su brazo es de 4 mts. y su efecto de giro es en sentido anti-horario con respecto al punto "A".

$$\langle - (Vc) * (4 \text{ mts}) \rangle$$

$$MA = 20 \text{ kgmts} - Vc \ 4 \text{ mts} = 0$$

$$20 \text{ kgmts} = Vc \ 4 \text{ mts}$$

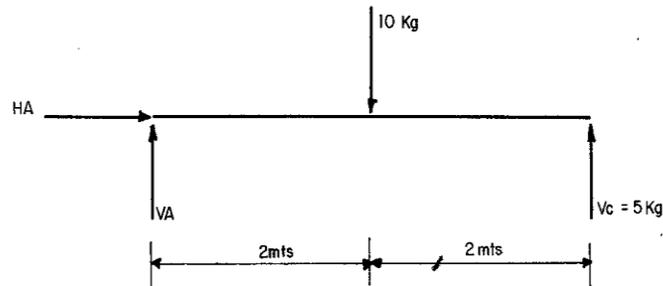
$$Vc = (20 \text{ kgmts}) / (4 \text{ mts})$$

$$Vc = 5 \text{ kg } (\uparrow)$$

Como asumimos que "Vc" era vertical en sentido hacia arriba, y el resultado nos dió con signo positivo, esto nos indica que dicha consideración es cierta; si el resultado de "Vc" nos hubiera dado negativo, esto lo único que

representaba era que su sentido era hacia abajo y no hacia arriba como habíamos asumido.

Después de obtener la magnitud de "Vc", hacemos un gráfico auxiliar para facilitar la continuación de la resolución del problema:



Ahora aplicamos las condiciones de equilibrio en el eje

"X":

$$\sum F_x = 0$$

Como solo tenemos una Fuerza que actúa en dirección del eje "X" (HA):

$$HA = 0 \text{ kg}$$

Condiciones de equilibrio en el eje "Y":

$$\sum F_y = 0$$

$$+ VA - 10 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 0$$

(Los signos colocados van en función del sentido de las fuerzas verticales y atendiendo al cuarto principio de la Estática Gráfica).

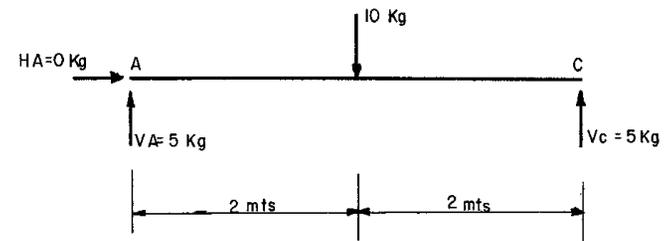
$$+ VA - 5 \text{ kg} = 0$$

$$VA = 5 \text{ kg } (\uparrow)$$

El resultado fué con signo positivo, lo que quiere decir que el sentido que escogimos fué el correcto.

Con los datos calculados anteriormente concluimos que las condiciones de equilibrio están dadas para los valores que indicaremos a continuación:

Respuesta:



NOTA: Aún cuando el resultado de algunas reacciones sean iguales a cero, las mismas deben indicarse en los resultados.

$$HA = 0 \text{ kg} , VA = 5 \text{ kg } (\uparrow) , Vc = 5 \text{ kg } (\uparrow)$$

**PROBLEMA P.2.2:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.2  
(Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

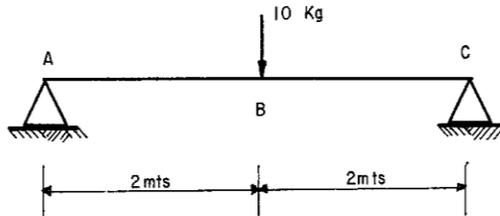


FIGURA P.2.2

Solución:

Al estudiar los movimientos o grados de libertad que restringen las 2 articulaciones fijas (A y C) me doy cuenta que:

- \* Vínculo doble en "A", restringe dos grados de libertad.

- \* Vínculo doble en "C", restringe dos grados de libertad.

$$\text{Grados de libertad impedidos} = 2 + 2 = 4$$

$$\text{Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano} = 3$$

$$GL = 3 - 4 = -1$$

$$GL = -1 < 0 \quad : \quad \text{Cuerpo "Hiperestático"}$$

No es posible calcular el equilibrio estático a través de las "herramientas" de la Estática por que el cuerpo no es "Isostático" (en este ejercicio el cuerpo es "Hiperestático, es decir estaticamente indeterminado).

**PROBLEMA P.2.3:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.3  
(Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

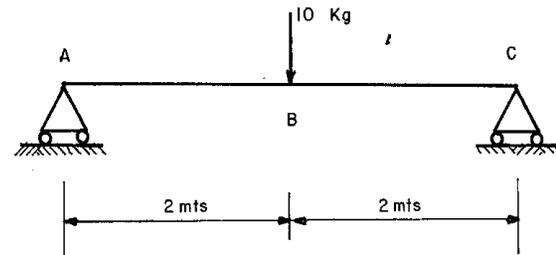


FIGURA P.2.3

Solución:

Al estudiar los movimientos que restringen los dos apoyos tipo rodillo (A y C), me doy cuenta que:

$$\text{Grados de libertad impedidos} = 1 \text{ en A} + 1 \text{ en C} = 2$$

$$\text{Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano} = 3$$

$$GL = 3 - 2 = 1$$

$GL = 1 > 0$  : Cuerpo "Hipostático"

Aunque bajo condiciones especiales de carga es "estaticamente posible" resolver este problema, notaremos que tiene equilibrio inestable ya que ninguno de los vínculos restringe su movimiento en dirección horizontal (hacia la derecha o hacia la izquierda) y con la aplicación de una fuerza en sentido horizontal, por pequeña que sea, el cuerpo entraría en movimiento.

**PROBLEMA P.2.4:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.4 (Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

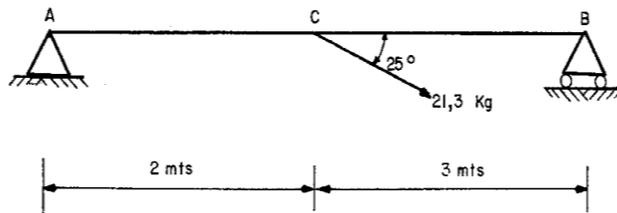
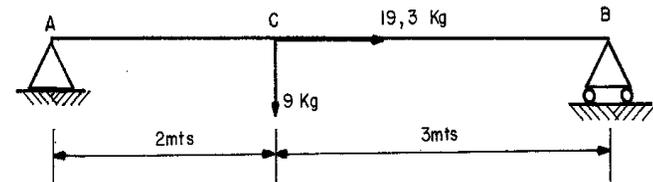


FIGURA P.2.4

**Solución:**

En el ejemplo 3 (Fig. E.3) calculamos las componentes de esta fuerza, y un equivalente del problema P.2.4 sería entonces el siguiente: (Ver páginas del 18 al 20)

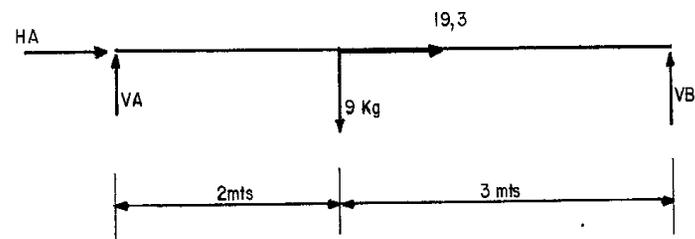


Grados de libertad impedidos = 2 en A y 1 en B = 3

Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano = 3

$GL = 3 - 3 = 0$  : Cuerpo "Isostático"

Diagrama de Cuerpo Libre:



$$\sum MA = + (9 \text{ kg}) (2 \text{ mts}) - (VB) (5 \text{ mts}) = 0$$

**Nota:** La línea de acción de la fuerza de 19,3 kg. pasa por el punto A, entonces no produce efecto de giro.

$$+ 18 \text{ kg} - 5 VB \text{ mts} = 0$$

$$18 \text{ kg} = 5 VB \text{ mts}$$

$$VB = (18 \text{ kgmts}) / (5 \text{ mts})$$

$$VB = 3,6 \text{ kg } (\uparrow)$$

Fuerzas Verticales:  $\sum Fy = 0$

$$+ VA - 9 \text{ kg} + 3,6 \text{ kg} = 0$$

$$VA = 5,4 \text{ kg } (\uparrow)$$

Fuerzas Horizontales:  $\sum Fx = 0$

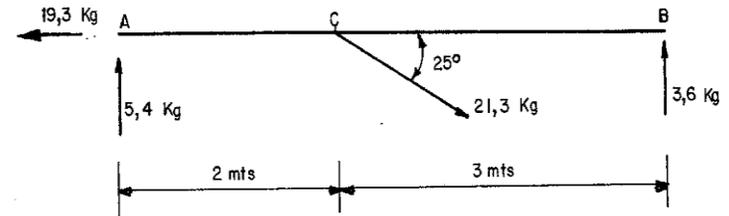
$$+ HA + 19,3 \text{ kg} = 0$$

$$HA = - 19,3 \text{ kg}$$

Como el resultado de "HA" me dió con signo negativo, esto significa que el sentido que escogimos no es el verdadero sino el inverso, en conclusión  $HA = 19,3 \text{ kg}$  pero con sentido hacia la izquierda:

$$HA = 19,3 \text{ kg } (\leftarrow)$$

**Respuesta**



**PROBLEMA P.2.5:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.5  
(Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

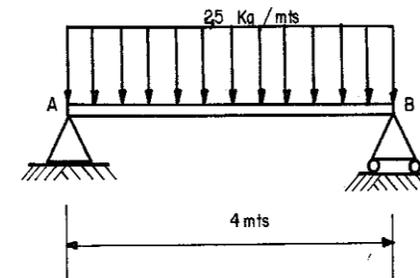


FIGURA P.2.5

Solución:

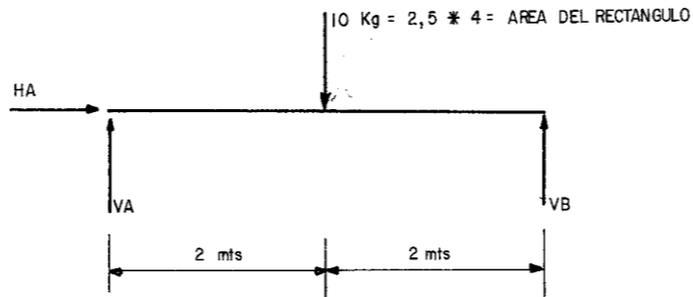
Grados de libertad impedidos = 2 en A y 1 en B = 3

Grados de libertad que posee la viga en el plano = 3

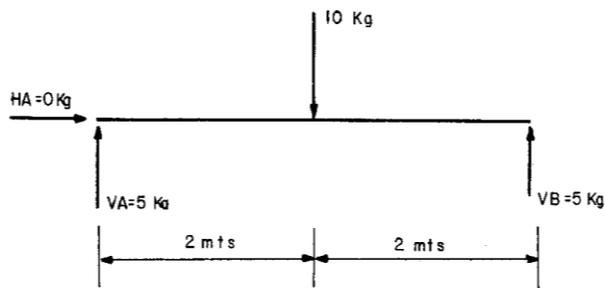
GL = 3 - 3 : Cuerpo Isostático

En el capítulo anterior mencionamos que la resultante de las fuerzas distribuidas que actúan sobre un cuerpo rígido pasará por el centro de gravedad de la figura que forman y su intensidad o magnitud la conformará el valor absoluto del área de dicha figura.

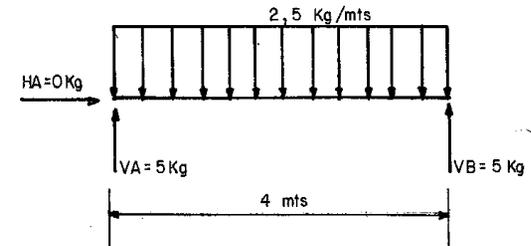
En consecuencia el Diagrama de Cuerpo Libre para el cálculo de las reacciones será el siguiente:



Este problema es equivalente al explicado en el Problema P.2.1. (página 40 al 44), cuya respuesta es:



La Respuesta definitiva de este problema (P.2.5) será entonces:



**PROBLEMA P.2.6:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.6 (Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

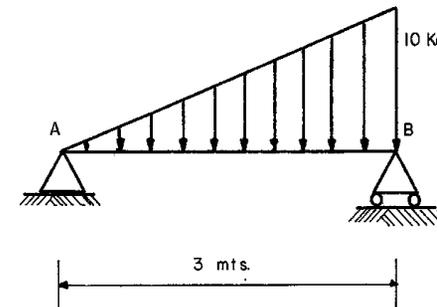
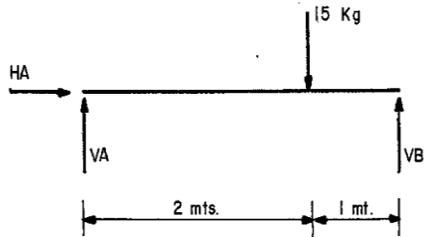


FIGURA P.2.6

Solución:

GL = 3 - 3 : Isostático.

El Diagrama de Cuerpo Libre es el indicado en el Ejemplo E.4.3 (página 33) :



$$\sum MA = + (15 \text{ kg})(2 \text{ mts}) - VB (3 \text{ mts}) = 0$$

Realizado el despeje correspondiente:

$$VB = 10 \text{ kg } (\uparrow)$$

$$\sum Fy = 0$$

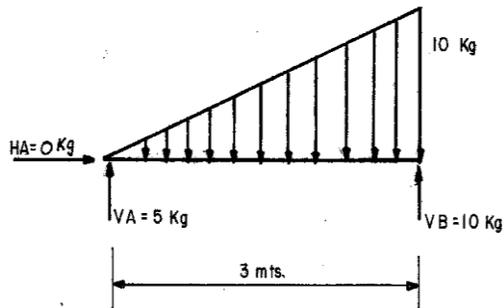
$$+ VA - 15 \text{ kg} + 10 \text{ kg} = 0$$

$$VA = 5 \text{ kg } (\uparrow)$$

$$\sum Fx = 0$$

$$HA = 0 \text{ kg}$$

**Respuesta:**



**PROBLEMA P.2.7:**

\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.7 (Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

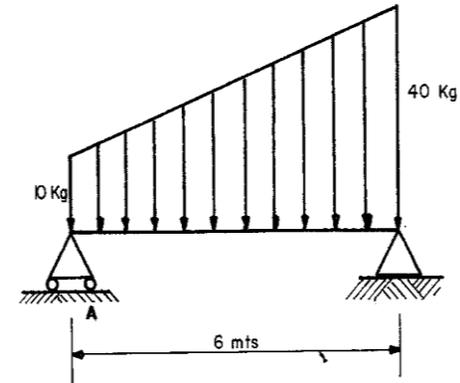
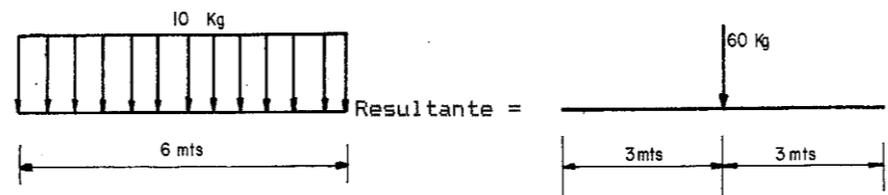


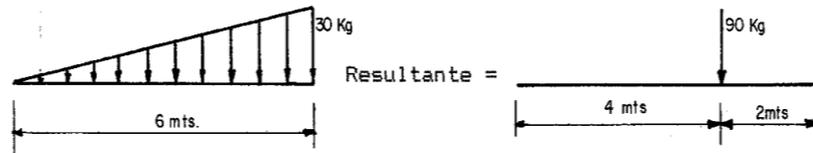
FIGURA P.2.7

Solución:

$$GL = 3 - 3 = 0 \quad : \quad \text{Isostático.}$$

Ahora analizo las fuerzas externas actuantes (distribuidas) y observo que puedo descomponer en dos tipos de fuerzas distribuidas:





El gráfico auxiliar para el cálculo de las reacciones será el siguiente:

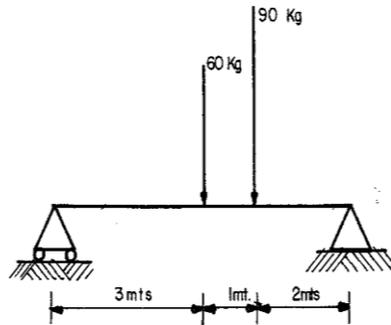
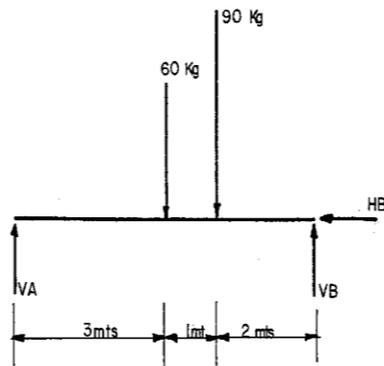


Diagrama de cuerpo libre:



$$\begin{aligned} \sum M_A &= + (60 \text{ kg})(3 \text{ mts}) + (90 \text{ kg})(4 \text{ mts}) - (V_B)(6 \text{ mts}) = 0 \\ &+ 180 \text{ kg.mts} + 360 \text{ kg.mts} = V_B 6 \text{ mts} \\ V_B &= (540 \text{ kg.mts}) / (6 \text{ mts}) \end{aligned}$$

$$V_B = 90 \text{ kg } (\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0$$

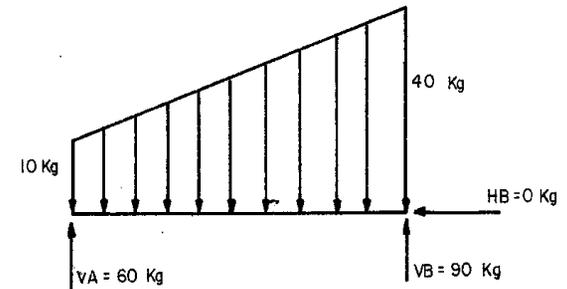
$$H_B = 0 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$+ V_A - 60 \text{ kg} - 90 \text{ kg} + 90 \text{ kg} = 0$$

$$V_A = 60 \text{ kg } (\uparrow)$$

Respuesta:



**PROBLEMA P.2.8:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.8 (Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

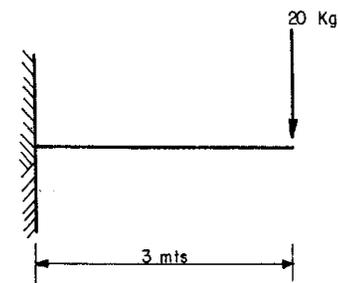


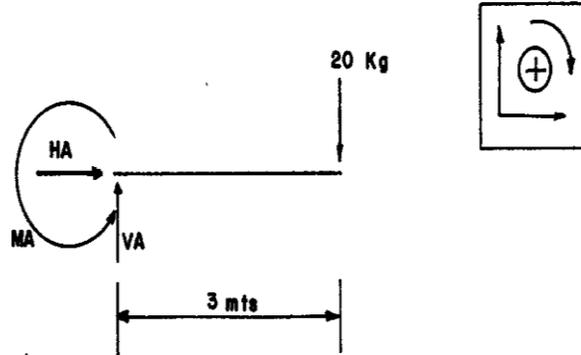
FIGURA P.2.8

Solución:

Grados de libertad que restringe el empotramiento en A = 3

$$GL = 3 - 3 = 0 \quad ; \quad \text{Isostático}$$

Diagrama de cuerpo libre:



$$\sum F_x = 0$$

$$HA = 0 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$+ VA - 20 \text{ kg} = 0$$

$$VA = 20 \text{ kg} (\uparrow)$$

$$\sum MA = 0$$

$$- MA + (20 \text{ kg})(3 \text{ mts}) = 0$$

$$MA = 60 \text{ kg.mts} (\curvearrowleft)$$

**PROBLEMA P.2.9:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.9  
(Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

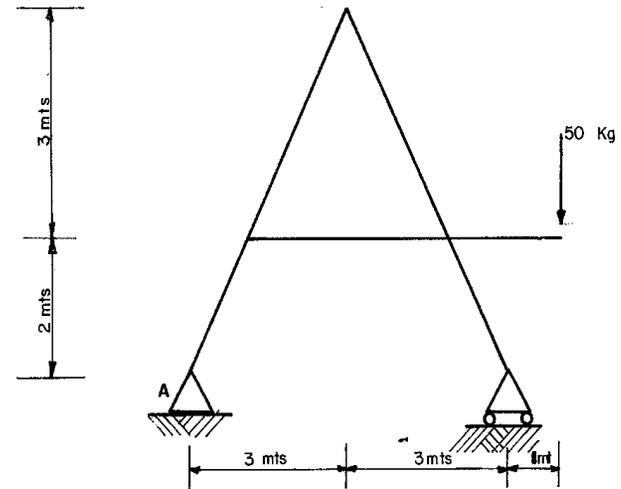
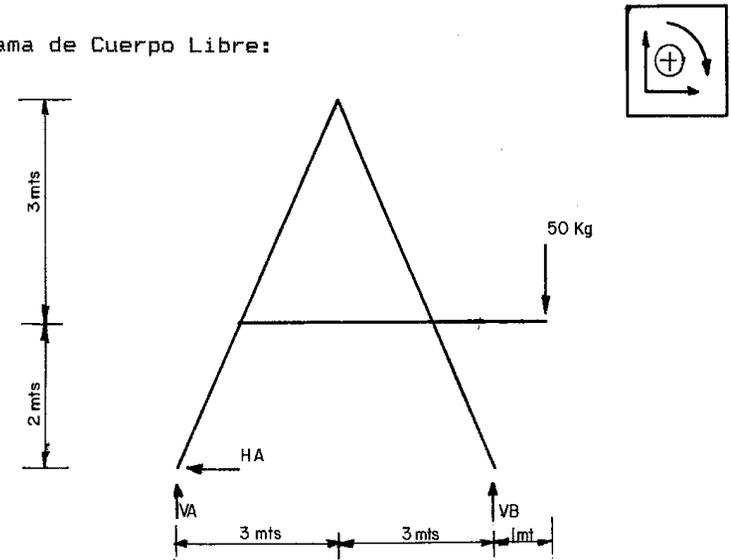


FIGURA P.2.9

*NOTA:* La figura representa un solo cuerpo, en realidad pueden ser tres vigas soldadas entre si, pero su estudio estático se realiza considerándolo como una sola.

$$GL = 3 - 3 = 0 \quad ; \quad \text{Isostático}$$

Diagrama de Cuerpo Libre:



$$\sum M_A = 0$$

$$- (V_B)(6 \text{ mts}) + (50 \text{ kg})(7 \text{ mts}) = 0$$

$$V_B = 58,33 \text{ kg } (\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$H_A = 0 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0$$

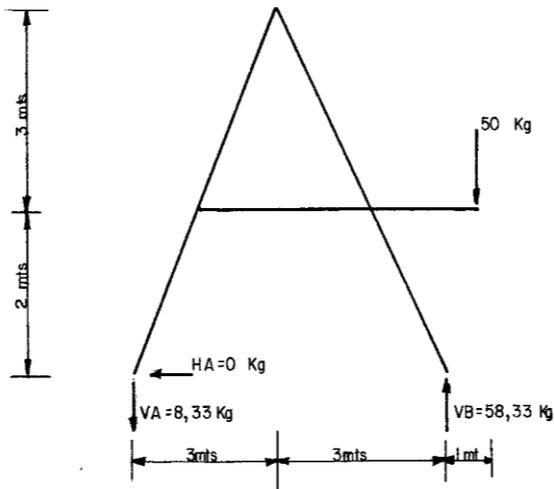
$$+ V_A + 58,33 \text{ kg} - 50 \text{ kg} = 0$$

$$V_A = - 8,33 \text{ kg}$$

Como el resultado de "VA" dió con **SIGNO** negativo indica que el sentido escogido no es el verdadero sino el inverso:

$$V_A = 8,33 \text{ kg } (\downarrow)$$

**Respuesta:**



**PROBLEMA P.2.10:**

\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.10  
(Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

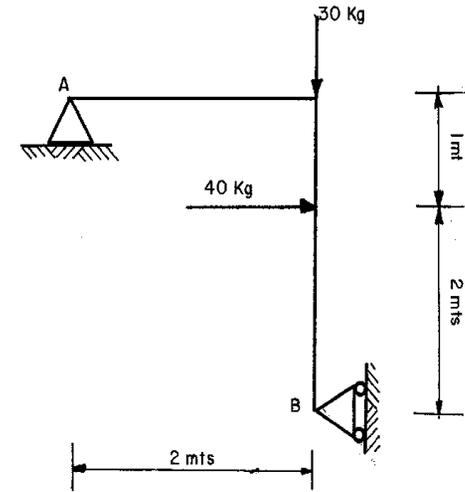
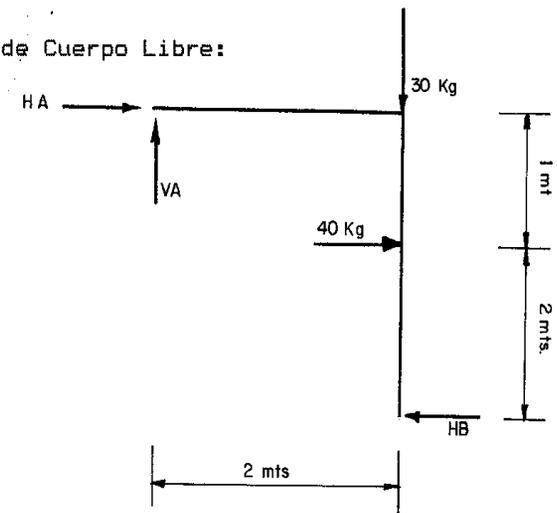


FIGURA P.2.10

**NOTA:** Son dos vigas soldadas entre si, pero su comportamiento estático es el de un solo cuerpo

$$GL = 3 - 3 = 0 \quad : \quad \text{Isostático}$$

Diagrama de Cuerpo Libre:



$$\sum M_A = 0$$

$$+ (30 \text{ kg})(2 \text{ mts}) - (40 \text{ kg})(1 \text{ mts}) + (H_B)(3 \text{ mts}) = 0$$

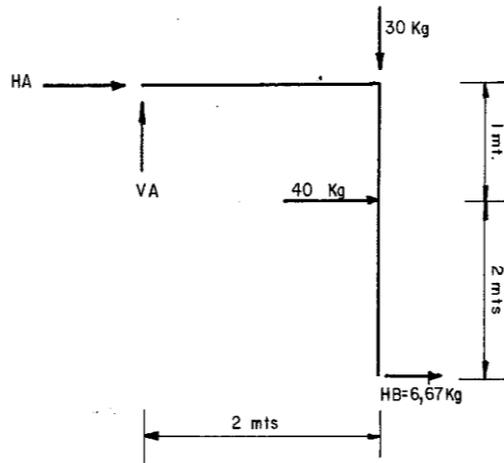
$$+ 20 \text{ kg.mts} + H_B 3 \text{ mts} = 0$$

$$H_B = - 6,67 \text{ kg}$$

Como el resultado dió con signo negativo quiere decir que el sentido escogido no es el verdadero sino el inverso:

$$H_B = 6,67 \text{ kg } (\rightarrow)$$

Diagrama de Cuerpo Libre "auxiliar":



$$\sum F_x = 0$$

$$+ H_A + 40 \text{ kg} + 6,67 = 0$$

$$H_A = - 46,67 \text{ kg}$$

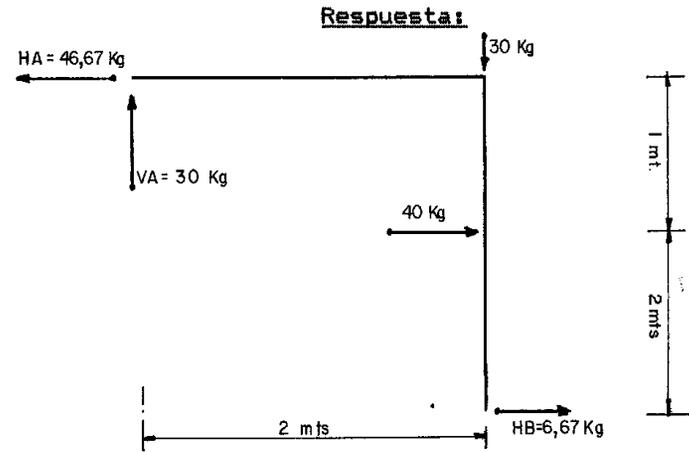
Como el resultado dió con signo negativo quiere decir que el sentido escogido no es el verdadero sino el inverso.

$$H_A = 46,67 \text{ kg } (\leftarrow)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$+ V_A - 30 \text{ kg} = 0$$

$$V_A = 30 \text{ kg } (\uparrow)$$



**PROBLEMA P.2.11:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.11  
(Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

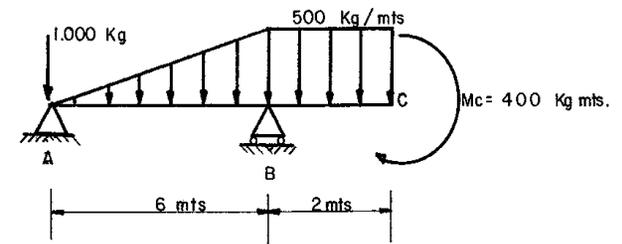


FIGURA P.2.11

Solución:

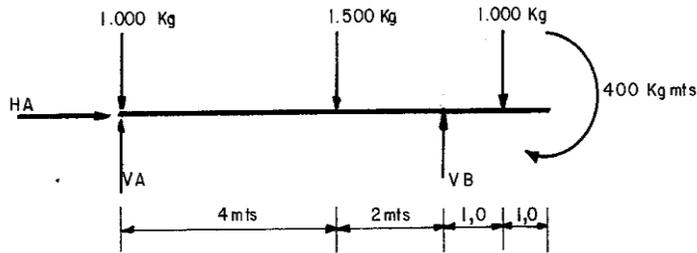
Grados de libertad impedidos: 2 en A y 1 en B = 3

Grados de libertad que posee la viga en el plano = 3

$$GL = 3 - 3 = 0 \quad : \quad \text{Isostático.}$$

D.C.L :

Para elaborar el diagrama de cuerpo libre es recomendable leer de nuevo la página 31 de este texto o revisar de nuevo los ejemplos E.4.4 y E.4.5 que se encuentran en la página 33.



$$\sum F_x = 0$$

$$HA = 0 \text{ kg}$$

$$\sum MA = 0$$

$$+(1500 \text{ kg})(4 \text{ mts}) - (VB)(6 \text{ mts}) + (1000 \text{ kg})(7 \text{ mts}) + 400 \text{ kg.mts} = 0$$

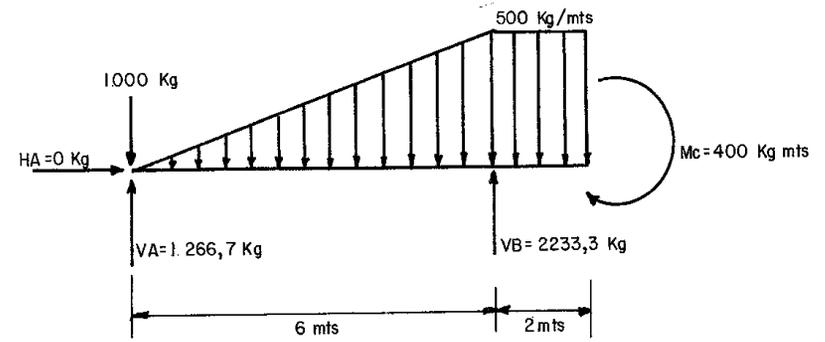
$$VB = 2233,33 \text{ kg } (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$+VA - 1000 \text{ kg} - 1500 \text{ kg} + 2233,3 \text{ kg} - 1000 \text{ kg} = 0$$

$$VA = 1266,7 \text{ kg } (\uparrow)$$

Respuesta



**PROBLEMA P.2.12:**

\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.12. (Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

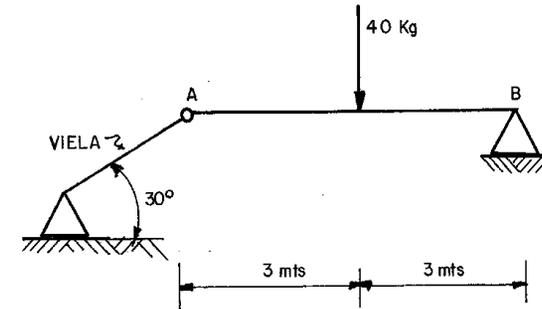


FIGURA P.2.12

Solución:

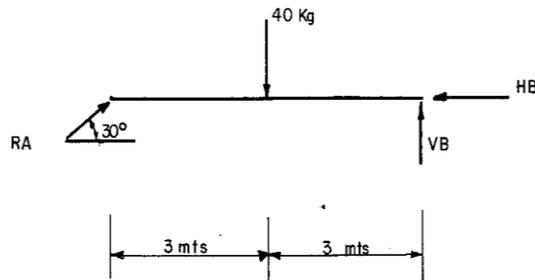
Grados de libertad impedidos: 1 en A y 2 en B = 3

El vínculo en A (tipo vuela) impide un solo movimiento en la dirección de la vuela ( $\triangleleft 30^\circ$ ).

Grados de libertad que posee la viga en el plano = 3

$$GL = 3 - 3 = 0 \quad : \quad \text{Isostático.}$$

D.C.L.:



$$\sum M_A = 0$$

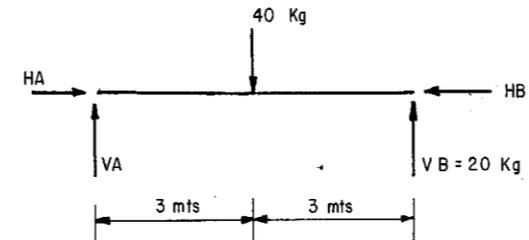
$$+(40 \text{ kg})(3 \text{ mts}) - (VB)(6 \text{ mts}) = 0$$

$$VB = 20 \text{ kg } (\uparrow)$$

De acuerdo a lo estudiado por nosotros en "componentes de una fuerza" sabemos que "RA" puede ser reemplazada por dos fuerzas que al actuar juntas producen el mismo efecto que ella; y como sabemos de antemano la "dirección" de "RA", podemos reemplazarla por sus dos componenetes sin temor a equivocarnos en la escogencia de sus elementos característicos. La única complicación que podría surgir sería escoger su "sentido", pero la misma se ve

recompensada al imponer nuestro sistema "particular" de referencia, es decir, si los componentes resultan con valor negativo el sentido es el inverso.

Partiendo de esta premisa podemos hacer un diagrama de cuerpo libre auxiliar:



tomando en consideración que:

$$HA = RA \cos \theta \quad ; \quad HA = RA \cos 30$$

$$VA = RA \sin \theta \quad ; \quad VA = RA \sin 30$$

$$\sum F_y = 0$$

$$+ VA - 40 \text{ kg} + 20 \text{ kg} = 0$$

$$VA = 20 \text{ kg } (\uparrow)$$

$$\text{Si } VA = 0,5 RA \quad ; \quad 20 \text{ kg} = 0,5 RA$$

$$RA = 40 \text{ kg } (\triangleleft 30^\circ)$$

$$\text{Si } RA = 40 \text{ kg} \quad ; \quad HA = (0.866)(40 \text{ kg})$$

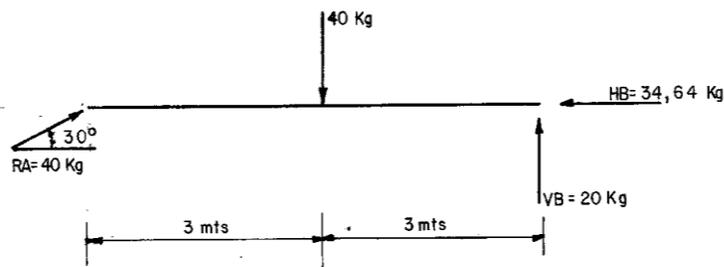
$$H_A = 34,64 \text{ kg } (\rightarrow)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$+ H_A - H_B = 0 \quad ; \quad 34,64 - H_B = 0$$

$$H_B = 34,64 \text{ kg } (\leftarrow)$$

Respuesta:



**PROBLEMA P.2.13:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.13.  
(Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

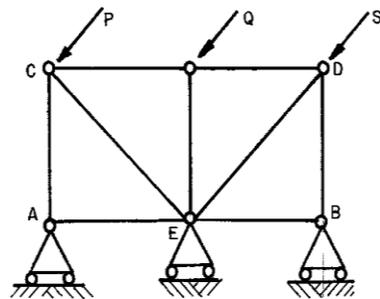
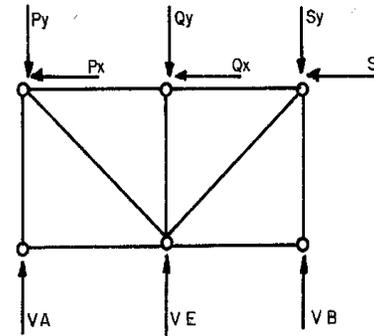


FIGURA P.2.13

Solución:

Al considerar la armadura de la figura P.2.13, que se haya sostenida por patines (apoyo ideal de rodillo o vínculo bilateral), notamos que aunque hay tres reacciones desconocidas ( $V_A$ ,  $V_B$ ,  $V_E$ )



la ecuación  $\sum F_x = 0$  no se satisface a menos que la suma de los componentes horizontales de las fuerzas aplicadas sea cero. Existe un número suficiente de Restricciones, pero no son las apropiadas y la armadura se puede mover libremente en la dirección horizontal. Decimos que la armadura está restringida inapropiadamente. Como solo quedan dos "ecuaciones de equilibrio" para determinar tres "incognitas", las reacciones serán estáticamente indeterminadas. Así que las "restricciones impropias" también producen "indeterminación estática".

Aún cuando habíamos apuntado que en estática es posible estudiar únicamente los cuerpos clasificados como

Isostáticos (3 GL restringidos) también es cierto que hicimos mención de "apoyos ideales" y que la introducción de estos apoyos ideales era un hipótesis que exigía comprobación.

Aquí hemos notado: que aunque de nuestro "análisis superficial" se le restringen 3 grados de libertad y que del diagrama de cuerpo libre se deriven 3 reacciones o incognitas; NO han sido restringido "verdaderamente" los grados de libertad que un cuerpo rígido posee en el plano (movimiento horizontal, movimiento vertical y efecto de giro).

En otras palabras hay que verificar siempre que las 3 ecuaciones de la Estática o ecuaciones de equilibrio se cumplan:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_o &= 0\end{aligned}$$

Como en este caso en particular el cuerpo no es restringido de su movimiento horizontal, se dice que la estructura está restringida inapropiadamente y que el cálculo de su equilibrio es "Estaticamente imposible".

**PROBLEMA P.2.14:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el Equilibrio Estático en la Figura P.2.14. (Despreciese el peso del Cuerpo Rígido):

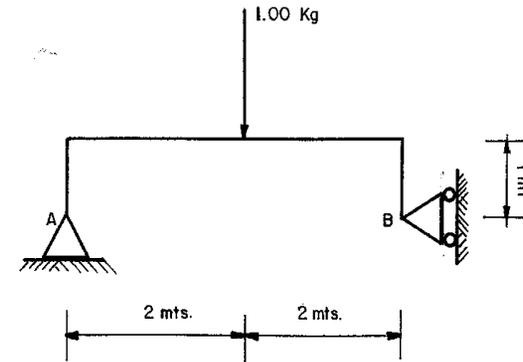


FIGURA P.2.14

Solución:

Al estudiar los movimientos que restringen los vínculos, notaremos que :

- Vínculo doble en A restringe 2 GL.
- Vínculo tipo rodillo en B restringe 1 GL.

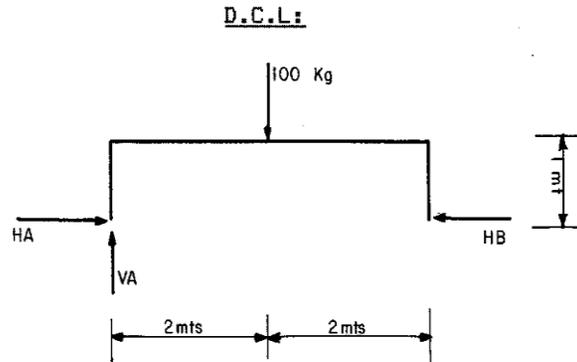
Grados de libertad impedidos = 3

Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano = 3

$$GL = 3 - 3 \quad : \quad \text{Isostático ???}$$

Aunque generalmente este era el "análisis superficial" que hacíamos en los ejercicios anteriores, con los nuevos conocimientos adquiridos, debemos tener presente aquellos vínculos que estén distribuidos de tal forma que las reacciones que generen sean concurrentes sobre una misma recta de acción. (Ver página 38 y siguiente)

Si observamos el diagrama de cuerpo libre del problema en estudio:



Notaremos que las reacciones "HA" y "HB" tienen la misma línea de acción (son concurrentes) y esto nos puede indicar que el cuerpo rígido se haya restringido inapropiadamente. (Ver página 38 y siguiente)

Si no tenemos la "ventaja" de observar que bajo las condiciones dadas el cuerpo puede girar alrededor del punto "A", y procedemos a comprobar las condiciones de equilibrio, de una u otra forma concluiremos que el cuerpo no está en equilibrio.

POR QUE ???

Si estudiamos la condición de equilibrio  $\sum F_y = 0$ , podríamos decir (equivocadamente) que:

$$\sum F_y = VA - 100 \text{ kg} = 0, \text{ donde } VA = 100 \text{ kg } (\uparrow)$$

Pero si estudiamos  $\sum MB = 0$ , nos encontraremos (equivocadamente) con otro valor de VA.

$$\sum MB = + (VA)(4 \text{ mts}) - (100 \text{ kg})(2 \text{ mts}) = 0$$

$$\text{donde } VA = 50 \text{ kg } (\uparrow)$$

O si en otro caso estudiamos momento con respecto al punto "A", nos encontraremos con una ecuación que nos demuestra que el cuerpo está restringido inapropiadamente:

$$\sum MA = 0 ; +(100 \text{ kg})(2 \text{ mts}) = 0$$

$$200 \text{ kg.mts} \neq 0$$

En conclusión, si no hacemos un análisis lógico y científicamente fundamentado de la distribución "ideal" de los vínculos (sobre todo aquellos que generan reacciones concurrentes) podemos llegar a conclusiones erróneas.

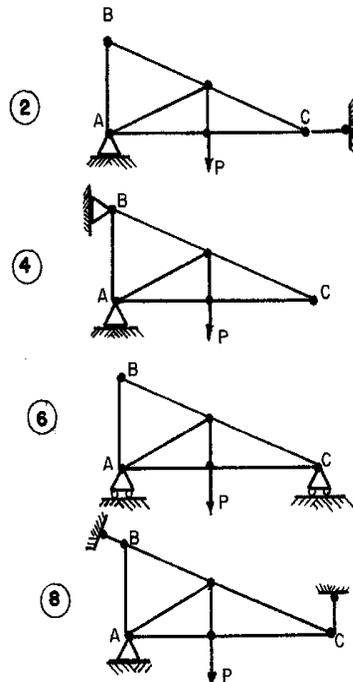
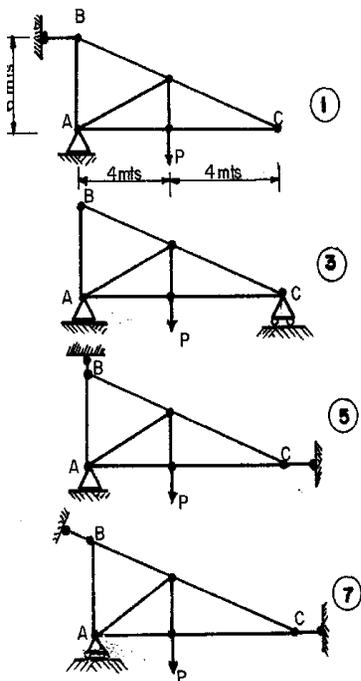
La respuesta a este problema (P.2.14) es la siguiente: "El cuerpo rígido representado en la fig. P.2.14. no está en equilibrio estático, ya que se haya restringido inapropiadamente, porque, aunque los vínculos proporcionan un número suficiente de reacciones, estos están distribuidos en tal forma que las reacciones "HA" y "HB" son concurrentes sobre una misma recta de acción".

**PROBLEMA P.2.15:**  
\*\*\*\*\*

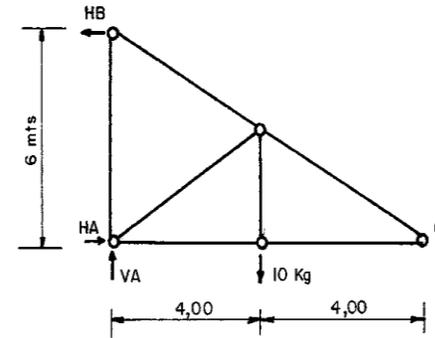
A continuación se muestran ocho apoyos diferentes de una pequeña armadura. Todas las conexiones consisten en pernos, rodamientos y vástagos cortos. Determine en cada caso si:

- La armadura está restringida completa, parcial o inapropiadamente,
- Las reacciones son estáticamente determinadas o indeterminadas,
- Se mantiene el equilibrio de la armadura en la posición mostrada.

En donde sea posible, calcúlese también las reacciones, suponiendo que la magnitud de la fuerza "P" es 10 kg.



**P.2.15....Caso (1):**



Grados de libertad impedidos : 2 en A y 1 en B = 3

Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano = 3

$$GL = 3 - 3 = 0 \quad ; \quad \text{Isostático}$$

Existe un número suficiente de restricciones (HA, HB y VA) y ninguna de las reacciones son concurrentes sobre una misma recta de acción.

- La armadura está completamente restringida.
- Las reacciones son estáticamente determinadas.
- Se mantiene el equilibrio.
- Cálculo de las reacciones:

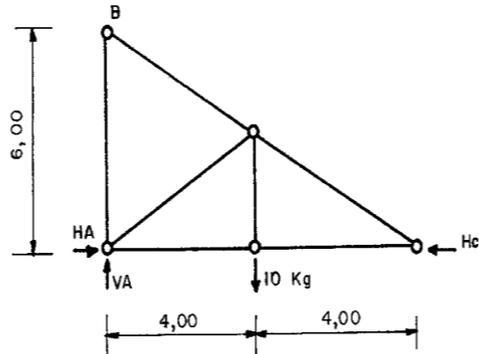
$$\sum F_y = VA - 10 \text{ kg} = 0 \quad ; \quad VA = 10 \text{ kg} (\uparrow)$$

$$\sum MA = 0 \quad ; \quad -(HB)(6 \text{ mts}) + (10 \text{ kg})(4 \text{ mts}) = 0$$

$$HB = 6,67 \text{ kg} (\leftarrow)$$

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad -6,67 \text{ kg} + HA = 0 \quad ; \quad HA = 6,67 \text{ kg} (\rightarrow)$$

P.2.15....Caso (2):



Grados de libertad impedidos : 2 en A y 1 en C = 3

Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano = 3

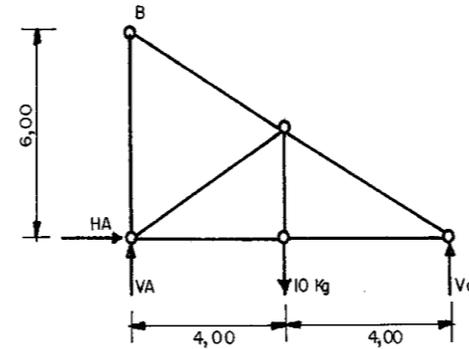
$$GL = 3 - 3 = 0 \quad ; \quad \text{Isostático}$$

Existe un número suficiente de restricciones (HA, HC y VA), pero las reacciones "HA" y "HC" son concurrentes sobre una misma recta de acción.

- a) La armadura está inapropiadamente restringida.
- b) Las reacciones son estáticamente indeterminadas.
- c) No hay equilibrio.

**NOTA:** Si observamos detenidamente la armadura notaremos que tenderá a girar en sentido horario con respecto al punto "A".

P.2.15....Caso (3):



Grados de libertad impedidos : 2 en A y 1 en B = 3

Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano = 3

$$GL = 3 - 3 = 0 \quad ; \quad \text{Isostático}$$

Existe un número suficiente de restricciones (HA, VA y VC) y ninguna de las reacciones son concurrentes sobre una misma recta de acción.

- a) La armadura está completamente restringida.
- b) Las reacciones son estáticamente determinadas.
- c) Se mantiene el equilibrio.
- d) Cálculo de las reacciones:

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad \boxed{HA = 0 \text{ kg}}$$

$$\sum M_A = 0 \quad ; \quad (10 \text{ kg})(4 \text{ mts}) - (V_c)(8 \text{ mts}) = 0$$

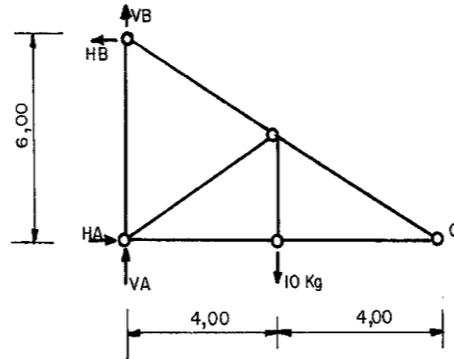
$$\boxed{V_c = 5 \text{ kg} (\uparrow)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad VA - 10 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 0$$

$$\boxed{VA = 5 \text{ kg} (\uparrow)}$$

**P.2.15....Caso (4):**

(D.C.L.)



Grados de libertad impedidos : 2 en A y 2 en B = 4

Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano = 3

$$GL = 3 - 4 = -1 ; \text{ Hiperestático}$$

Existe un número mayor de restricciones que las necesarias para impedir que la armadura se mueva con las cargas dadas.

Hay tres (3) ecuaciones de equilibrio y las reacciones correspondientes a esta armadura involucran cuatro (4) incógnitas.

- La armadura está completamente restringida.
- Las reacciones son estáticamente indeterminadas.
- Se mantiene el equilibrio.
- Cálculo de las reacciones:

En el contenido de este texto hemos hecho mención, muchas veces, de reacciones concurrentes sobre una misma recta de acción.

En este problema nos encontramos, que aunque la armadura está completamente restringida, las reacciones son estáticamente indeterminadas ( 4 incógnitas para 3 ecuaciones de equilibrio). Pero podemos observar que "VA" y "VB" son concurrentes sobre una misma recta de acción; situación esta que nos permite utilizar un "artificio" para calcular los valores de "HA", "HB" y "VA + VB".

como ???

Como "regla" de dicho artificio se debe estudiar el efecto de giro o momento en un punto que esté ubicado sobre la recta de acción de las dos fuerzas concurrentes. Esto lo hacemos tomando en cuenta el "cuarto principio de la estática gráfica", al saber que por dicho punto pasará una fuerza resultante cuya intensidad será la suma algebraica de dichas dos fuerzas concurrentes sobre esa recta de acción.

$$\sum M_A = 0$$

$$(10 \text{ kg})(4 \text{ mts}) - (HB)(6 \text{ mts}) = 0$$

$$HB = 6,67 \text{ kg } (\leftarrow)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$HA - 6,67 \text{ kg} = 0$$

$$HA = 6,67 \text{ kg } (\rightarrow)$$

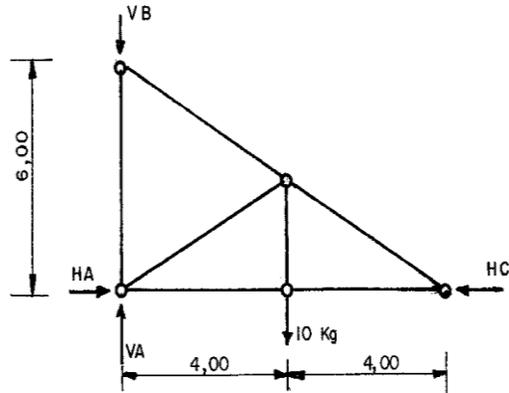
$$\sum F_y = 0$$

$$VA + VB - 10 \text{ kg} = 0$$

$$VA + VB = 10 \text{ kg}$$

P.2.15....Caso (5):

(D.C.L)



Grados de libertad impedidos : 2 en A, 1 en B, 1 en C = 4

Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano = 3

$$GL = 3 - 4 = -1 ; \text{ Hiperestático}$$

Existe un número mayor de restricciones que las necesarias para impedir que la armadura se mueva con las cargas dadas.

Hay 3 ecuaciones de equilibrio y las reacciones correspondientes a esta armadura involucran 4 incognitas.

a) La armadura está inapropiadamente restringida.

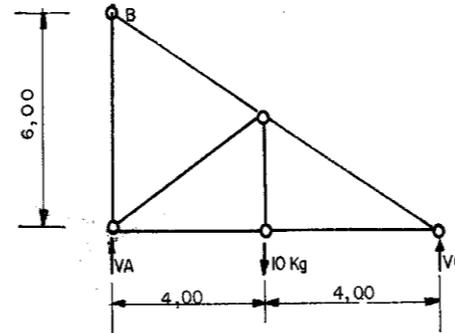
Las reacciones "HA" y "HC" son concurrentes sobre una misma recta de acción. Igualmente "VA" y "VB".

b) Las reacciones son estaticamente indeterminadas.

c) No se mantiene el equilibrio.

P.2.15....Caso (6):

(D.C.L)



Grados de libertad impedidos : 1 en A, 1 en B = 2

Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano = 3

$$GL = 3 - 2 = 1 ; \text{ Hipostático}$$

Existe un número menor de restricciones que las necesarias para impedir que la armadura se mueva con las cargas dadas.

Hay 3 ecuaciones de equilibrio y las reacciones correspondientes a esta armadura involucran 2 incognitas.

a) La armadura está parcialmente restringida.

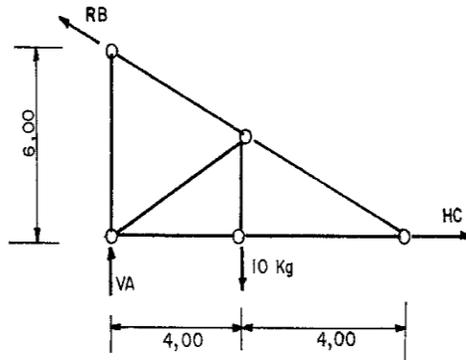
b) Las reacciones son estaticamente determinadas.

c) Bajo estas "condiciones especiales" de carga se mantiene el equilibrio, pero cualquier fuerza (por muy pequeña que sea) que se aplique horizontalmente hará que la armadura se traslade hacia la izquierda o hacia la derecha según el sentido que tenga la Fuerza aplicada.

d)  $VA = VC = 5 \text{ kg}$  (↑).

**P.2.15....Caso (7):**

(D.C.L)



Grados de libertad impedidos : 1 en A, 1 en B, 1 en C = 3

Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano = 3

$$GL = 3 - 3 = 0 \quad ; \quad \text{Isostático}$$

Existe un número suficiente de restricciones (VA, RB y Hc) y ninguna de las reacciones son concurrentes sobre una misma recta de acción.

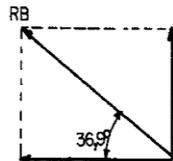
- La armadura está completamente restringida.
- Las reacciones son estáticamente determinadas.
- Se mantiene el equilibrio.
- Cálculo de las reacciones:

$$\sum MB = 0$$

$$(10 \text{ kg})(4 \text{ mts}) - (Hc)(6 \text{ mts}) = 0$$

$$Hc = 6,67 \text{ kg } (\rightarrow)$$

Si descomponemos a "RB" en sus componentes horizontales y verticales



$$\sum F_x = 0$$

$$- (RB)(\cos 36,9) + 6,67 \text{ kg} = 0$$

$$RB = (6,67 \text{ kg}) / (\cos 36,9)$$

$$RB = 8,33 \text{ kg } (\nearrow_{36,9})$$

$$\sum F_y = 0$$

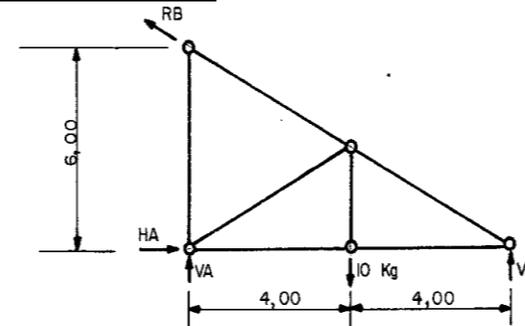
$$(RB)(\sin 36,9) - 10 \text{ kg} + VA = 0$$

$$(8,33 \text{ kg})(\sin 36,9) - 10 \text{ kg} + VA = 0$$

$$5 \text{ kg} - 10 \text{ kg} + VA = 0$$

$$VA = 5 \text{ kg } (\uparrow)$$

**P.2.15....Caso (8):**



Grados de libertad impedidos : 2 en A, 1 en B, 1 en C = 4

Grados de libertad que posee un cuerpo en el plano = 3

$$GL = 3 - 4 = -1 \quad ; \quad \text{Hiperestático}$$

Existe un número mayor de restricciones que las necesarias para impedir que la armadura se mueva.

Hay 3 ecuaciones de equilibrio y las reacciones correspondientes a esta armadura involucran 4 incógnitas.

- La armadura está completamente restringida.
- Las reacciones son estáticamente indeterminadas.
- Se mantiene el equilibrio.

**PROBLEMA P.2.16:**  
\*\*\*\*\*

Una viga de hierro de 12 metros de longitud y 80 kilogramos de peso está sostenida por un perno en "A" y por el cable "BC". Encuéntrense la reacción en A y la tensión en el cable.

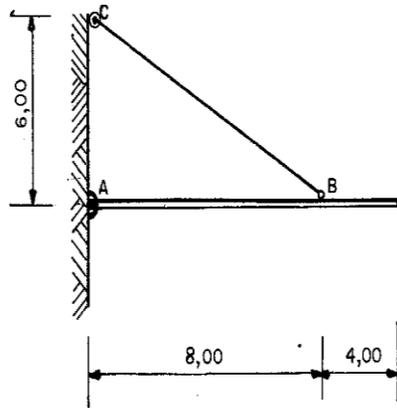
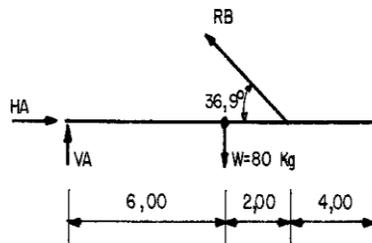


FIGURA P.2.16

Solución:

Primero elaboramos el diagrama de cuerpo libre (ojo con el peso propio de la viga y su punto de acción)

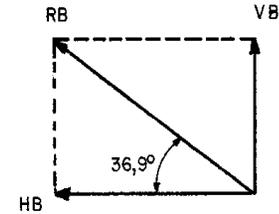
D.C.L.



$$\sum M_B = 0$$

$$(VA)(8 \text{ mts}) - (80 \text{ kg})(2 \text{ mts}) = 0$$

$$VA = 20 \text{ kg } (\uparrow)$$



$$\sum F_y = 0$$

$$VA - 80 \text{ kg} + VB = 20 \text{ kg} - 80 \text{ kg} + VB = 0$$

$$VB = 60 \text{ kg } (\uparrow)$$

$$VB = (RB)(\text{Sen } 36,9) \quad ; \quad 60 \text{ kg} = (RB)(\text{Sen } 36,9)$$

$$RB = 100 \text{ kg } (36,9^\circ)$$

$$HB = (RB)(\text{Cos } 36,9) \quad ; \quad HB = (100 \text{ kg})(\text{Cos } 36,9)$$

$$HB = 80 \text{ kg } (\leftarrow)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$HA - (RB)(\text{Cos } 36,9) = 0 \quad ; \quad HA - HB = 0 \quad ; \quad HA - 80 \text{ kg} = 0$$

$$HA = 80 \text{ kg } (\rightarrow)$$

# ***CAPÍTULO III***

## ***ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS***

Los problemas considerados en los dos capítulos anteriores estaban relacionados con el equilibrio de un solo cuerpo rígido y todas las fuerzas que actuaban eran externas a él. Ahora vamos a examinar algunos casos relacionados con estructuras formadas por varios cuerpos unidos y su equilibrio. En estos problemas no solo hay que determinar las fuerzas externas que actúan sobre la estructura, sino también las que mantienen unidas sus partes. Desde el punto de vista de la estructura como un todo, son fuerzas internas.

Hemos considerado necesario, incluir al inicio de este capítulo, el estudio y análisis de un tipo de articulación (articulación intermedia) que sirve para conectar los elementos rectos de una armadura.

Esta articulación intermedia conforma los nodos de conexión en las armaduras y es sobre ellos donde deben aplicarse las cargas en este tipo de estructuras (fig. 3.1).

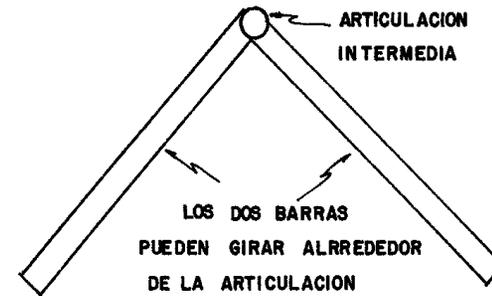


FIGURA 3.1

Los grados de libertad restringidos por esta articulación podemos calcularlos con la aplicación de la fórmula:  $g.l = 2(m-1)$ ; donde "m" representa el número de barras que concurren a dicha articulación o nodo.

Si observamos la figura 3.2, notaremos que existen dos barras unidas a través de una articulación intermedia en el punto "B" y fijadas al suelo a través de articulaciones fijas en los puntos "A" y "C".

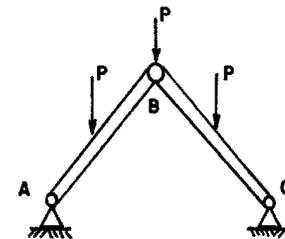


FIGURA 3.2

Observamos dos (2) barras, cada una posee tres (3) grados de libertad en el plano, por lo tanto la figura tiene seis (6) grados de libertad.

Al estudiar los grados de libertad que son restringidos por los vínculos notamos que:

- \* El vínculo en "A" restringe 2 grados de libertad.
- \* El vínculo en "C" restringe 2 grados de libertad.
- \* La articulación intermedia en "B" restringe 2 grados de libertad.  $\langle 2(m-1) = 2(2-1) = 2 \rangle$ .

Grados de libertad que posee esta figura en el espacio = 6

Grados de libertad restringido por los vínculos = 6

$$GL = 6 - 6 : \text{Isostático.}$$

Con esta información puedo construir el diagrama de cuerpo libre respectivo (fig. 3.3):

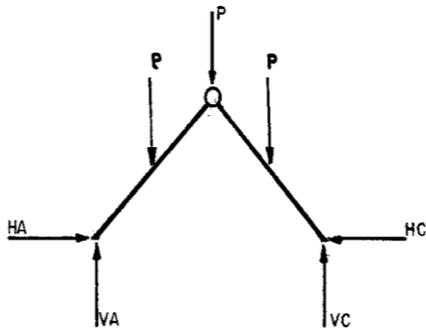


FIGURA 3.3

Como el cuerpo es estáticamente determinado y veo que hay 4 incógnitas ("HA", "Hc", "VA", "Vc"), tienen que haber cuatro Ecuaciones Independientes para que el sistema sea compatible. Es aquí cuando son utilizadas las llamadas ecuaciones auxiliares de la estática".

En que consisten o como obtenemos esas ecuaciones auxiliares ??.

En los nodos o articulaciones intermedias la sumatoria de los momentos es igual a cero; en tal sentido el método para obtener la ecuación auxiliar consiste en "colocarnos" en un nodo y estudiar la sumatoria de los momentos en ese punto bien a la derecha o bien a la izquierda (independientemente una de la otra).

Para fijar la idea de las consideraciones hechas anteriormente, procederemos a explicar las mismas a través de un ejemplo ilustrativo:

**EJEMPLO E.3.1:**  
\*\*\*\*\*

Determinar el equilibrio estático en la figura E.3.1. (despreciese peso de la viga):

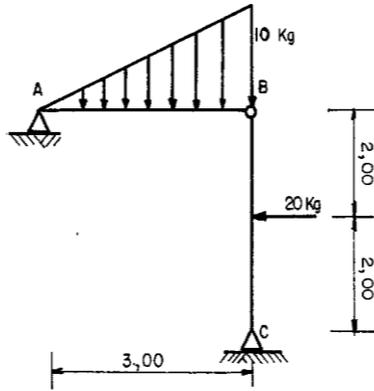


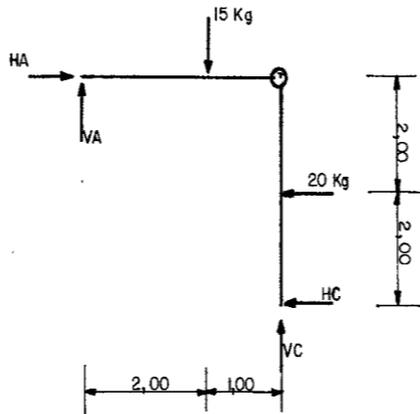
FIGURA E.3.1

Grados de libertad que poseen dos barras en el plano = 6

Grados de libertad impedidos : 2 en A, 2 en B, 2 en C = 6

$$GL = 6 - 6 = 0 \quad : \quad \text{Isostático.}$$

Diagrama de cuerpo libre:



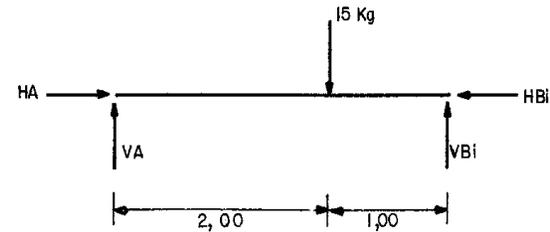
Cuando analizamos este diagrama de cuerpo libre notamos que en cada uno de sus dos extremos hay dos (2) incógnitas y esto nos dificulta el uso de las ecuaciones de

la estática, como lo veníamos haciendo en los capítulos anteriores.

Es aquí cuando podemos facilitar el cálculo de las reacciones, realizando el "despiece" o separación de las barras en donde se encuentra la articulación intermedia.

Por qué ??.

Al realizar el despiece escojo una de las dos secciones (en este caso la sección izquierda) y elaboro un diagrama de cuerpo libre de la misma:



Como en la articulación intermedia no se producen momentos, surgen dos (2) nuevas incógnitas (una reacción interna vertical y una horizontal).

En este caso puedo hacer  $\sum M=0$  en la articulación intermedia y calculo la reacción perpendicular a la barra en su otro extremo.

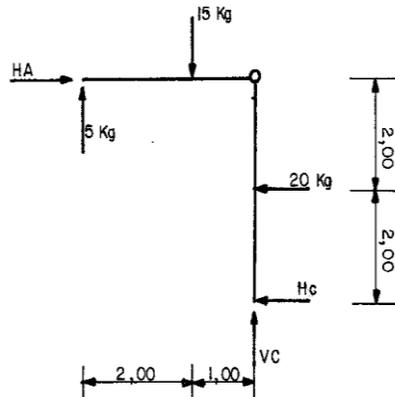
$$\sum M_B = 0$$

$$(3 \text{ mts})(V_A) - (15 \text{ kg})(1 \text{ mts}) = 0$$

$$V_A = 15/3 = 5$$

$$V_A = 5 \text{ kg } (\uparrow)$$

Al obtener el valor de esa incognita y trasladandolo al diagrama de cuerpo libre inicial, tendré solamente tres incognitas y podré utilizar las ecuaciones de equilibrio de la manera como lo hicimos en los capitulos anteriores.



$$\sum F_y = 0$$

$$5 \text{ kg} - 15 \text{ kg} + V_c = 0$$

$$V_c = 10 \text{ kg } (\uparrow)$$

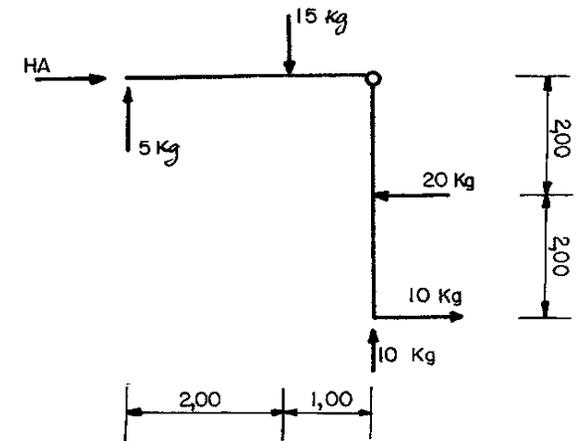
$$\sum M_A = 0$$

$$(15 \text{ kg})(2 \text{ mts}) + (20 \text{ kg})(2 \text{ mts}) + (H_c)(4 \text{ mts}) - (V_c)(3 \text{ mts}) = 0$$

$$H_c = -10 \text{ kg}$$

el signo negativo indica que el sentido escogido no es el verdadero sino el inverso.

$$H_c = 10 \text{ kg } (\rightarrow)$$

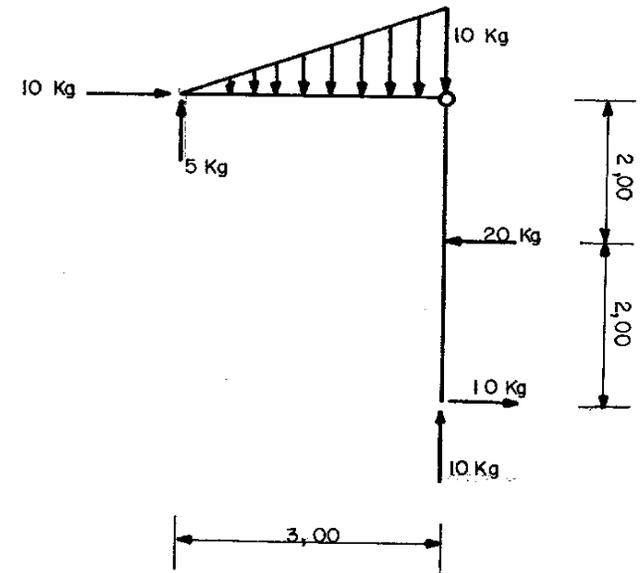


$$\sum F_x = 0$$

$$H_A - 20 \text{ kg} + 10 \text{ kg} = 0$$

$$H_A = 10 \text{ kg } (\rightarrow)$$

**Solución:**



## **ANÁLISIS DE ESTRUCTURA**

Se diseña una estructura para desempeñar una función específica. A fin de cumplir correctamente con su finalidad, la estructura debe tener consistencia y estabilidad suficientes. Con el objeto de determinar si la estructura, como un todo o una parte de ella, tienen suficiente resistencia para soportar las cargas aplicadas, éstas deben ser conocidas; esto es, deben saberse las cargas que actúan, su magnitud y su posición.

Una vez que se han calculado o estimado las cargas aplicadas, se puede analizar la estructura para determinar su consistencia y estabilidad. Estas dos cualidades son de suma importancia y cada una debe ser considerada. Se sugiere que el análisis se inicie con la estabilidad de la estructura.

La consideración de la estabilidad de estructuras, a menudo puede realizarse siguiendo la siguiente secuencia: Se supone que la estructura es rígida. Se sustituyen los efectos de los apoyos por fuerzas convenientes indeterminadas (diagrama de cuerpo libre). Si las reacciones son tales que se encuentra oposición al movimiento inmediatamente después de aplicarse la carga, se dice que la estructura es exteriormente estable con respecto a la carga considerada; si tal cosa no ocurre, la estructura es exteriormente inestable con respecto a la carga considerada; es decir, la estructura

no está adecuadamente apoyada para resistir las cargas aplicadas. Si se puede encontrar una solución única de las ecuaciones de estática aplicadas a toda la estructura considerada como un cuerpo libre y rígido y sujeto a las cargas y reacciones, se dice que la estructura es estable y estáticamente determinada. Los métodos explicados en el capítulo anterior se aplican directamente para clasificar estructuras con relación a su estabilidad y determinación externas.

**DEFINICION DE UNA ARMADURA:** La armadura es un tipo de estructura de mayor importancia en Ingeniería. Proporciona soluciones tanto prácticas como económicas a muchos problemas principalmente en el diseño de puentes y edificios. Se diseñan las armaduras para soportar grandes cargas o para alcanzar mayores distancias que un miembro individual. Una armadura se puede definir como un sistema de barras conectadas en sus extremos para formar una armazón estable. Una armazón es estable si se disponen sus elementos de manera que se conserve la forma geométrica original, cuando se le aplica una carga.

Si todos los miembros de una armadura están en el mismo plano, la estructura recibe el nombre de armadura plana. Las armaduras planas solamente pueden resistir aquellas fuerzas que están en su plano.

En este texto estudiaremos únicamente armaduras planas.

Una armadura consta de elementos rectos conectados en los nodos. Los miembros de una armadura se unen solamente en sus extremos; es decir, un miembro no puede ser continuo a través de un nodo. Por lo general, los miembros de una armadura son delgados y pueden soportar poca carga lateral; por lo tanto, las cargas deben aplicarse sobre los nodos y no directamente sobre los miembros.

**METODO DE ANALISIS (ARMADURA PLANA):** En el diseño de una estructura, independiente de la función que vaya a desempeñar, se deben conocer las fuerzas que actúan en cada miembro de la estructura antes de elegir un material y una forma estructural para sostenerlas. Existen dos métodos muy comunes para determinar analíticamente las fuerzas en las barras de una armadura: El método de los nodos y el método de las secciones.

**METODO DE LOS NODOS (ARMADURA PLANA):** A fin de fijar las ideas contenidas en el uso del método de los nodos, utilizaremos un ejemplo ilustrativo con miras a facilitar la explicación de dicho método que es el más eficaz cuando hay que determinar las fuerzas en todos los miembros de la armadura.

**EJEMPLO ILUSTRATIVO:**

Dada la armadura de la figura 3.4, calcúlese las fuerzas internas en todos los miembros de la misma.

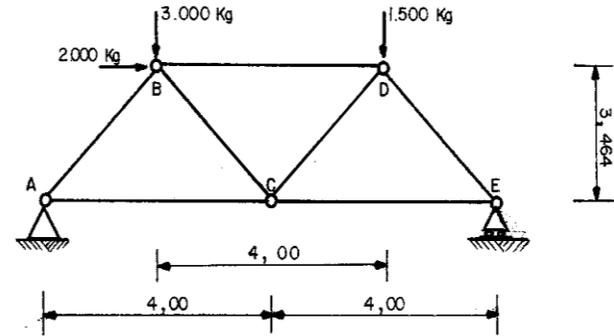


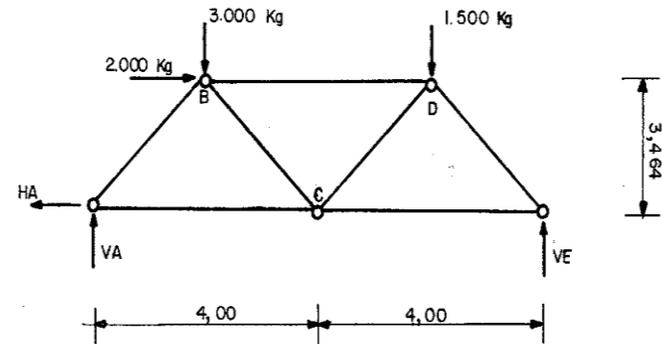
FIGURA 3.4

Primero suponemos que la estructura es rígida y la consideramos como un solo cuerpo.

Grados de libertad impedidos : 2 en A y 1 en E = 3  
 Grados de libertad que posee un cuerpo rígido en el plano = 3  
 $GL = 3 - 3 = 0$  : Isostático.

La estructura es estable y estáticamente determinada.

Diagrama de cuerpo libre:

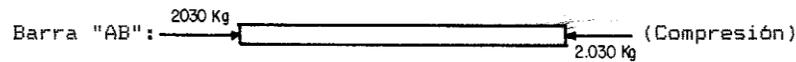




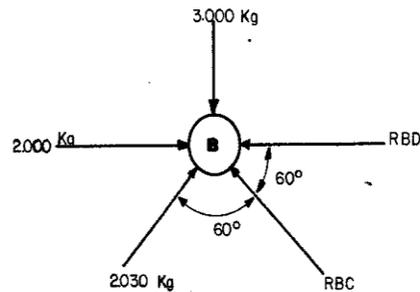


En conclusión: al calcular las reacciones en cada nodo conoceremos inmediatamente las fuerzas internas que actúan sobre cada barra conectada a él, y también la fuerza interna que actúa en el otro nodo que está conectado a éste a través de dicha barra.

Barra "AC" : 3015 kg (Tracción)



NODO "B":



Como "artificio" para facilitar la aplicación de este método es recomendable "trabajar" con el ángulo  $\theta$  que forma cada fuerza con la horizontal. De esa forma cuando estudiemos las fuerzas en "X" utilizamos "Cos  $\theta$ " y cuando estudiemos las fuerzas en "Y" utilizamos "Sen  $\theta$ ".

$$\sum F_y = 0$$

$$-(3000 \text{ kg}) + (2030 \text{ kg})(\text{Sen } 60) + (RBC)(\text{Sen } 60) = 0$$

$$RBC = (3000 \text{ kg} - 1760 \text{ kg}) / (\text{Sen } 60)$$

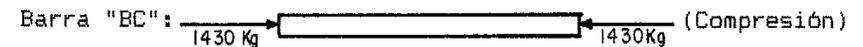
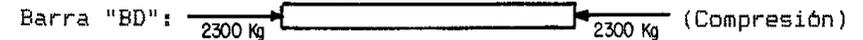
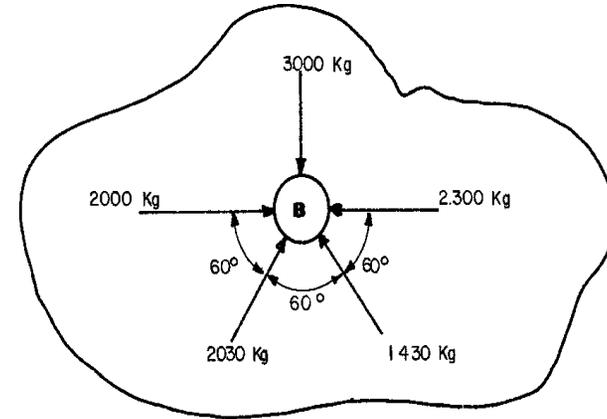
$$RBC = 1430 \text{ kg} \quad (60^\circ)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$+ (2000 \text{ kg}) + (2030 \text{ kg})(\text{Cos } 60) - RBD - (RBC)(\text{Cos } 60) = 0$$

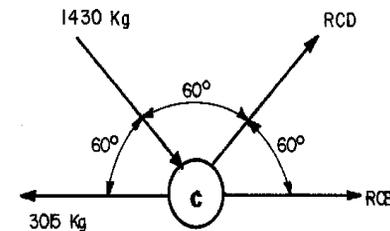
$$2000 \text{ kg} + 1015 \text{ kg} - RBD - 715 \text{ kg} = 0$$

$$RBD = 2300 \text{ kg} \quad (\leftarrow)$$



Nótese que las fuerzas en los extremos de la barra son iguales y opuestas a las calculadas en los nodos. (en el punto donde se unen barra y nodo).

NODO "C":



$$\sum F_y = 0$$

$$- (1430 \text{ kg})(\text{Sen } 60) + (RCD)(\text{Sen } 60) = 0$$

$$- 1430 \text{ kg} + RCD = 0$$

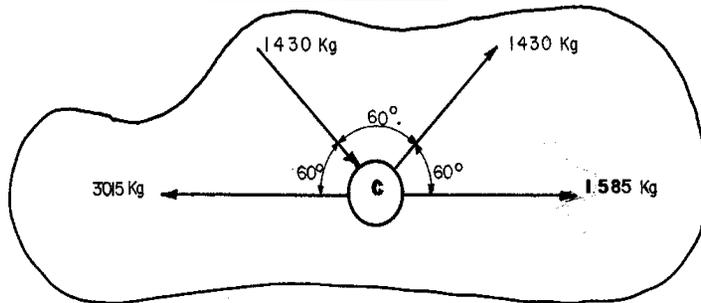
$$RCD = 1430 \text{ kg} \quad \left( \begin{array}{c} \nearrow \\ 60^\circ \end{array} \right)$$

$$\sum F_x = 0$$

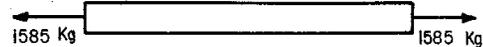
$$- (3015 \text{ kg}) + (1430 \text{ kg})(\text{Cos } 60) + (RCD)(\text{Cos } 60) + RCE = 0$$

$$- 3015 \text{ kg} + 715 \text{ kg} + 715 \text{ kg} + RCE = 0$$

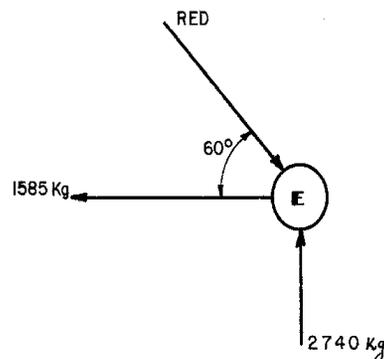
$$RCE = 1585 \text{ kg} \quad (\longrightarrow)$$



Barra "CD":  (Tracción)

Barra "CE":  (Tracción)

NODO "E":

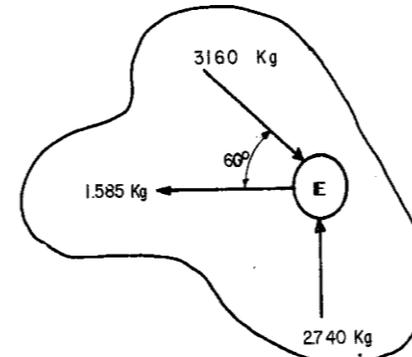


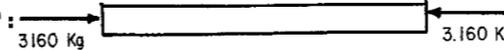
$$\sum F_y = 0$$

$$- (RED)(\text{Sen } 60) + 2740 \text{ kg} = 0$$

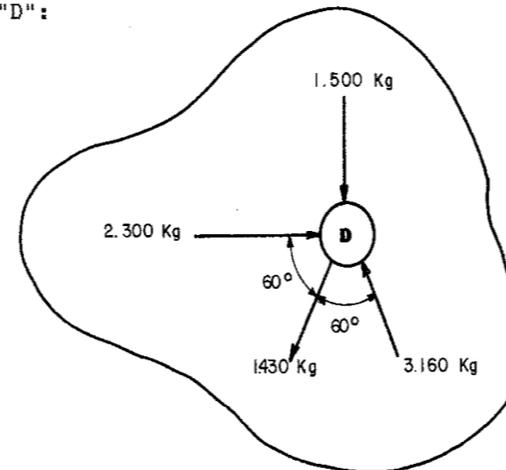
$$RED = (2740 \text{ kg}) / (\text{Sen } 60) = 3160 \text{ kg}$$

$$RED = 3160 \text{ kg} \quad \left( \begin{array}{c} \nearrow \\ 60^\circ \end{array} \right)$$



Barra "DE":  (Compresión)

Con todos los datos anteriores y tomando en cuenta la tercera ley de Newton podemos indicar el equilibrio en el NODO "D":



**RESPUESTA**

BARRA	Fuerza Interna: T = Tracción. C = Compresión.
"AC"	3015 kg (T)
"AB"	2030 kg (C)
"BC"	1430 kg (C)
"BD"	2300 kg (C)
"CD"	1430 kg (T)
"CE"	1585 kg (T)
"DE"	3160 kg (C)

**EJEMPLO ILUSTRATIVO E.3.2:**

Usando el método de los nodos, determine la fuerza en cada miembro de la armadura de la figura E.3.5.

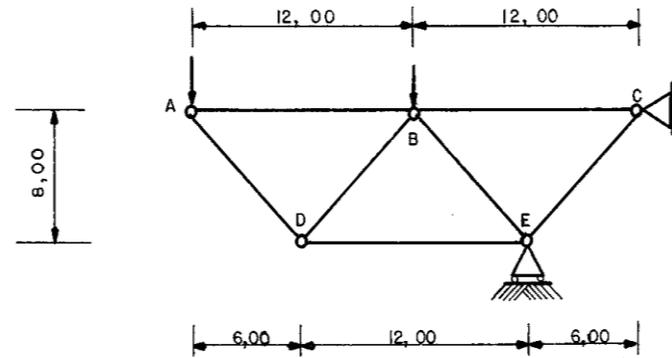
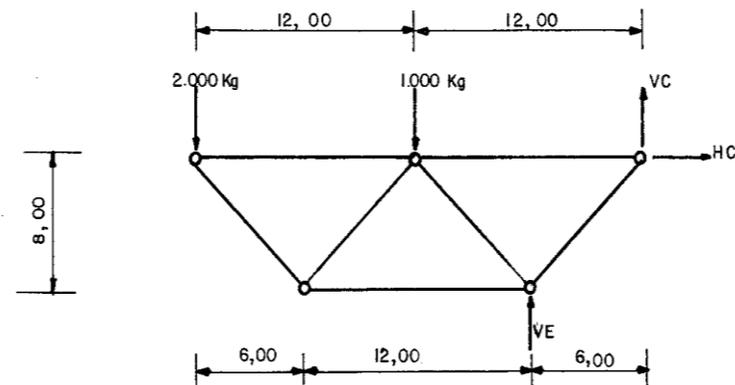


FIGURA E.3.5.

Diagrama de cuerpo libre:



$$\sum M_C = 0$$

$$- (2000 \text{ kg})(24 \text{ mts}) - (1000 \text{ kg})(12 \text{ mts}) + (VE)(6 \text{ mts}) = 0$$

$$VE = 10.000 \text{ kg ( } \uparrow \text{ )}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$- 2000 \text{ kg} - 1000 \text{ kg} + 10000 \text{ kg} + V_c = 0$$

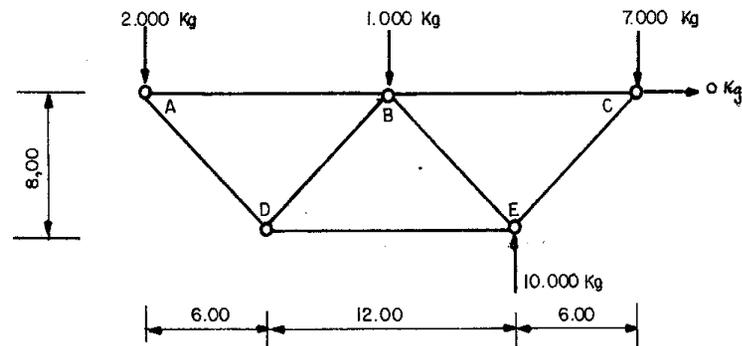
$$V_c = - 7000 \text{ kg}$$

El sentido escogido no fué el correcto:

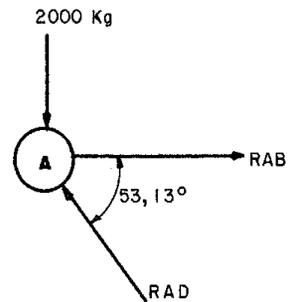
$$V_c = 7.000 \text{ kg } (\downarrow)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$H_c = 0 \text{ Kg}$$



NODO "A":



$$\sum F_y = 0$$

$$- 2000 \text{ kg} + (RAD)(\text{Sen } 53,13) = 0$$

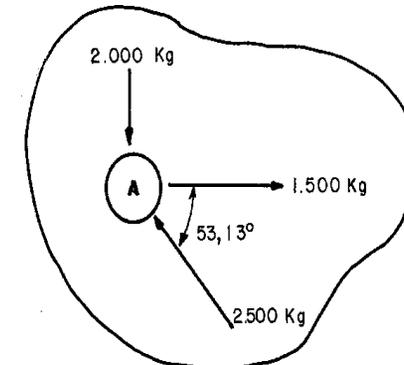
$$R_{AD} = 2500 \text{ kg } (53,13^\circ)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$- (RAD)(\text{Cos } 53,13) + R_{AB} = 0$$

$$R_{AB} = (2500 \text{ kg})(\text{Cos } 53,13)$$

$$R_{AB} = 1500 \text{ kg } (\rightarrow)$$

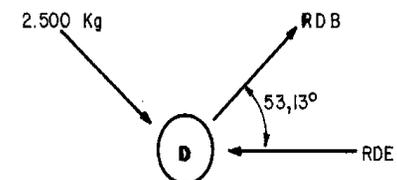


Barra "AB": 1.500 Kg (Tracción)

Barra "AD": 2.500 Kg (Compresión)

Generalmente se simplifican los cálculos cuando vamos analizando los nodos que nos ofrezcan menos incógnitas o fuerzas aún no calculadas.

NODO "D":



$$\sum F_y = 0$$

$$- (2500 \text{ kg})(\text{Sen } 53,13) + (RDB)(\text{Sen } 53,13) = 0$$

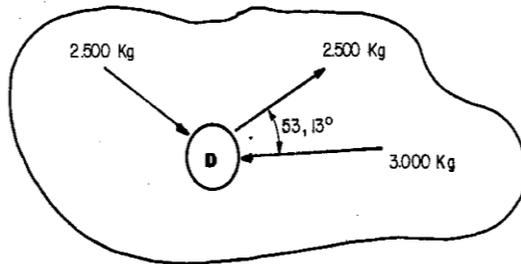
$$RDB = 2500 \text{ kg} \quad (53,13^\circ)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$+ (2500 \text{ kg})(\text{Cos } 53,13) + (RDB)(\text{Cos } 53,13) - RDE = 0$$

$$1500 \text{ kg} + 1500 \text{ kg} - RDE = 0$$

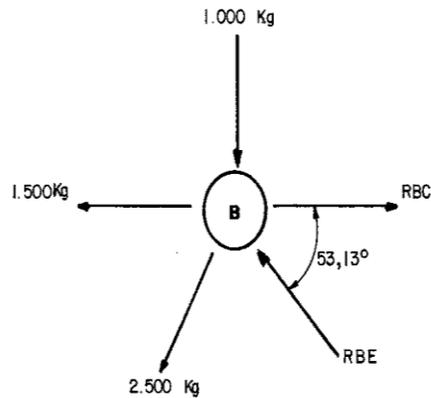
$$RDE = 3000 \text{ kg} \quad (\leftarrow)$$



Barra "DB":  $\xleftarrow{2500\text{Kg}}$   $\xrightarrow{2500 \text{ Kg}}$  (Tracción)

Barra "DE":  $\xrightarrow{3000\text{Kg}}$   $\xleftarrow{3000 \text{ Kg}}$  (Compresión)

NODO "B":



$$\sum F_y = 0$$

$$- (1000 \text{ kg}) - (2500 \text{ kg})(\text{Sen } 53,13) + (RBE)(\text{Sen } 53,13) = 0$$

$$RBE = (3000 \text{ kg}) / (\text{Sen } 53,13) = 3750 \text{ kg}$$

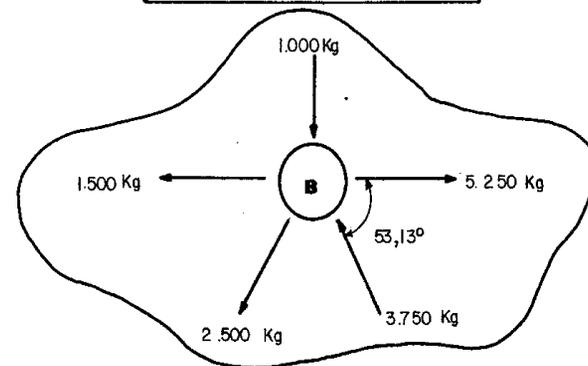
$$RBE = 3750 \text{ kg} \quad (53,13^\circ)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-(1500 \text{ kg}) - (2500 \text{ kg})(\text{Cos } 53,13) - (RBE)(\text{Cos } 53,13) + RBC = 0$$

$$- 1500 \text{ kg} - 1500 \text{ kg} - 2250 \text{ kg} + RBC = 0$$

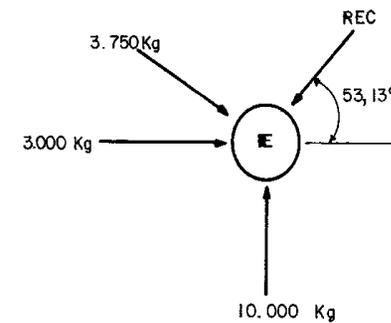
$$RBC = 5250 \text{ kg} \quad (\rightarrow)$$



Barra "BC":  $\xleftarrow{5.250\text{Kg}}$   $\xrightarrow{5.250 \text{ Kg}}$  (Tracción)

Barra "BE":  $\xrightarrow{3.750\text{Kg}}$   $\xleftarrow{3.750 \text{ Kg}}$  (Compresión)

NODO (E):

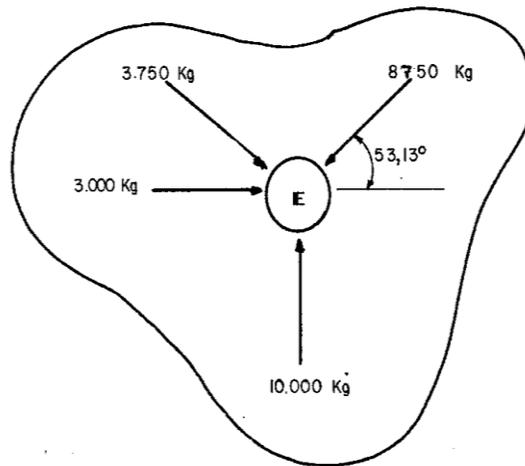


$$\sum F_y = 0$$

$$+(10000 \text{ kg}) - (3750 \text{ kg})(\text{Sen } 53,13) - (\text{REC})(\text{Sen } 53,13) = 0$$

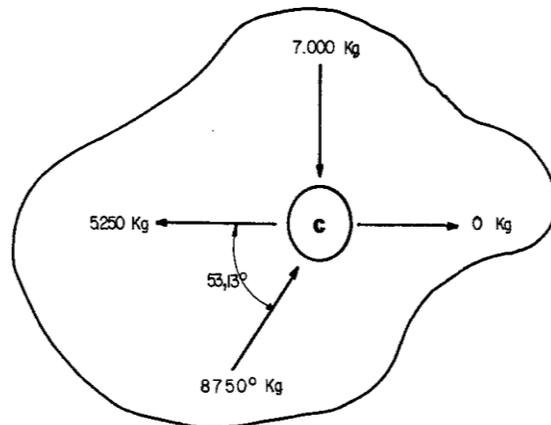
$$\text{REC} = (7000 \text{ kg}) / (\text{Sen } 53,13) = 8750 \text{ kg}$$

$$\text{REC} = 8750 \text{ kg} \quad (\angle 53,13^\circ)$$



Barra "EC":  $\xrightarrow{8750 \text{ Kg}}$   $\xleftarrow{8750 \text{ Kg}}$  (Compresión)

Con los resultados anteriores puedo indicar las fuerzas actuantes en el Nodo "C":



Respuesta:

Barra	Fuerza interna C = Compresión. T = Tracción.
"AB"	1.500 kg (T)
"AD"	2.500 kg (C)
"BC"	5.250 kg (T)
"BD"	2.500 kg (T)
"BE"	3.750 kg (C)
"CE"	8.750 kg (C)
"DE"	3.000 kg (C)

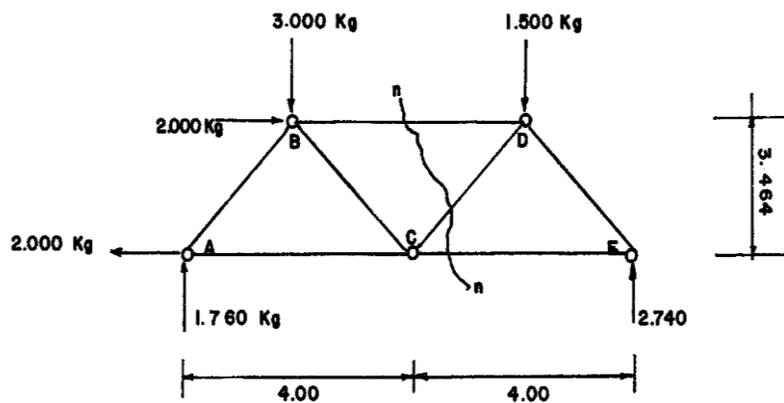
METODO DE LAS SECCIONES (ARMADURA PLANA):

\*\*\*\*\*

El método de los nodos es más eficaz cuando hay que determinar las fuerzas en todos los miembros de la armadura. Pero si solamente queremos determinar una o unas cuantas fuerzas, resulta más ventajoso usar el método de las secciones.

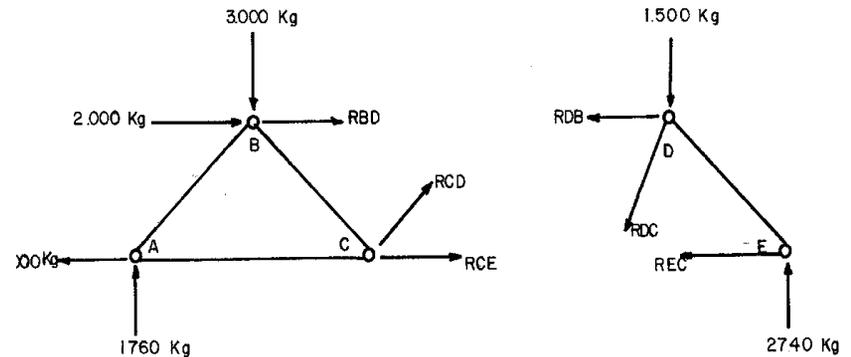
Nuevamente analizaremos una armadura plana ideal en equilibrio. Consideremos la armadura que se muestra en la Figura 3.4 (pag.96) y supongamos que se nos manda a determinar la fuerza en el miembro o barra "BD".

El método de las secciones consiste en hacer un corte a través de los miembros de la armadura que son desconocidos y van a ser calculados. En este ejemplo la incognita es "BD"; por lo tanto, se puede tomar la sección n-n



Cada una de las dos secciones debe estar en equilibrio. A fin de que cada una de las secciones esté en

equilibrio, las fuerzas ejercidas por la sección de la derecha sobre la de la izquierda se deben mostrar en un diagrama de cuerpo libre de la sección de la izquierda. Lo mismo sucede con la sección de la derecha.



Estudiando la sección de la izquierda, notamos que las reacciones "RBD", "RCD" y "RCE" son necesarias para mantenerla en equilibrio.

En vista de que ambas secciones deben estar en equilibrio, pueden aplicarse las ecuaciones de equilibrio independientemente a cualquiera de las secciones para calcular la incógnita.

En nuestro caso (Sección de la izquierda) podemos notar que surgen tres incógnitas, y que una forma de simplificar el problema es la de aplicar la ecuación de momento igual a cero en el Nodo "C"; ya que como las líneas de acción de "RCD" y "RCE" pasan por este nodo, me quedará una ecuación con una sola incógnita ("RBD").

$$M_c = 0$$

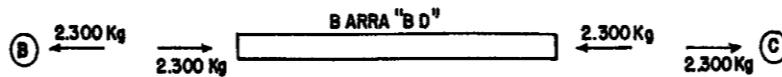
$$(RBD)(3.46 \text{ m}) + (2000 \text{ k})(3.46 \text{ m}) - (3000 \text{ k})(2 \text{ m}) + (1760 \text{ k})(4 \text{ m}) = 0$$

$$RBD = -(7968 \text{ kgmts}) / 3,464 \text{ mts} = -2300 \text{ kg}$$

Como el resultado me dió con signo negativo, el sentido de la fuerza es el inverso del escogido.

$$RBD = 2.300 \text{ kg} \quad (\leftarrow)$$

La barra "BD" está unida al nodo "B" y al nodo "D" de la forma siguiente:



Barra "BD" : Sometida a 2.300 kg a Compresión

**EJEMPLO E.3.6:** Determinar la fuerza en la barra "DE" de la armadura que se muestra en la figura E.3.6.

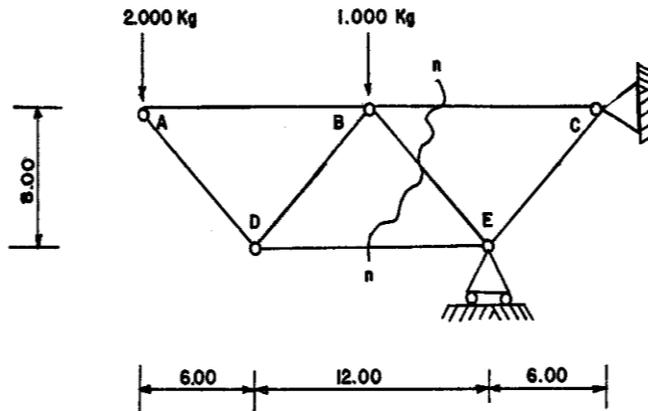
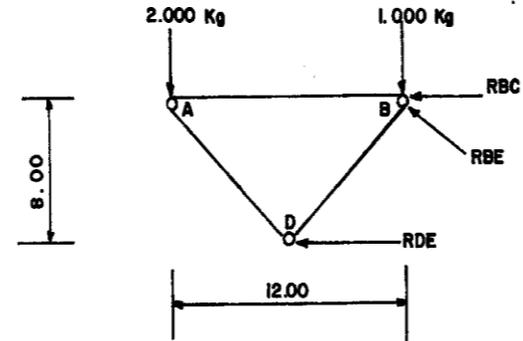


FIGURA E.3.6

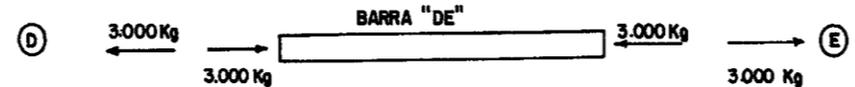
D.C.L



$$\sum M_B = 0$$

$$- (2000 \text{ kg})(12 \text{ mts}) + (RDE)(8 \text{ mts}) = 0$$

$$RDE = 3000 \text{ kg} \quad (\leftarrow)$$



Barra "DE" sometida a 3.000 kg a Compresión

**Nota:** Es recomendable, antes de utilizar el método de las secciones, verificar la estabilidad de la armadura y calcular sus reacciones externas, utilizando los conocimientos adquiridos y puestos en práctica en el Capítulo II.

# ***CAPÍTULO IV***

***CARACTERÍSTICAS DE SOLICITACIÓN***  
***FUERZAS NORMALES, FUERZAS CORTANTES***  
***Y MOMENTOS FLEXIONANTES***

Algunos cálculos de ingeniería serían muy difíciles y hasta imposibles si no se hicieran suposiciones de simplificación. Cada vez que se simplifica un problema, se introduce una fuente de error. La suma de estos errores puede ser significativa. Los factores de seguridad se emplean entre otras cosas, para cubrir la diferencia entre lo que se calcula y lo que realmente pasa. Por ejemplo, en el análisis de viga, se utilizarán las suposiciones siguientes:

- 1.-Todas las fuerzas se localizan en el mismo plano a lo largo de la viga y dicho plano pasa por los centroides de las secciones transversales.
- 2.-Las secciones transversales son exactamente las mismas a lo largo de toda la viga.
- 3.-Una fuerza simple actúa en un solo punto sobre la viga y una carga distribuida actúa a lo largo de una línea.
- 4.-La viga está diseñada de manera que no se flexione, no se pandee ni se rompa.
- 5.-Las fuerzas son aplicadas suavemente, sin vibraciones, ni impacto.

Algunas de estas suposiciones se modificarán o se desecharán conforme se conozca más acerca del análisis de ingeniería. El hecho de que se usen significa que se deben estudiar las respuestas de una manera muy crítica.

Se estudiarán solamente aquellas vigas "estáticamente determinadas". Las reacciones en los soportes o vínculos de tales vigas se pueden encontrar usando las tres ecuaciones de la estática. Las estáticamente indeterminadas requieren otros métodos de análisis que tendremos oportunidad de estudiar en el texto "Resistencia de Materiales".

Con referencia a la construcción de los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, pueden hacerse las generalizaciones siguientes:

- 1.-Una carga o un punto de apoyo origina una línea vertical en el diagrama de fuerzas cortantes.
- 2.-Una carga uniformemente distribuida origina una línea inclinada en el diagrama de fuerzas cortantes.
- 3.-Las regiones de la viga en donde no hay cargas aplicadas, se reflejan como líneas horizontales en el diagrama de fuerzas cortantes.

4.-Una línea horizontal en el diagrama de fuerzas cortantes implica una línea inclinada en el diagrama de momentos flexionantes.

5.-Una línea inclinada en el diagrama de fuerzas cortantes implica una línea curva (arco de parábola) en el diagrama de momentos flexionantes.

6.-Una carga no-uniformemente distribuida (en forma de triángulo) origina un arco de parábola en el diagrama de fuerzas cortantes.

7.-Un arco de parábola en el diagrama de fuerzas cortantes implica una curva cúbica en el diagrama de momentos flexionantes.

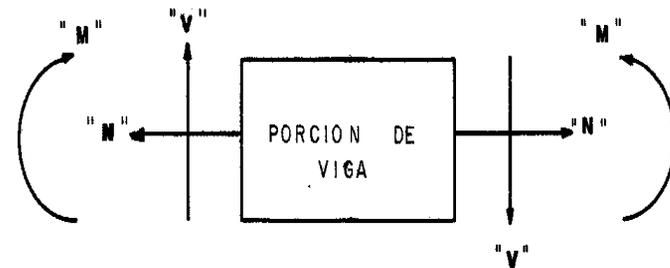
8.-Cada coordenada vertical del diagrama de momentos flexionantes en un punto de la viga tiene un valor igual a la suma algebraica del área del diagrama de fuerzas cortantes, hasta ese punto. Áreas del diagrama de fuerzas cortantes por encima del eje horizontal se consideran positivas y por debajo del eje horizontal se consideran negativas.

9.-Cuando el diagrama de fuerzas cortantes cruza al eje horizontal, entonces el diagrama

de momentos flexionantes en ese punto debe cambiar de pendiente, ya sea de negativa a positiva o viceversa. Esto significa que cualquier punto, donde el diagrama de fuerzas cortantes cruce al eje horizontal, debe ser un máximo o un mínimo en el diagrama de momentos flexionantes.

10.-Un momento externo aplicado en un punto de la viga origina una línea vertical en el diagrama de Momentos Flexionantes.

NOTA IMPORTANTE: Se dice que la normal "N", el cortante "V" y el momento flexionante "M" en un punto dado de una viga son positivos cuando las fuerzas y pares internos que actúan en cada porción de la viga están dirigidos como se muestra a continuación:



De la misma forma como hemos hecho en los capítulos anteriores, utilizaremos algunos ejemplos ilustrativos para fijar las ideas y facilitar la comprensión de esta sección.

**EJEMPLO ILUSTRATIVO E.4.1:**

\*\*\*\*\*

Elaborar los diagramas de las Características de Solicitación (Fuerzas normales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes) de la viga simplemente apoyada mostrada en la Fig.E.4.1.

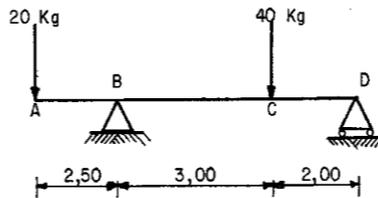
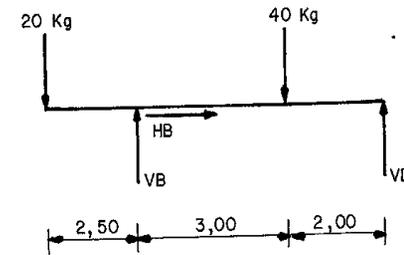


FIGURA E.4.1

Una de las condiciones necesarias para iniciar la realización del diagrama de las Características de Solicitación (Diagrama de "N", "V" y "M") es la de conocer todas las fuerzas externas que actúan sobre la viga; para eso es necesario conocer las reacciones generadas por los apoyos.

En tal sentido debemos determinar el equilibrio estático tal y como lo hicimos en el Capítulo II.

D.C.L



$$\sum M_B = 0$$

$$- (20 \text{ kg})(2,5 \text{ mts}) + (40 \text{ kg})(3 \text{ mts}) - VD (5 \text{ mts}) = 0$$

$$- 50 \text{ kg.mts} + 120 \text{ kg.mts} - VD (5 \text{ mts}) = 0$$

$$VD = 14 \text{ kg. ( } \uparrow \text{ )}$$

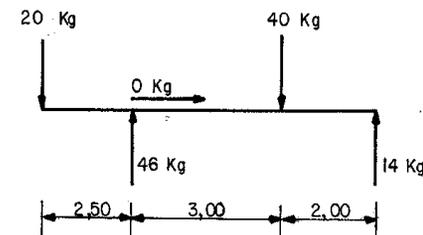
$$\sum F_y = 0$$

$$- 20 \text{ kg} + VB - 40 \text{ kg} + 14 \text{ kg} = 0$$

$$VB = 46 \text{ kg ( } \uparrow \text{ )}$$

$$\sum F_x = 0$$

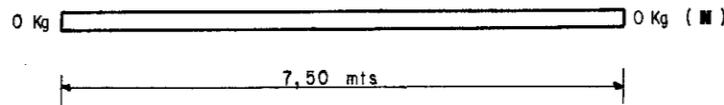
$$HB = 0 \text{ kg}$$



Con esta información puedo iniciar el estudio de las fuerzas internas a través de toda la viga.

Fuerza Normal "N" (Fuerza interna en dirección al eje de la viga, perpendicular a la sección transversal):

En este caso observamos que a lo largo del eje de la viga y perpendicular a su sección transversal se ejerce solo una fuerza ("HB") y su intensidad o magnitud es de 0 kg.



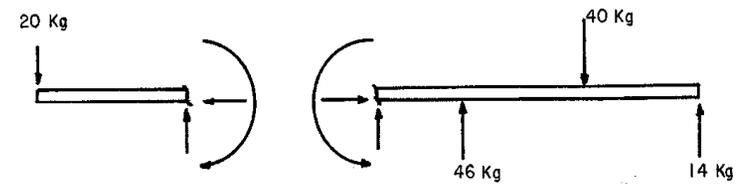
Fuerza Cortante "V" (Fuerza interna perpendicular al eje de la viga, tangencial a la sección transversal de la misma):

Cuando estudiamos en el capítulo anterior el método de las secciones apuntamos que cuando un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio y lo separamos en dos "secciones", las mismas generarían otras incógnitas en sus extremos (el separado) que garantizarían su equilibrio.

En aquellos casos se generaban dos incógnitas, una horizontal y otra vertical, por el hecho de que "separábamos" en los nodos y en estos no se genera momento.

Cuando separamos una viga en un punto donde no se

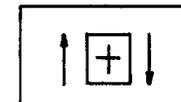
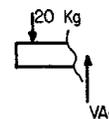
encuentra un nodo, se generan tres incógnitas: una vertical, una horizontal y un momento.



En este ejemplo ilustrativo, primero vamos a analizar el valor que deberá tener la incógnita que es perpendicular al eje de la viga en el extremo "separado" para mantener el equilibrio con respecto a las fuerzas externas verticales que actúan en el "pedazo" de viga en estudio y posteriormente lo haremos con el momento flexionante.

El método recomendado es estudiar de izquierda a derecha o viceversa (según usted lo prefiera) y hacer los cortes para el estudio antes y después del punto donde actúe cada fuerza y cada vínculo.

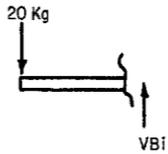
Después del punto "A":



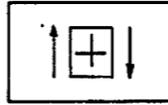
$$- 20 \text{ kg} + VAd = 0$$

$$VAd = 20 \text{ kg} \quad (\uparrow) \quad \ominus$$

Antes del punto "B":

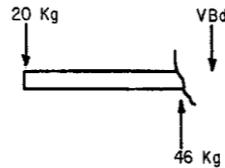


$$- 20 \text{ kg} + VBi = 0$$

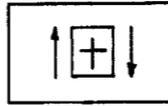


$$VBi = 20 \text{ kg} \quad (\uparrow) \quad (-)$$

Después del punto "B":

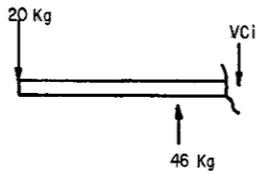


$$- 20 \text{ kg} + 46 \text{ kg} - Vbd = 0$$

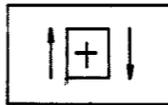


$$Vbd = 26 \text{ kg} \quad (\downarrow) \quad (+)$$

Antes del punto "C":

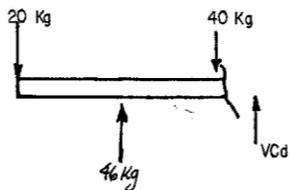


$$- 20 \text{ kg} + 46 \text{ kg} - Vci = 0$$

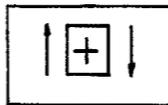


$$Vci = 26 \text{ kg} \quad (\downarrow) \quad (+)$$

Después del punto "C":

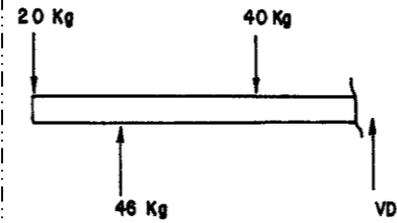


$$- 20 \text{ kg} + 46 \text{ kg} - 40 \text{ kg} + Vcd = 0$$

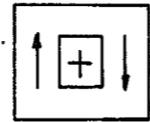


$$Vcd = 14 \text{ kg} \quad (\uparrow) \quad (-)$$

Antes del punto "D":

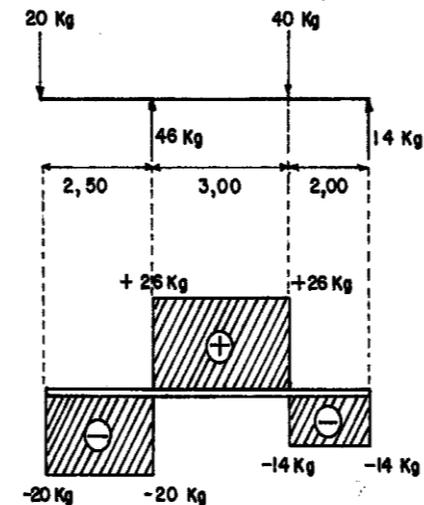


$$- 20 \text{ kg} + 46 \text{ kg} - 40 \text{ kg} + VDi = 0$$



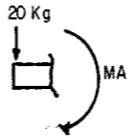
$$VDi = 14 \text{ kg} \quad (\uparrow) \quad (-)$$

Con toda la información anterior y recordando la "nota importante" de la página 118 y las generalizaciones de las páginas 116 y 117, realizamos el diagrama de fuerza cortante:

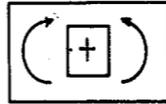


Una vez que hemos obtenido los valores de la fuerza cortante y recordando los apartes 4 y 9 de la página 117 y 118 respectivamente pasamos a realizar el estudio del momento flexionante en los puntos respectivos.

En el punto "A":

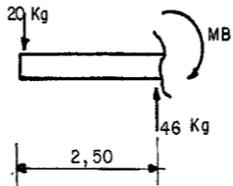


$$(20 \text{ kg})(0 \text{ mts}) = MA$$

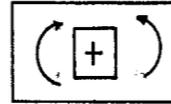


$$MA = 0 \text{ kg.mts}$$

En el punto "B":

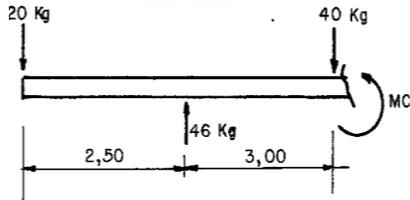


$$-(20 \text{ kg})(2,5 \text{ mts}) + MB = 0$$

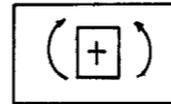


$$MB = 50 \text{ kg.mts} \quad (\curvearrowright) \quad (-)$$

En el punto "C":

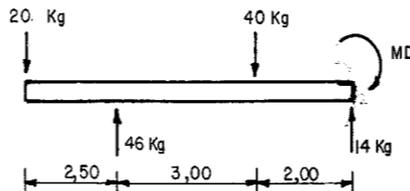


$$-(20 \text{ kg})(5,5 \text{ mts}) + (46 \text{ kg})(3 \text{ mts}) - Mc = 0$$

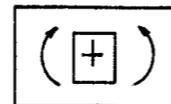


$$Mc = 28 \text{ kg.mts} \quad (\curvearrowright) \quad (+)$$

En el punto "D":



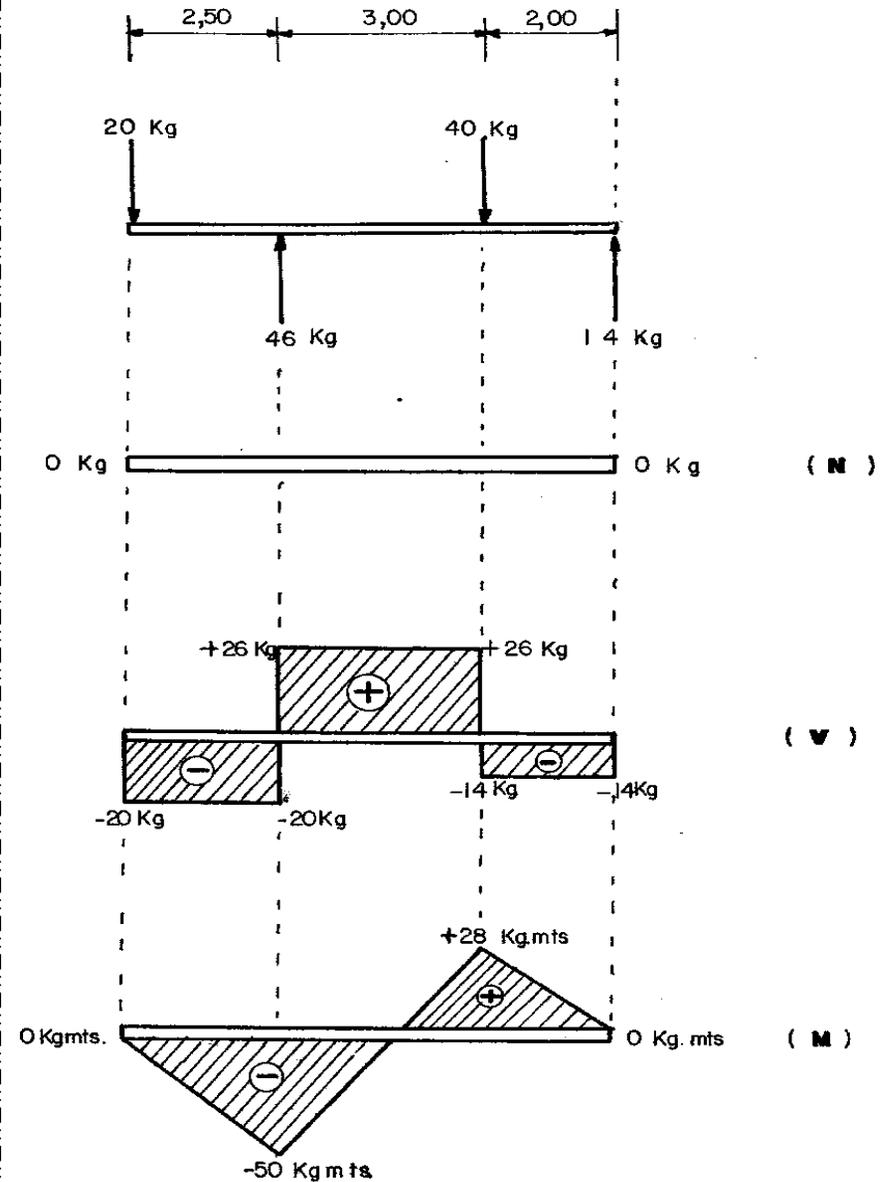
$$-(20 \text{ kg})(7,5 \text{ mts}) + (46 \text{ kg})(5 \text{ mts}) - (40 \text{ kg})(2 \text{ mts}) + MD = 0$$



$$MD = 0 \text{ kg.mts}$$

### RESPUESTA E.4.1

Características de Solicitación



**EJEMPLO E.4.2:**  
\*\*\*\*\*

Hagense los diagramas de las Características de sollicitación de la viga simplemente apoyada mostrada en la figura E.4.2:

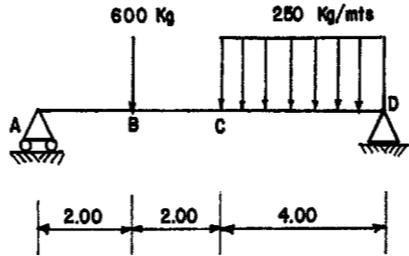
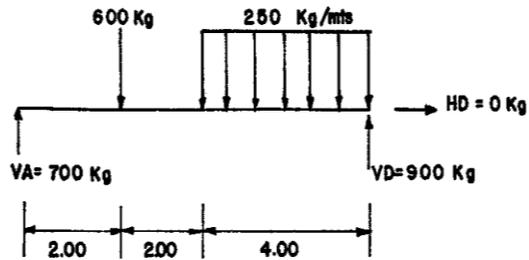
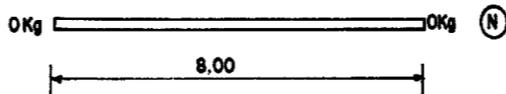


FIGURA E.4.2

Fuerzas externas:



Fuerza Normal "N": A lo largo del eje de la viga, perpendicular a su sección transversal, solo actúa una fuerza ("HD") y su intensidad o magnitud es de 0 kg.

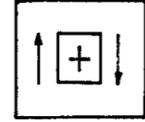


Fuerzas Cortantes "V":

Después del punto "A":

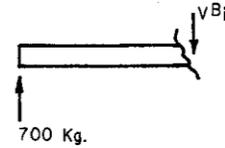


$$700 \text{ kg} - VAd = 0$$

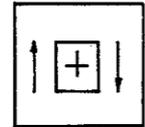


$$VAd = 700 \text{ kg} \quad (\downarrow) \quad (+)$$

Antes del punto "B":

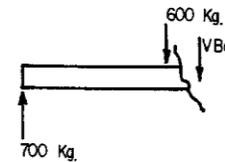


$$700 \text{ kg} - VBi = 0$$

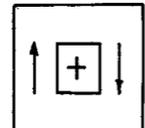


$$VBi = 700 \text{ kg} \quad (\downarrow) \quad (+)$$

Después del punto "B":

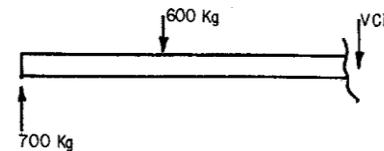


$$700 \text{ kg} - 600 \text{ kg} - VBd = 0$$

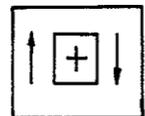


$$VBd = 100 \text{ kg} \quad (\downarrow) \quad (+)$$

Antes del punto "C":



$$700 \text{ kg} - 600 \text{ kg} - VCi = 0$$



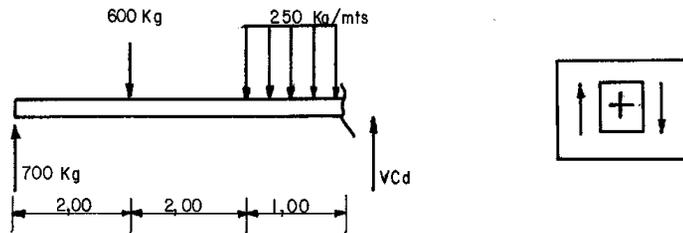
$$VCi = 100 \text{ kg} \quad (\downarrow) \quad (+)$$

Después del punto "C":

Al estudiar un punto donde empiece a actuar una fuerza distribuida es bueno recordar lo apuntado en el aparte 2 de la página 116 de este texto.

Aunado a esto podemos usar un "artificio" que nos dice que esa recta inclinada se inicia en el punto final de la recta horizontal que en el diagrama de fuerzas cortantes llega hasta el punto donde se inicia la fuerza distribuida (leer aparte 3 de la página 116).

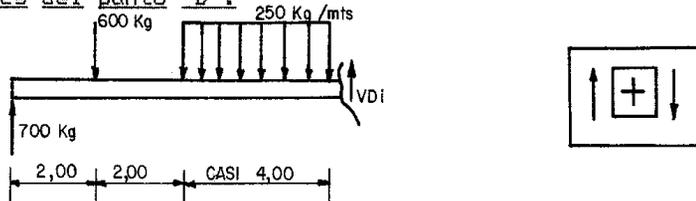
En este caso podríamos hacer el corte un metro después de donde se inicia la fuerza distribuida.



$$700 \text{ kg} - 600 \text{ kg} - (250 \text{ kg/mts})(1 \text{ mts}) + VCd = 0$$

$$VCd = 150 \text{ kg (↑)} \quad \ominus$$

Antes del punto "D":

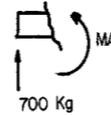


$$700 \text{ kg} - 600 \text{ kg} - (250 \text{ kg/mts})(4 \text{ mts}) + VDi = 0$$

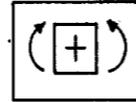
$$VDi = 900 \text{ kg (↑)} \quad \ominus$$

Momentos Flexionantes:

En el punto "A":

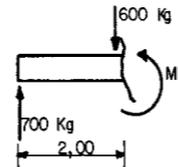


$$(700 \text{ kg})(0 \text{ mts}) - MA = 0$$

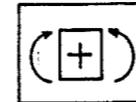


$$MA = 0 \text{ kg.mts}$$

En el punto "B":

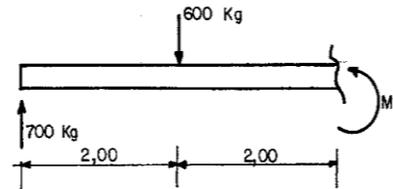


$$(700 \text{ kg})(2 \text{ mts}) - MB = 0$$



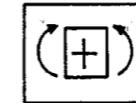
$$MB = 1400 \text{ kg.mts (↺)} \quad \oplus$$

En el punto "C":



$$(700 \text{ kg})(4 \text{ mts}) - (600 \text{ kg})(2 \text{ mts}) - MC = 0$$

$$MC = 1600 \text{ kg.mts (↺)} \quad \oplus$$



En el punto "D": Cuando calculamos las reacciones, el momento en este punto debe ser igual a cero para que se cumpla con una de las tres ecuaciones de la estática; en conclusión ya estamos empezando a determinar aquellos pasos que simplificarán la realización o construcción de los diagramas de las Características de sollicitación.

Para construir el diagrama de Fuerzas Cortantes y diagrama de Momentos Flexionantes en este ejemplo, es bueno leer los puntos señalados en las páginas 116 y 117, de la forma siguiente:

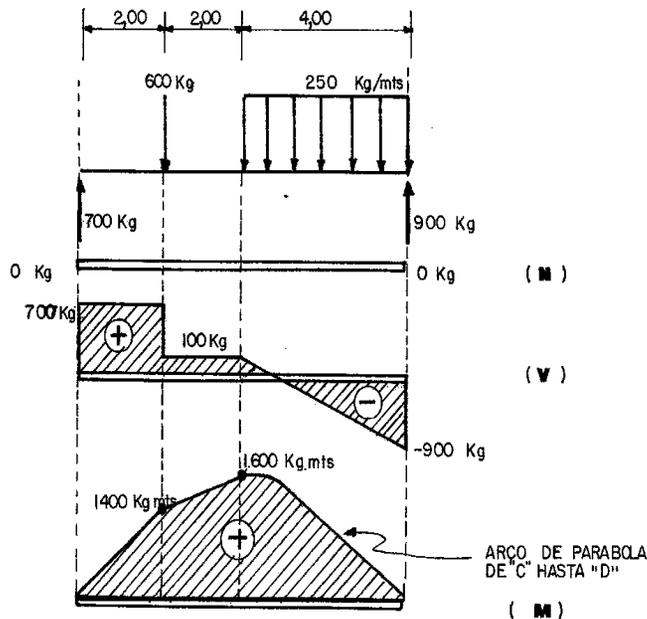
Fuerzas Cortantes:

- 1.-Para graficar de "A" hasta "C" leer los puntos 1 y 3.
- 2.-Para graficar de "C" hasta "D" leer el punto 2.

Momentos Flexionantes:

- 1.-Para graficar de "A" hasta "B" (pto 4).
- 2.-Para graficar de "B" hasta "C" (pto 4).
- 3.-Para graficar de "C" hasta "D" (pto 5).

**RESPUESTA**  
Características de Solicitación



**EJEMPLO E.4.3:**  
\*\*\*\*\*

Hacer los diagramas de las Características de Solicitación de la viga en Cantilever Simple que se muestra en la figura E.4.3.

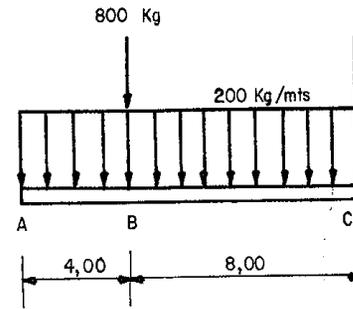
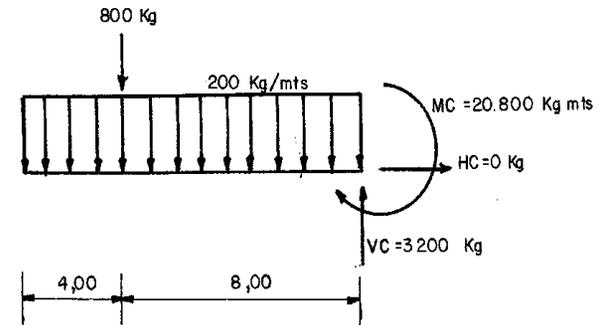
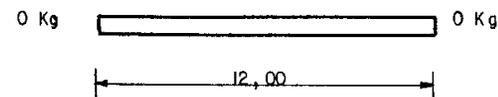


FIGURA E.4.3

Fuerzas externas



Fuerza Normal "N":



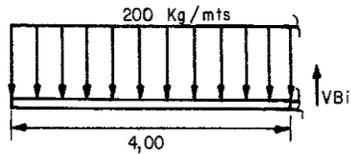
### Fuerzas Cortantes "V":

Leer los puntos 1 y 2 de la página 116 de este texto.

#### En el punto "A":

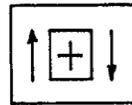
Como estoy tomando un diferencial de longitud, la fuerza distribuida en este punto tiende a cero.

#### Antes del punto "B":

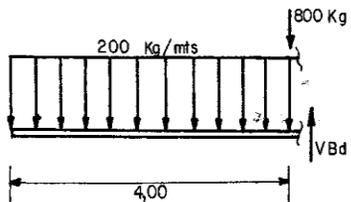


$$-(200 \text{ kg/mts})(4 \text{ mts}) + VBi = 0$$

$$VBi = 800 \text{ kg (↑)} \quad \ominus$$

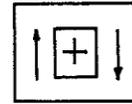


#### Después del punto "B":

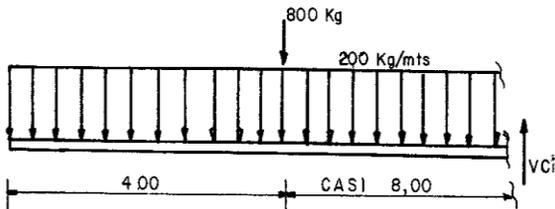


$$-(200 \text{ kg/mts})(4 \text{ mts}) - 800 \text{ kg} + VBd = 0$$

$$VBd = 1600 \text{ kg (↑)} \quad \ominus$$



#### Antes del punto "C":



$$-(200 \text{ kg/mts})(12 \text{ mts}) - 800 \text{ kg} + Vci = 0$$

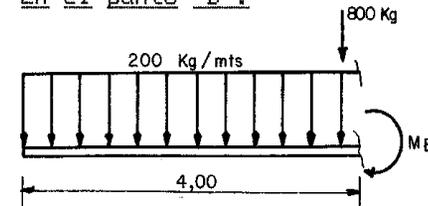
$$Vci = 3200 \text{ kg (↑)} \quad \ominus$$

### Momentos Flexionantes:

#### En el punto "A":

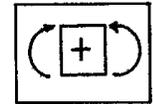
Como estoy tomando un diferencial de longitud, la fuerza distribuida en este punto tiende a cero e igualmente el momento flexionante.

#### En el punto "B":



$$-(200 \text{ kg/mts})(4 \text{ mts})(2 \text{ mts}) + MB = 0$$

$$MB = 1600 \text{ kg.mts (↺)} \quad \ominus$$



#### En el punto "C":

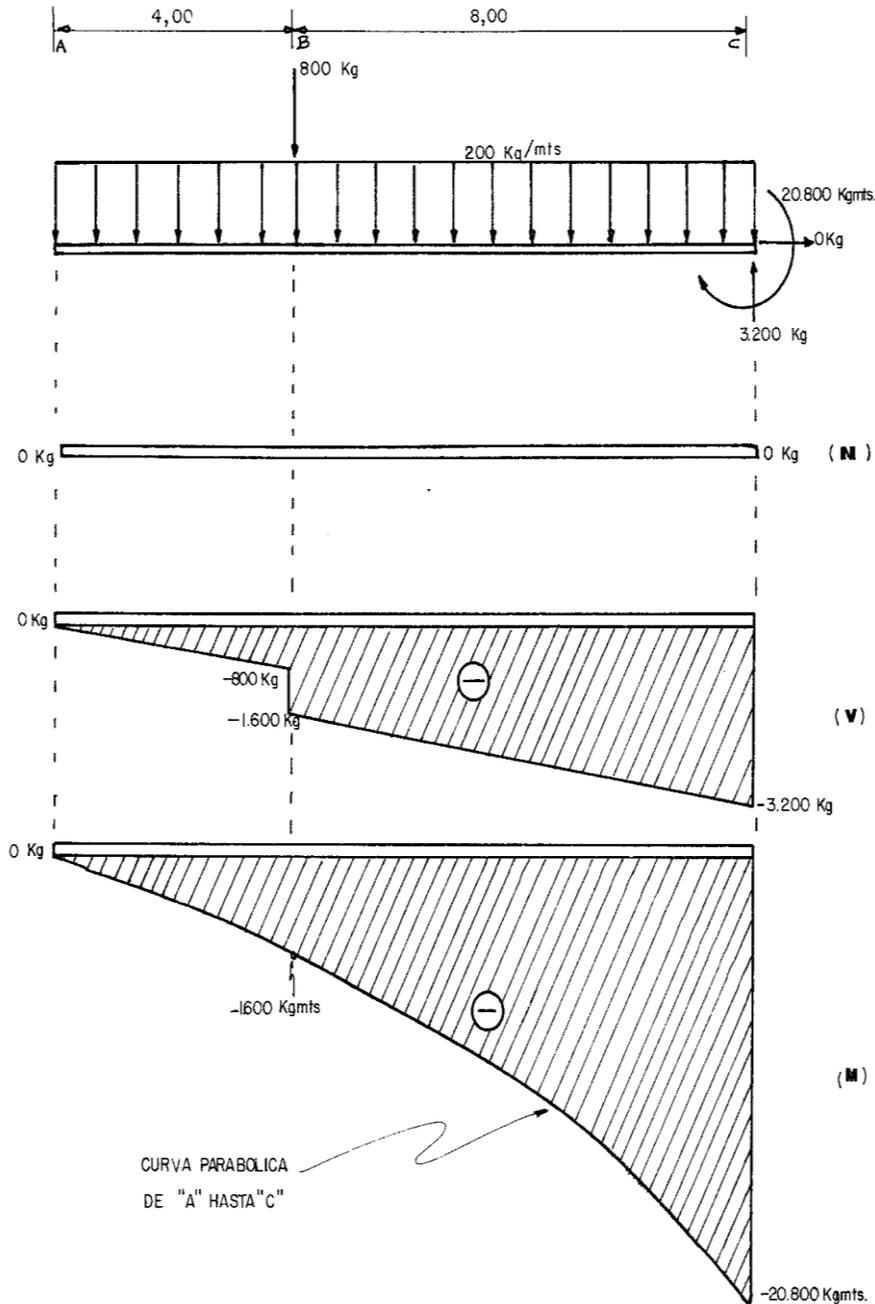
Cuando calculamos las fuerzas externas el momento en el punto "C" fué igual a 20800 kg.mts en sentido horario.

$$MC = 20.800 \text{ kg.mts (↻)} \quad \ominus$$

Para construir el diagrama de Fuerzas Cortantes y el diagrama de Momentos Flexionantes es recomendable leer los puntos 1, 2 y 5 a partir de la página 116.

RESPUESTA

Características de Solicitación



EJEMPLO E.4.4:

\*\*\*\*\*

Hagense los diagramas de las Características de Solicitación de la viga en cantilever que se muestra en la figura E.4.4:

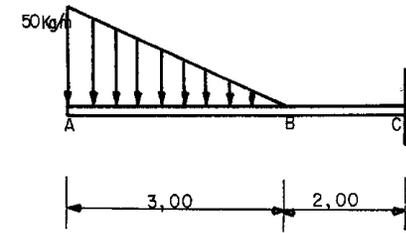
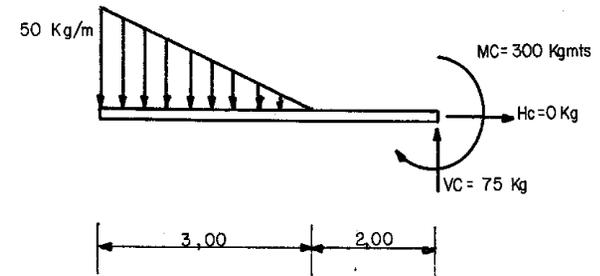


FIGURA E.4.4

Fuerzas Externas:



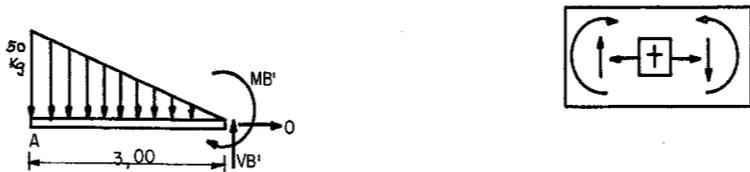
Para aligerar la construcción de los diagramas respectivos, analizaremos las fuerzas normales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes simultaneamente en los puntos de interés

En el punto "A":

Fuerza normal = 0

Fuerza Cortante y Momentos Flexionantes: como es un diferencial de longitud ambos son iguales a cero.

En el punto "B":



Fuerza normal = 0

Fuerza Cortante :  $-(50 \text{ kg/mts})(3 \text{ mts})(1/2) + VB' = 0$

$$VB' = 75 \text{ kg } (\uparrow) \quad \ominus$$

Momento Flexionante:  $-(50 \text{ kg/mts})(3 \text{ mts})(1/2)(2 \text{ mts}) + MB' = 0$

$$MB' = 150 \text{ kg.mts } (\curvearrowright) \quad \ominus$$

En el punto "C":

Fuerza Normal = 0

Fuerza Cortante:  $Vc = 75 \text{ kg } (\uparrow) \quad \ominus$

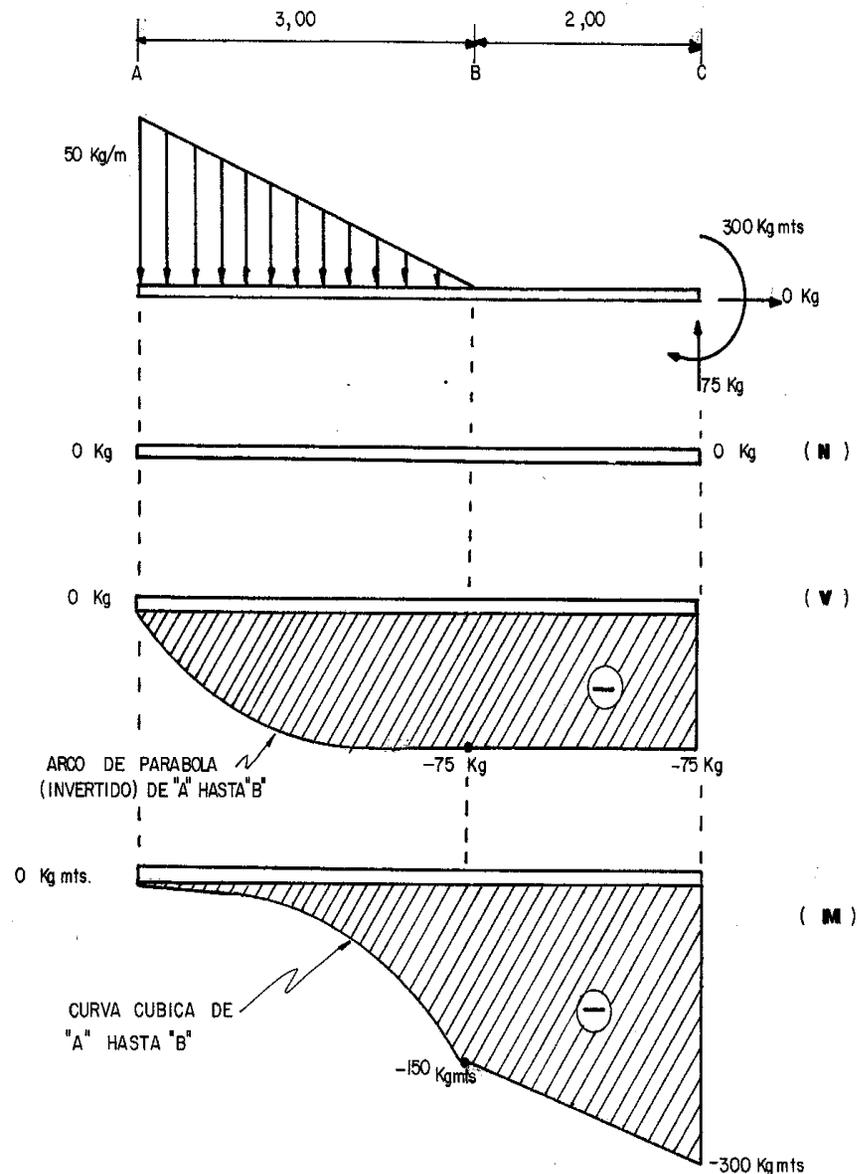
Momento Flexionante:  $Mc = 300 \text{ kg.mts } (\curvearrowright) \quad \ominus$

Antes de realizar los diagramas recomendamos leer los puntos 6 y 7 de la página 118 de este texto.

**NOTA:** Para evitar errores en el trazo de los arcos de parábola y las curvas cúbicas, es recomendable estudiar varios puntos cerca de sus extremos para confirmar si la pendiente es positiva o negativa. También podemos cerciorarnos si siempre estudiamos los valores del diagrama de corte o momento en el punto medio de las fuerzas distribuidas

## RESPUESTA

### Características de Solicitación



**EJEMPLO E.4.5:**  
\*\*\*\*\*

Haganse los diagramas de las Características de Solicitación del cuerpo rígido que se muestra en la figura E.4.5.

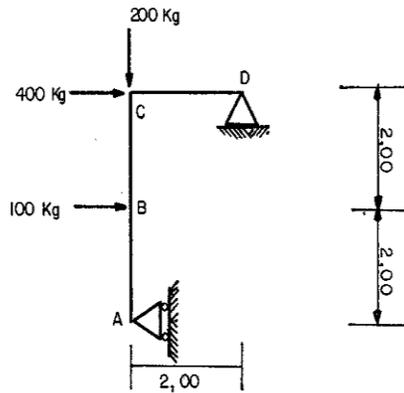
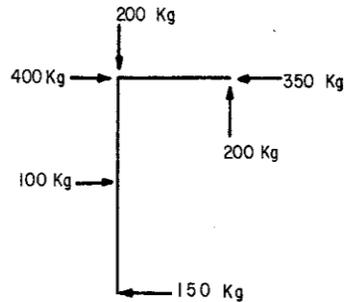


FIGURA E.4.5

Fuerzas externas

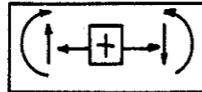


En el punto "A":

Fuerza Normal = 0 kg

Fuerza Cortante = 150 kg ( ↑ ) ⊖

Momento Flexionante = 0 kg.mts.



Antes del punto "B":

Fuerza Normal = 0 kg

Fuerza Cortante = 150 kg ( ↑ ) ⊖

Momento Flexionante = 300 kg.mts ( ↻ ) ⊕

Después del punto "B":

Fuerza Normal = 0 kg

Fuerza Cortante = 50 kg ( ↑ ) ⊖

Momento Flexionante = 300 kg.mts ( ↻ ) ⊕

Antes del punto "C":

Fuerza Normal = 0 kg

Fuerza Cortante = 50 kg ( ↑ ) ⊖

Momento Flexionante = 400 kg.mts ( ↻ ) ⊕

Después del punto "C":

Fuerza Normal = 350 kg ( ← ) ⊖

Fuerza Cortante = 200 kg ( ↑ ) ⊖

Momento Flexionante = 400 kg.mts ( ↻ ) ⊕

En el punto "D":

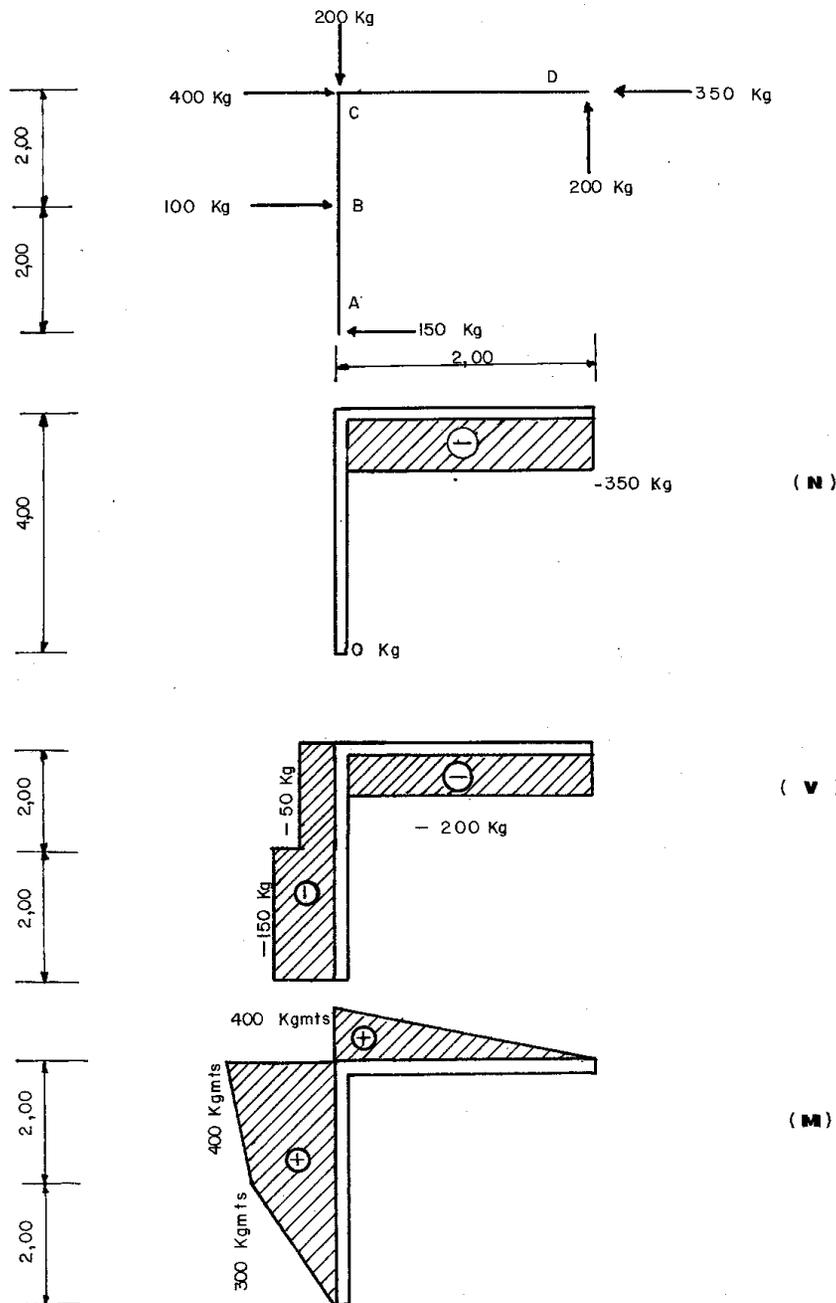
Fuerza Normal = 350 kg ( ← ) ⊖

Fuerza Cortante = 200 kg ( ↑ ) ⊖

Momento Flexionante = 0 kg.mts

**RESPUESTA**

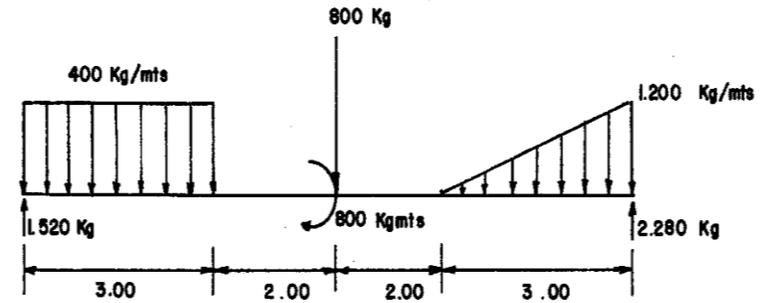
**CARACTERISTICAS DE SOLICITACION**



He considerado como un compromiso para con las personas que se han molestado en leer este "ensayo" de texto, incorporar un ejercicio complementario con un poco más de dificultad que los anteriores y explicar su resolución "paso a paso" y con los mayores detalles posibles.

**EJERCICIO COMPLEMENTARIO**  
\*\*\*\*\*

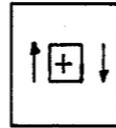
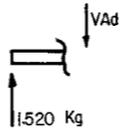
Haganse los diagramas de Fuerzas Cortantes y Momentos de Flexión para la viga simplemente apoyada que se muestra a continuación:



Lo primero que debemos hacer es el estudio de las fuerzas cortantes antes y después de cada punto donde se aplican las fuerzas, y en aquellos casos de fuerzas distribuidas es recomendable estudiar en el punto medio de su aplicación.

**Fuerzas Cortantes:**

Después del punto "A":



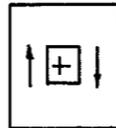
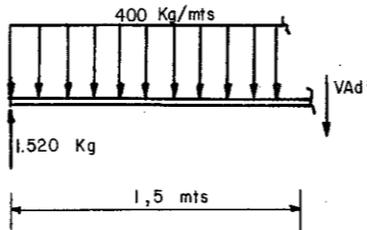
Como tomamos un diferencial de longitud después de "A", la fuerza uniformemente distribuida tiende a cero.

$$1520 \text{ kg} - V_{Ad} = 0$$

$$V_{Ad} = 1520 \text{ kg} \quad (\downarrow)$$



1,5 mts después del punto "A":

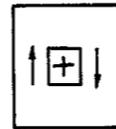
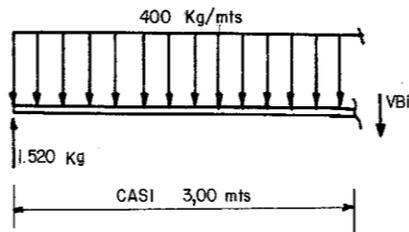


$$1520 \text{ kg} - (400 \text{ kg/mts})(1,5 \text{ mts}) - V_{Ad'} = 0$$

$$V_{Ad'} = 1320 \text{ kg} \quad (\downarrow)$$



Antes del punto "B":

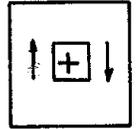
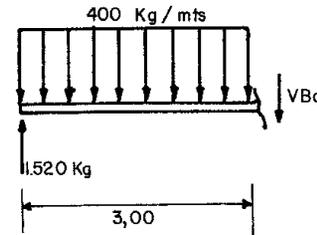


$$1520 \text{ kg} - (400 \text{ kg/mts})(3 \text{ mts}) - V_{Bi} = 0$$

$$V_{Bi} = 320 \text{ kg} \quad (\downarrow)$$



Después del punto "B":

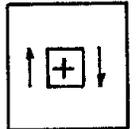
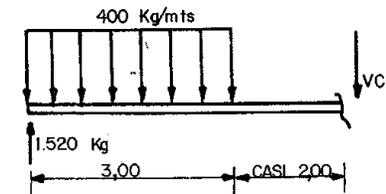


$$1520 \text{ kg} - (400 \text{ kg/mts})(3 \text{ mts}) - V_{Bd} = 0$$

$$V_{Bd} = 320 \text{ kg} \quad (\downarrow)$$



Antes del punto "C":

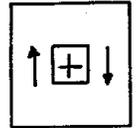
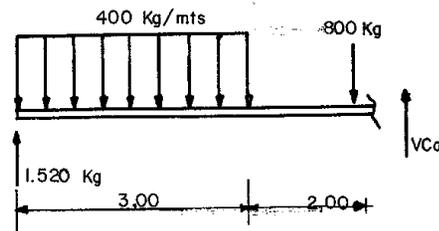


$$1520 \text{ kg} - (400 \text{ kg/mts})(3 \text{ mts}) - V_{Ci} = 0$$

$$V_{Ci} = 320 \text{ kg} \quad (\downarrow)$$



Después del punto "C":

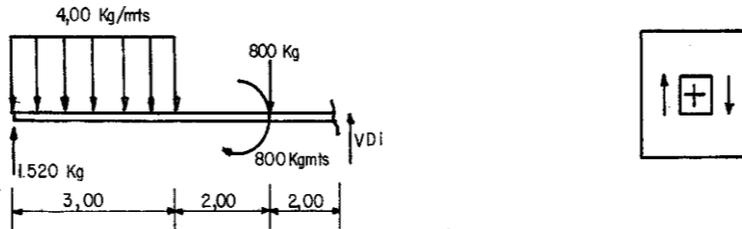


$$1520 \text{ kg} - (400 \text{ kg/mts})(3 \text{ mts}) - 800 \text{ kg} + V_{Cd} = 0$$

$$V_{Cd} = 480 \text{ kg} \quad (\uparrow)$$



Antes del punto "D":



$$1520 \text{ kg} - (400 \text{ kg/mts})(3 \text{ mts}) - 800 \text{ kg} + VDi = 0$$

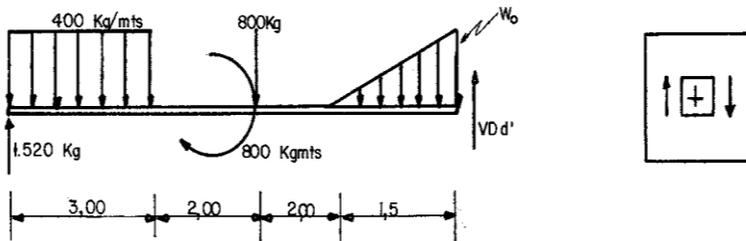
$$VDi = 480 \text{ kg} \quad (\uparrow) \quad \ominus$$

Después del punto "D":

Como después del punto "D" tomamos un diferencial de longitud, la fuerza distribuida (en forma de triángulo) tiende a cero y el análisis es el mismo que antes del punto "D".

$$VCd = 480 \text{ kg} \quad (\uparrow) \quad \ominus$$

1,5 mts después del punto "D":



Primero calculo el valor de  $W_o$ . Por relación de triángulos, determinamos que  $W_o = 600 \text{ kg/mts}$ .

$$1520 \text{ kg} - (400 \text{ kg/m})(3 \text{ m}) - 800 \text{ kg} - (600 \text{ kg/m})(1,5 \text{ m})(1/2) + VDd' = 0$$

$$VDd' = 930 \text{ kg} \quad (\uparrow) \quad \ominus$$

Antes del punto "E":

El valor de la reacción en "E" es igual a 2280 kg

$$VE = 2280 \text{ kg} \quad (\uparrow) \quad \ominus$$

Con estos datos podemos construir el diagrama de Fuerzas Cortantes tomando en cuenta los aspectos siguientes de las Generalizaciones de la página 116.

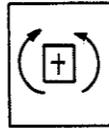
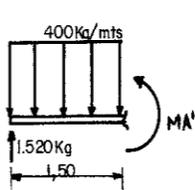
- 1.-En el punto "A" el aparte 1.
- 2.-Desde "A" hasta "B" el aparte 2.
- 3.-Desde "B" hasta "C" el aparte 3.
- 4.-En el punto "C" el aparte 1.
- 5.-Desde "C" hasta "D" el aparte 3.
- 6.-Desde "D" hasta "E" el aparte 6.
- 7.-En el punto "E" el aparte 1.

Momentos Flexionantes:

En el punto "A":

Como tomamos un diferencial de longitud, no hay brazo o palanca y el momento flexionantes tiende a cero.

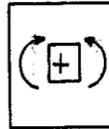
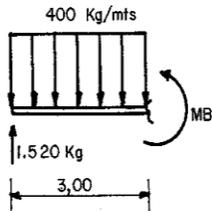
1,5 mts a la derecha del punto "A":



$$(1520 \text{ kg})(1,5 \text{ mts}) - (400 \text{ kg/mts})(1,5 \text{ mts})(0,75 \text{ mts}) - MA' = 0$$

$$MA' = 1830 \text{ kg} \quad (\curvearrowleft) \quad (+)$$

En el punto "B":

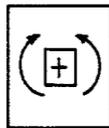
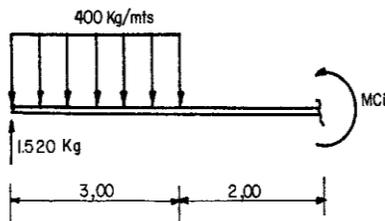


$$(1520 \text{ kg})(3 \text{ mts}) - (400 \text{ kg/mts})(3 \text{ mts})(1,5 \text{ mts}) - MB = 0$$

$$MB = 2760 \text{ kg.mts} \quad (\curvearrowleft) \quad (+)$$

**NOTA:** Cuando en un punto está aplicado un momento externo, debo hacer el estudio antes y después de dicho punto.

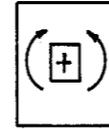
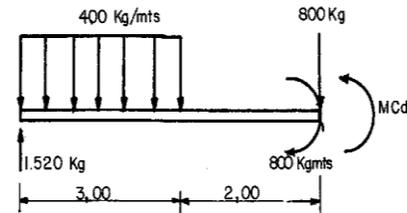
Antes del punto "C":



$$(1520 \text{ kg})(5 \text{ mts}) - (400 \text{ kg/mts})(3 \text{ mts})(3,5 \text{ mts}) - MCi = 0$$

$$MCi = 3400 \text{ kg.mts} \quad (\curvearrowleft) \quad (+)$$

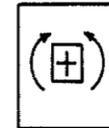
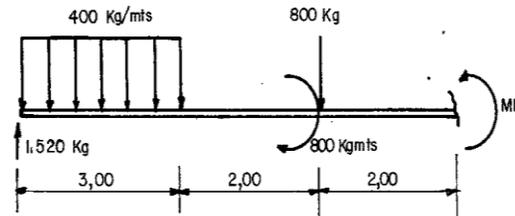
Después del punto "C":



$$(1520 \text{ kg})(5 \text{ m}) - (400 \text{ k/m})(3 \text{ m})(3,5 \text{ m}) + 800 \text{ kg.m} - MCd = 0$$

$$MCd = 4200 \text{ kg.mts} \quad (\curvearrowright) \quad (+)$$

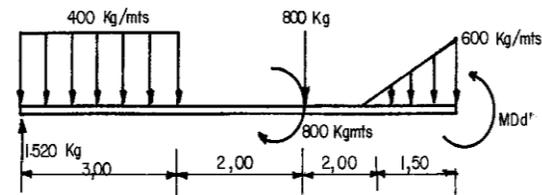
En el punto "D":



$$(1520 \text{ k})(7 \text{ m}) - (400 \text{ k/m})(3 \text{ m})(5,5 \text{ m}) + 800 \text{ k.m} - (800 \text{ k})(2 \text{ m}) - MD = 0$$

$$MD = 3240 \text{ kg.mts} \quad (\curvearrowright) \quad (+)$$

1,5 mts a la derecha del punto "D":



$$(1520)(8,5) - (400)(3)(7) + 800 - (800)(3,5) - (600)(1,5)(1/2)(0,75) - MDd' = 0$$

$$MDd' = 1382,5 \text{ kg.mts} \quad (\curvearrowright) \quad (+)$$

En el punto "E":

Cuando calculamos las fuerzas externas, el momento en el punto "E" es igual a cero.

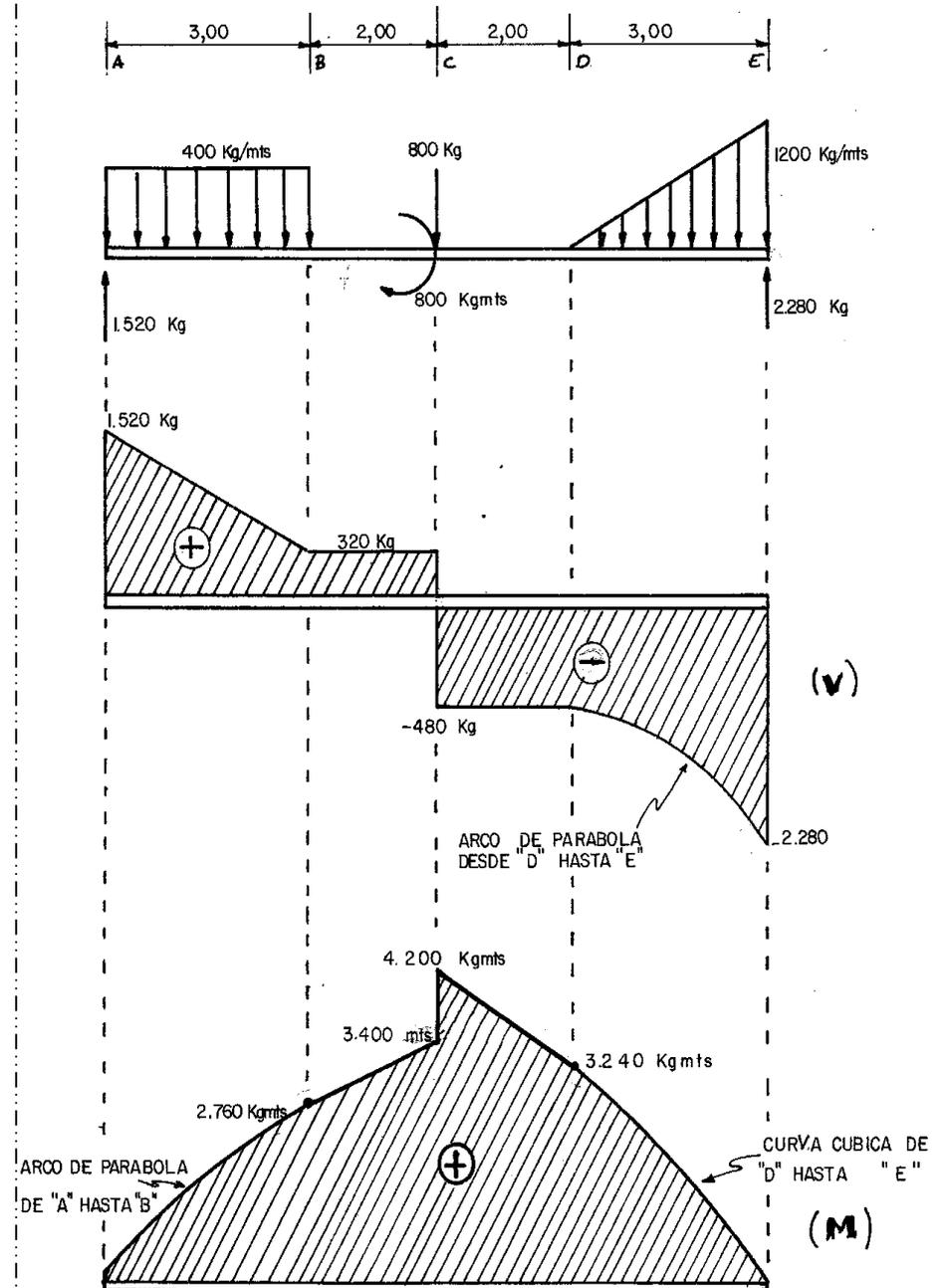
$$ME = 0 \text{ kg.mts}$$

Con estos datos podemos construir el diagrama de momentos flexionantes, tomando en cuenta los aspectos siguientes de las generalizaciones de la página 116.

- 1.-Desde "A" hasta "B" el aparte 5.
- 2.-Desde "B" hasta "C" el aparte 4.
- 3.-En el punto "C" el aparte 10.
- 4.-Desde "C" hasta "D" el aparte 4.
- 5.-Desde "D" hasta "E" el aparte 7.
- 6.-Desde "A" hasta "B" y desde "D" hasta "E", observar los valores del momento flexionante calculado en el punto medio de las fuerzas distribuidas para graficar las curvas (parábola y cúbica) con la pendiente verdadera.

### RESPUESTA

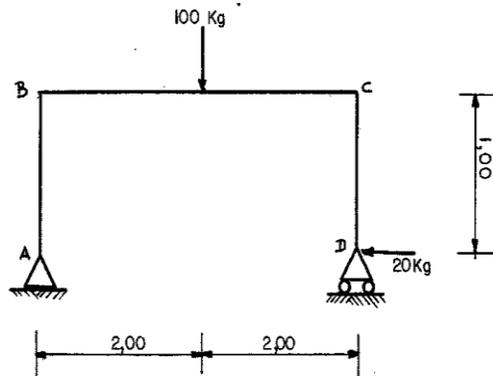
#### Características de Solicitaciones



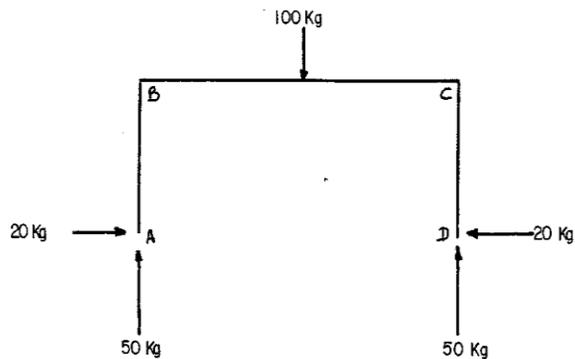
**Ejemplo complementario**

En aquellos casos en que el cuerpo rígido tenga una configuración geométrica conformada por varias vigas y esto pueda dificultar la elaboración de los diagramas, es recomendable realizar el despiece y estudiar las vigas por separado, siempre y cuando se tenga sumo cuidado en determinar las reacciones internas generadas en los extremos separados.

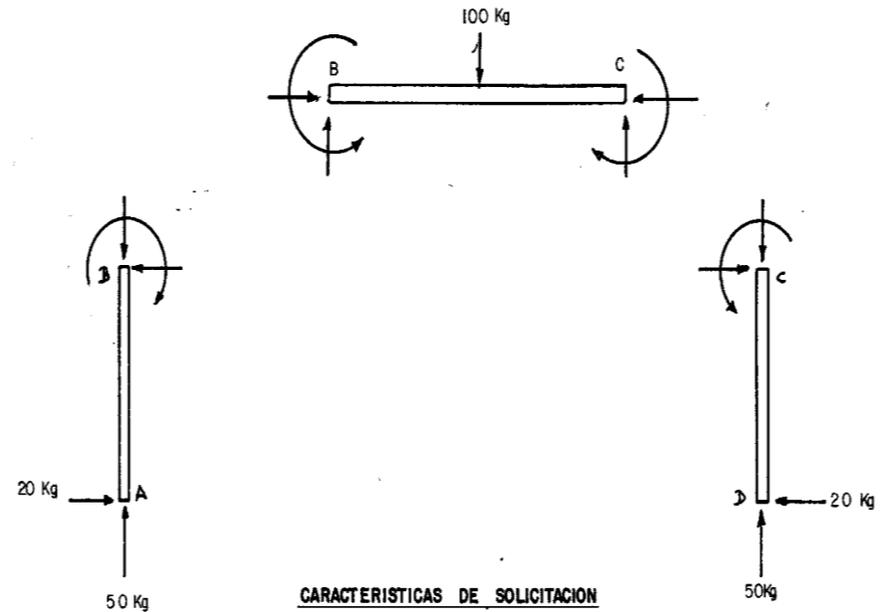
Hagense los diagramas de las características de sollicitación del cuerpo rígido que se muestra a continuación:



Fuerzas externas

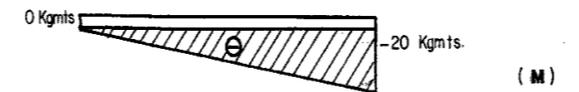
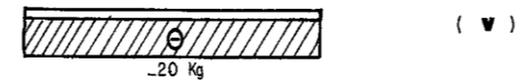
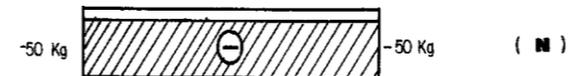
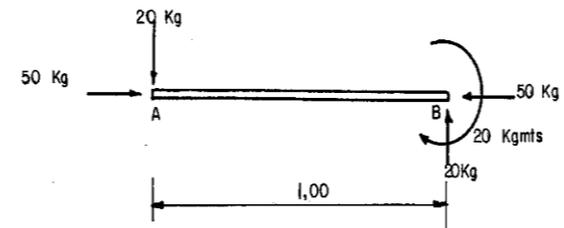


Despiece

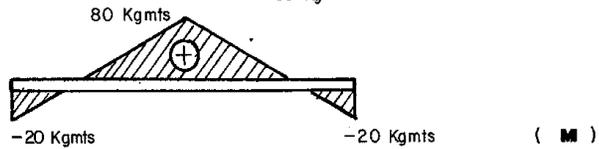
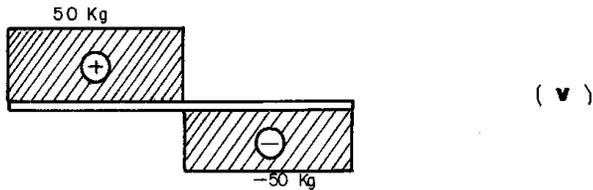
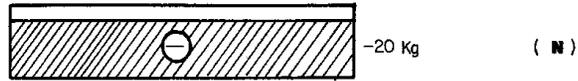
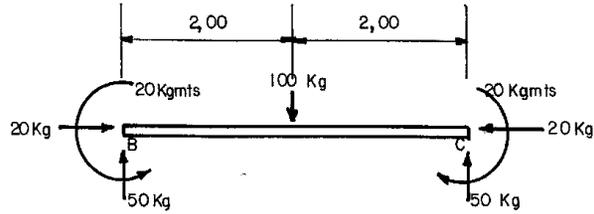


CARACTERISTICAS DE SOLICITACION

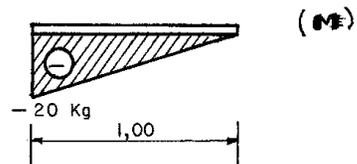
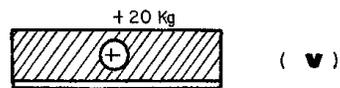
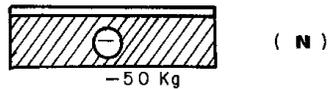
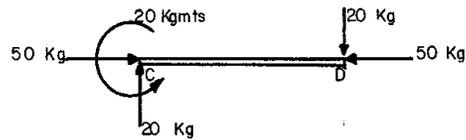
Barra "A-B"



Barra "B-C"



Barra "C-D"



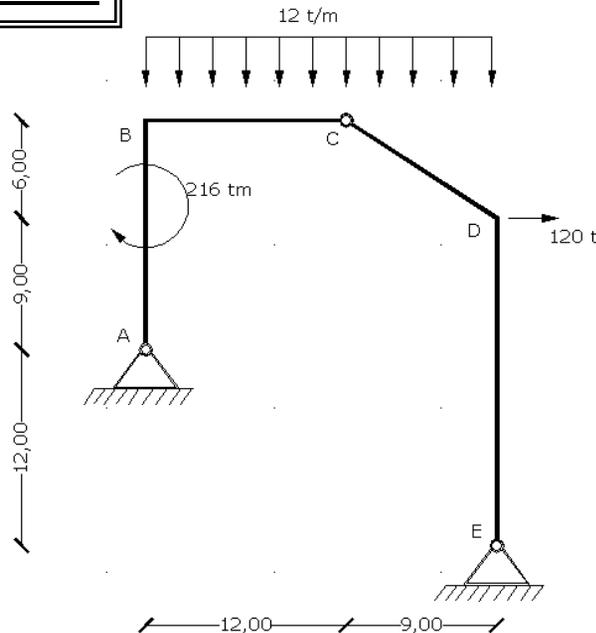
# CAPÍTULO V

## 10 EJERCICIOS RESUELTOS

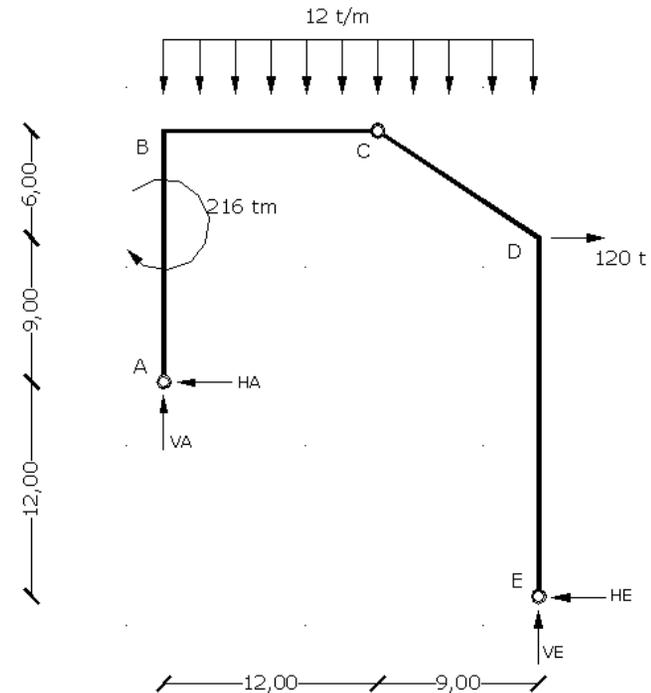
Este último capítulo contiene 10 ejercicios complementarios (propuestos por los alumnos de la asignatura) que permiten poner en práctica los conocimientos adquiridos a través de todo el recorrido de los 4 capítulos anteriores. Es de hacer notar que el primer ejercicio contempla la realización de los diagramas de sollicitación en una estructura con una configuración geométrica variada (barras horizontales, verticales e inclinadas) con la finalidad de que los estudiantes se familiaricen con la construcción de estos diagramas, bajo las siguientes observaciones o secuencia de elaboración:

- Calculamos las fuerzas de restricción generadas por los vínculos (reacciones externas).
- Realizamos el despiece en cada tramo lineal del cuerpo, teniendo sumo cuidado en analizar las fuerzas o reacciones internas que se generan en el punto donde se practica el corte o separación de la barra.
- En las barras inclinadas es necesario estudiar las reacciones verticales y horizontales, para calcular los componentes perpendiculares a la sección transversal de la barra (N) y las perpendiculares al eje de la misma (V).
- Una vez cumplidos los pasos anteriores, estudiamos las características de sollicitación en el "pedazo de barra" en cuestión y la graficamos.
- Por último se trasladan los "diagramas parciales" de cada barra al "diagrama total" del cuerpo o figura estudiada.

### EJERCICIO 5.1:



**1.- Primero** se construye el DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (D.C.L.):



**2.- Segundo:** Estudio la estabilidad de la figura desde el punto de vista de los grados de libertad que restringen los vínculos:

2.1.- Grados de libertad que posee la figura:

2.1.1.- Son dos barras unidas por una articulación intermedia (nodo) en el punto "C".

2.1.2.- Cada barra posee 3 grados de libertad, por lo tanto la figura tiene 6 grados de libertad ( $3 \times 2 = 6$ ).

2.2.- Grados de libertad que restringen los vínculos:

2.2.1.- Vínculo doble en "A" restringe 2 GL.

2.2.2.- Vínculo doble en "E" restringe 2 GL.

2.2.3.- Articulación intermedia (nodo) en "C" restringe 2 GL.

$$[ GL = 2(m-1) = 2(2-1) = 2 ] \quad (\text{Ver página 86})$$

2.2.4.- Grados de libertad restringidos =  $2 + 2 + 2 = 6$

2.3.- Grados de estabilidad =  $GL = 6 - 6 = 0$  "ISOSTÁTICA"

2.4.- Observo si alguna de las reacciones o fuerzas de restricción (HA, VA, HE, VE) son concurrentes sobre una misma línea de acción (ver página 38 y siguiente). Como en este caso no hay ninguna, puedo proceder a realizar el análisis estático de la estructura.

**3.- Tercero:** Realizamos el análisis estático:

(Recuerde fijar "su" sistema de referencia de signos, tal como se indicó en el capítulo 2, ver página 41).

$$\sum MA = 0$$

$$+ 216 + (12)(21)(21/2) + (120)(9) + (12)HE - (21)(VE) = 0$$

$$3942 + 12HE - 21VE = 0 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$\sum MC (\text{hacia la derecha}) = 0$$

$$+ (12)(9)(9/2) - (120)(6) + (27)(HE) - (9)(VE) = 0$$

$$- 234 + 27HE - 9VE = 0 \quad (\text{ecuación 2})$$

Con las ecuaciones 1 y 2 construyo un sistema de ecuaciones y calculo HE y VE.

<b>HE = 88 t (←)</b>	<b>VE = 238 t (↑)</b>
----------------------	-----------------------

$$\sum Fx = 0$$

$$-HA + 120 - HE = 0 \quad ; \quad -HA + 120 - 88 = 0$$

<b>HA = 32 t (←)</b>
----------------------

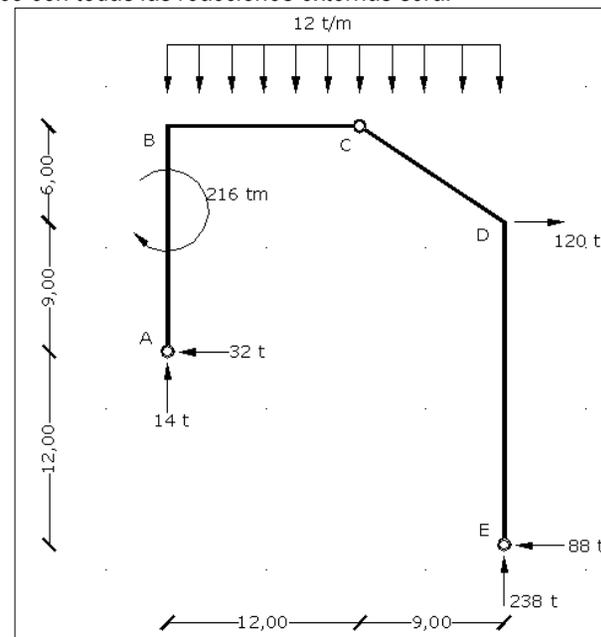
$$\sum Fy = 0$$

(Ver páginas 31 y 51 para recordar el estudio de las fuerzas distribuidas en el cálculo del equilibrio estático)

$$VA - (12)(21) + VE = 0 \quad ; \quad VA - 252 + 238 = 0$$

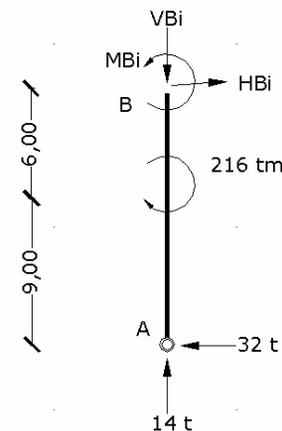
<b>VA = 14 t (↑)</b>
----------------------

El gráfico con todas las reacciones externas será:



**4.- Cuarto:** Se procede a realizar el despiece (preferiblemente en cada barra recta), para calcular los valores de las reacciones internas en cada punto donde la barra cambia de dirección y así facilitar la construcción de los diagramas de sollicitación.

**BARRA "AB":**



$$\sum Fx = 0 \quad ; \quad HBi - 32 = 0$$

<b>HBi = 32 t (→)</b>
-----------------------

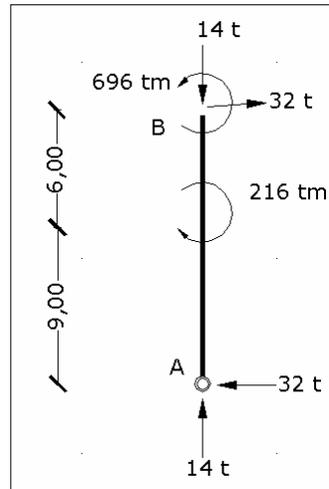
$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad 14 - V_{Bi} = 0$$

$$V_{Bi} = 14 \text{ t } (\downarrow)$$

$$\sum M_A = 0 \quad ; \quad + 216 + (H_{Bi})(15) - M_{Bi} = 0$$

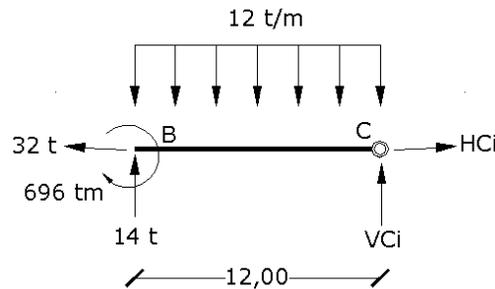
$$M_{Bi} = 696 \text{ tm } \text{ (en sentido anti horario)}$$

Con la información obtenida anteriormente puedo indicar las condiciones de equilibrio de la BARRA "AB":



### BARRA "BC":

Al estudiar las reacciones internas generadas en el punto "B" de la BARRA "BC" debo tener presente que las mismas serán de igual magnitud pero de sentido contrario a las calculadas en el punto "B" de la BARRA "AB".



Recuerde que en los nodos (articulaciones intermedias) no se genera momento, sólo una reacción interna vertical y otra horizontal.

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad H_{Ci} - 32 = 0$$

$$H_{Ci} = 32 \text{ t } (\rightarrow)$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad 14 - (12)(12) + V_{Ci} = 0$$

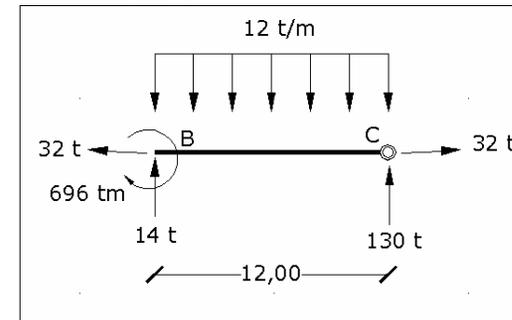
$$V_{Ci} = 130 \text{ t } (\uparrow)$$

Aunque sepamos que en el punto "C" no se genera momento por ser una articulación intermedia, se recomienda calcularlo, con la finalidad de garantizar que los resultados que se obtuvieron en la barra anterior fueron correctos.

$$\sum M_C = 0 \quad ; \quad + 696 + (14)(12) - (12)(12)(6) = 0$$

$$M_C = 0 \text{ tm}$$

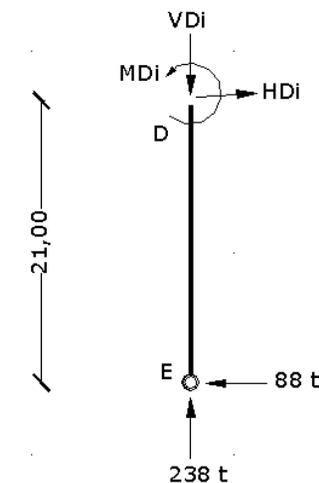
Con la información obtenida anteriormente puedo indicar las condiciones de equilibrio de la BARRA "BC":



### BARRA "CD":

Cuando vamos a estudiar la BARRA "CD" notamos que tiene más dificultad que las anteriores (es una barra inclinada y sobre ella hay una fuerza distribuida que no es perpendicular a su eje). En estos casos es recomendable "trasladar" la información de las barras que están en sus extremos. Como en este caso conocemos las fuerzas internas en el punto "C" (BARRA "BC") procedo a estudiar la BARRA "DE" para calcular las fuerzas internas en el punto "D".

### BARRA "DE":



**NOTA IMPORTANTE:** Cuando en alguno de los puntos donde se va a realizar el despiece se encuentra una fuerza puntual aplicada, se debe realizar el mismo (despiece) antes de dicho punto; en otras palabras, NO se debe tomar en cuenta la fuerza puntual aplicada. Para garantizar las condiciones de equilibrio dicho punto debe ser estudiado por separado. En este caso en particular observe que la fuerza de 120 t. que está aplicada en el punto "D" no forma parte del diagrama de cuerpo libre de la BARRA "DE".

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad HD_i - 88 = 0$$

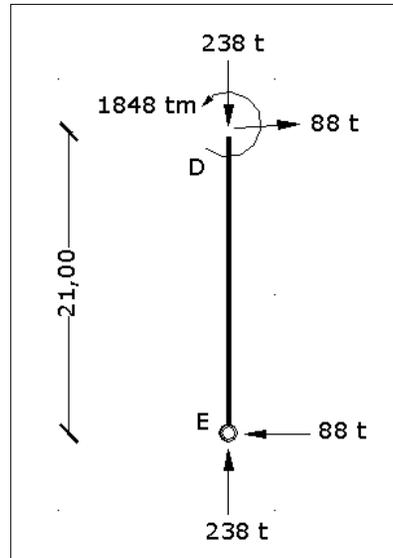
$$HD_i = 88 \text{ t (} \rightarrow \text{)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad 238 - VD_i = 0$$

$$VD_i = 238 \text{ t (} \downarrow \text{)}$$

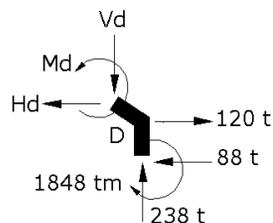
$$\sum ME = 0 \quad ; \quad (HD_i)(21) - MD_i = 0 \quad ; \quad (88)(21) - MD_i = 0$$

$$MD_i = 1848 \text{ tm (en sentido anti horario)}$$



### PUNTO "D" :

Con la información del punto "D" de la BARRA "DE" estudio las condiciones de equilibrio de dicho punto.



$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad -Hd - 88 + 120 = 0$$

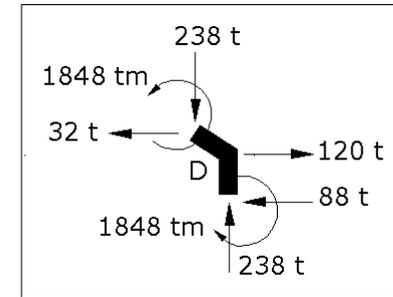
$$Hd = 32 \text{ t (} \leftarrow \text{)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad 238 - Vd = 0$$

$$Vd = 238 \text{ t (} \downarrow \text{)}$$

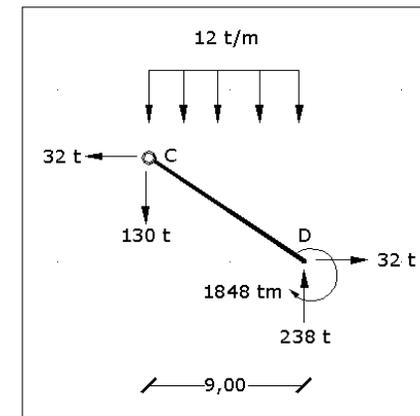
$$\sum MD = 0 \quad ; \quad 1848 - Md = 0$$

$$Md = 1848 \text{ tm (en sentido anti horario)}$$



Con esta información y la anteriormente obtenida con el estudio de la BARRA "BC" puedo tener las condiciones de equilibrio de la BARRA "CD". Recuerde que se colocan las mismas magnitudes pero sentido contrario.

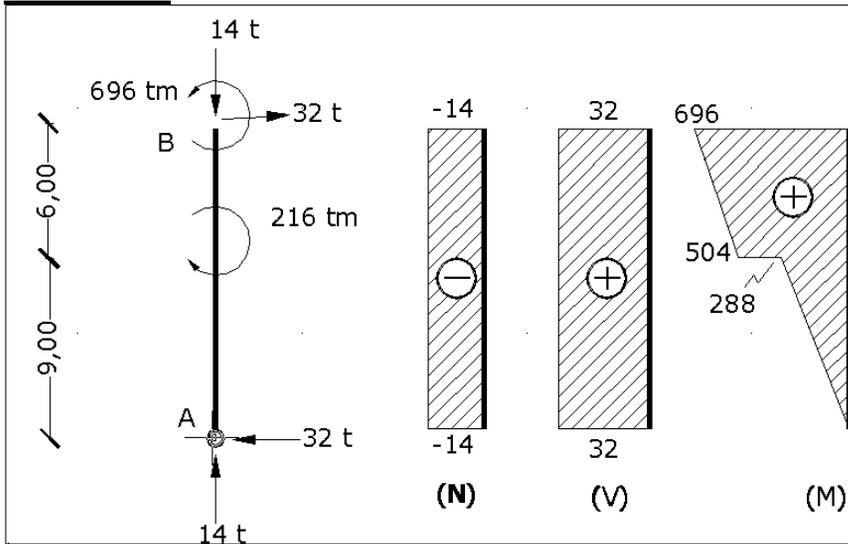
### BARRA "CD" :



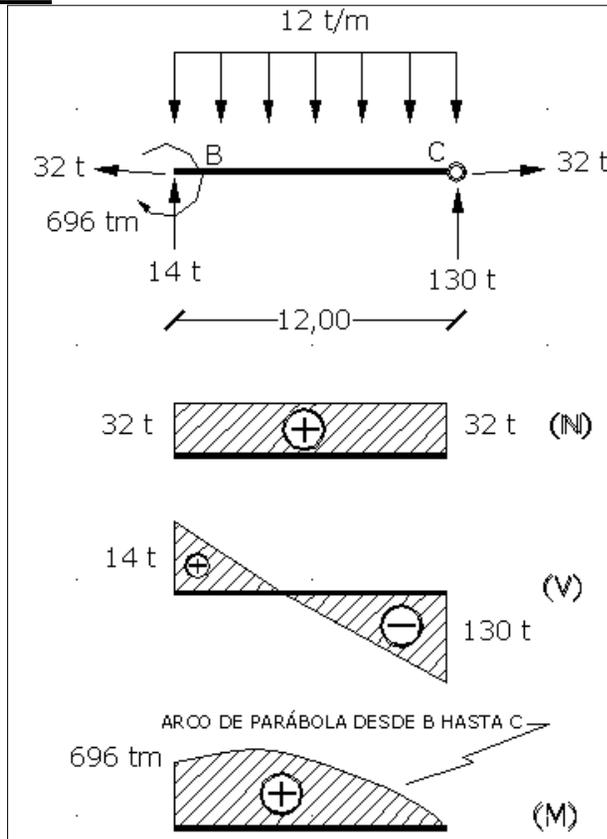
Con toda la información anterior procedo a construir los diagramas de fuerzas (Normal y de Corte) y Momento.

Como el fin que perseguimos en la resolución de este problema es esencialmente didáctico, realizamos primero el despiece de todas las barras y posteriormente los diagramas respectivos, sin embargo, en la práctica, mientras se hace el despiece se dibujan paralelamente los diagramas de sollicitación. Recuerde la convención de signos indicadas en la página 118.

**BARRA "AB" :**



**BARRA "BC" :**



**BARRA "CD" :**

En las barras inclinadas es necesario estudiar las reacciones de manera tal que las mismas estén alineadas con su eje (N) y perpendicular al mismo (V). En este caso en particular notamos que las fuerzas que están en sus extremos (fuerzas internas) y la fuerza distribuida (fuerzas externas) no están alineadas ni son perpendiculares a su eje; condición que dificulta la construcción de los diagramas de sollicitación.

Esta dificultad se resuelve si calculamos los componentes perpendiculares al eje de la viga de las fuerzas internas que actúan en sus extremos (ver página 8).

- Para calcular la fuerza perpendicular al eje de la BARRA "CD" en el punto "C" :

$$32 (\text{sen } 56,31) + 130 (\text{sen } 56,31) = 125,92 \quad (\swarrow)$$

- Para calcular la fuerza alineada con el eje de la BARRA "CD" (perpendicular a la sección transversal de la barra) en el punto "C" :

$$130 (\text{cos } 56,31) - 32 (\text{cos } 56,31) = 45,48 \quad (\searrow)$$

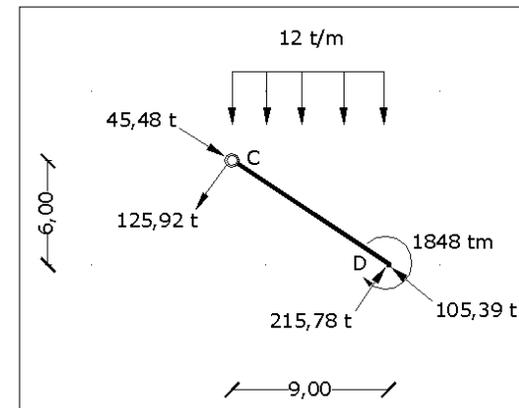
- Para calcular la fuerza perpendicular al eje de la BARRA "CD" en el punto "D" :

$$32 (\text{cos } 56,31) + 238 (\text{sen } 56,31) = 215,78 \quad (\nearrow)$$

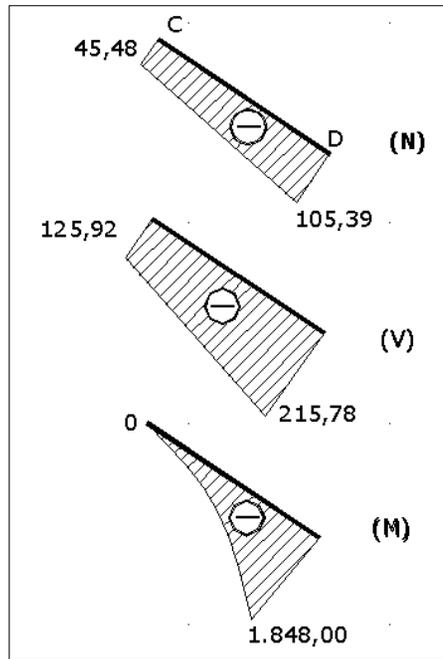
- Para calcular la fuerza alineada con el eje de la BARRA "CD" (perpendicular a la sección transversal de la barra) en el punto "D" :

$$238 (\text{cos } 56,31) - 32 (\text{sen } 56,31) = 105,39 \quad (\nwarrow)$$

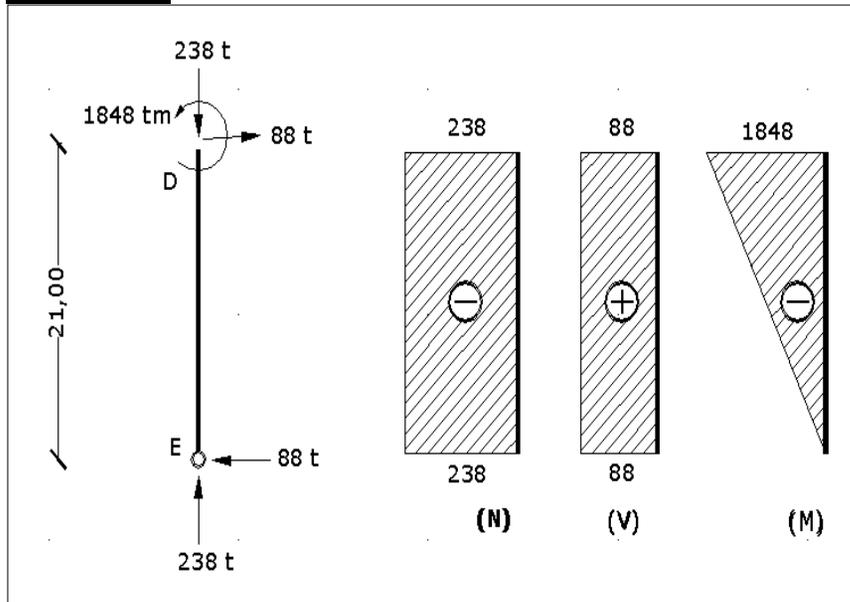
Con los cálculos anteriores podemos concluir que la BARRA "CD" está solicitada como se muestra a continuación:



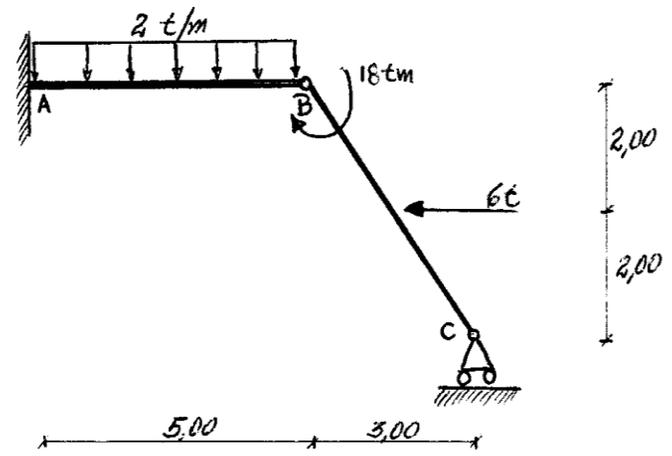
Con la información anterior procedemos a construir el diagrama de sollicitación de la BARRA "CD". Para facilitar dicha construcción se recomienda leer las generalizaciones contenidas en las páginas 116, 117 y 118.



**BARRA "DE":**

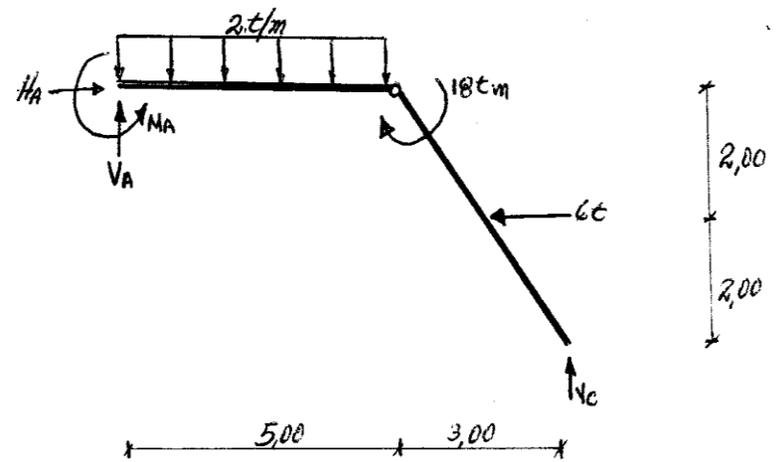


**EXERCICIO 5.2** DETERMINAR EL EQUILIBRIO ESTÁTICO.



GRADOS DE LIBERTAD QUE POSEE EL CUERPO RÍGIDO =  $3 * 2 \text{ BARRAS} = 6$   
 GRADOS DE LIBERTAD RESTRINGIDOS POR LOS VÍNCULOS = 6  
 $6 - 6 = 0$  (ISOSTÁTICO).

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE:



NO HAY REACCIONES CONCURRENTES SOBRE UNA MISMA "RECTA DE ACCIÓN"

ESTUDIANDO LA BARRA BC:

$$\sum M_B = 0$$

$$18 + (6)(2) - (3)(V_C) = 0$$

$$V_C = 10t (\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0$$

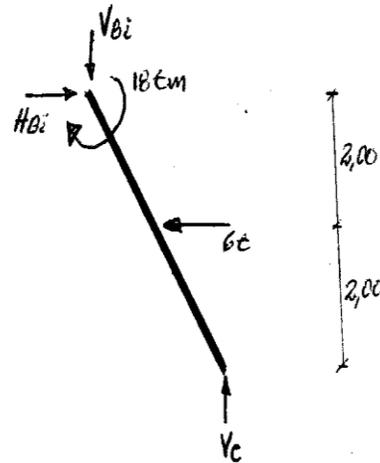
$$H_{Bi} - 6 = 0$$

$$H_{Bi} = 6t (\rightarrow)$$

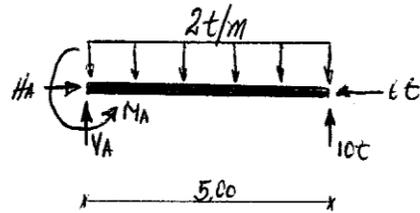
$$\sum F_y = 0$$

$$V_{Bi} - V_C = 0 ; V_{Bi} - 10 = 0$$

$$V_{Bi} = 10t (\downarrow)$$



TRASLADANDO ESTOS VALORES A LA BARRA AB:

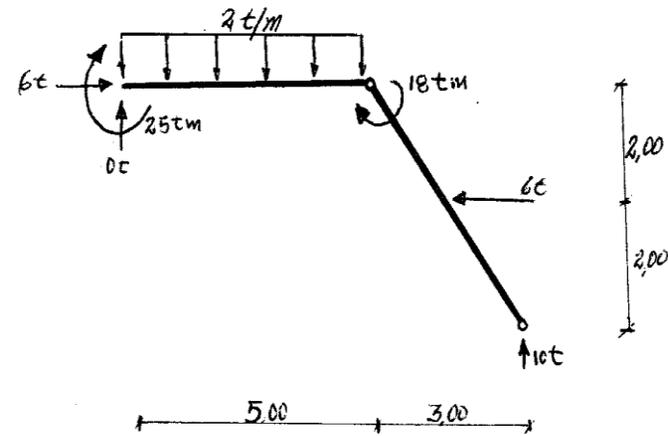


$$\sum F_x = 0 ; H_A - 6 = 0 ; H_A = 6t (\rightarrow)$$

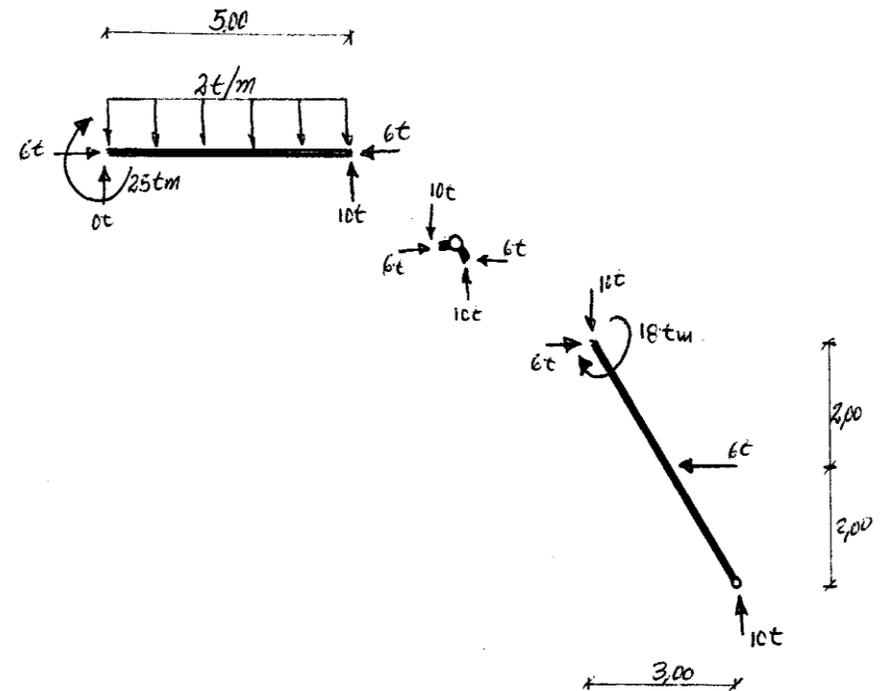
$$\sum F_y = 0 ; V_A - (2)(5) + 10 = 0 ; V_A = 0t$$

$$\sum M_A = 0 ; -M_A + (2)(5)(2.5) - (10)(5) = 0 ; M_A = 25tm (\downarrow)$$

EQUILIBIO ESTÁTICO:

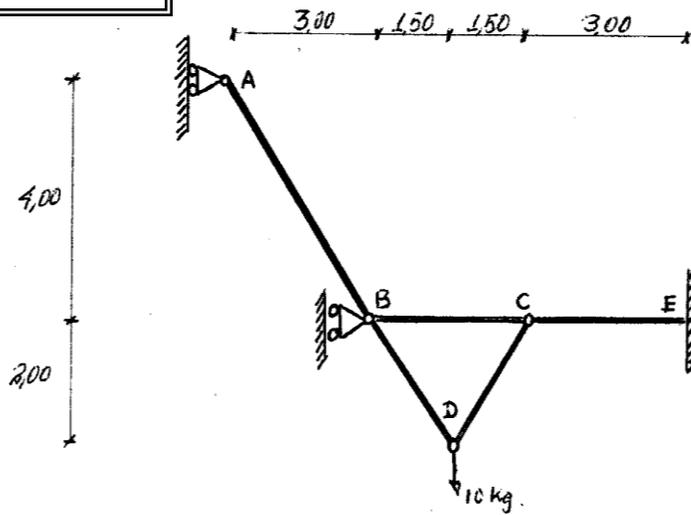


DESPIECE:



**EJERCICIO 53**

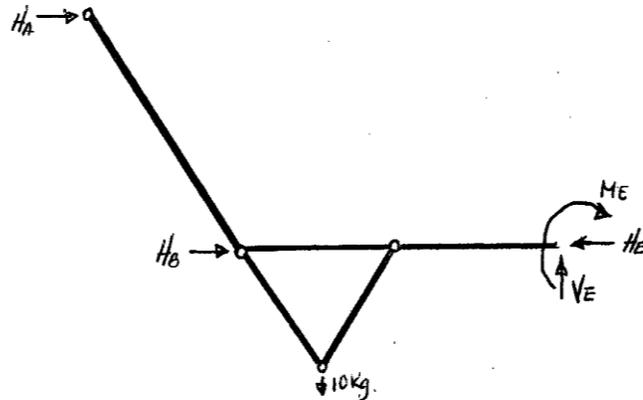
DETERMINAR EQUILIBRIO ESTÁTICO.

GRADOS DE LIBERTAD QUE POSEE EL CUERPO EN EL PLANO =  $3 * 5 \text{ BARRAS} = 15$ 

GRADOS DE LIBERTAD RESTRINGIDOS POR LOS VÍNCULOS = 15

$$15 - 15 = 0 \text{ (ISOSTÁTICO).}$$

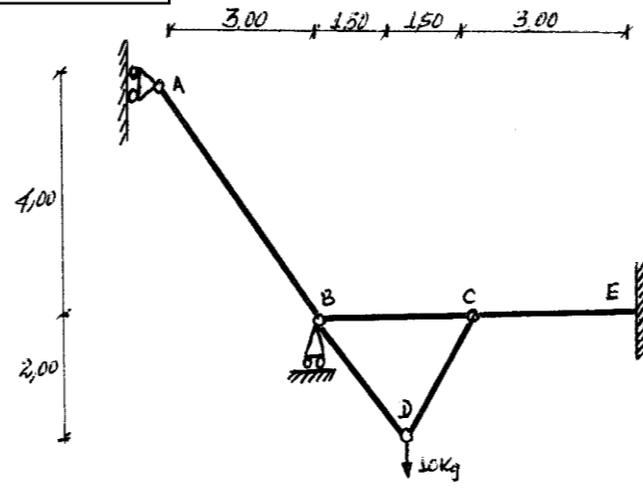
DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE:



CUANDO ANALIZAMOS EL CUERPO EN FUNCIÓN DE LAS REACCIONES GENERADAS POR LOS VÍNCULOS, NOTAMOS QUE LAS REACCIONES "H<sub>B</sub>" Y "H<sub>E</sub>" SON CONCURRENTES SOBRE UNA MISMA RECTA DE ACCIÓN Y QUE LOS EJES DE LAS DOS BARRAS DONDE ACTÚAN TAMBIÉN PASAN POR DICHA RECTA; POR LO TANTO EL CUERPO ES ESTÁTICAMENTE INDETERMINADO.

**EJERCICIO 54**

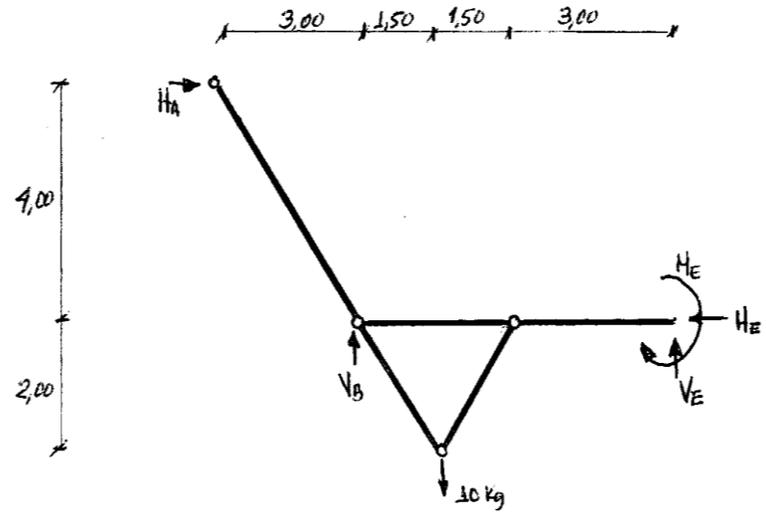
DETERMINAR EQUILIBRIO ESTÁTICO.

GRADOS DE LIBERTAD QUE POSEE EL CUERPO EN EL PLANO =  $3 * 5 \text{ BARRAS} = 15$ 

GRADOS DE LIBERTAD RESTRINGIDOS POR LOS VÍNCULOS = 15

$$15 - 15 = 0 \text{ (ISOSTÁTICO).}$$

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE:



NO HAY REACCIONES CONCURRENTES SOBRE UNA MISMA "LÍNEA DE ACCIÓN"

$$\sum \vec{M}_B = 0; \quad H_A(4) = 0; \quad \boxed{H_A = 0 \text{ Kg}}$$

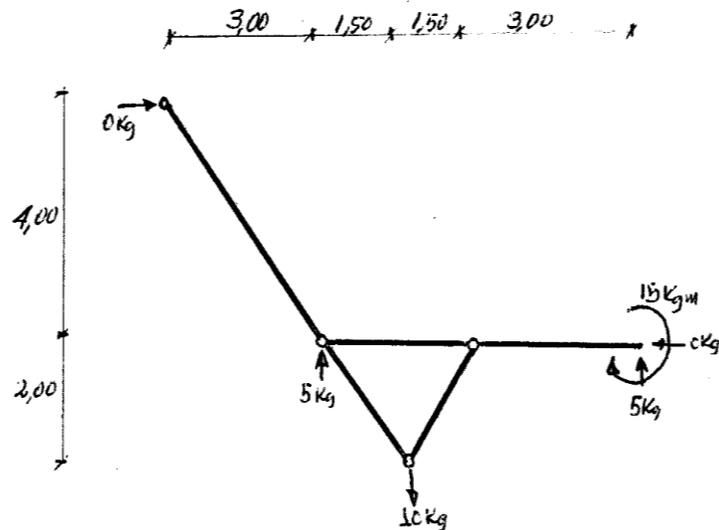
$$\sum \vec{M}_C = 0; \quad -(10)(1,5) + (V_B)(3) = 0; \quad \boxed{V_B = 5 \text{ Kg} (\uparrow)}$$

$$\sum F_x = 0; \quad H_A - H_E = 0; \quad H_A = H_E; \quad \boxed{H_E = 0 \text{ Kg}}$$

$$\sum F_y = 0; \quad V_A - 10 + V_E = 0; \quad 5 - 10 + V_E = 0; \quad \boxed{V_E = 5 \text{ Kg} (\uparrow)}$$

$$\sum \vec{M}_C = 0; \quad -(V_E)(3) + M_E = 0; \quad -(5)(3) + M_E = 0; \quad \boxed{M_E = 15 \text{ Kg}\cdot\text{m} (\circlearrowright)}$$

Equilibrio Estático:



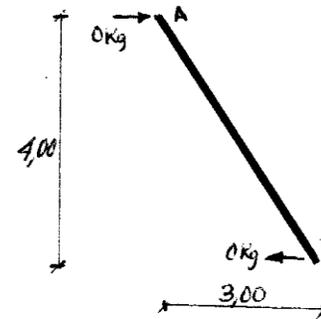
Nota:

$\sum \vec{M}_P =$  SUMATORIA DE MOMENTOS A LA IZQUIERDA DEL PUNTO "P".

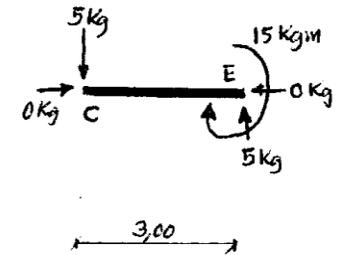
$\sum \vec{M}_P =$  SUMATORIA DE MOMENTOS A LA DERECHA DEL PUNTO "P".

REALIZANDO DESPIECE:

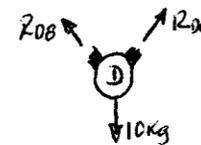
BARRA AB:



BARRA CE:



Nodo D:



$$\sum F_y = 0; \quad -10 + (R_{DC})(\text{sen } 53,13) + (R_{DB})(\text{sen } 53,13) = 0$$

$$R_{DC} + R_{DB} = 10 / (\text{sen } 53,13)$$

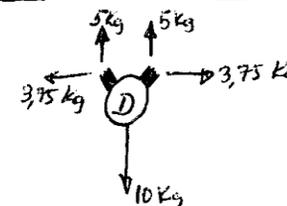
$$\sum F_x = 0; \quad -(R_{DB})(\text{cos } 53,13) + (R_{DC})(\text{cos } 53,13) = 0$$

$$R_{DC} = R_{DB}$$

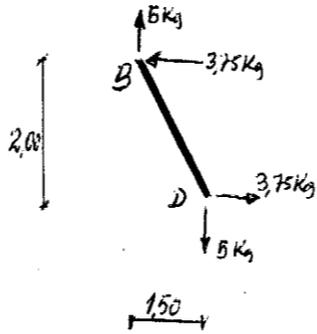
$$R_{DC} + R_{DC} = 10 / (\text{sen } 53,13); \quad 2R_{DC} = 10 / (\text{sen } 53,13)$$

$$\boxed{R_{DB} = 6,25 \text{ Kg} (\angle 53,13)}$$

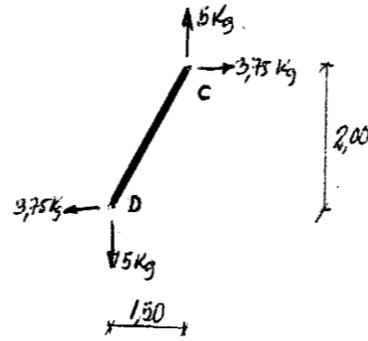
$$\boxed{R_{DC} = 6,25 \text{ Kg} (\angle 53,13)}$$



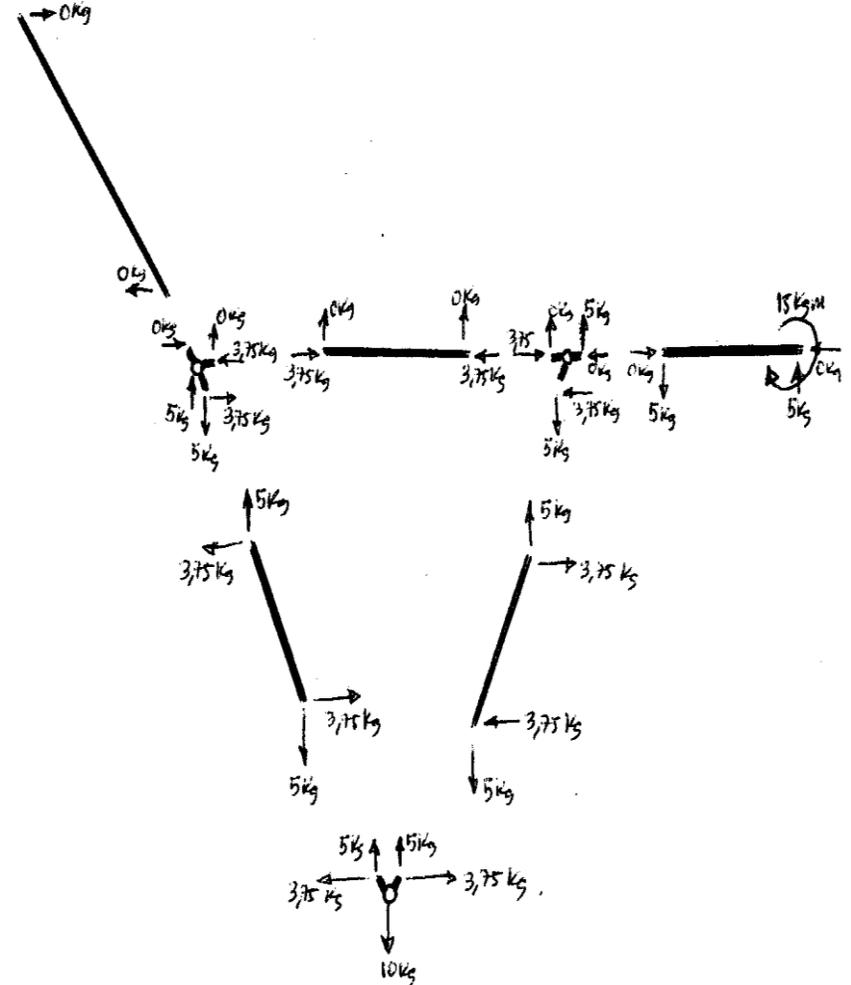
BARRA BD



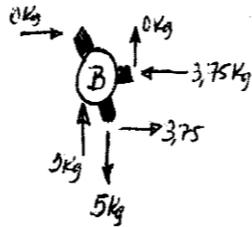
BARRA DC



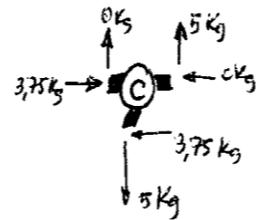
DESPIECE TOTAL:



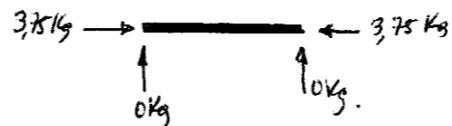
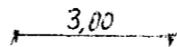
Nodo B



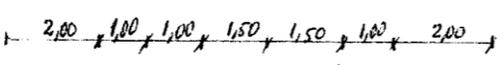
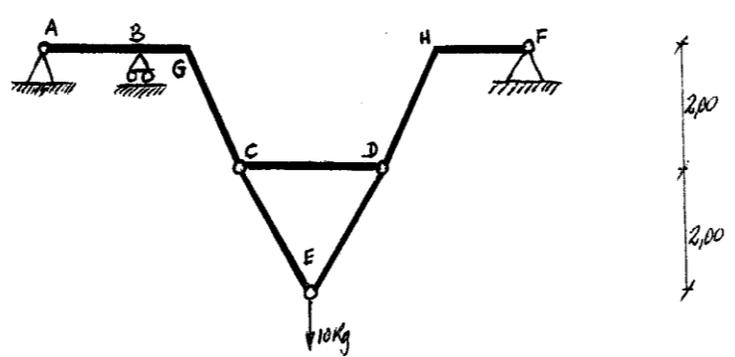
Nodo C



BARRA BC

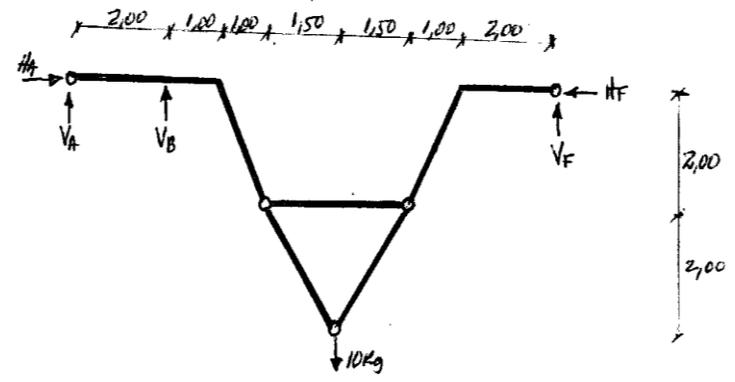


**Ejercicio 5.5:** DETERMINAR EQUILIBRIO ESTÁTICO



GRADOS DE LIBERTAD QUE POSEE EL CUERPO EN EL PLANO =  $3 \times 5 \text{ BARRAS} = 15$   
 GRADOS DE LIBERTAD RESTRINGIDOS POR LOS VÍNCULOS = 15  
 $15 - 15 = 0$  (ISOSTÁTICO).

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE:



CUANDO ANALIZAMOS EL CUERPO EN FUNCIÓN DE LAS REACCIONES GENERADAS POR LOS VÍNCULOS, NOTAMOS QUE LAS REACCIONES "HA" Y "HF" SON CONCURRENTES SOBRE UNA MISMA LÍNEA DE ACCIÓN, PERO LOS ESTES DE LAS DOS BARRAS DONDE ACTÚAN ESTAS REACCIONES (BARRA AC Y BARRA DF) NO ESTÁN INTEGRALMENTE ALINEADAS, POR LO TANTO EL CUERPO ES "ESTÁTICAMENTE DETERMINADO".

$$\sum \vec{M}_C = 0 ; + (10)(1,5) - (V_F)(6) - (H_F)(2) = 0$$

$$15 - 6V_F - 2H_F = 0 \text{ (Ecuación 1)}$$

$$\sum \vec{M}_D = 0 ; - (V_F)(3) - (H_F)(2) = 0 ; -3V_F - 2H_F = 0 \text{ (Ecuación 2)}$$

RESOLVIENDO LAS 2 ECUACIONES:

$$H_F = 7,5 \text{ Kg } (\rightarrow)$$

$$V_F = 5 \text{ Kg } (\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0 ; H_A - H_F = 0$$

$$H_A = 7,5 \text{ Kg } (\leftarrow)$$

TOMANDO EN CUENTA LA DIRECCIÓN Y EL SENTIDO DE LAS REACCIONES CALCULADAS:

$$\sum \vec{M}_C = 0 ; - (7,5)(2) + (V_A)(4) + (V_B)(2) = 0$$

$$-15 + 4V_A + 2V_B = 0 \text{ (Ecuación 1)}$$

$$\sum \vec{M}_D = 0 ; - (10)(1,5) - (7,5)(2) + (V_A)(7) + (V_B)(5) = 0$$

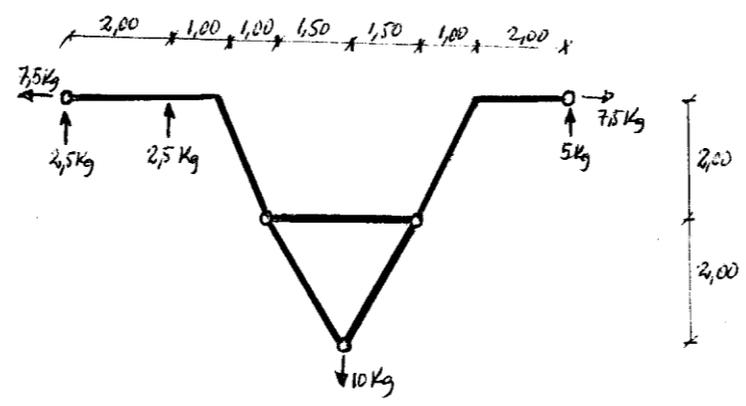
$$-30 + 7V_A + 5V_B = 0 \text{ (Ecuación 2)}$$

RESOLVIENDO LAS 2 ECUACIONES:

$$V_A = 2,5 \text{ Kg } (\uparrow)$$

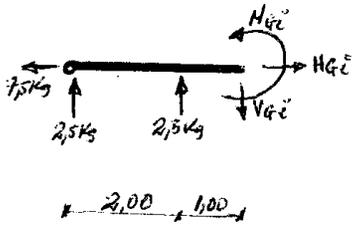
$$V_B = 2,5 \text{ Kg } (\uparrow)$$

EQUILIBRIO ESTÁTICO:



DESPIECE:

BARRA ABG:



$$\sum F_x = 0; -7.5 + H_{Gi} = 0$$

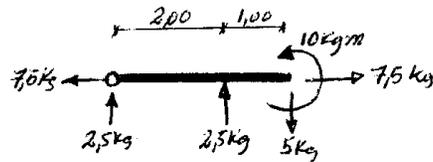
$$H_{Gi} = 7.5 \text{ Kg } (\rightarrow)$$

$$\sum F_y = 0; 2.5 + 2.5 - V_{Gi} = 0$$

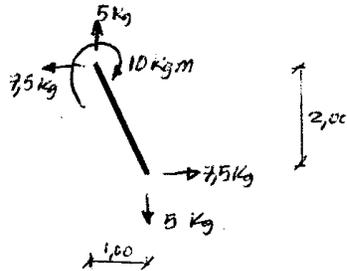
$$V_{Gi} = 5 \text{ Kg } (\downarrow)$$

$$\sum M_G = 0; + (2.5)(3) + (2.5)(1) - M_{Gi} = 0$$

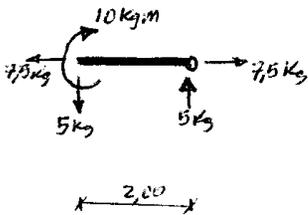
$$M_{Gi} = 10 \text{ Kg}\cdot\text{m } (\odot)$$



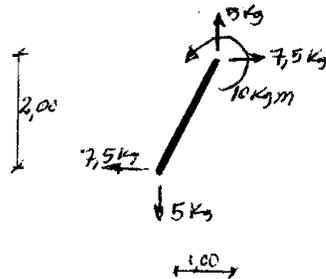
BARRA GC:



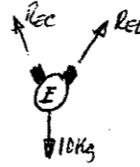
BARRA HF:



BARRA DH:



NODO E:



$$\sum F_y = 0; -10 + (R_{ED})(\text{sen } 53.13) + (R_{EC})(\text{sen } 53.13) = 0$$

$$R_{ED} + R_{EC} = 10 / \text{sen } 53.13 \text{ (Ecuación 1)}$$

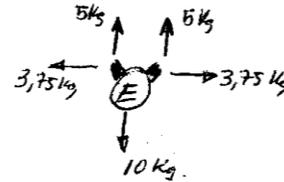
$$\sum F_x = 0; -(R_{EC})(\text{cos } 53.13) + (R_{ED})(\text{cos } 53.13) = 0$$

$$R_{EC} = R_{ED} \text{ (Ecuación 2)}$$

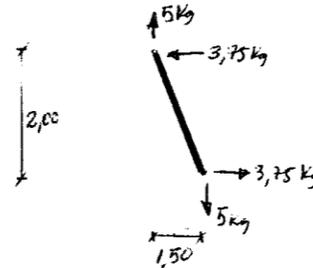
RESOLVIENDO LAS DOS ECUACIONES:

$$R_{ED} = 6.25 \text{ Kg } (\nearrow 53.13)$$

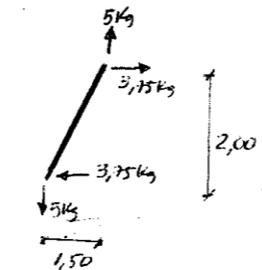
$$R_{EC} = 6.25 \text{ Kg } (\searrow 53.13)$$



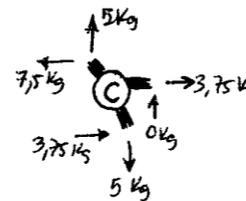
BARRA EC:



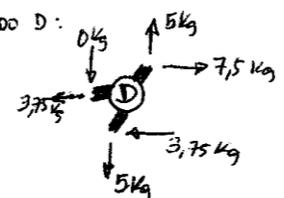
BARRA ED:

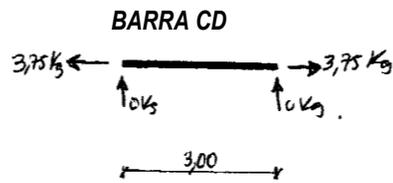


NODO C:

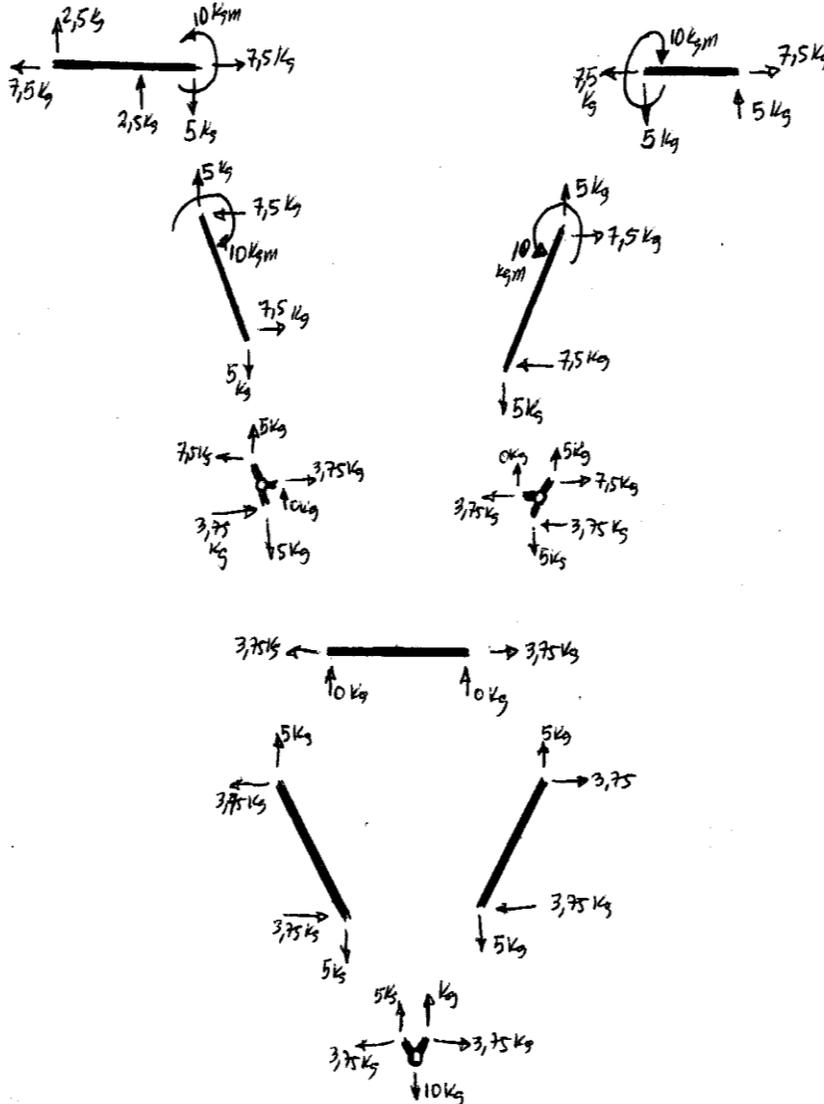


NODO D:



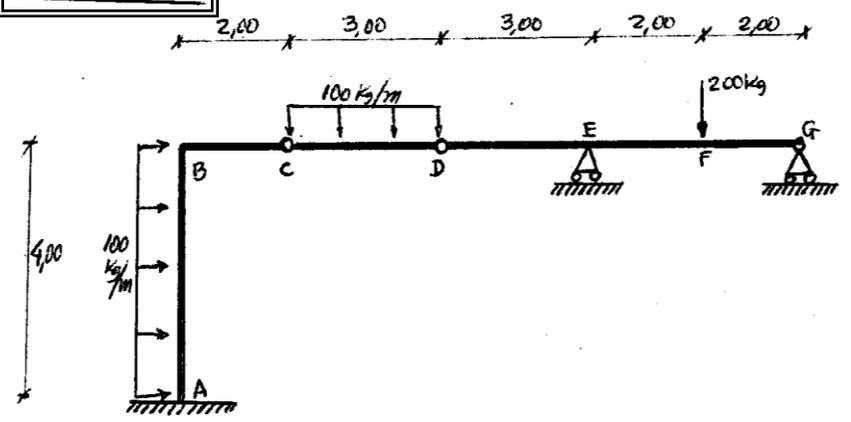


DESPIECE TOTAL:



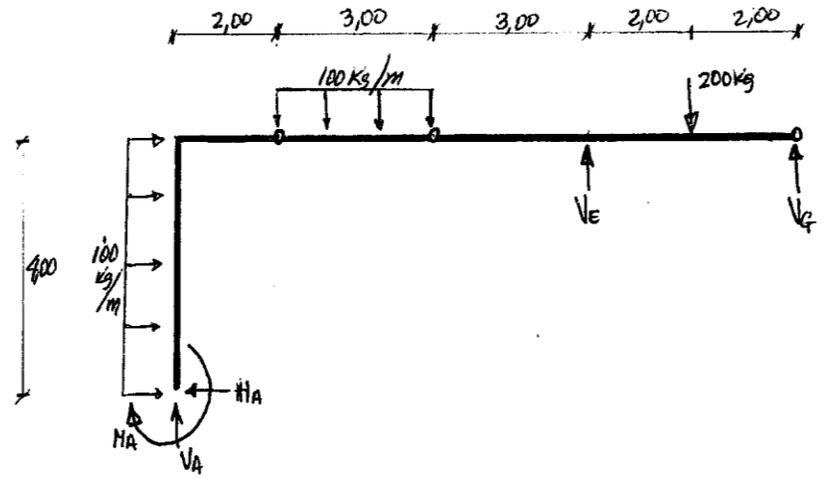
**EXERCICIO 5.6:**

DETERMINAR EQUILIBRIO ESTÁTICO:



GRADOS DE LIBERTAD QUE POSEE EL CUERPO EN EL PLANO = 9  
 GRADOS DE LIBERTAD RESTRINGIDOS POR LOS VÍNCULOS = 9  
 (ISOSTÁTICO).

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE:



ESTOS TIPOS DE PROBLEMA NOS DAN LA OPORTUNIDAD DE PODER BUSCAR LA SOLUCIÓN POR DOS CAMINOS DISTINTOS.

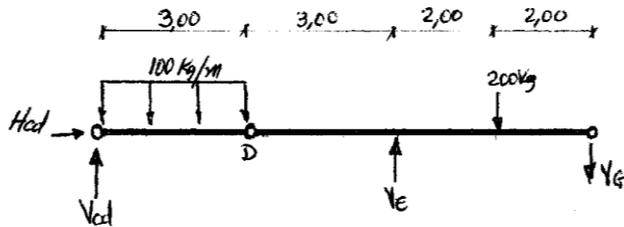
EXPLICAREMOS POR SEPARADO ESTOS DOS CAMINOS, PERO INICIALMENTE DAREMOS UNA EXPLICACIÓN COMÚN A AMBOS.

UNA CONSIDERACIÓN IMPORTANTE QUE DEBEMOS HACER DESPUÉS DE CONSTRUIR EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE, CONSISTE EN DETERMINAR CUÁL ES LA SECCIÓN O PARTE DEL CUERPO RÍGIDO QUE NOS PRESENTA MENOS DIFICULTAD PARA AFRONTAR EL PROBLEMA; BIEN SEA: AQUELLA CUYA CONFIGURACIÓN GEOMÉTRICA SEA MÁS SENCILLA O DONDE LAS REACCIONES GENERADAS POR LOS VÍNCULOS ESTÉN UBICADAS CONVENIENTEMENTE.

ESTA SECCIÓN DE LA ESTRUCTURA SE SEPARA DEL RESTO (DESPIECE EN DONDE ESTÉ UBICADO UN NODO O ARTICULACIÓN INTERMEDIA) Y SE REALIZA EL ESTUDIO DE LAS FUERZAS DE RESTRICCIÓN; POSTERIORMENTE SE ENSAMBLA TODA LA ESTRUCTURA Y FINALMENTE SE CALCULAN LAS INCOGNITAS DE LA OTRA SECCIÓN.

EN ESTE PROBLEMA NOTAMOS QUE SI EL DESPIECE LO HACEMOS EN EL NODO "C" Y LA SECCIÓN ESCOGIDA PARA EL ESTUDIO ES LA SECCIÓN DERECHA, FACILITAREMOS LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA.

CAMINO (1): UTILIZANDO ECUACIONES CON UNA SOLA INCOGNITA.



$$\sum \vec{M}_D = 0$$

$$-(100)(3)(1,5) + (V_{cd})(3) = 0$$

$$-450 + 3V_{cd} = 0 ; V_{cd} = 450/3$$

$$\boxed{V_{cd} = 150 \text{ Kg } (\uparrow)}$$

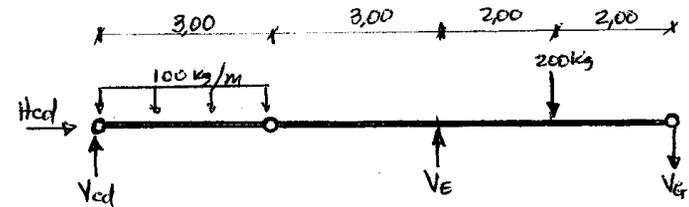
$$\sum \vec{M}_G = 0 ; (V_{cd})(10) - (100)(3)(6,5) + (V_E)(4) - (200)(2) = 0.$$

$$(150)(10) - 2550 + 4V_E - 400 = 0 ; \boxed{V_E = 362,50 \text{ Kg } (\uparrow)}$$

$$\sum F_y = 0 ; +V_{cd} + V_E - (100)(3) - 200 - V_G = 0.$$

$$+150 + 362,5 - 300 - 200 - V_G = 0 \quad \boxed{V_G = 12,50 \text{ Kg } (\downarrow)}$$

CAMINO (2): UTILIZANDO SISTEMA DE ECUACIONES.



$$\sum \vec{M}_C = 0 ; (100)(3)(1,5) - (V_E)(6) + (200)(6) + (V_G)(10) = 0.$$

$$2050 - 6V_E + 10V_G = 0 \quad (\text{ECUACIÓN 1})$$

$$\sum \vec{M}_D = 0 ; -(V_E)(3) + (200)(5) + (V_G)(7) = 0$$

$$1000 - 3V_E + 7V_G = 0 \quad (\text{ECUACIÓN 2})$$

RESOLVIENDO LAS ECUACIONES (1) Y (2)

$$\boxed{V_G = 12,50 \text{ Kg } (\downarrow)}$$

$$\boxed{V_E = 362,50 \text{ Kg } (\uparrow)}$$

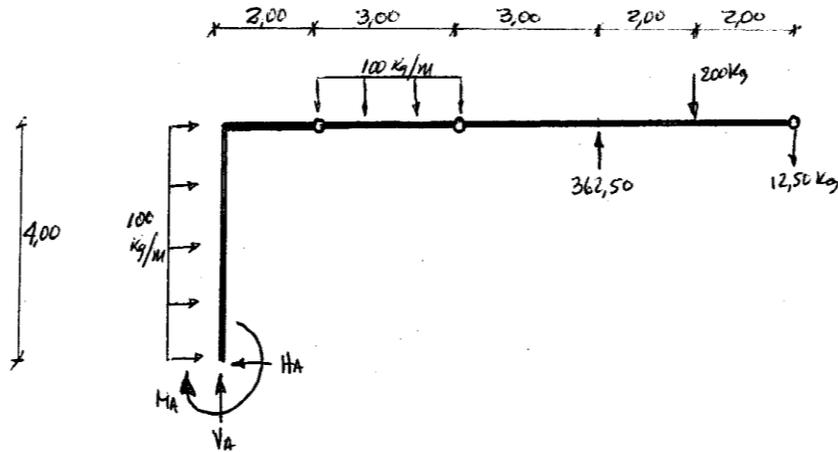
$$\sum F_y = 0 ; +V_{cd} - (100)(3) + V_E - 200 - V_G = 0$$

$$+V_{cd} - 300 + 362,50 - 200 - 12,50 = 0$$

$$\boxed{V_{cd} = 150 \text{ Kg } (\uparrow)}$$

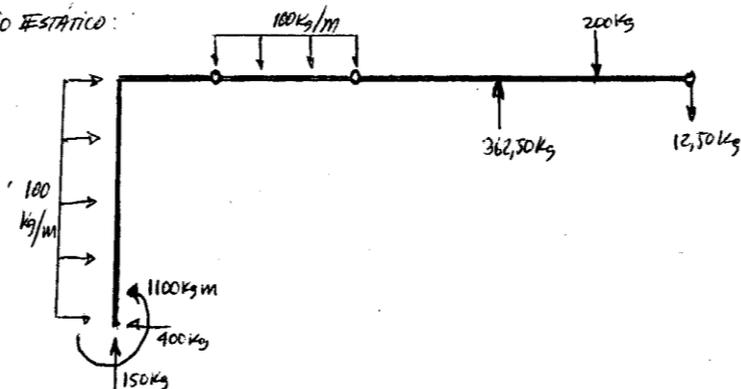
NOTAMOS ENTONCES QUE LAS DOS SOLUCIONES SON IDENTICAS AUN CUANDO LA FORMA DE ENFOCAR EL PROBLEMA FUÉ DISTINTA.

EL RESTO DEL PROCEDIMIENTO ES COMÚN A LOS DOS CAMINOS, ES DECIR: ENSAMBLAR LA ESTRUCTURA CON LAS REACCIONES YA CALCULADAS Y APLICAR LAS ECUACIONES DE LA ESTÁTICA.

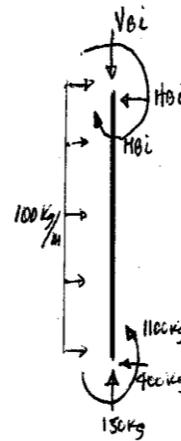


$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \quad + (100)(4) - H_A = 0; \quad \boxed{H_A = 400 \text{ Kg} (\leftarrow)} \\ \sum F_y = 0; & \quad + V_A - (100)(3) + 362,50 - 200 - 12,50 = 0 \quad \boxed{V_A = 150 \text{ Kg} (\uparrow)} \\ \sum M_A = 0; & \quad + M_A + (100)(4)(2) + (100)(3)(3,5) - (362,50)(8) + (200)(10) + (12,50)(12) = 0 \\ & \quad M_A = -1100 \text{ Kg}\cdot\text{m} \quad \boxed{M_A = 1100 \text{ Kg}\cdot\text{m} (\odot)} \end{aligned}$$

Equilibrio Estático:



DESPIECE:



$$\sum F_x = 0; \quad -400 + (100)(4) - H_{Bi} = 0$$

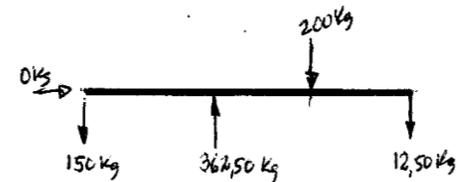
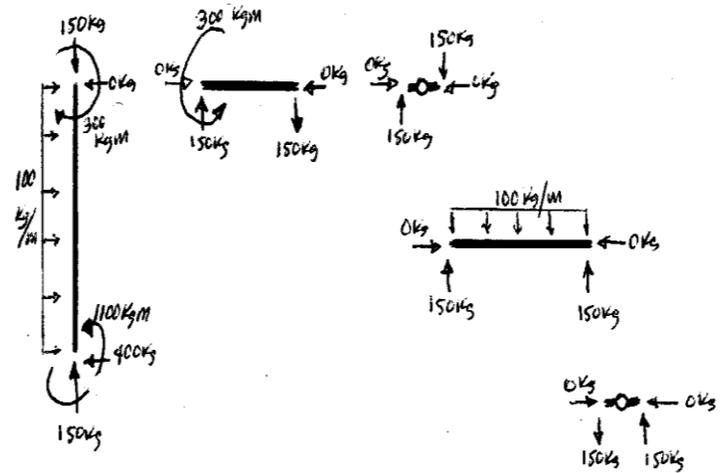
$$\boxed{H_{Bi} = 0 \text{ Kg}}$$

$$\sum F_y = 0; \quad 150 - V_{Bi} = 0 \quad \boxed{V_{Bi} = 150 \text{ Kg} (\uparrow)}$$

$$\sum M_A = 0; \quad -1100 + (100)(4)(2) + M_{Bi} = 0$$

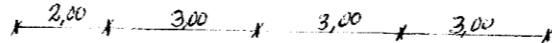
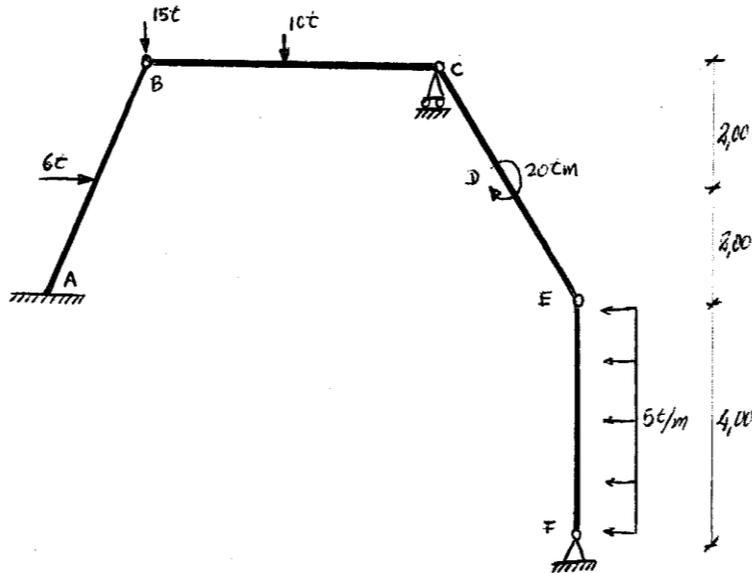
$$\boxed{M_{Bi} = 300 \text{ Kg}\cdot\text{m} (\odot)}$$

DESPIECE TOTAL:



**EJERCICIO 5.7**

DETERMINAR EL EQUILIBRIO ESTÁTICO.

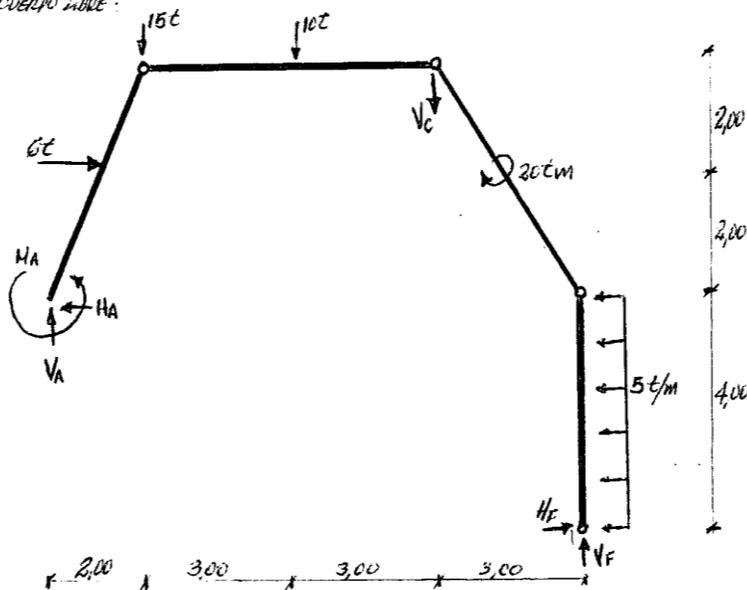


GRADOS DE LIBERTAD QUE POSEE EL CUERPO EN EL PLANO =  $3 \times 4$  BARRIOS = 12

GRADOS DE LIBERTAD RESTRIÑIDOS POR LOS VÍNCULOS = 12

$12 - 12 = 0$  (ISOSTÁTICO).

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE:



1/ OBSERVAR EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE NOTO QUE PUEDO ESTUDIAR MOMENTO A LA DERECHA DEL PUNTO "E" Y CALCULAR EL VALOR DE HF.

$\sum \vec{M}_E = 0$  ;  $+(5)(4)(2) - (H_f)(4) = 0$  ;  $H_f = 10t$  (→)

CONOCIDO EL VALOR DE "HF", PUEDO HACER MOMENTO A LA DERECHA DEL PUNTO "C" Y CALCULAR EL VALOR DE VF.

$\sum \vec{M}_C = 0$  ;  $+20 + (5)(4)(6) - (10)(8) - (V_f)(3) = 0$  ;  $V_f = 20t$  (↑)

CONOCIDOS LOS VALORES DE "HF" Y "VF" PUEDO ESTUDIAR EL MOMENTO A LA DERECHA DEL PUNTO "B" Y CALCULAR EL VALOR DE "Vc"

$\sum \vec{M}_B = 0$  ;  $+(10)(3) + (V_c)(6) + 20 + (5)(4)(6) - (10)(8) - (20)(9) = 0$

$V_c = 15t$  (↓)

2/ CONTINUACIÓN PUEDO ESTUDIAR MOMENTO EN EL PUNTO "A" Y SUMATORIA DE FUERZAS HORIZONTALES Y VERTICALES, CALCULANDO ASÍ LOS VALORES DE LAS 3 INCOGNITAS O REACCIONES FALTANTES (ES DECIR MA, HA, VA).

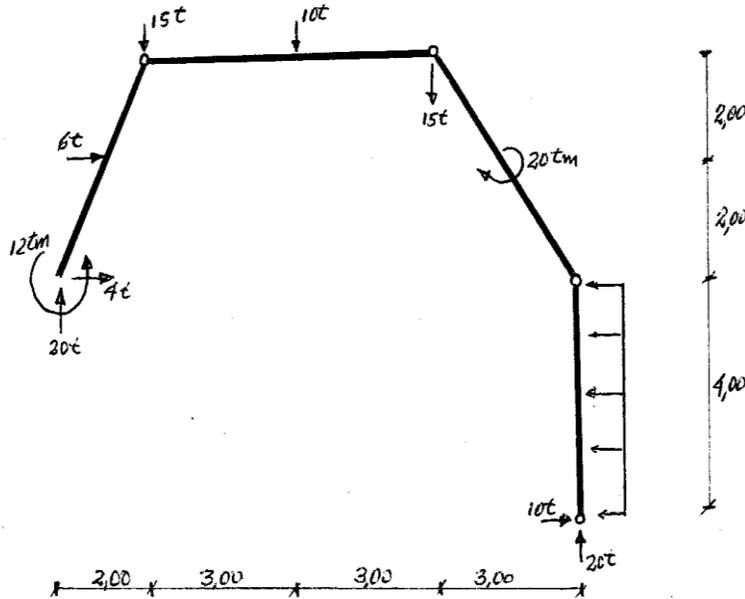
$\sum M_A = 0$  ;  $(6)(2) + (15)(2) + (10)(5) + (15)(8) + 20 + (5)(4)(2) - (10)(4) - (20)(11) - M_A = 0$

$M_A = 12tm$  (↻)

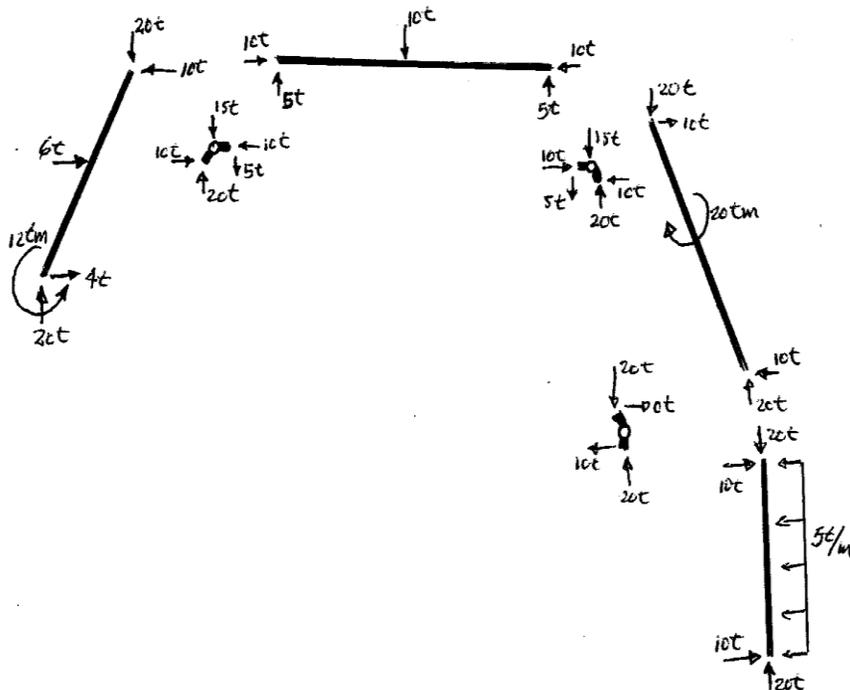
$\sum F_x = 0$  ;  $-H_A + 6 - (5)(4) + 10 = 0$  ;  $H_A = -4$   $H_A = 4t$  (→)

$\sum F_y = 0$  ;  $V_A - 15 - 10 - 15 + 20 = 0$  ;  $V_A = 20t$  (↑)

Equilibrio Estático:

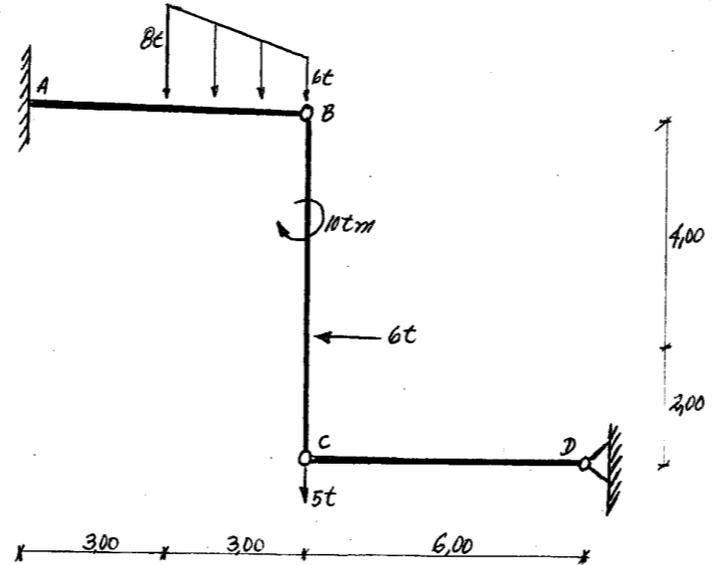


Despiece Total:



Ejercicio 5.B:

DETERMINAR EQUILIBRIO ESTÁTICO

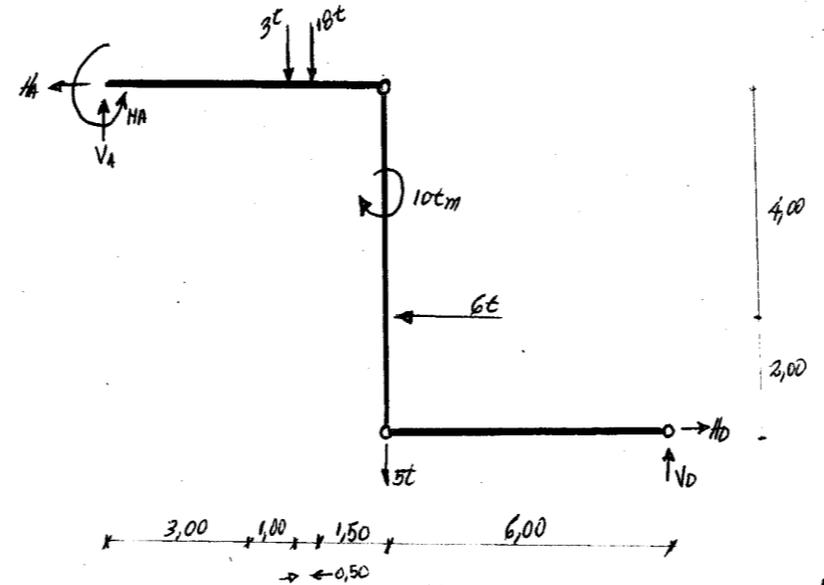


Grados de libertad que posee el cuerpo en el plano =  $3 \times 3 \text{ BARRAS} = 9$

Grados de libertad restringidos por los vínculos = 9

$$9 - 9 = 0 \quad (\text{ISOSTÁTICO}).$$

Diagrama de cuerpo libre:



$$\sum \vec{M}_c = 0 ; (V_b)(6) = 0 ; \boxed{V_b = 0t}$$

$$\sum F_y = 0 ; +V_A - 3 - 18 - 5 + V_b = 0 ; \boxed{V_A = 26t (\uparrow)}$$

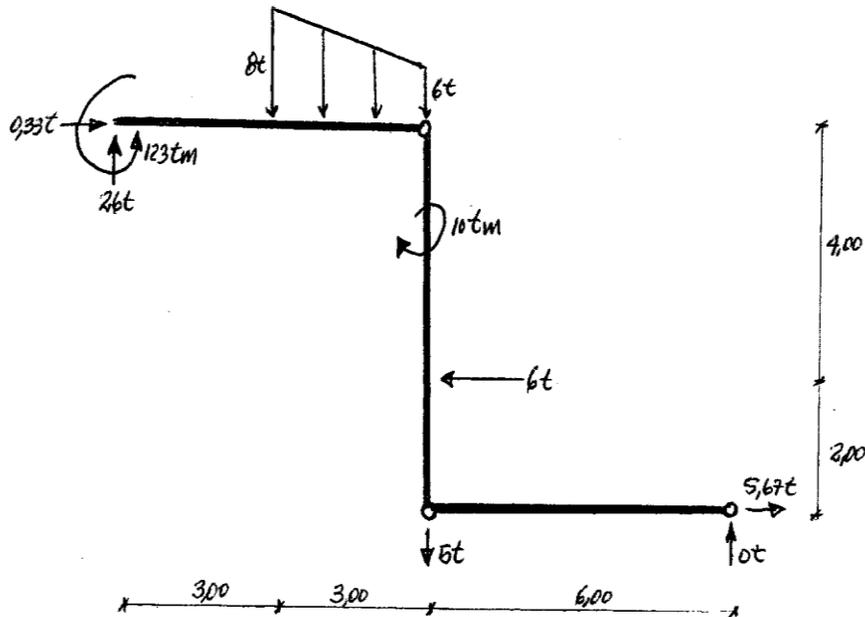
$$\sum M_b = 0 ; 10 + (6)(4) - (H_b)(6) = 0 ; \boxed{H_b = 5,67t (-\rightarrow)}$$

$$\sum F_x = 0 ; -H_A - 6 + H_b = 0 ; \boxed{H_A = 0,33t (-\rightarrow)}$$

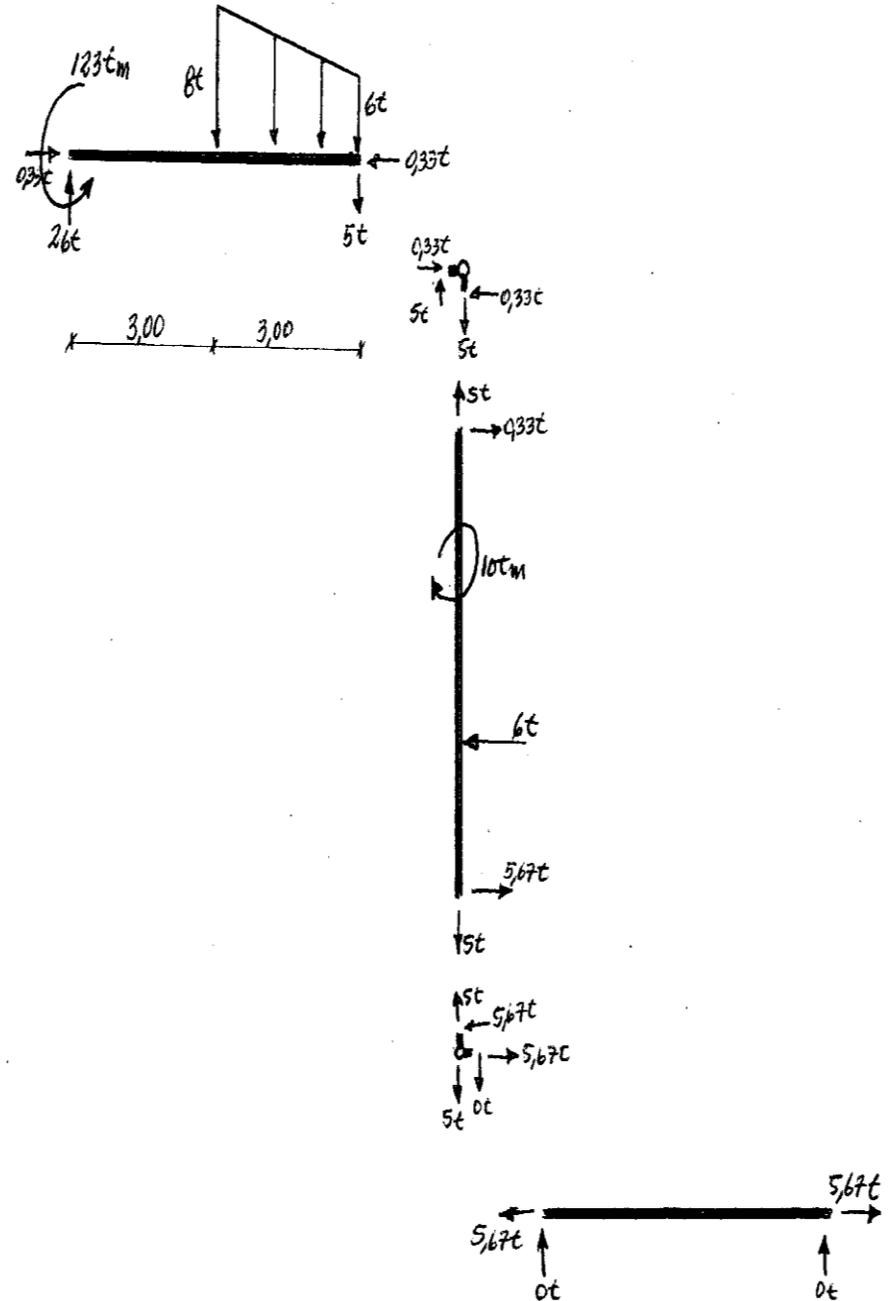
$$\sum M_A = 0 ; +(3)(4) + (18)(4,5) + 10 + (6)(4) + (5)(6) - (5,67)(6) - M_A = 0$$

$$\boxed{M_A = 123 \text{ tm} (\odot)}$$

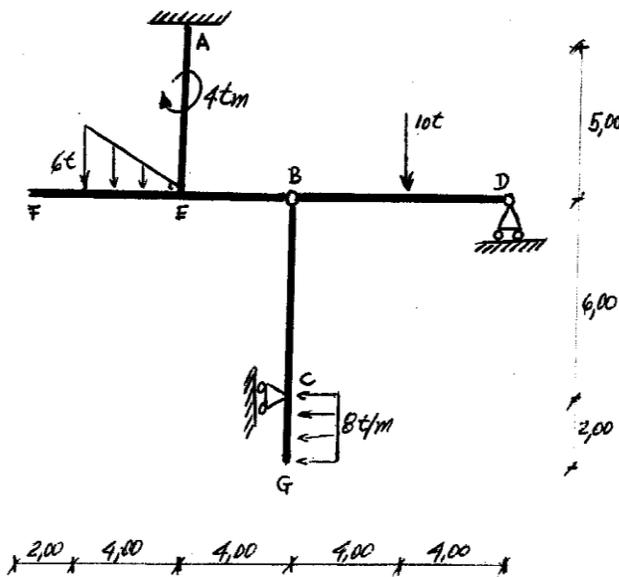
Equilibrio Estático:



DESPIECE TOTAL:

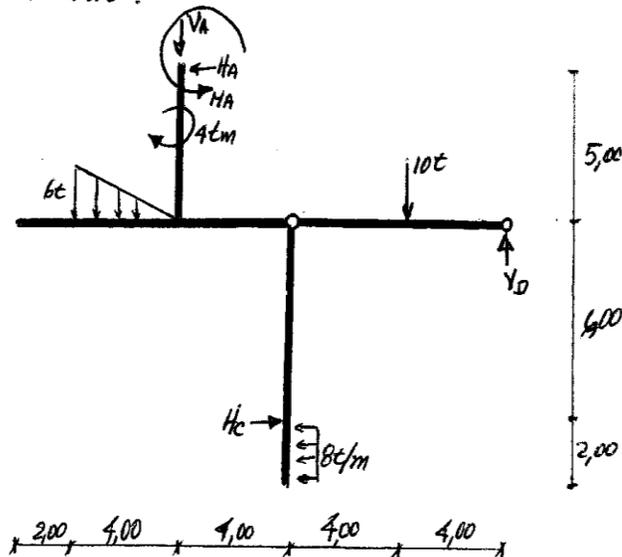


**EJERCICIO 5.9: DETERMINAR EQUILIBRIO ESTÁTICO:**



GRADOS DE LIBERTAD QUE POSEE EL CUERPO EN EL PLANO:  $3 \times 3 \text{ BARRAS} = 9$   
 GRADOS DE LIBERTAD RESTRINGIDOS POR LOS VÍNCULOS = 9.  
 $9 - 9 = 0$  (ISOSTÁTICO)

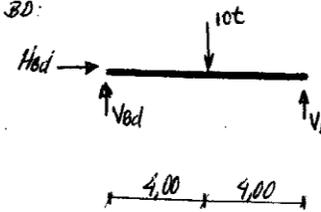
DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE:



EN ESTE EJERCICIO UTILIZAREMOS UN MÉTODO QUE NOS PERMITIRÁ ACELERAR LOS PROCEDIMIENTOS PARA EL CÁLCULO DE LAS CARACTERÍSTICAS DE SOLICITACIÓN EN CADA UNA DE LAS PARTES DEL CUERPO RÍGIDO.

DICHO MÉTODO CONSISTE EN REALIZAR SIMULTANEAMENTE EL DESPIECE DEL CUERPO Y EL CÁLCULO DE LAS REACCIONES INTERNAS Y EXTERNAS. ESTE PROCEDIMIENTO CONLLEVA (LÓGICAMENTE) A QUE VISUALICEMOS INICIALMENTE LA SECCIÓN DE LA FIGURA O CUERPO QUE PRESENTE MENOS DIFICULTAD.

ESTUDIANDO LA BARRA BD:

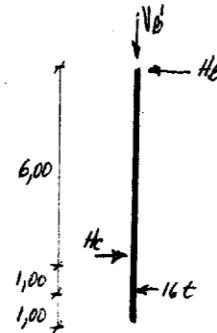


$$\sum M_B = 0; \quad + (10)(4) - (V_D)(8) = 0 \quad \boxed{V_D = 5t (\uparrow)}$$

$$\sum F_y = 0; \quad V_{bd} + V_D - 10 = 0 \quad \boxed{V_{bd} = 5t (\uparrow)}$$

$$\sum F_x = 0; \quad \boxed{H_{bd} = 0t}$$

ESTUDIANDO LA BARRA BC:

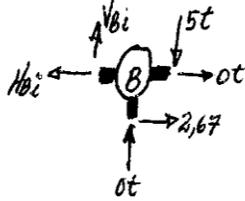


$$\sum M_B = 0; \quad - (H_c)(6) + (16)(7) = 0 \quad \boxed{H_c = 18,67t (\leftarrow)}$$

$$\sum F_x = 0; \quad 18,67 - 16 + H_{b'} = 0 \quad \boxed{H_{b'} = 2,67t (\rightarrow)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \boxed{V_{b'} = 0t}$$

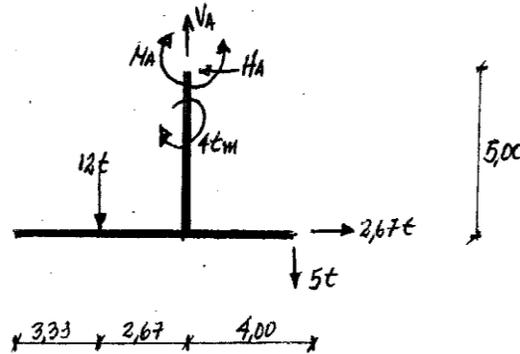
ESTUDIANDO NUDO B:



$$\sum F_x = 0; \quad -H_{Bi} - 0 + 2,67 = 0 \quad \boxed{H_{Bi} = 2,67 \text{ t} (\leftarrow)}$$

$$\sum F_y = 0; \quad V_{Bi} + 0 - 5 = 0 \quad \boxed{V_{Bi} = 5 \text{ t} (\uparrow)}$$

ESTUDIANDO LA SECCIÓN UBIADA A LA IZQUIERDA DEL NUDO B (BARRA AB EF)



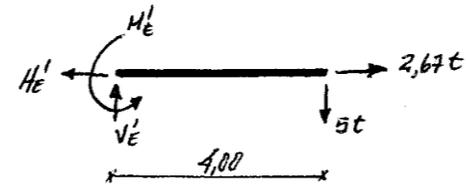
$$\sum F_y = 0; \quad +V_A - 12 - 5 = 0; \quad \boxed{V_A = 17 \text{ t} (\uparrow)}$$

$$\sum F_x = 0; \quad -H_A + 2,67 = 0; \quad \boxed{H_A = 2,67 \text{ t} (\leftarrow)}$$

$$\sum M_A = 0; \quad +4 - (12)(2,67) + (5)(4) - (2,67)(5) + M_A = 0$$

$$\boxed{M_A = 21,35 \text{ tm} (\curvearrowright)}$$

ESTUDIANDO EL TRAMO EB:

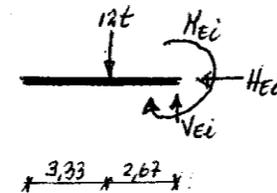


$$\sum F_x = 0; \quad -H'_E + 2,67 = 0; \quad \boxed{H'_E = 2,67 \text{ t} (\leftarrow)}$$

$$\sum F_y = 0; \quad V'_E - 5 = 0; \quad \boxed{V'_E = 5 \text{ t} (\uparrow)}$$

$$\sum M'_E = 0; \quad (5)(4) - M'_E = 0; \quad \boxed{M'_E = 20 \text{ tm} (\curvearrowright)}$$

ESTUDIANDO EL TRAMO EF:

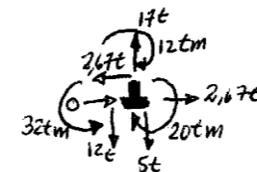


$$\sum F_y = 0; \quad -12 + V_{Ei} = 0; \quad \boxed{V_{Ei} = 12 \text{ t} (\uparrow)}$$

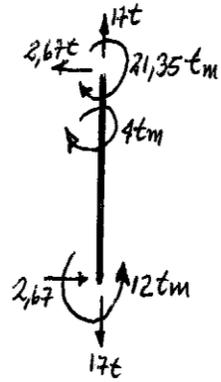
$$\sum F_x = 0; \quad H_{Ei} = 0 \quad \boxed{H_{Ei} = 0 \text{ t}}$$

$$\sum M_E = 0; \quad -(12)(2,67) + M_{Ei} = 0 \quad \boxed{M_{Ei} = 32 \text{ tm} (\curvearrowright)}$$

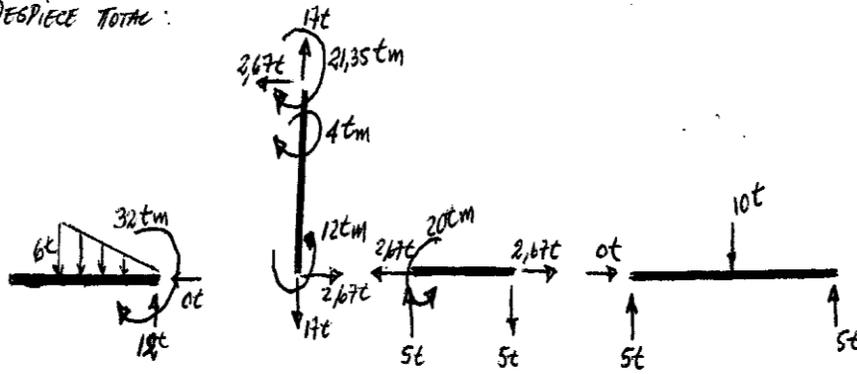
ESTUDIANDO JUNTA EN 'E':



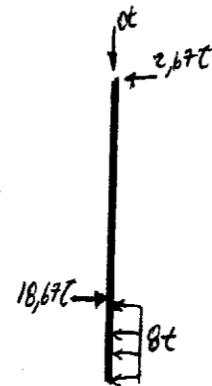
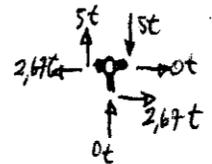
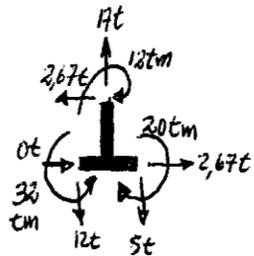
ESTUDIANDO EL TRAMO AE:



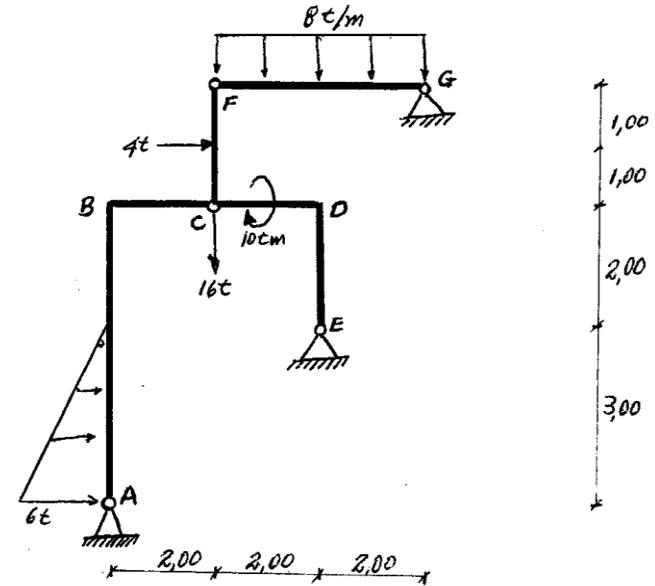
DESPIECE TOTAL:



DETALLE JUNTA EN E:



EXERCICIO 5.10: DETERMINAR EQUILIBRIO ESTÁTICO

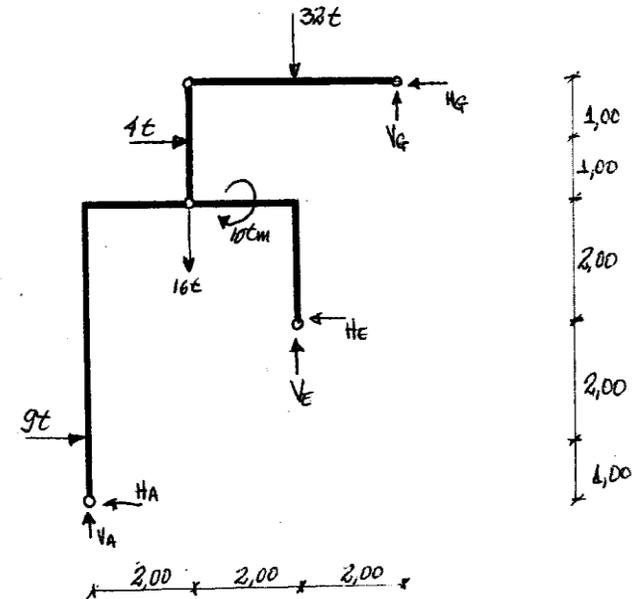


GRADOS DE LIBERTAD QUE POSEE EL CUERPO EN EL PLANO =  $3 \times 4$  BARRAS = 12

GRADOS DE LIBERTAD RESTRIÑIDOS POR LOS VINCULOS = 12

$$12 - 12 = 0 \quad (\text{ISOSTÁTICO}).$$

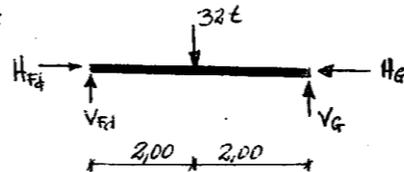
DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE:



CUANDO OBSERVAMOS EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE Y ESCOGERAMOS LA FORMA DE AFRONTAR EL PROBLEMA NOTAMOS QUE NO ES POSIBLE RESOLVERLO CON LA UTILIZACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES ESTUDIANDO TODA LA FIGURA; AUNADO A ESTO, TAMBIEN PRESENTA DIFICULTAD HACIENDO EL DES-PIECE Y ESTUDIANDO BARRAS POR SEPARADO; SIN ENBARGO HAY UNA FORMA DE RESOLVERLO QUE CONSISTE EN LO SIGUIENTE:

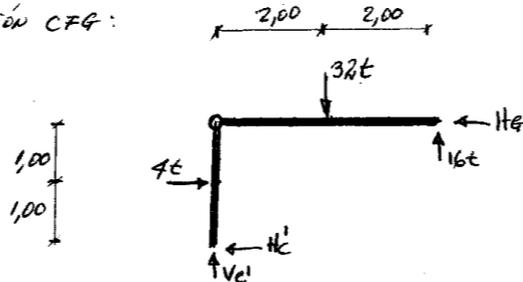
- 1.- ESTUDIO POR SEPARADO LA BARRA "FG" Y DETERMINO LAS REACCIONES VERTICALES EN ESA.
- 2.- CONOCIENDO LA REACCIÓN VERTICAL EN EL PUNTO "G", ESTU- DIO LA SECCIÓN "CFG" Y DETERMINO EL VALOR DE LA REACCIÓN HORIZONTAL EN EL PUNTO "G".
- 3.- CONOCIENDO LAS REACCIONES GENERADAS POR EL VÍNCULO DO- BLE UBICADO EN EL PUNTO "G" PUEDO ESTUDIAR EL MOMENTO EN EL PUNTO "A" Y POSTERIORMENTE A LA DERECHA DEL PUNTO "C" Y GENERAR UN SISTEMA DE ECUACIONES PARA CALCULAR "H<sub>E</sub>" Y "V<sub>E</sub>".
- 4.- POR ÚLTIMO ESTUDIO "ΣF<sub>x</sub>" Y "ΣF<sub>y</sub>" Y DETERMINO LOS VALORES DE "H<sub>A</sub>" Y "V<sub>A</sub>".

ESTUDIANDO LA BARRA FG:



$$\sum \vec{M}_F = 0 ; + (32)(2) - (V_G)(4) = 0 ; \quad \boxed{V_G = 16t (\uparrow)}$$

ESTUDIANDO LA SECCIÓN CFG:



$$\sum \vec{M}_C = 0 ; + (32)(2) + (4)(1) - (16)(4) - (H_G)(2) = 0.$$

$$\boxed{H_G = 2t (\leftarrow)}$$

TRABAJANDO CON TODA LA FIGURA:

$$\sum M_A = 0 ; + (9)(1) + (16)(2) + (10) - (H_E)(3) - (V_E)(4) + (4)(6) + (32)(4) - (H_G)(7) - (V_G)(6) = 0$$

CONO H<sub>G</sub> = 2t (←) Y V<sub>G</sub> = 16t (↑) TENDREMOS LA SIGUIENTE ECUACIÓN:

$$93 - 3H_E - 4V_E = 0.$$

$$\sum \vec{M}_C = 0 ; 10 + (H_E)(2) - (V_E)(2) = 0.$$

$$10 + 2H_E - 2V_E = 0 \quad (\text{ECUACIÓN 2}).$$

RESOLVIENDO ESTE SISTEMA DE ECUACIONES.

$$\boxed{H_E = 10,43t (\leftarrow)}$$

$$\boxed{V_E = 15,43t (\uparrow)}$$

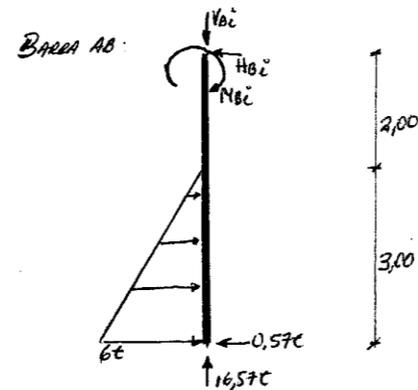
$$\sum F_x = 0 ; + 9 - H_A + 4 - H_G - H_E = 0$$

$$\boxed{H_A = 0,57t (\leftarrow)}$$

$$\sum F_y = 0 ; + V_A - 16 - 32 + V_E + V_G = 0$$

$$\boxed{V_A = 16,57t (\uparrow)}$$

DESPIECE:

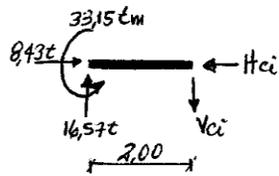


$$\sum F_x = 0; -0,57 + (6)(3)(1/2) - H_{bi} = 0; \quad \boxed{H_{bi} = 8,43 \text{ t} (\leftarrow)}$$

$$\sum F_y = 0; 16,57 - V_{bi} = 0; \quad \boxed{V_{bi} = 16,57 \text{ t} (\uparrow)}$$

$$\sum M_B = 0; + (0,57)(5) - (9)(4) + M_{bi} = 0; \quad \boxed{M_{bi} = 33,15 \text{ tm} (\odot)}$$

BARRA BC:

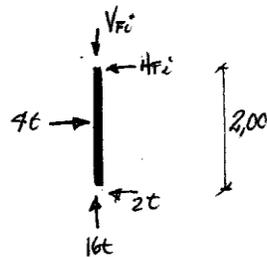


$$\sum F_x = 0; 8,43 - H_{ci} = 0; \quad \boxed{H_{ci} = 8,43 \text{ t} (\leftarrow)}$$

$$\sum F_y = 0; 16,57 - V_{ci} = 0; \quad \boxed{V_{ci} = 16,57 \text{ t} (\downarrow)}$$

$$\sum M_C = 0; -33,15 + (16,57)(2) = 0 \quad \checkmark$$

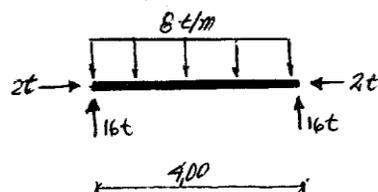
BARRA CF:



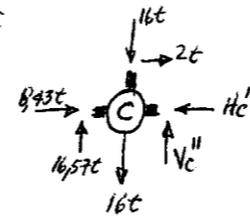
$$\sum F_x = 0; 4 - 2 - H_{fi} = 0 \quad \boxed{H_{fi} = 2 \text{ t} (\leftarrow)}$$

$$\sum F_y = 0; 16 - V_{fi} = 0 \quad \boxed{V_{fi} = 16 \text{ t} (\uparrow)}$$

BARRA FG:



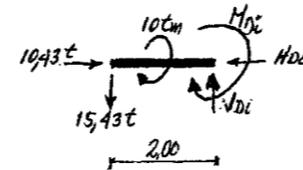
ESTUDIANDO EL NUDO "C":



$$\sum F_x = 0; 8,43 + 2 - H_{c''} = 0; \quad \boxed{H_{c''} = 10,43 \text{ t} (\leftarrow)}$$

$$\sum F_y = 0; 16,57 - 16 - 16 + V_{c''} = 0; \quad \boxed{V_{c''} = 15,43 \text{ t} (\uparrow)}$$

ESTUDIANDO BARRA CD:

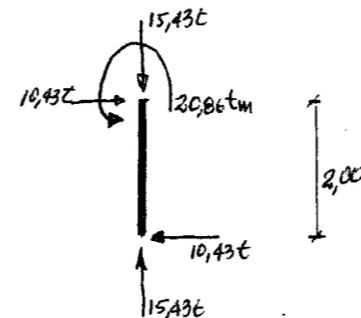


$$\sum F_x = 0; 10,43 - H_{di} = 0; \quad \boxed{H_{di} = 10,43 \text{ t} (\leftarrow)}$$

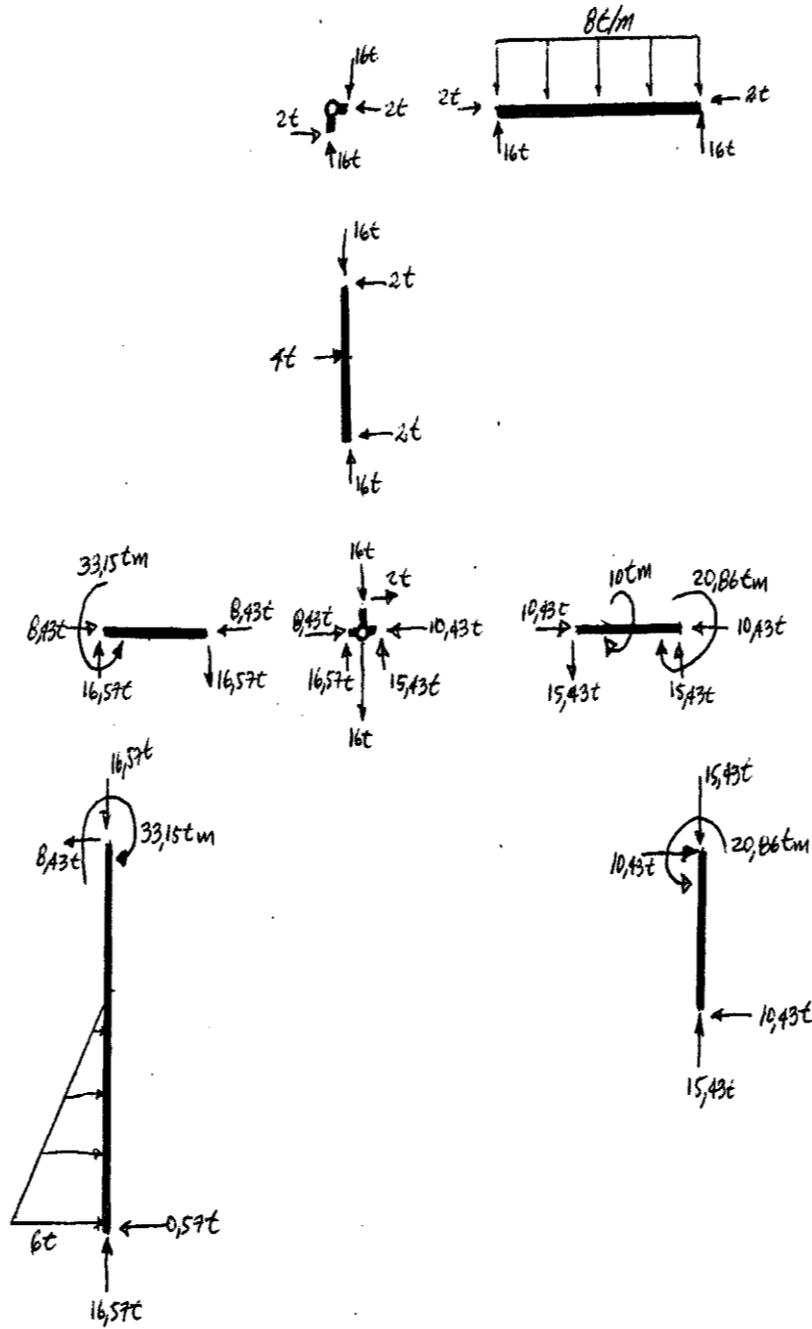
$$\sum F_y = 0; -15,43 + V_{di} = 0; \quad \boxed{V_{di} = 15,43 \text{ t} (\uparrow)}$$

$$\sum M_C = 0; 10 - (15,43)(2) + H_{di} = 0; \quad \boxed{H_{di} = 20,86 \text{ tm} (\odot)}$$

ESTUDIANDO DE:



DESPIECE TOTAL:



**I N D I C E**

CONTENIDO

---

INTRODUCCION.....1

CAPITULO I 2

Definición y comentario de terminos fundamentales:

\* Mecánica.....2

\* Fuerza.....2

    Elementos.....4

    Clasificación.....6

    Componentes.....7

\* Principios de la Estática Gráfica.....10

\* Momento de una Fuerza.....15

\* Equilibrio estático.....22

\* Diagrama de Cuerpo Libre.....25

\* Apoyos ideales.....27

CAPITULO II 40

Ejemplos ilustrativos del estudio del Equilibrio Estático de Cuerpos rígidos sometidos a Sistemas de Fuerzas

\* Viga simplemente apoyada (Carga puntual).....40

\* Viga simplemente apoyada (Hiperestática).....45

\* Viga simplemente apoyada (Hipostática).....46

\* Viga Simpl. apoy. (Carga puntual inclinada)....47

\* Viga simplemente apoyada (Carga distribuída)...50

\* Viga en Cantilever (voladizo - carga puntual)..56

\* Cuerpo formado por varias vigas.....58

\* Viga simplemente apoyada (varias cargas).....62

\* Viga simplemente apoyada (detalle-vuela).....64

\* Uso inadecuado de apoyos en armadura.....67

\* Uso inadecuado de apoyos.....70

\* Una misma armadura con distintos apoyos.....73

\* Viga sostenida por cable.....83

CAPITULO III 85

Análisis de Estructuras (Armaduras)

\* Articulación intermedia.....86

\* Análisis de Estructuras.....93

\* Definición de Armadura.....94

\* Método de Análisis (Armadura Plana).....95

\* Método de los Nodos.....95

\* Método de las Secciones.....111

CAPITULO IV 115

Características de Solicitación (Diagramas de Fuerzas Normales, Fuerzas Cortantes y Momentos Flexionantes)

\* Suposiciones para el análisis de vigas.....115

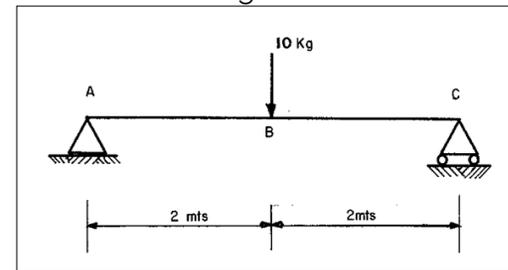
\* Generalizaciones para la construcción de los Diagramas.....116

- \* Convención de signos.....118
- \* Ejemplos ilustrativos.....119
  - Viga simp. apoyada.carga puntual.....119
  - Viga simp. apoyada.carga distribuida.....127
  - Viga en Cantilever.carga distribuida.....132
  - Viga en Cantilever.carga triangular.....136
  - Cuerpo formado por dos vigas.....139
- \* Ejercicio Complementario.....142
- \* Ejemplo Complementario.....151

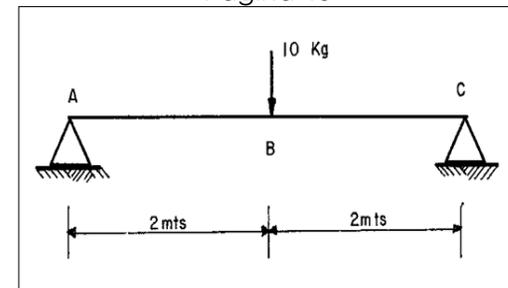
**CAPÍTULO V..... 155**

# ÍNDICE GRÁFICO

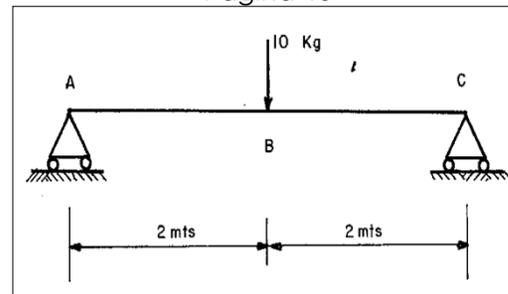
Página 40



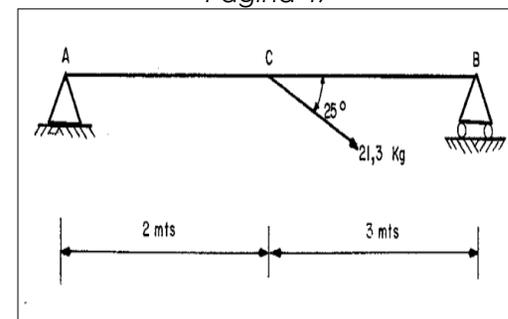
Página 45



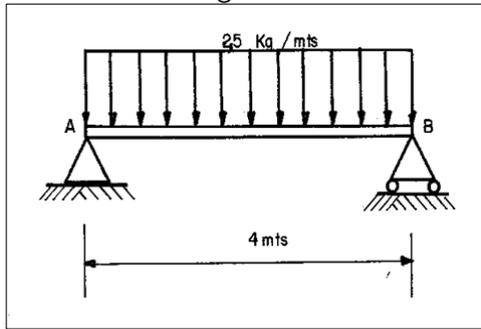
Página 46



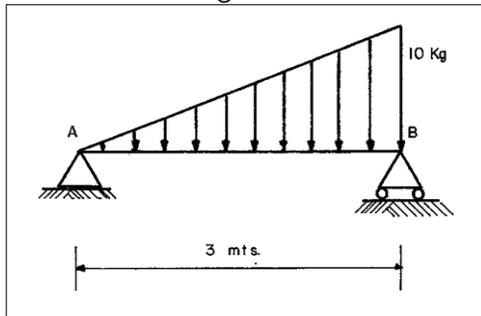
Página 47



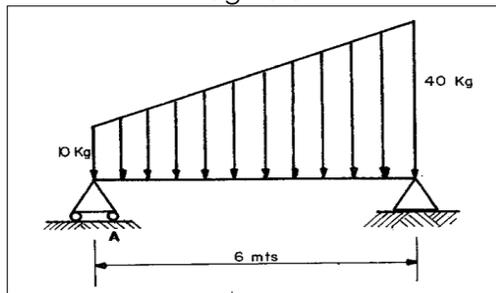
Página 50



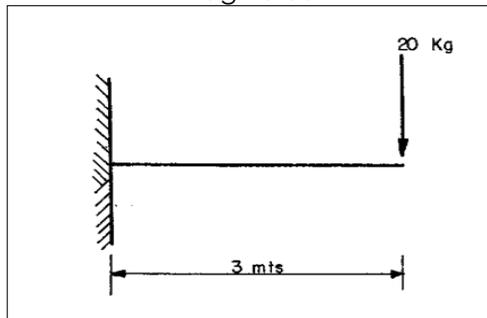
Página 52



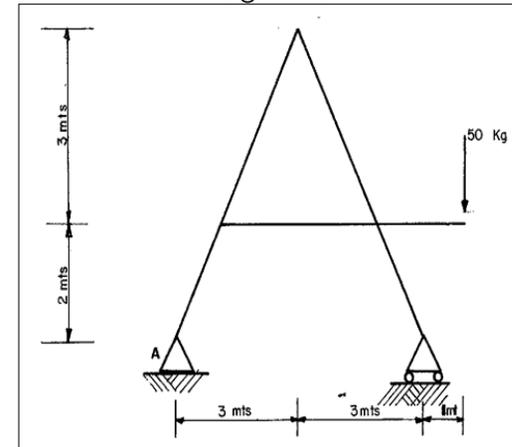
Página 54



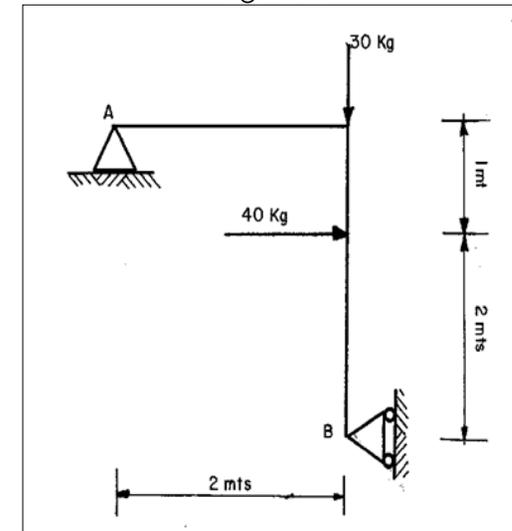
Página 56



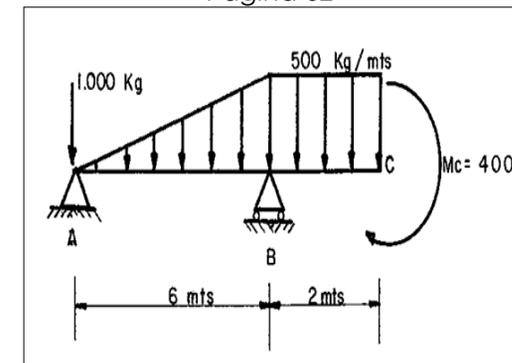
Página 58



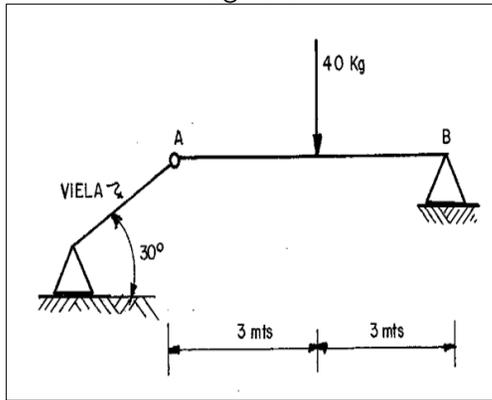
Página 60



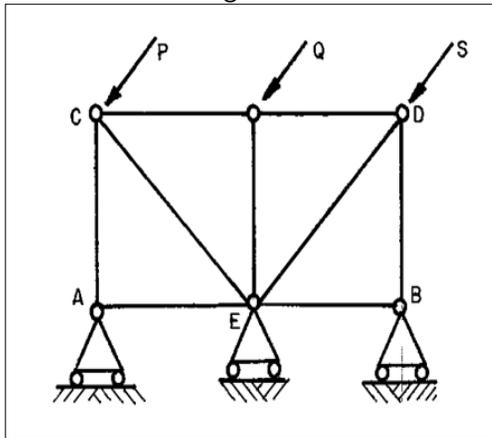
Página 62



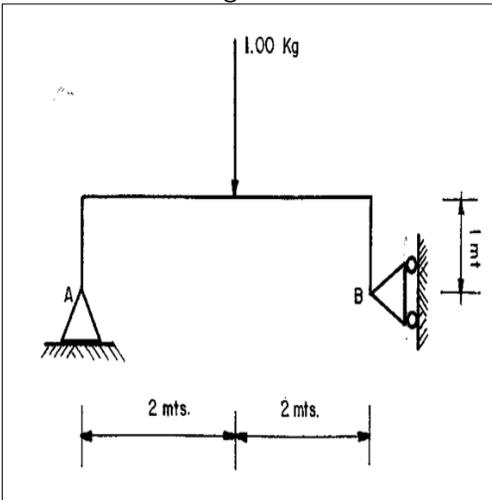
Página 64



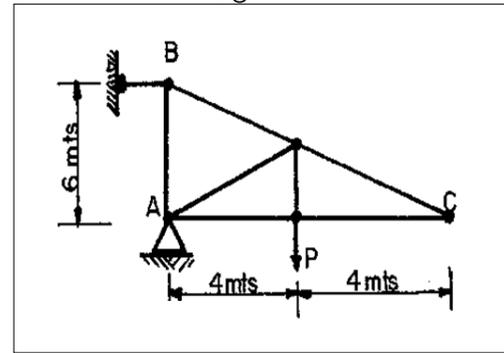
Página 67



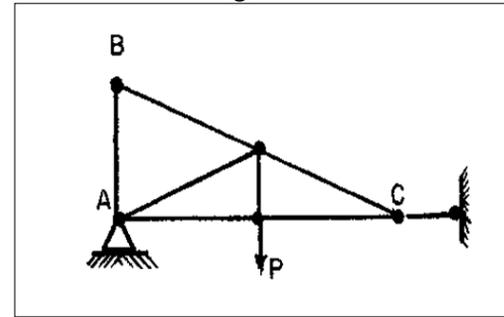
Página 70



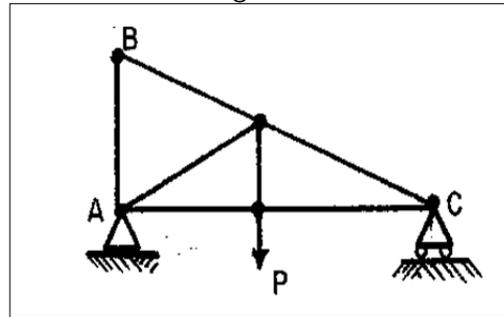
Página 74



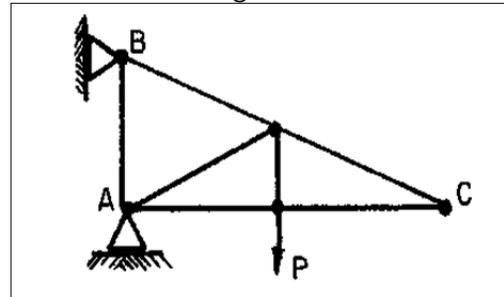
Página 75



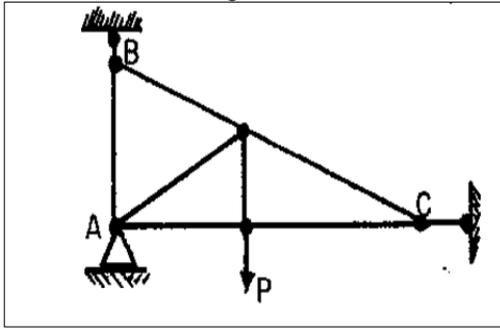
Página 76



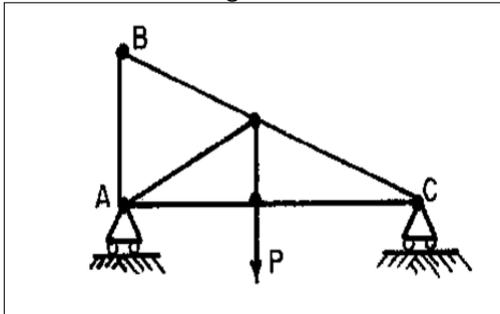
Página 77



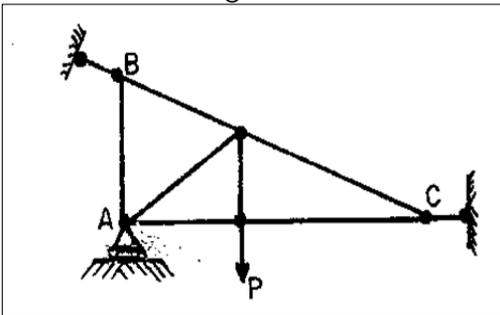
Página 79



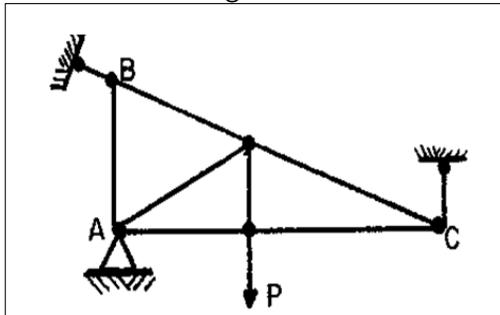
Página 80



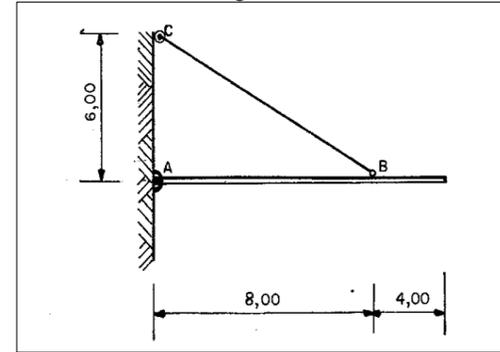
Página 81



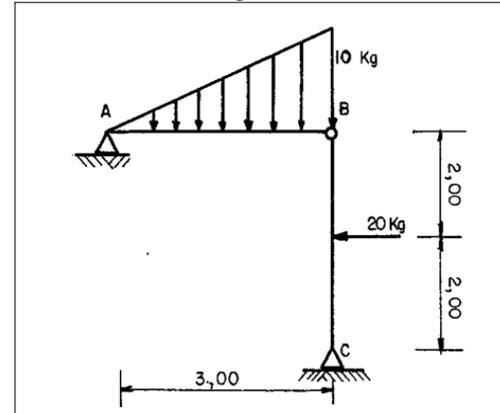
Página 82



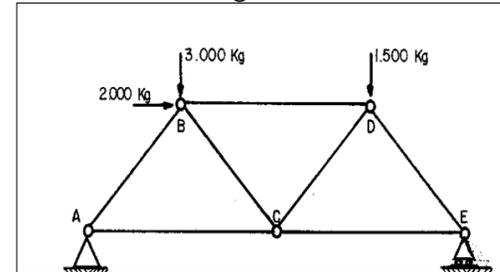
Página 83



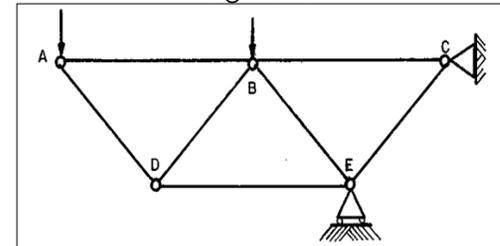
Página 89



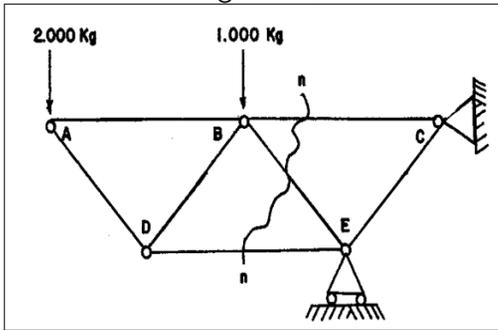
Página 96



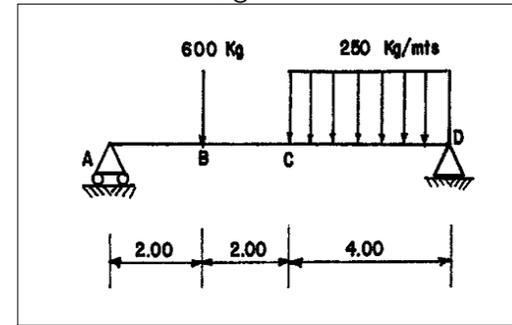
Página 104



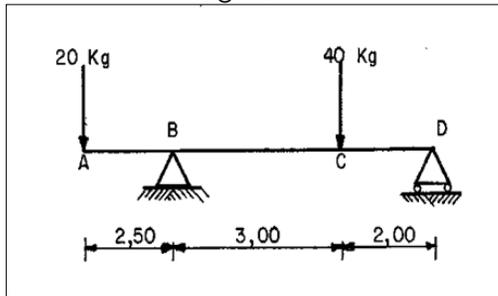
Página 113



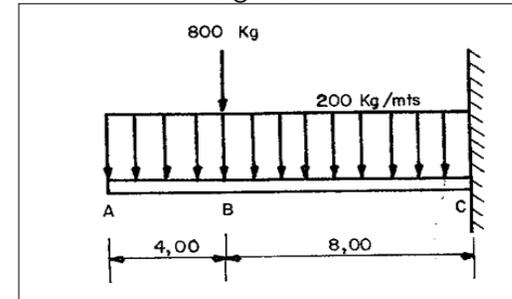
Página 127



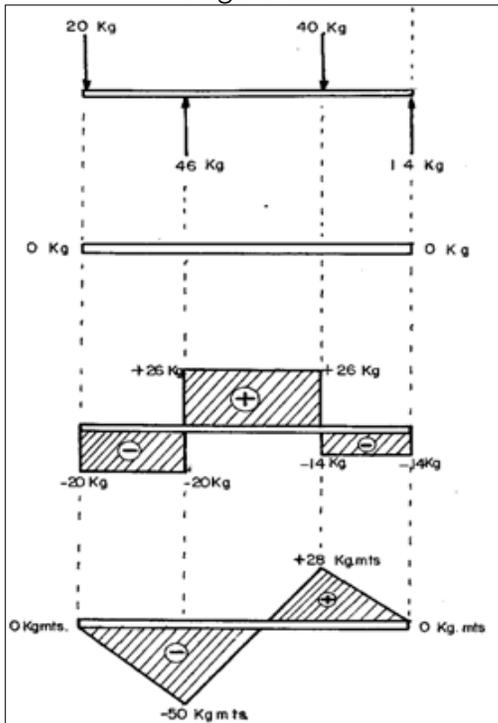
Página 119



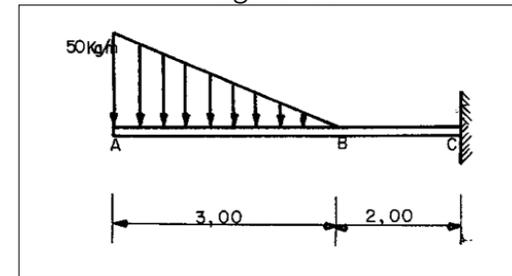
Página 132



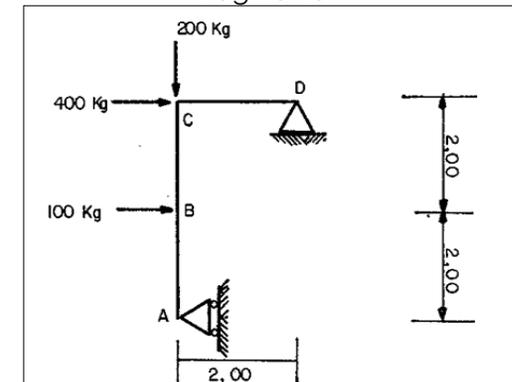
Página 126



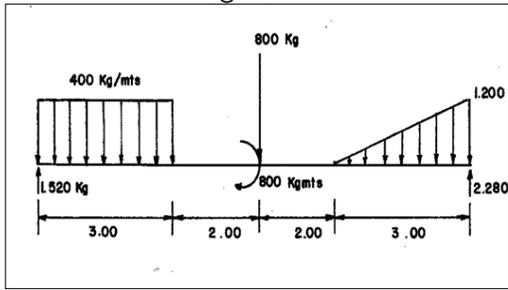
Página 136



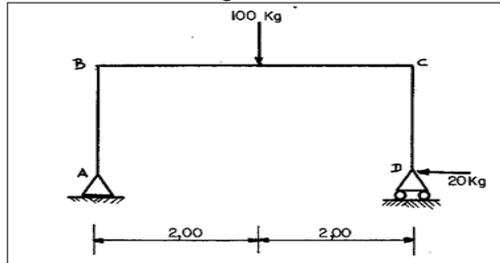
Página 139



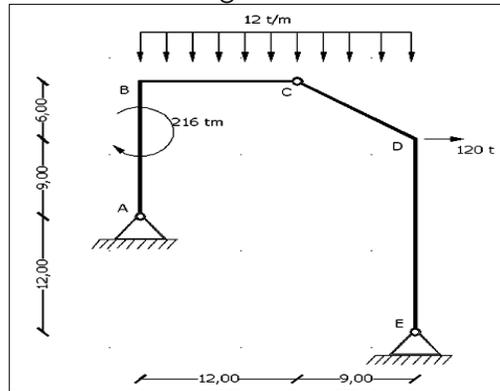
Página 142



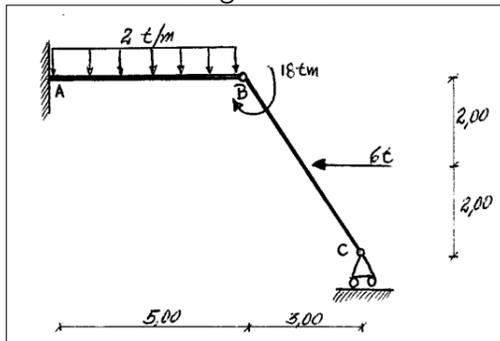
Página 151



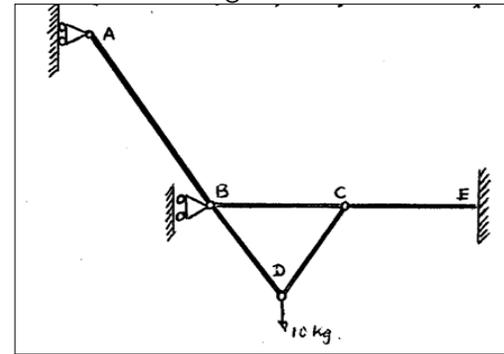
Página 155



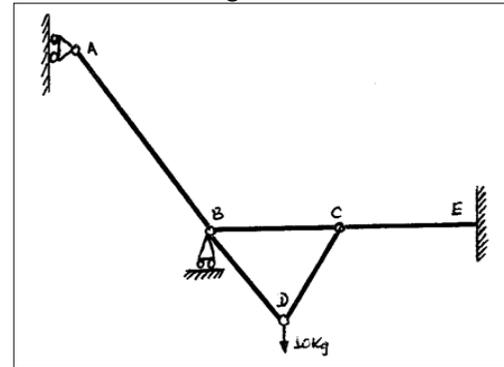
Página 166



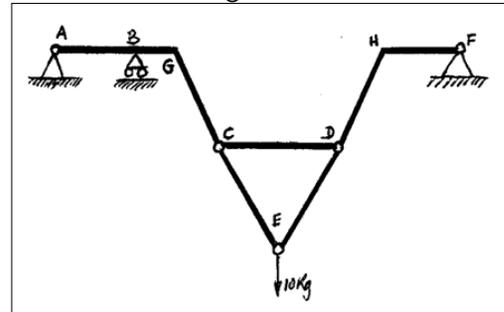
Página 169



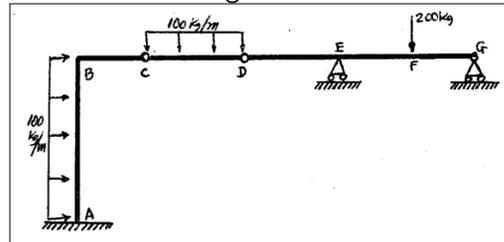
Página 170



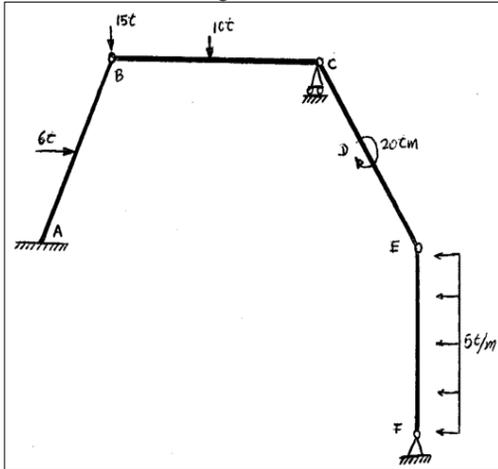
Página 175



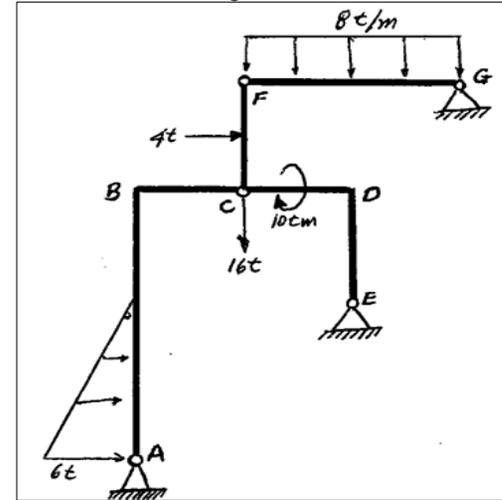
Página 180



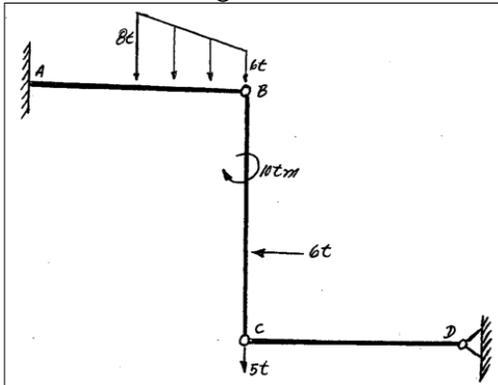
Página 185



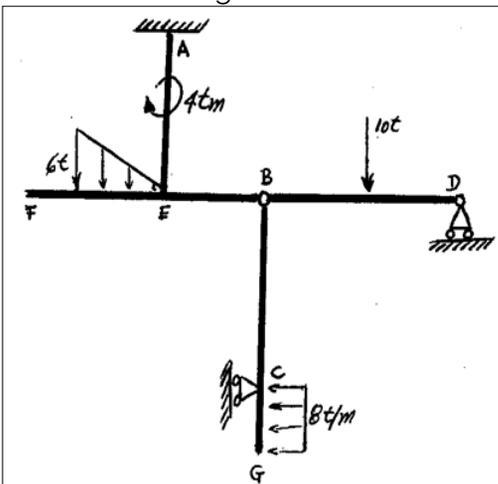
Página 195



Página 188



Página 191



El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendaciones a la siguiente dirección

**[martilloatomico@gmail.com](mailto:martilloatomico@gmail.com)**

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.