# RELACIONES DE DIVISIBILIDAD ASOCIADAS AL MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y AL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE DOS NÚMEROS NATURALES.

**Julián Darío García Henao**

**Lyda Johana Monsalve Quiceno**

**Lina Marcela Patiño Londoño**

**Trabajo investigativo para optar el título de**

**Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemática**

**John Jairo Múnera Córdoba**

**Asesor**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**Medellín, Colombia**

**2009**

**AGRADECIMIENTOS.**

A la Institución Educativa María Auxiliadora por brindarnos la oportunidad de realizar nuestra práctica pedagógica.

A nuestro asesor John Jairo Múnera por orientarnos a lo largo del proceso y por ayudarnos a progresar en nuestra labor docente.

A Maria Fernanda, Yuliana y Andrés por haber sido partícipes y actores de este trabajo investigativo.

# CONTENIDO

INTRODUCCIÓN..... 5

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA..... 8

2. MARCO TEÓRICO..... 15

2.1. ELEMENTOS HISTÓRICOS DE LA DIVISIBILIDAD ..... 15

2.2. IMPORTANCIA DE LAS RELACIONES DE DIVISIBILIDAD ..... 19

2.3. TEORÍA APOE..... 23

2.4. ALGORITMOS ESTEREOTIPADOS..... 28

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN ..... 32

3.1. PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN. ..... 32

3.2. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS UTILIZADOS EN LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN. ..... 35

3.2.1. OBSERVACIÓN PARTICIPANTE. ..... 35

3. 2.2. ENTREVISTAS EN PROFUNDIDAD..... 36

3. 2. 3. DIARIO DE CAMPO. ..... 36

3.2.4. FOTOS..... 37

3. 2.5. REGISTROS FÍLMICOS. ..... 37

3.2.6. ACTIVIDADES DE AULA. ..... 37

4. CATEGORIAS EMERGENTES ..... 46

4.1. EL CÁLCULO DE MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO DESDE ESTRATEGIAS ESTEREOTIPADAS LIMITAN LA CONSTRUCCIÓN DE RELACIONES DE DIVISIBILIDAD ..... 46

4.2. UN PRIMER ACERCAMIENTO A RELACIONES DE DIVISIBILIDAD DESDE EL CÁLCULO DE DIVISORES DE UN NÚMERO ..... 58

4.3. DEPENDENCIA DE OPERACIONES ALGORITMICAS PARA EL CÁLCULO DE MÚLTIPLOS Y DIVISORES ..... 63

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES ..... 74

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS ..... 77

7. ANEXOS ..... 79

# INTRODUCCIÓN

En el contexto escolar la enseñanza de la divisibilidad se ha limitado a la aplicación de algoritmos y a la memorización de fórmulas, dejando de lado las relaciones existentes entre números, lo que imposibilita al estudiante reflexionar sobre lo que hace, para poderlo aplicar en diferentes situaciones, tanto dentro del ámbito escolar como en su vida diaria.

La enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad, implica tener una mirada estructurada de los conceptos, para que el estudiante reconozca las relaciones existentes entre múltiplo, factor y divisor, y lograr una mejor comprensión de los mismos, dejando de lado la actitud de valerse de la memorización de algoritmos y definiciones para resolver los talleres.

La finalidad que se ha trazado con la investigación, es la de indagar qué tipo de relaciones de divisibilidad establecen los estudiantes al abordar problemas de máximo común divisor y mínimo común múltiplo, analizando sí en los diferentes procedimientos y estrategias que realizan los alumnos, establecen algún tipo de conexión entre los conceptos “ser múltiplo de” y “ser divisor de”, o si por el contrario los ven como elementos separados.

Este trabajo se realizó en la Institución Educativa María Auxiliadora del municipio de Caldas (Ant), con 45 estudiantes del grado 6º, durante un año y medio, donde se observó la forma como los educadores del área de matemáticas dictaban las clases, además, de tener la oportunidad de convertirnos en docentes, preparar las clases y aplicar estrategias didácticas, lo que posibilitó analizar dificultades para el continuo mejoramiento de la labor docente.

La investigación realizada es de corte cualitativo, empleando el estudio de casos, como metodología. Se seleccionaron tres estudiantes para el análisis de resultados, Andrés Soto García, María Fernanda Giraldo Escobar, Yuliana Echavarriaga Acevedo, a quienes se les hizo un seguimiento continuo, tanto dentro como fuera del aula, analizando el por qué y el cómo de sus respuestas.

El desarrollo del trabajo está estructurado en cinco capítulos:

En el primer capítulo titulado: planteamiento del problema, se realiza una justificación sobre la pertinencia e importancia de la investigación. Además, se muestran los diferentes trabajos que se consultaron sobre el tema y por último se presenta la pregunta y el objetivo que orientó el estudio.

En el segundo capítulo se exponen los referentes teóricos que apoyan la investigación. Partiendo de los elementos Históricos de la divisibilidad, la importancia de las relaciones de divisibilidad, teoría APOE, y algoritmos estereotipados. Los autores abordados son Samuel Bodí et al, Rina Zazkis, Modesto Sierra et al y José Antonio Fernández Bravo.

El tercer capítulo da cuenta del diseño metodológico de la investigación, en éste se realiza una caracterización de los tres participantes y se explican los diferentes instrumentos utilizados, para la recolección de la información.

En el cuarto capítulo se analizan los resultados, a partir de tres categorías que emergieron de la información recogida, en las cuales se intenta dar solución al objetivo y al problema de la investigación. Para lograrlo se realiza una triangulación entre el marco teórico, las voces de los participantes y las voces de los autores del trabajo.

En el quinto capítulo se presentan las conclusiones que surgieron de los análisis de los resultados y que sintetizan el trabajo, además se presentan algunas recomendaciones que pueden servir de apoyo para nuevas investigaciones y para fortalecer la labor de los docentes en ejercicio.

# 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

La educación matemática en Colombia ha sufrido múltiples cambios, así lo muestra los documentos para tal fin como la Renovación Curricular de la década de los ochenta, los Lineamientos Curriculares de 1998 y, los Estándares Básicos de Matemáticas del 2006, vigentes en el sistema educativo colombiano, los cuales ofrecen elementos de orden didáctico para el mejoramiento de las metodologías de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Desde las interacciones en el aula, se puede observar que la metodología de las clases de matemáticas, no ha cambiado sustancialmente en relación con la de aquellos tiempos, en que lo más relevante era la enseñanza de fórmulas y algoritmos, además, que sus contenidos eran impartidos en forma fragmentada, privando a los estudiantes de comprender su estructura y de observar las relaciones que se dan entre los conceptos matemáticos.

En el caso particular de la divisibilidad, los métodos de enseñanza tradicional han sido un obstáculo para el establecimiento de relaciones entre los conceptos de múltiplo, divisor y factor, y para la comprensión significativa de los mismos dentro de la teoría de números. Tal como lo afirma Sierra et al, 1997:

*Con la corriente de la matemática moderna, tanto la geometría como la teoría de los números quedaron relegadas en los currículos de las matemáticas en la enseñanza primaria y secundaria, y aunque la geometría volvió a recuperar su protagonismo, no ocurrió lo mismo con la teoría de números, quizá por no haberse encontrado un término medio entre su presentación como un simple recetario o su enseñanza más profunda con las dificultades que ello conlleva. (p.11).*

También se ha encontrado, que las investigaciones realizadas sobre la divisibilidad son pocas y las existentes tienen su origen en países como España, Estados Unidos y Canadá, la mayoría se enfocan en indagar la forma cómo los estudiantes interactúan con los conceptos asociados a la divisibilidad y las relaciones que se tejen entre los mismos, encontrando que los estudiantes establecen relaciones muy elementales entre números naturales, hecho este que nos motivó a realizar un trabajo sobre el tema, a nivel local.

A continuación, se mencionan algunos trabajos consultados al respecto que permiten acercarnos al estado del tema y a ver la relevancia sobre el trabajo de investigación que hemos abordado.

El libro de Didáctica de las matemáticas llamado "*Divisibilidad"* cuyo autor es *Modesto Sierra* et al, plantea como debe ser la enseñanza y el aprendizaje de distintos conceptos relacionados con la divisibilidad, partiendo de la idea que para

introducir cualquier concepto se debe iniciar con una situación motivadora, que permita un acercamiento a dicho aprendizaje.

Según los autores, los alumnos deben aproximarse a la construcción del concepto matemático de múltiplo y divisor a través de este tipo de actividades, ya que son situaciones contextualizadas frente a la realidad de los niños. Igualmente descubrir, que para calcular los múltiplos de un número, se multiplica dicho número por la serie de números naturales y que la serie de los múltiplos de un número es ilimitada.

Se plantea también, que las dificultades presentadas por los estudiantes al establecer relaciones entre múltiplos y divisores, se debe a que no han comprendido bien las conexiones entre la multiplicación y división. Expresan además, que el múltiplo presenta menos dificultad que el concepto de divisor por la reversibilidad que lleva involucrado.

Otro aspecto que confunde a los alumnos es la aparente contradicción entre mínimo y múltiplo, máximo y divisor, por ejemplo, al identificar que los múltiplos son mayores o iguales que el número, no se entiende el por qué de mínimo común múltiplo, es decir, por qué se habla de mínimo si los múltiplos son mayores o iguales al número. Lo mismo sucede con los divisores de un número puesto que éstos son menores o iguales que el número y se habla del máximo común divisor.

La segunda fuente consultada es: "*La Comprensión de la Divisibilidad en N. Un Análisis Implicativo" de Samuel D. Bodí, Julia Valls, Salvador Llinares*. En este

trabajo de corte investigativo, se analiza la comprensión de estudiantes de secundaria, sobre la divisibilidad en los naturales y la relación de dicha comprensión con los modos de representación decimal y factorial de un número. Las actividades planteadas demandaban a los estudiantes movilizar sus ideas sobre las diferentes acepciones léxicas así como los significados dados a sus equivalencias (*P es divisor de Q ↔ Q es múltiplo de P ↔ P es un factor de Q ↔ Q es divisible por P).*

La investigación anterior llegó a la conclusión que en la comprensión de la divisibilidad es determinante, el uso que los estudiantes hacen de los diferentes modos de representación de los números, factorial y decimal, además, resalta la importancia de la unicidad de la descomposición factorial para la comprensión de la divisibilidad.

También se revisó la tesis doctoral titulada: "*Análisis de la Comprensión de Divisibilidad en el Conjunto de los Números Naturales". De Samuel David Bodí Pascual*. Esta investigación se centró en caracterizar la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre divisibilidad, teniendo como referente teórico la teoría de APOE[1] (Dubisky, 1991; Asiala 1996) y los tres niveles de desarrollo del esquema intra, inter, trans (Piaget y Garcia, 1982; Clark et al 1997), éstas teorías consisten en estudiar la comprensión que tienen los estudiantes sobre algún concepto, establecida ésta por diferentes niveles de acuerdo a las actuaciones del estudiante.

[1] Teoría de Acción-Proceso-Objeto-Esquema.

La acción, predomina en los estudiantes de secundaria, es decir, tienen una comprensión procedimental de los conceptos, esto se debe a que la mayoría de alumnos entrevistados manifiestan una disposición de carácter operativo de las ideas de múltiplo y de divisor, asociándolos a las operaciones de multiplicar y dividir, la mayoría de los estudiantes que vinculan la idea de ser divisible a la representación decimal del número, realizan la operación de dividir y comprueban si el resultado es exacto, sin establecer la relación: ***b es divisible por a entonces a es un factor de b.***

Otro resultado fue el desconocimiento que tienen los estudiantes sobre los criterios elementales de divisibilidad, dado que, sólo pueden calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor por un procedimiento algorítmico, teniendo en cuenta que estos conceptos son los que más confunden y desconocen su significado.

En la investigación se resalta la importancia de los modos de representación, y la idea de unicidad de la descomposición de factores primos de los números naturales, puesto que, estos conceptos influyen en la comprensión de la divisibilidad. Al analizar la obtención de divisores y múltiplos de un número mediante el uso de descomposición de factores primos, ha sido una de las características que ha posibilitado determinar el nivel de desarrollo de comprensión de la divisibilidad.

Otra investigación consultada es "*Múltiplos, Divisores y Factores*: *Explorando la Red de Conexiones de los Estudiantes" de Rina Zazkis*. El interés central de este

estudio son los conceptos fundamentales de múltiplos, divisores y factores; los significados que construyen los estudiantes sobre estos tres conceptos, así como los vínculos entre las tres nociones y las conexiones con otros conceptos de la teoría elemental de números, tales como números primos, descomposición en números primos y divisibilidad.

En el ámbito local se encontró un trabajo titulado **"***Movilización de Pensamiento Numérico desde las Relaciones de Divisibilidad en la Educación Básica Primaria*", sin embargo, el enfoque del trabajo no le aporta a nuestra investigación dado que en éste se trabajó la variación de los conceptos asociados a la divisibilidad y su principal objetivo era validar una estrategia de intervención pedagógica en la clase de matemáticas

Los diferentes estudios encontrados sobre divisibilidad, ya sean de corte didáctico o investigativo, centraron la mirada en caracterizar la comprensión que tienen los estudiantes sobre la divisibilidad, y en examinar cómo debe ser la enseñanza de los diferentes conceptos involucrados en ésta, y las dificultades que se presentan en los estudiantes, dejando de lado el análisis de relaciones de divisibilidad, y la construcción de estas por parte del alumno, a cambio de la costumbre del docente de dar definiciones sobre estos conceptos.

Por lo anterior vemos que es necesario realizar una investigación, donde se pueda determinar qué tipo de relaciones de divisibilidad establecen los niños; tema que es de especial interés a nivel de la matemática escolar.

A partir de las teorías encontradas y las observaciones en el trabajo del aula, se evidencia la necesidad de indagar la forma como los estudiantes abordan actividades asociadas a los conceptos Máximo común divisor y mínimo común múltiplo; y poder documentar desde allí el tipo de relaciones que construyen, por lo tanto surge la pregunta que motivó el trabajo de investigación: **¿Qué relaciones establecen los estudiantes al abordar situaciones asociadas al máximo común divisor y al mínimo común múltiplo de dos números naturales?**

El objetivo de la investigación es **Analizar relaciones que los estudiantes tejen al resolver situaciones asociadas al máximo común divisor y al mínimo común múltiplo de dos números naturales.**

# 2. MARCO TEÓRICO.

## 2.1. ELEMENTOS HISTÓRICOS DE LA DIVISIBILIDAD

Indagar acerca de la divisibilidad dentro de la historia e investigación matemática, conduce a una revisión de los trabajos realizados por algunos matemáticos e investigadores que han orientado el desarrollo del tema a través del tiempo, permitiendo la recopilación de teorías válidas sobre los conceptos construidos sobre el mismo y que han aportado al crecimiento del conocimiento matemático. Esto se logra partiendo de la revisión bibliográfica encontrada, desde matemáticos antiguos hasta los teóricos contemporáneos.

Se presenta un recorrido histórico acerca de algunos trabajos e investigaciones importantes que ayudaron a la construcción de la divisibilidad, tomando como punto de partida a Euclides, que define número, divisor y múltiplo en términos de magnitudes, hasta Gauss con su trabajo de la divisibilidad con números enteros.

Con base en la tesis doctoral de Samuel Bodí (2006), encontramos que en la antigüedad, la divisibilidad se desarrolla al resolver problemas en la agricultura y la ganadería, y su dependencia y relación con las estaciones climáticas y ciclos lunares que hizo que se desarrollaran distintos tipos de calendarios.

Hasta principios del siglo XIX los objetos principales de las matemáticas estaban constituidos por lo números, las magnitudes y las figuras; igualmente, el estudio de los múltiplos, de los divisores y de la descomposición factorial de los números naturales ha constituido un capitulo fundamental de la Aritmética desde el comienzo de la Matemática.

Entre los matemáticos destacados de la Antigüedad se encuentra Euclides de Alejandría (año 300 a.C.), en cuyos "Elementos", recoge de manera axiomática el saber matemático de su tiempo. Los tratados de Aritmética se encuentran en los libros VII, VIII y IX.

Euclides en su libro VII, mediante 22 definiciones, establece los conceptos de:

- **"Número"** -"Un número es una pluralidad compuesta de unidades" (Definición 2**)** "Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que hay, se llama una" (Definición 1**).** El "número" para Euclides es una magnitud.

- **"Parte"** (Divisor)- "Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor"- **"Partes"** (no divisor)- "Cuando no lo mide". **"Múltiplo"**-" Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor"- (Definiciones 3, 4 y 5, respectivamente).

- Clasifica los números en pares e impares*;* parmente par e impar; imparmente (desde las definiciones 6 a 10). Número **"primo"**- "el medido por la sola unidad"- Números **"primos entre sí"**- "los medidos por la sola

unidad como medida común”- (Definiciones 11 y 12, respectivamente). Número **“compuesto”**- “es el medido por algún número” – Números **“compuestos entre sí”** – “son los medidos por algún número como medida común”- (Definiciones 13 y 14, respectivamente). Por último, tras establecer que “un número multiplica a un número cuando el multiplicado se añade a sí mismo tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número”.

Para ese entonces, las definiciones de número, divisor y múltiplo, fueron realizadas en términos de magnitudes.

> *Los griegos “consideraron razones (P: Q) entre magnitudes o proporciones, pero conceptualmente no pudieron formar el producto P x L entre magnitudes genéricas, noción que nunca definieron. Generalmente, entendieron el “producto” de dos longitudes como un área o un volumen si uno de los factores era una longitud y el otro un área, si bien estos productos nunca constituyeron actos reflexivos y conscientes”. Bochner, 1991, citado por Bodí (2006)*

Lo anterior muestra la dificultad de los griegos, quienes no alcanzaron a definir el producto como una operación entre dos magnitudes, tampoco concibieron el producto de los números reales, lo que imposibilitó construir el Teorema Fundamental de la Aritmética, pues no lograron separar la existencia de las matemáticas de la posibilidad de su constructibilidad.

A partir del siglo XVI la teoría de la divisibilidad se amplía a otros conjuntos, introducidos por necesidades tecnológicas, científicas y mercantiles, el primero en

lograrlo es Stevin, quien en 1634 publica un libro con la extensión del algoritmo de Euclides al cálculo del máximo común divisor de dos polinomios.

Los trabajos de Fermat en el siglo XVII, sobre la Teoría de Números, destacando la teoría de la divisibilidad, los números primos, el tratamiento de los números perfectos, números amigos y cuadrados mágicos.

Euler en 1770 intentó ampliar el concepto de divisor más allá de los números enteros y los polinomios, encontrando que en esa extensión no es posible conservar todas las propiedades, en especial, las de la existencia del máximo común divisor y de la unicidad de la descomposición en factores primos.

Hasta el siglo XIX con Gauss, la teoría de la divisibilidad se desarrolló en el campo de los números enteros. En su trabajo se incluía el Teorema Fundamental de la Aritmética para el Dominio de Integridad de los números enteros, que indica que *todo número entero puede expresarse como un producto finito de números primos, en el que algunos factores pueden repetirse, y tal que su representación es única.*

De acuerdo con Bodí (2006) la Teoría Elemental de Números abarca desde el siglo XX un amplio espectro en el ámbito de las matemáticas, destacando el estudio de la estructura multiplicativa y la divisibilidad en el conjunto de los números naturales, los conceptos de múltiplo, divisor, factor, ser divisible, criterios de divisibilidad; divisores y múltiplos comunes; el máximo común divisor, el mínimo común múltiplo; número primo, número compuesto, y el Teorema Fundamental de la Aritmética.

## 2.2. IMPORTANCIA DE LAS RELACIONES DE DIVISIBILIDAD

La enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad han sido fuente de atención en la educación matemática, debido a la posibilidad que brinda de establecer relaciones entre los números. Por lo tanto, diversos autores han centrado sus trabajos en esta dirección, con el propósito de aportar a la comprensión de relaciones numéricas en este ámbito conceptual.

Según Sierra et al (1997), la teoría de la divisibilidad surge, esencialmente, para estudiar relaciones entre números, planteando la necesidad de la comprensión de los conceptos relacionados con ésta, partiendo de las relaciones que entre ellos se pueden tejer, lo que facilita examinar su aprendizaje en términos de la conexión entre los conceptos múltiplo, divisor y factor.

Investigaciones realizadas por Zazkis, 2001 y Brown et al. 2002, citados por Bodí (2006); ponen de manifiesto que un primer aspecto a considerar en el análisis de la comprensión de la divisibilidad en los Naturales[2] deberían ser las relaciones entre las distintas acepciones léxicas de la divisibilidad.

Dichas relaciones entre divisor, factor y múltiplo, pueden ser entendidas como una equivalencia entre estos conceptos, es decir, *si a es divisor de b, es porque b*

[2] En adelante nos referiremos a N, como el conjunto de los números naturales.

*es múltiplo de a. Asimismo si b es múltiplo de a, es porque b es divisible por a, siendo a un factor de b.* Comprendiendo como factor, todos los números que hacen parte la descomposición factorial de otro. Es decir, 210 puede ser expresado como 2 x 3 x 5 x 7, donde cada uno de estos números representa un factor del 210.

Según Zazkis, (2001) y Sierra et. al. (1997), los conceptos de divisor, factor y múltiplo pueden ser entendidos por los estudiantes de dos formas, la primera de ellas concibe los conceptos como una acción dentro de la multiplicación o la división, por lo tanto, los conceptos son vistos como roles dentro de las operaciones y por esta razón el estudiante no está tomando los conceptos como una relación entre números, puesto que, se está pensando en un procedimiento, y se reemplazan las relaciones de "ser divisor de" y "ser múltiplo de" por los procedimientos "dividido por" y "producto de" respectivamente.

Otra interpretación para estos conceptos es la de relaciones entre números, entendiendo un factor como "dados dos números naturales a y b, el número b se llama factor de a, si y sólo si, existe un número natural c tal que cxb=a" (Zazkis, 2001). Según esta autora, la definición de divisor y factor es la misma, puesto que en la teoría de números se perciben como semejantes y representan una relación entre números naturales. De otra manera "un número natural a es múltiplo de otro número natural b cuando existe un número natural c tal que a= b xc" (Sierra et al, 1997. Pág. 67)

Las dificultades que se han presentado en la comprensión de la divisibilidad son mencionadas por: Zazkis (2001), quien expresa que el concepto de múltiplo aparece como el más problemático de los tres (divisor, factor y múltiplo), puesto que, se suele confundir con la definición de producto, y con el concepto de factor, lo cual identifica la dificultad para comprender los conceptos de múltiplo y factor, y el reconocimiento del enlace entre múltiplo, factor y divisor.

La misma autora manifiesta que:

> *La palabra múltiplo nos trae la idea de multiplicación. Entonces, al pensar en una multiplicación de números, hay dos posibles roles para sus elementos: un factor y un producto. Esto puede explicar porque la mayoría de los estudiantes vieron al múltiplo como cualquiera de esos roles. (2001)*

Igualmente el concepto de factor según Zazkis, pareció ser el menos problemático de los tres (divisor, factor, múltiplo), sin embargo, los estudiantes tenían una comprensión incompleta del mismo, dado que la mayoría lo asociaban a la operación de la multiplicación y no lo entendían como una relación entre números.

Asimismo, Zazkis plantea que el concepto de divisor es problemático, dado que se le atribuyen dos papeles a su nombre, por un lado se le atribuye un papel dentro de la división y por el otro es visto como una relación entre números, por lo que la mayoría de los estudiantes lo asocian a su rol dentro de la división. En

este sentido, Sierra et al (1997) afirma lo mismo y agrega que esto dificulta a los educandos su comprensión.

Igualmente Sierra et al, expresa que se presenta dificultad en la obtención de los divisores de un número, ya que a pesar de ser finitos, estos no se encuentran con tanta facilidad, puesto que no hay fórmulas que garanticen el número total de ellos, y la forma más utilizada para encontrarlos es por medio de la división, pero en muchos casos los estudiantes no las realizan en su totalidad.

Otro problema que plantea Sierra et al, es que cuando los estudiantes no han comprendido la equivalencia que existe entre $a \times b = c$, y $c \div a = b$, no identifican que si c es múltiplo de a y b, entonces éstos son divisores de c, ocasionando que cuando se intenta resolver problemas sobre divisores, donde sus enunciados se fundamentan en aspectos relacionados con la idea de múltiplo y viceversa, no sean comprendidos por los estudiantes.

Otro elemento que hace parte de las relaciones asociadas a la divisibilidad, son el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números naturales, entendidos respectivamente por Sierra et al (1997), como el mayor de sus divisores comunes y el menor de los múltiplos comunes de ambos números distintos de cero.

Estas nociones presentan diferentes dificultades entre las cuales se encuentran "la aparente contradicción entre mínimo y múltiplo y, máximo y divisor. Cuando en un problema se habla de máximo o mayor, los estudiantes automáticamente lo relacionan con múltiplo, por el contrario, cuando se habla de mínimo o menor lo

relacionan con divisor" (Sierra, et al 1997, pág. 70). Esto se debe a que en los números naturales cuando se multiplica por un número este siempre va a crecer, por el contrario cuando se divide un número en el conjunto de los naturales, se fragmenta en partes más pequeñas.

Otra de las dificultades que se presenta al abordar la divisibilidad según Bodí (2006), es la de tomar la descomposición factorial como un procedimiento para hallar el máximo común divisor y mínimo común múltiplo, sin mirar las relaciones que se pueden establecer a partir de ésta, como reconocer que los factores de un número son divisores de él, y que el número es múltiplo de sus factores.

## 2.3. TEORÍA APOE.

La teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (teoría APOE), es desarrollada por Dubinsky(1991) y un grupo de investigadores (RUMEC)[3], está basada en una interpretación del constructivismo a partir de la adaptación de algunas ideas de Piaget, entre ellas la abstracción reflexiva, con la que se describe cómo construyen los individuos las estructuras lógico-matemáticas, Dubinsky (1991) citado por Bodí (2006), considera que este concepto "constituye una poderosa herramienta que dota a los investigadores de una base teórica para la comprensión del desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado". (2006, p. 67)

[3] Research in Undergraduate Mathematics Education Community

Desde Bodi (2006) se definen de manera breve las construcciones mentales: acción, proceso, objeto, esquema:

ACCIÓN.

Es la transformación de un objeto percibida por el individuo como externa, un ejemplo de una acción es cuando se realiza la división para determinar que un número es divisible por otro.

La acción es importante en la construcción de la comprensión, debido a que se realizan sobre objetos matemáticos dentro del ámbito de la experiencia del estudiante, es decir, a partir de las acciones, el sujeto puede adquirir elementos que le van a permitir establecer relaciones entre los conceptos matemáticos, en el caso particular de nuestra investigación, establecer relaciones de divisibilidad. Sin embargo, si esa acción no trasciende de la aplicación rutinaria a una comprensión de lo que se hace, puede convertirse en un obstáculo para la construcción del esquema de divisibilidad.

PROCESO.

Es la interiorización de una acción. Es una construcción interna, no necesariamente dirigida por un estímulo externo, es decir, “conforme la acción se interioriza a través de una secuencia de memorización de la acción y el reflejo de la misma, la acción ya no se maneja por influencias externas pues se vuelve una construcción interna llamada proceso” (Meel, 2003. P. 244)

OBJETO.

Un individuo reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso concreto, adquiere una conciencia de su totalidad, percibe qué transformaciones (ya sean acciones o procesos) pueden actuar en él y es capaz realmente de construirlas. Se dice, que el individuo reconstruyó aquel proceso como un objeto cognitivo.

ESQUEMA.

Es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados, consciente o inconscientemente, en una estructura coherente en la mente del individuo y que puede ser evocada para tratar una situación problemática de esa área de la matemática.

Pero como es señalado por Dubinsky y MacDonald (2001), citados por Bodí (2006), aunque la sucesión es descrita en forma lineal, en la construcción de un concepto, no necesariamente sucede así.

Bodí (2006), expresa que son muchas las investigaciones que utilizan como referente teórico la teoría APOE, mostrando con esto la importancia que tiene para caracterizar la comprensión de los estudiantes:

> *Acreditan la potencialidad del marco de la teoría APOE. La asunción de este marco permite a los investigadores obtener información sobre las características de los significados de los conceptos investigados y sobre*

*las características de la evolución de los mismos (desarrollo de la comprensión). Por otra parte la descomposición genética de un concepto permite identificar los mecanismos y formas de conocer que presentan los estudiantes del desarrollo del esquema del concepto matemático. La identificación de los elementos matemáticos y el tipo de relaciones establecidas entre ellos permite determinar los diferentes niveles de desarrollo del esquema del concepto. (Pág. 90).*

En este sentido Zazkis y Campbell (1996), citados por Bodí (2006), plantean que una descomposición genética[4] del concepto de divisibilidad, a través de un análisis hipotético de la manera en que la divisibilidad, entendida como una propiedad de los números, podría ser construido por un estudiante iniciando con la construcción de la divisibilidad como objeto conceptual, dando ejemplos específicos de divisores, como con números pequeños, tales como el 1, 2, 3, 4, 5. Es decir, se especifica cuándo estos números pueden ser divisores con ejemplos básicos, como cuando se expresa que el 2 es divisor de los números pares.

Luego el alumno realiza una operación, para comprobar que un número si es múltiplo o divisor, por ejemplo, cuando se desea garantizar que un número es divisor de otro, se realiza la división, y si la operación es exacta significa que sí lo es, igualmente ocurre con el múltiplo. Este proceso es denominado por Zazkis como una *acción.*

[4] Descomposición genética: Es el conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del individuo.

La *Acción* de dividir puede ser interiorizada por el estudiante convirtiéndola en un *proceso*, lo cual representa que la *acción* se piensa pero no se realiza, esto significa que el alumno, ya tiene claro cómo garantizar que un número sea múltiplo o divisor, sin la necesidad de realizar la *acción.*

Asimismo, los sujetos pueden invertir *procesos* con números particulares, para crear nuevos procesos de divisibilidad, por ejemplo cuando los estudiantes utilizan los criterios de divisibilidad 2 y 3 para inferir la divisibilidad del 6. O bien, sabiendo que la suma de los dígitos de un número natural es divisible por 3, implica que el mismo número sea divisible por 3, lo cual puede invertirse para determinar números divisibles por 3.

Luego, cuando se ve la divisibilidad como un *objeto,* es decir, cuando se reflexiona sobre las acciones aplicadas a un proceso concreto, siendo consciente del proceso, se podría entender el concepto de divisibilidad como una relación entre números naturales, independiente de la división o la multiplicación.

Y por último, cuando la divisibilidad se relaciona con otros elementos matemáticos tales como la factorización y la descomposición de los factores primos, se ha tematizado el *esquema de divisibilidad* para construir un objeto.

## 2.4. ALGORITMOS ESTEREOTIPADOS

La matemática escolar está marcada por la enseñanza de algoritmos como el de la multiplicación, el de la suma, el de Euclides o el método de Gauss para resolver ecuaciones, entre otros, sin embargo, este aspecto preocupa actualmente a la investigación, dado que es poco el interés por construir los algoritmos desde relaciones conceptuales significativas.

Fernández (2005) dice que se podría expresar vagamente, que un algoritmo es el conjunto de pasos a efectuar, necesariamente ordenados y finitos para lograr un objetivo. Igualmente expresa que esta definición no sólo es aplicable en la educación, sino a toda la vida, puesto que siempre que se desea realizar algo se siguen una serie de pasos que requieren de la observación, la experimentación y la lógica.

En la educación matemática también se demandan los procesos anteriores, puesto que sería imposible construir un algoritmo, sin el razonamiento lógico, sin el saber específico, y el pensamiento creativo. por ejemplo, al resolver un problema, primero se observa y se analiza qué algoritmo hay que aplicar, luego se experimenta con él y por último se considera si ésta puede ser una respuesta lógica para el enunciado del problema.

El mismo autor plantea que en la actividad escolar se distinguen dos tipos de algoritmos: el sumiso y el innovador. El algoritmo sumiso es aquel que se enseña en las aula de clases, pero no se entiende cuales son los elementos matemáticos que intervienen para su solución, y se convierte en un procedimiento que se realiza por mecanización y no por comprensión. En este mismo sentido Fernández plantea que un algoritmo sumiso es "el que se impone para realizar la acción operativa, –el pensamiento se somete a una aceptación de lo que hace sin entender por qué lo hace–, obligando al entendimiento del alumno que lo utiliza, a rendirse ante la rutina de su aplicación" (2005, p.32).

Algunos ejemplos de algoritmos sumisos son la solución de ecuaciones, dado que los alumnos hablan de que cuando un número esta sumando, pasa a restar y cuando está multiplicando pasa a dividir, en este caso el estudiante, no comprende que lo que está aplicando en realidad es la propiedad uniforme, y la propiedad inversa. Otro ejemplo es la descomposición de un número en factores primos, se observa cuando los estudiantes no reconocen, primero que es una descomposición única, y segundo que todos los factores son divisores de él.

El algoritmo innovador, es aquel que el estudiante aplica a partir de sus saberes previos, ya que no lo realiza utilizando los algoritmos propuestos por el docente, sino que él se ingenia procedimientos para su solución, en este sentido Fernández expresa que un algoritmo innovador "sería aquel que se aplica con

opción de decisión propia, comprendiendo y entendiendo, tanto lo que se hace como el por qué de ello.” (2005, p.33)

El quehacer matemático no se encuentra en la aplicación de los algoritmos, sino en todos los componentes intelectuales, que han posibilitado llegar a él, es decir, lo más importante es reconocer los elementos que permitieron construirlo, ya que así se entendería el por qué y para qué se utiliza. Puesto que si no ocurre esto se concebirá la actividad matemática como un proceso de repetición de fórmulas para llegar a un resultado.

Asimismo Fernández expresa que:

> *La matemática no está en la aplicación reiterada de movimientos, sino en la cantidad de ideas que se relacionan. Hay muchas formas de llegar al resultado si se comprende lo que se hace, y hay mil formas de multiplicar que se apoyan siempre en propiedades y relaciones matemáticas. El algoritmo, debería ser el punto de llegada y siempre como necesidad de abreviar el tiempo dedicado a la obtención del cálculo pedido (2005, p.33)*

Como lo expresa el autor, el algoritmo debería surgir por una necesidad de simplificación, es decir, se deberían dar bases para que el estudiante aplique sus saberes previos en la solución de situaciones matemáticas, con opción de decisión propia, lo cual posibilitaría que éste no se convirtiera en un algoritmo que se realizara por imposición.

Igualmente plantea que cuando se aplica un algoritmo sumiso, en muchas ocasiones, tardan más en conseguir el resultado que si lo intentan por sus propios métodos, que para las matemáticas escolares también son algoritmos válidos, y siempre innovadores. El aplicar un algoritmo sumiso imposibilita que el estudiante pueda ver diferentes métodos de solución, ya que siempre se está pensando en una secuencia para llegar a un resultado, la cual, en muchas ocasiones se realiza de forma equívoca.

> *Cuando a un niño que entiende lo que hay que hacer se le desafía convenientemente es capaz de crear originales formas de llegar al desenlace numérico. No ocurre lo mismo con los niños que se han visto sometidos desde sus primeras experiencias matemáticas a la penosa aplicación reiterada de algoritmos sumisos, en éstos disminuye considerablemente su capacidad para establecer relaciones y, paradójicamente, su cálculo mental se expresa con un rendimiento muy bajo, debido a que intentan imitar mentalmente la forma en que opera el algoritmo impuesto. Fernández (2005, p.34)*

Todo lo anterior significa que más que enseñar algoritmos a los estudiantes, hay que brindarles la posibilidad de que ellos los construyan, con el fin de que puedan ver a las matemáticas más allá de una simple aplicación de un algoritmo y pasen a comprenderla como una estructura llena de relaciones.

# 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El presente estudio se caracteriza por ser una investigación cualitativa; “La frase metodología cualitativa se refiere en su más amplio sentido a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable”. Taylor (1996, p. 19). En esta se emplea el estudio de casos como método de investigación, como lo expresa C.A.R.E. [5] y citado por L.A.C.E[6] (1999, p. 6) “El hecho de que existan muchas definiciones del caso significa que existe, en efecto solo una el estudio de casos es una lucha por alcanzar la madurez metodológica y personal”. Por lo tanto, este método fue seleccionado ya que no se busca establecer generalizaciones en una determinada población, sino estudiar un caso particular, tratar de interpretarlo y comprenderlo.

## 3.1. PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN.

Se seleccionaron tres estudiantes, Yuliana Echavarriaga Acevedo, Andrés Soto García, María Fernanda Giraldo Escobar, de la Institución Educativa María

[5] **C.A.R.E** . Centre for Applied Research in Education: Centro de Investigación aplicado en Educación.

[6] **L.A.C.E.** (Laboratorio para el análisis del cambio matemático)

Auxiliadora del municipio de Caldas, pertenecientes al grado sexto con edades comprendidas entre los 11 y 13 años.

*Caracterización de los tres estudiantes participantes en la investigación:*

*Yuliana*: estudiante tímida, quién no estaba como candidata para participar en la investigación, pero fue una de las participantes que mostró más interés en resolver los problemas, utilizando estrategias diferentes con respecto a sus compañeros, con buen razonamiento lógico, motivo por el cual fue seleccionada en consenso con los investigadores.

*Andrés*: primer alumno seleccionado para participar en la investigación, abierto al diálogo, con razonamientos y conjeturas acertados, primer estudiante en realizar los trabajos, descomplicado al momento de tomarle fotos, persona apreciada por el grupo, participa de los juegos, pero es atento en los momentos requeridos.

*María Fernanda:* seleccionada por tener un buen rendimiento reflejado en su informe académico, utiliza los algoritmos propuestos por el docente, lo cual se evidenció a lo largo de del proceso. Dispuesta a las fotos y las entrevistas, aunque un poco dependiente de sus amigas

## *3.2.* TÉCNICAS E INSTRUMENTOS UTILIZADOS EN LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN*.*

La información recolectada a través de entrevistas en profundidad, diarios de campo, fotos, actividades de aula y registros fílmicos fueron realizadas con aprobación de los participantes de la investigación y de sus padres, lo que se respalda con autorización firmada por los acudientes. (Ver Anexo)

### 3.2.1. OBSERVACIÓN PARTICIPANTE*.*

La observación participante fue una herramienta fundamental para el trabajo, se llevó a cabo durante las interacciones con los participantes de la investigación, en charlas extra clase, acompañada del carácter crítico y reflexivo de los investigadores. Como lo afirma Taylor "La observación participante es empleada para designar la investigación que involucra la interacción social entre el investigador y los informantes durante la cual se recogen datos de modo sistemático y no intrusivo". (1996, p. 31)

### 3. 2.2. ENTREVISTAS EN PROFUNDIDAD.

Las entrevistas como parte de las técnicas de recolección de información se utilizaron después de cada actividad, con el propósito de entrar en detalle con las soluciones que no permitían una interpretación clara y significativa. Como lo afirma Taylor (1996, p. 101), Las "entrevistas cualitativas en profundidad son reiterados encuentros cara a cara entre el investigador y los informantes, encuentros éstos dirigidos hacia la comprensión de las perspectivas que tienen los informantes respecto de sus vidas, experiencias o situaciones, tal como lo expresan en sus propias palabras".

### 3. 2. 3. DIARIO DE CAMPO.

El diario de campo es una buena herramienta para sistematizar la observación, por este motivo, es también parte fundamental de este estudio, se convierte en un material que permite a los docentes plasmar sus interpretaciones, reflexiones de sus vivencias y reconocer las dificultades en búsqueda de soluciones, además, facilitar un desarrollo sistemático y reflexivo de la labor docente. Como afirma Viviana González Maura, (2006, p. 9) "El valor del diario como instrumento potenciador de desarrollo profesional se manifiesta en la posibilidad que brinda al sujeto, a partir de la reflexión sistemática de su desempeño, identificar problemas

y plantearse posibles estrategias de solución dirigidas al auto-perfeccionamiento profesional y a la mejora de la práctica educativa".

### 3.2.4. FOTOS.

Las fotos sirvieron para plasmar momentos y objetos que fueron relevantes para el proceso de investigación, además para mostrar al lector del trabajo una imagen de los participantes de la investigación.

### 3. 2.5. REGISTROS FÍLMICOS.

Los registros fílmicos se realizaron para no perder de vista ningún detalle que se presentara en el aula de clase, siendo soporte para reconocer en los diálogos con los estudiantes, formas de razonar, además, sirven de apoyo para el análisis de los resultados, ya que cuando los maestros observan y dialogan con algunos alumnos, otros pueden hacer aportes que sean relevantes en el momento

### 3.2.6. ACTIVIDADES DE AULA.

Se presentaron una serie de actividades referentes al uso de conceptos sobre máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números naturales, que

servirán para indagar si los estudiantes establecen las relaciones "ser múltiplo de" y "ser divisor de".

La *Actividad Nº 1*, fue diseñada con el fin de ubicar el problema dentro del contexto del niño. La situación apunta a analizar los diferentes procedimientos que realizan los estudiantes en la solución de problemas asociados a la divisibilidad para indagar las relaciones existentes entre números naturales, que pueden establecer los sujetos de la investigación.

**INSTITUCION EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA**

**Alumno:**_____

**Alumno:**_____

**ACTIVIDAD Nº 1**

Sebastián tiene 36 confites y 24 bolas de chicle. Él ha decidido compartir estos dulces con sus amigos. Para su repartición se ha puesto unas extrañas condiciones empacarlos en bolsas, de modo que solo le toque a cada amigo, confites o bolas de chicle, también quiere darle a cada uno la misma cantidad de dulces, y la mayor posible, con la idea de economizar bolsas. ¿Cuántos dulces quedaran en cada bolsa? ¿Cuántas bolsas necesitará Sebastián?

_____

¿Existe alguna relación entre el número de confites que quedó en cada bolsa y el 36? Explique

¿Existe alguna relación entre el número de confites que quedo en cada bolsa y el 24? Explique

¿El número de confites que quedó en cada bolsa que vendría a ser respecto a los números 24 y 36? Explique

_____

¿Existen otras posibilidades de empacar los dulces de Sebastián, sin mezclarlos, de modo en que cada bolsa quede la misma cantidad, así no se economicen bolsas? De ser así escriba todas las posibilidades

La actividad consta de cinco preguntas, en la primera se indagan las diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes y si éstas permiten vislumbrar

relaciones de divisibilidad, la segunda, tercera y cuarta, se realizaron con el fin de observar si los alumnos asocian los números encontrados en la primera pregunta con los datos de los ejercicios e indagar si establecen relaciones de divisibilidad. En la quinta se pregunta por todas las posibilidades de empacar los confites y con esto, indagar si los estudiantes pueden encontrar todas las posibilidades.

La *Actividad Nº 2,* apunta a indagar si los estudiantes aplican los procesos aprendidos en clase o si por el contrario los resuelven a partir de conocimientos previos y ver si establecen relaciones entre números.

**INSTITUCION EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA**

**Alumno:** _____

**Alumno:** _____

**ACTIVIDAD Nº 2**

1. ¿Cuál es el número mayor que divide a la vez los números 48 y 60?
2. Encuentre todos los números que dividen a la vez a los números 48 y 60

_____

3. Explique qué relación tiene los números encontrados con el mayor número encontrado en la parte 1.
4. ¿El número 48 qué relación tiene con los números encontrados?
5. ¿El número 60 qué relación tiene con los número encontrados?

_____

6. Calcule el M.C.D (48,32)

La actividad consta de 6 preguntas, la primera y segunda indaga por las estrategias que realizan los estudiantes para encontrar el M.C.D, con la tercera, cuarta y quinta se quiso indagar, si los estudiantes establecían alguna relación entre los números que encontraban con los números 48 y 60, y analizar si vinculaban dichos números con la relación “ser divisor de” y “ser múltiplo de”. y

con la pregunta 6 se quiso observar el método cómo resuelven los estudiantes problemas cotidianos.

La *actividad Nº 3,* tenía como objetivo indagar las diferentes estrategias utilizadas para encontrar el m.c.m, e indagar si estas permiten establecer relaciones entre números.

***INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARÍA AUXILIADORA***

**Alumno:** _____

**Alumno:** _____

***ACTIVIDAD Nº3***

1. Cuál es el menor número que a la vez es múltiplo de 10 y 6
2. Obtenga 5 números que sean a la vez múltiplos de 10 y 6

_____

3. Explique qué relación existe entre los números encontrados en el punto anterior con el número hallado en la primera pregunta.
4. Explique qué relación tiene el número 10 con los números encontrados en las preguntas 1 y 2.
5. Explique qué relación tiene el número 6 con los números encontrados en las preguntas 1 y 2.

_____

6. Encuentre el menor número que contiene a la vez a los números 6 y 4
7. Calcule el m.c.m (8, 6)

La actividad consta de 6 preguntas, la primera y segunda pretenden indagar por las diferentes estrategias de solución que utilizan los estudiantes para encontrar el m.c.m, y analizar si estas permiten establecer relaciones entre números; en la tercera, cuarta y quinta, se deseaba observar las relaciones que se establecían entre los números 10 y 6 con los números encontrados en las preguntas 1 y 2.

Las actividades 1,2 y 3 están divididas en tres partes y se entregan por separado, con el fin de evitar distracciones.

La *Actividad Nº4:* a diferencia de las tres anteriores, se les entregó completa, no por partes, como en los casos anteriores, puesto que se le quiso dar mayor libertad a los estudiantes para que abordaran las preguntas de acuerdo al tiempo que ellos creyeran conveniente.

**INSTITUCION EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA**

**Alumno:** _____

**Alumno:** _____

**ACTIVIDAD Nº 4**

En el coliseo municipal se abre un curso de natación que se realiza cada 6 días y otro de ajedrez que se realiza cada 8 días. Santiago se ha inscrito a éstos el mismo día, luego le informan que el curso de natación se inicia 6 días después de la matricula y continuará cada 6 días y, el de ajedrez será cada 8 días iniciando 8 días después de la matrícula.

1. ¿A los cuantos días de haber iniciado tendrá que ir a ambas clases el mismo día?

2. Al cabo de 3 meses ¿Cuántas veces le tocó ir el mismo día a ambos cursos?

3. A la quinta vez de tener ambas clases el mismo día ¿Cuántas clases lleva de cada curso?

Las preguntas que se plantearon fueron diferentes a las anteriores, ya que no eran dirigidas a respuestas especificas, sino que se les dio libertad para responder, sin perder de vista el objetivo principal, el cual consiste en observar las relaciones entre números que los estudiantes podrían establecer y analizar; al mismo tiempo

observar si eran capaces de implementar relaciones entre el divisor y el múltiplo, principalmente en la pregunta número 5, donde debían utilizar tanto relaciones del múltiplo como del divisor.

# 4. CATEGORIAS EMERGENTES

Las categorías que se presentan a continuación surgen del análisis de la información recogida a lo largo del proceso de investigación, como resultado de las interacciones de los autores trabajados, lo realizado por los estudiantes y las voces de los autores de este trabajo.

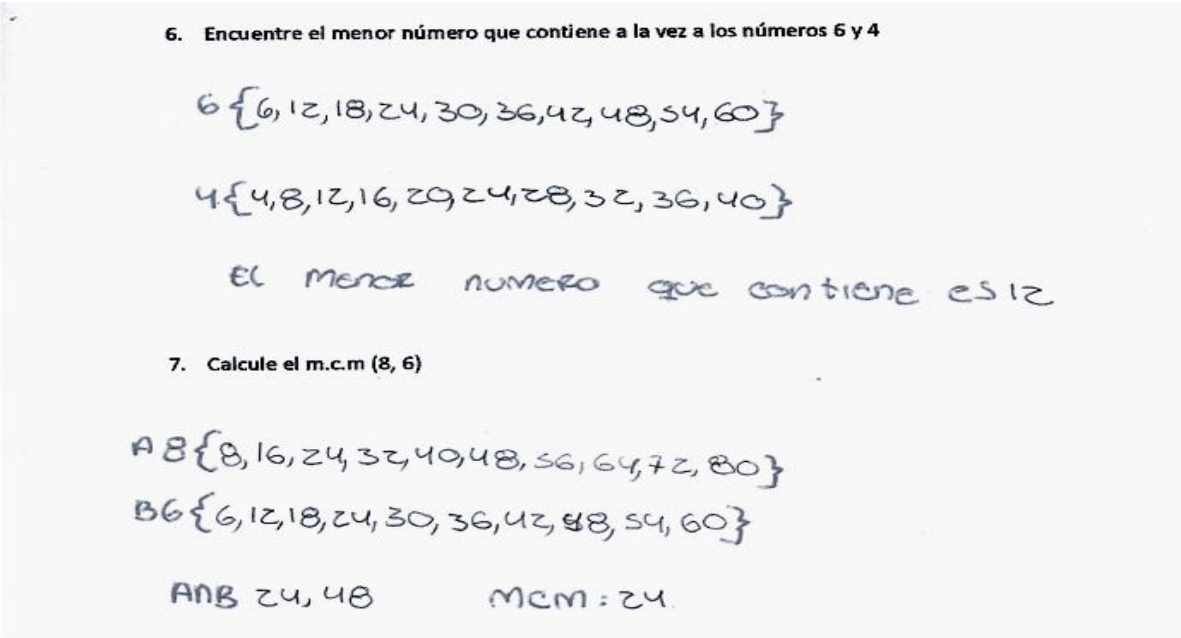
## 4.1. EL CÁLCULO DE MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO DESDE ESTRATEGIAS ESTEREOTIPADAS LIMITAN LA CONSTRUCCIÓN DE RELACIONES DE DIVISIBILIDAD.

Fue evidente como los estudiantes al resolver problemas y ejercicios de mínimo común múltiplo, mostraban una destreza para hallar los múltiplos de las cantidades involucradas en los diferentes problemas, aunque reflejaban estrategias muy particulares, entre ellas, el uso de las tablas de multiplicar y las sumas reiteradas. Además, se pudo inferir que aún los estudiantes participantes de la investigación no estaban en condiciones de pensar relaciones numéricas en abstracto.

A continuación presentamos algunas de las estrategias seguidas por los alumnos para obtener múltiplos de un número:

En la actividad N°3, particularmente en la pregunta 6 en la cual se pedía encontrar el m.c.m de los números 6 y 4 y, en la pregunta 7, que se solicitaba hallar el m.c.m (8, 6), se encontraron estrategias como:

Maria Fernanda y Yuliana procedieron, respectivamente, de la siguiente manera:



**6. Encuentre el menor número que contiene a la vez a los números 6 y 4**

6 {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60}

4 {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40}

El menor numero que contiene es 12

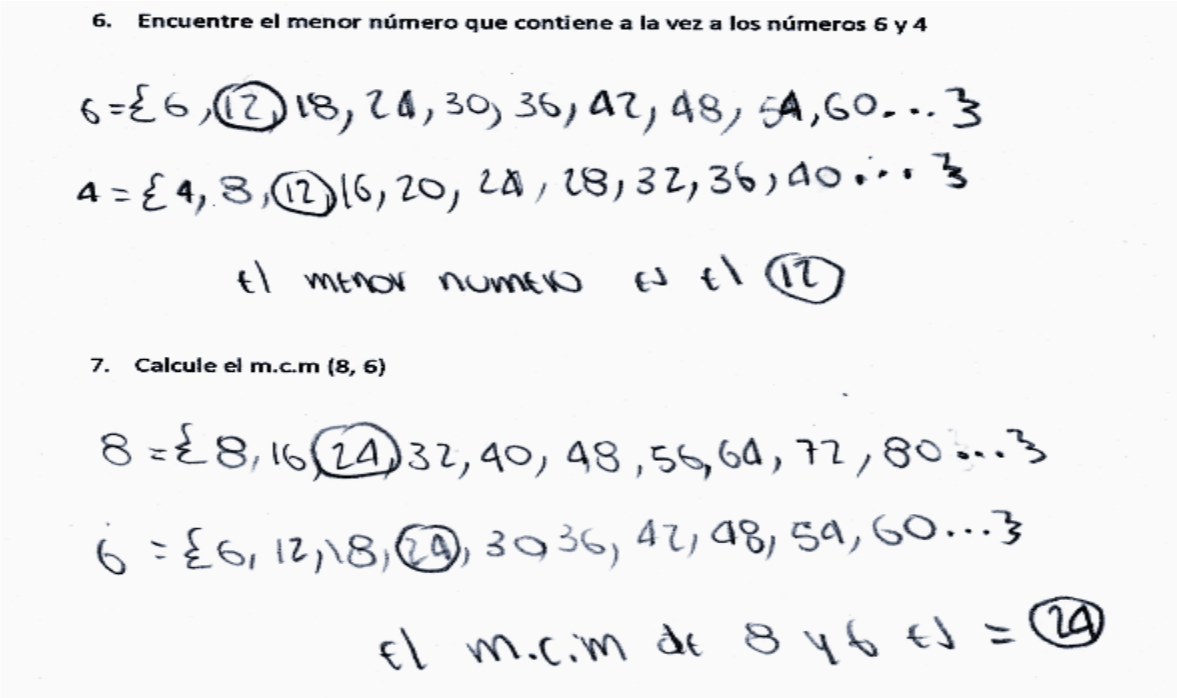
**7. Calcule el m.c.m (8, 6)**

A 8 {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80}

B 6 {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60}

A∩B 24, 48 MCM: 24

Figura Nº1



6. Encuentre el menor número que contiene a la vez a los números 6 y 4

6 = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60...}

4 = {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40...}

el menor numero es el 12

7. Calcule el m.c.m (8, 6)

8 = {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80...}

6 = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60...}

el m.c.m de 8 y 6 es = 24

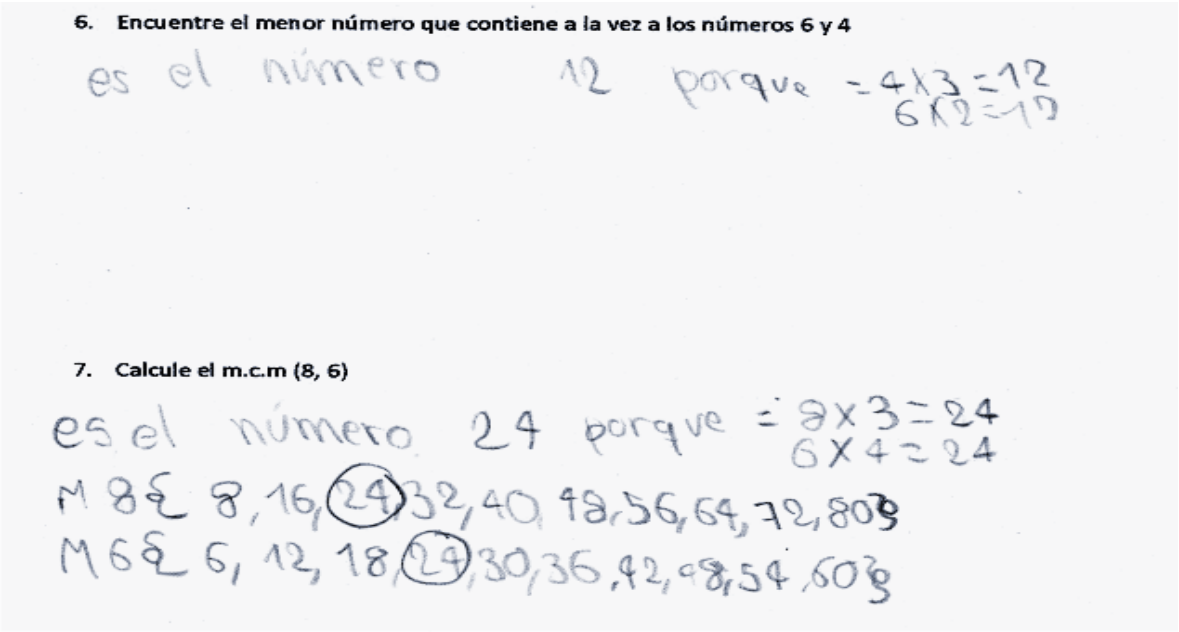
Figura Nº2

Es latente como María Fernanda y Yuliana en ambos ejercicios se acogen al modelo clásico de buscar el conjunto de unos primeros múltiplos de cada número, luego seleccionar los comunes y, finalmente, decidir cuál es el menor de ellos. Sin embargo, evidenciamos en el aula[7], mientras trabajaban las actividades, que el proceso seguido se basa en la utilización de las tablas de multiplicar, centrando la atención en el número al cual se le pretendía hallar múltiplos y al resultado de multiplicar esos números por los números del uno al diez.

[7] Diario de campo Abril 23 de 2009

Esta forma de proceder se caracteriza por ser una estrategia estereotipada, debido a que, las estudiantes hacen uso de un procedimiento mecánico, en el cual no se logra ver una reflexión de lo que se hace, ocultando con esto la relación “ser múltiplo de”.

Respecto a las mismas actividades Andrés procedió de la siguiente manera:


6. Encuentre el menor número que contiene a la vez a los números 6 y 4

es el número 12 porque = 4x3 = 12
6x2 = 12

7. Calcule el m.c.m (8, 6)

es el número 24 porque = 8x3 = 24
6x4 = 24

M 8 { 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80 }
M 6 { 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60 }

Figura Nº3

En la estrategia utilizada por Andrés, no se observa con claridad el procedimiento que utiliza para llegar a la respuesta, lo que nos llevó a indagar por su solución[8] y encontramos que el alumno busca en las tablas de multiplicar todos los números que multiplicados por 6 y 4 respectivamente dieran el mismo resultado, eligiendo el menor de estos.

[8] Diario de campo 23 de abril de 2009

Esta forma de proceder de los tres participantes puede deberse a que estén tratando de imitar los algoritmos clásicos que la escuela ha planteado para resolver este tipo de ejercicios y de alguna manera observamos que están considerando el cálculo de los múltiplos de un número, desde lo que Fernández (2005), considera como algoritmos sumisos, los cuales, según él, se repiten constantemente sin reflexionar sobre lo que se hace. Es claro, en estas actividades la aplicación de un algoritmo sin el reconocimiento de la relación que existe entre los factores y el producto, es decir, aún no se ve conexión alguna entre ser "ser múltiplo de" y "ser divisor de" como relaciones inversas.

Un ejemplo de esta relación es cuando tenemos la operación 5 x7 = 35, en donde el 5 y el 7 son divisores del 35, y 35 es múltiplo de los factores 5 y 7, pero esta relación es entendida de manera incompleta por los sujetos de la investigación, debido a que ellos sólo establecen una relación entre dos elementos de la operación, es decir, sólo reconocen que el 35 es múltiplo del primer factor que en este caso sería el 5 y para ver el 35 como múltiplo del 7, necesita mirar si en la tabla del 7 se encuentra el número 35.

Así lo interpretamos desde las respuestas de Andrés, Yuliana y María Fernanda, al indagarles por las formas como ellos identifican que un número es múltiplo de otro.

| | | |
|---|---|---|
| *Profesor: ¿Qué significa que un número sea múltiplo de otro?*<br><br>*Andrés: Que al multiplicar un número por ese número…. da el múltiplo.*<br><br>*Profesor: ¿Por qué podemos decir que el 12 es múltiplo del 6?*<br><br>*Andrés: porque el 6 se multiplica por otro número y da 12* | *Profesor: ¿Qué significa que un número sea múltiplo de otro?*<br><br>*María Fernanda: Que al multiplicarlo por otro me da el múltiplo*<br><br>*Profesor: ¿Por qué podemos decir que el 12 es múltiplo del 6?*<br><br>*María Fernanda: Porque el 6 se multiplica por un número y da 12.* | *Profesor: ¿Qué significa que un número sea múltiplo de otro?*<br><br>*Yuliana: Que multiplicando esos números da… da, ese otro número. Múltiplo es cuando uno multiplica 2 números y le da ese número.*<br><br>*Profesor: ¿Por qué podemos decir que el 12 es múltiplo del 6?*<br><br>*Yuliana: porque 6 por 2 es igual a 12* |

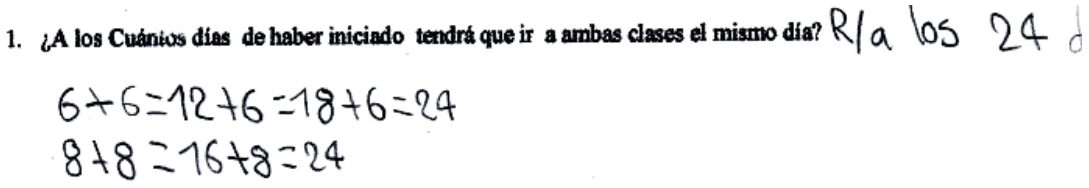
En las respuestas es visible que los tres participantes están pensando en una operación para hallar los múltiplos, sin embargo, ellos sólo consideran el producto como múltiplo de uno de los factores, puesto que no trascienden de la explicación dada, en la cual a lo largo de su educación primaria se les decía que para hallar múltiplos de un número era necesario multiplicar el número, por el conjunto de los números naturales, pero esta estrategia no permite considerar totalmente las relaciones de divisibilidad que están presentes entre los números.

Esta situación se sigue presentando en los estudiantes, en la actividad donde se proponía resolver el siguiente problema: “En el coliseo municipal se abre un curso de natación que se realiza cada 6 días y otro de ajedrez que se realiza cada 8

días. Santiago se ha inscrito a estos el mismo día, luego le informan que el curso de natación se inicia 6 días después de la matrícula y continuará cada 6 días y, el de ajedrez será cada 8 días iniciando 8 días después de la matrícula”

Al preguntar por el primer día que Santiago asistiría por primera vez a las dos clases el mismo día, así procedieron:

Andrés utilizó la siguiente estrategia:

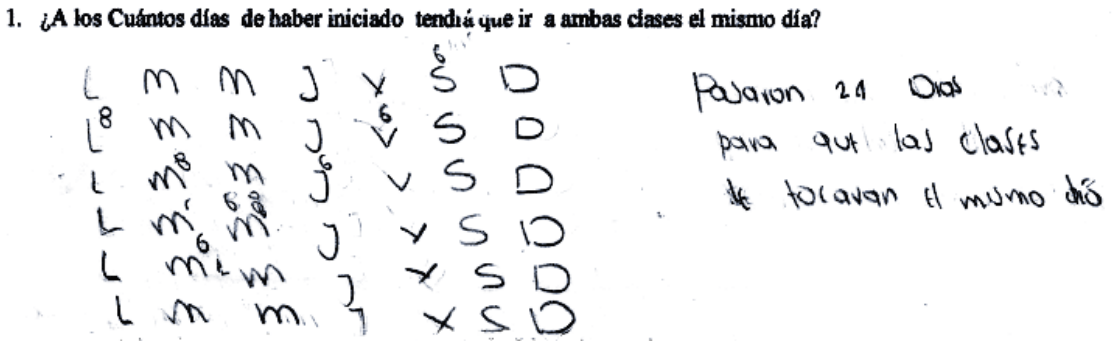

1. ¿A los Cuántos días de haber iniciado tendrá que ir a ambas clases el mismo día? R/a los 24 d

6+6=12+6=18+6=24
8+8=16+8=24

Figura Nº4

Se observa que Andrés realiza sumas de 6 en 6 y de 8 en 8 hasta encontrar en los resultados un número común, que en este caso sería el 24, evidenciando con esto que el estudiante aún ve la multiplicación como una suma de sumandos iguales.

La misma actividad la resuelve Yuliana así:

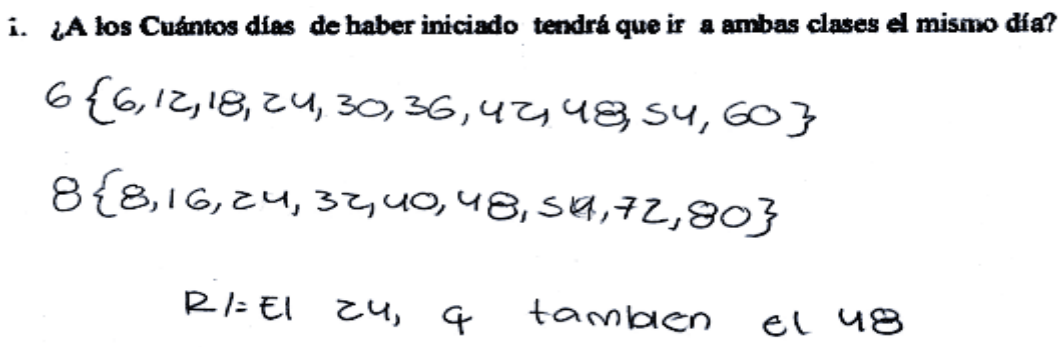

1. ¿A los Cuántos días de haber iniciado tendrá que ir a ambas clases el mismo día?

Pasaron 24 Dias para que las clases se tocaran el mismo día

Figura Nº 5

Yuliana procede igual que Andrés, pero a un nivel más concreto, donde referencia día por día, con la inicial del nombre del día y hace conteos de 6 en 6 y de 8 en 8, marcando con un 6 y un 8 respectivamente cada que completa un grupo de 6 y de 8 días, y donde encuentra un día con ambos números reduce la solución en contar los días transcurridos, dándole así 24 días.

En esta misma actividad Maria Fernanda nos arrojó lo siguiente:


i. ¿A los Cuántos días de haber iniciado tendrá que ir a ambas clases el mismo día?

6 {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60}

8 {8, 16, 24, 32, 40, 48, 54, 72, 80}

R/= El 24, q tambien el 48

Figura Nº 6

Maria Fernanda, aunque lo desarrolla encontrando los primeros diez múltiplos de cada número para luego encontrar los comunes[9] lo hace a partir de sumas como lo expresa a continuación.

| |
|---|
| *Profesor: ¿Cómo encontraste el día en que Santiago asistió por primera vez a las dos clases?*<br><br>*María Fernanda: Sume 6 varias veces y 8 varias veces y el primer número que me dio igual ese era.* |

[9] Algoritmo clásico en los libros de texto para matemáticas escolares.

Se infiere desde las declaraciones dadas por la estudiante, la necesidad de usar sumas reiteradas para encontrar múltiplos de un número, dejándonos ver que procedió de manera análoga a Andrés y Yuliana.

Es evidente desde los procedimientos realizados por los tres estudiantes la utilización de sumas de sumandos iguales, pero esta estrategia imposibilita establecer relaciones de multiplicidad, puesto que sólo se está pensando en un número que se suma consecutivamente, sin tener en cuenta las veces en que se repite la suma. Esto muestra, una vez más, que los estudiantes sólo están pensando en la relación existente entre un factor y el producto.

Lo anterior entra en consonancia con lo que plantea Fernández (2007) quien expresa que la suma de sumandos iguales no es una multiplicación, ya que en las situaciones aditivas sólo interviene un conjunto, mientras que en las situaciones en que la multiplicación interviene, aparecen dos conjuntos definidos y una relación constante. Infiriendo que quizás esta sea una de las razones por las que aún no se aprecia un trabajo en términos de relaciones.

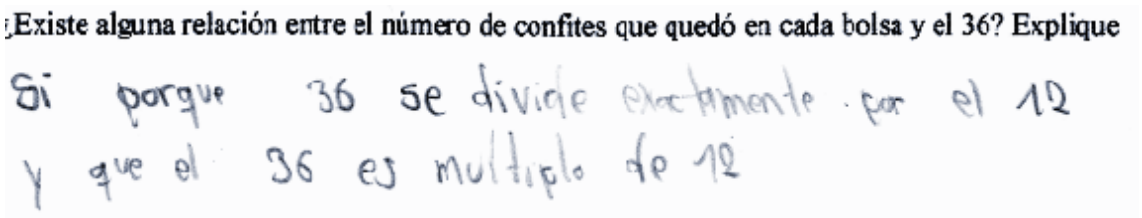
La interpretación que da Zazkis (2001), para dar explicación de la utilización de sumas reiteradas para hallar múltiplos de un número, es por la necesidad, que tiene el estudiante de pensar en un procedimiento, esto evidencia que a los alumnos se les dificulta establecer relaciones, porque conciben el múltiplo como el resultado de una operación y no logran identificar completamente la relación “ser múltiplo de”.

En adelante documentaremos algunos aspectos de la relación que los alumnos logran tejer entre un factor y el producto, a partir de un problema de M.C.D.

La actividad fue la siguiente: “Sebastián tiene 36 confites y 24 bolas de chicle. Él ha decidido compartir estos dulces con sus amigos. Para su repartición se ha puesto unas extrañas condiciones: empacarlos en bolsas, de modo que sólo le toque a cada amigo, confites o bolas de chicle; también quiere darle a cada uno la misma cantidad de dulces, y la mayor posible, con la idea de economizar bolsas. ¿Cuántos dulces quedarán en cada bolsa? ¿Cuántas bolsas necesitará Sebastián?”

La solución planteada por los tres participantes fue que se necesitaban 5 bolsas y en cada bolsa quedarían 12 confites, al indagar sobre las relaciones existentes entre el 12 y el 36, los estudiantes, además, de identificar que el 12 era divisor del 36, reconocieron al 36 como múltiplo del 12. Esto se puede observar a continuación.

Andrés respondió de la siguiente manera:


¿Existe alguna relación entre el número de confites que quedó en cada bolsa y el 36? Explique

Si porque 36 se divide exactamente por el 12 y que el 36 es multiplo de 12

Figura Nº 7

En Andrés se evidencia un reconocimiento del 12 como divisor del 36 y afirma que 36 es múltiplo de 12, confirmando con su respuesta una aproximación a la relación matemática “si a divide a b es porque b es múltiplo de a”

Maria Fernanda Procedió así:

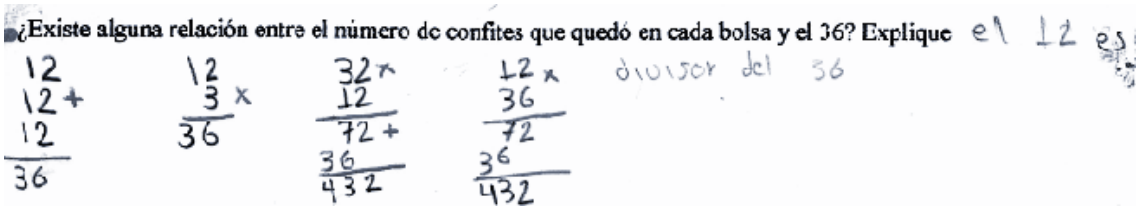



Figura Nº 8

Maria Fernanda identifica al 12 como divisor del 36 y al expresar en su respuesta que 12x3=36, se infiere el reconocimiento del 36 como múltiplo del 12, puesto que, en la primera entrevista (ver página 51) al indagar el cómo identifica que un número es múltiplo de otro, responde “que al multiplicar por otro me da el múltiplo”.

El trabajo de Yuliana fue el siguiente:

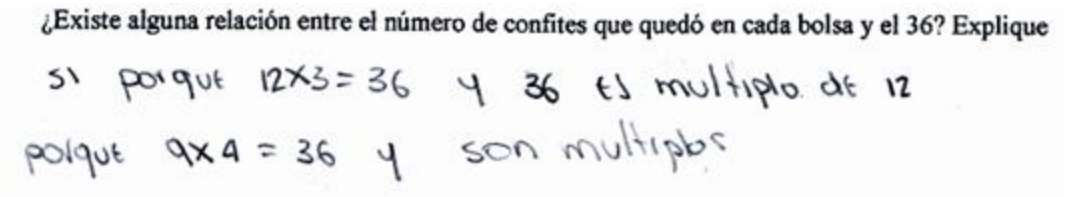



Figura Nº 9

Aunque Yuliana no da cuenta que el 12 es un divisor del 36, si afirma que el 36 es múltiplo de 12.

Podemos interpretar desde los trabajos documentados , que los alumnos ya identifican que si un número divide a otro, es porque ese otro se vuelve múltiplo de él, es decir, están empezando a establecer la relación que en términos matemáticos se expresa de la siguiente manera: “Si a divide a b es porque b es múltiplo de a”.

En el caso particular de Yuliana y María Fernanda, se observa que para poder establecer la relación necesitan multiplicar para poder argumentar, es decir necesitan realizar una acción, mientras que en el caso de Andrés no necesita realizar la operación, en otras palabras, ya ha interiorizado la acción y empieza a expresarse en términos de procesos de acuerdo a la teoría APOE.

Todo lo anterior muestra que Andrés, Yuliana y María Fernanda, acudieron a la misma estrategia para hallar múltiplos de un número y reflejaban, que de una u otra manera, establecían relaciones de divisibilidad, y se puede ver que no están pensando en el múltiplo como un mero producto, sino como una relación entre números, pero una relación incompleta puesto que sólo la establecen entre uno de los factores y dicho producto.

Observamos desde nuestra investigación que los alumnos identifican el múltiplo, ya sea en una división o en una multiplicación, sin presentar confusión entre la terminología de múltiplo y factor, contrario a lo que se determinó en la investigación realizada por Zazkis (2001) en la que expresa que los estudiantes confunden el múltiplo con el factor, ya que el estudiante realiza una analogía con la suma, es decir, se piensa, si en la suma los términos a sumar se llaman

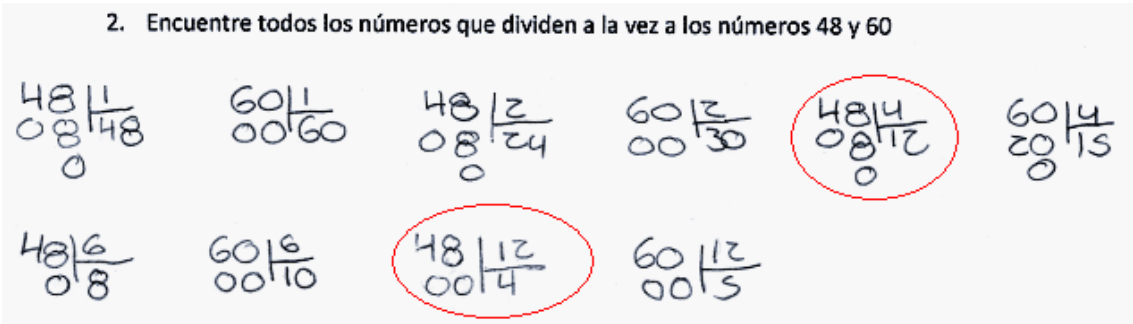
sumandos, en la multiplicación los términos a multiplicar se llaman múltiplos, de ahí surge el nombrar múltiplo a los factores, creando con esto generalizaciones incorrectas.

### 4.2. UN PRIMER ACERCAMIENTO A RELACIONES DE DIVISIBILIDAD DESDE EL CÁLCULO DE DIVISORES DE UN NÚMERO

Desde este trabajo se puede percibir que a los participantes de la investigación se les dificulta establecer la relación “ser divisor de”, es decir, aunque hay un reconocimiento de los elementos que intervienen en una división, no identifican la relación que existe entre ellos.

Lo anterior se puede evidenciar en la actividad de encontrar todos los divisores comunes del 48 y 60.

María Fernanda procedió así:




[10]

Figura Nº10

[10] Los círculos rojos que se observan en las figura 10, 11, son trabajo nuestro para ubicar al lector.

Maria Fernanda realiza divisiones para hallar los divisores comunes, sin embargo, es particular ver el orden en que los escribe, se puede pensar que la alumna tuvo la facilidad para encontrarlos de inmediato, pero al indagarle el porqué de sus soluciones y las estrategias que utilizó[11] puede interpretarse que ella necesitaba realizar varias operaciones para encontrar los divisores, también es latente que al dividir 48 por 4, no reconoce que el cociente 12 también es divisor del 48 y requiere hacer la división de 48 por 12 para garantizarlo.

Esta misma actividad la abordó Andrés de la siguiente forma:

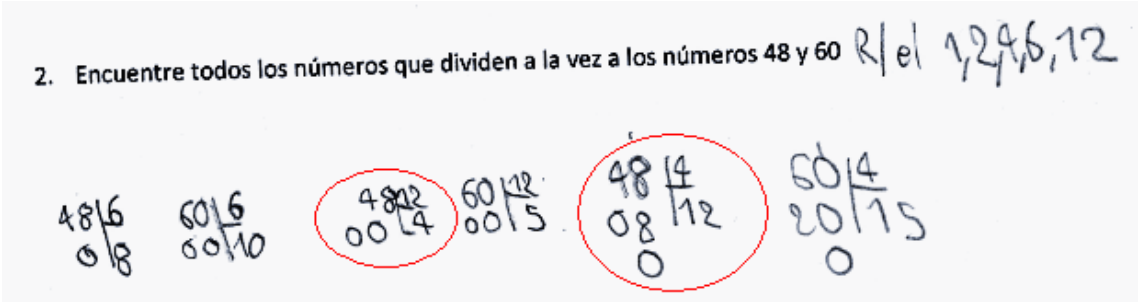



Figura Nº11

En Andrés se observa que es capaz de reconocer los números 1 y 2, como divisores comunes del 48 y el 60 sin necesidad de comprobarlo con la división, evidenciando con esto que reconoce que el 1 es divisor de todos los números y

[11]Diario de campo, abril 2 de 2009

que el 2 es divisor de todos los números pares, tal como lo expresaba en las conversaciones que tuvimos con él.

Otro aspecto que se observa en el trabajo de Andrés, es que no reconoce que el cociente en una división exacta, también es divisor del dividendo, así lo manifiesta en las operaciones encerradas en los círculos rojos, donde es claro que el estudiante hace la división de 48 por 4, a pesar de que ya aparecía como cociente cuando realizó la división de 48 por 12.

En la misma actividad Yuliana procedió de la siguiente manera:

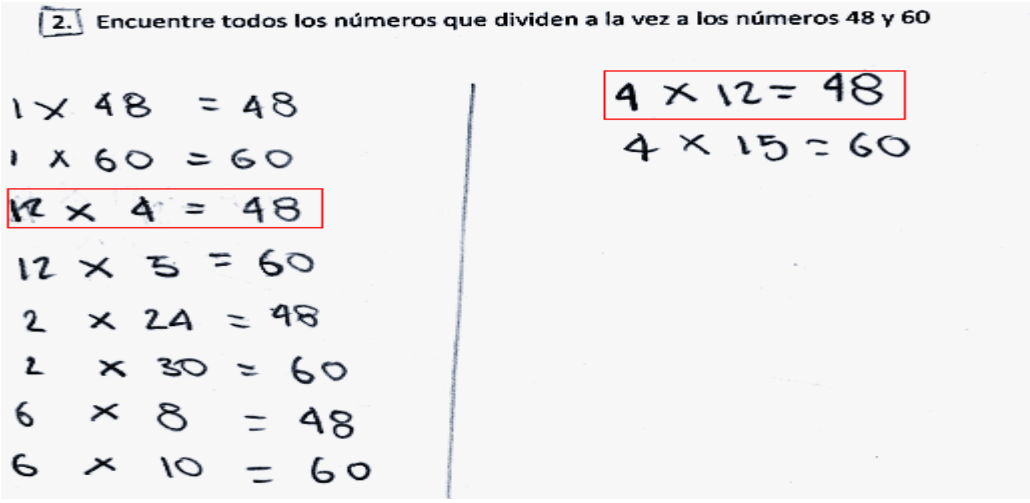



Figura Nº12

Se observa que Yuliana se apoya en la multiplicación para obtener divisores de un número. Sin embargo, al consultarle por el criterio para decidir cuando un número es divisor de otro, nos expresa que “al dividirlo el residuo sea cero”, Pero, no ve a los dos números que multiplica (factores) como divisores del producto

obtenido, identificando sólo uno, el factor de la izquierda de su multiplicación (ver testimonio, en la categoría anterior en la conversación narrada (p. 51). Asunto que también se observa en las operaciones encerradas en los rectángulos rojos[12], es decir, Yuliana en la primera multiplicación no reconoce el cuatro como otro divisor del 48, por lo tanto, tiene que explicitar de nuevo la operación 4x12=48.

Como se puede observar en ninguno de los trabajos apareció el tres como divisor común de los números 48 y 60, pero desde nuestras interacciones con las estudiantes nos percatamos que por ser pares el 48 y 60, sólo centraban la atención en la selección de divisores pares, lo que llevó a indagar el porqué de este hecho y fue evidente en las conversaciones con ellos que para dos números pares sus divisores también tenían que serlo, es el caso de lo que nos dijo Andrés al respecto:

*Profesor: ¿cómo hiciste para encontrar los divisores comunes de 48 y 60?*

*Andrés: dividiendo por números pares y en las divisiones que me sobraba los descartaba.*

*Profesor: ¿Usted por qué sólo toma divisores pares y no mira si tiene divisores impares?*

*Andrés: es que los profesores como ya sabían nos decían que miráramos en las tablas y todos buscábamos los números y como los dos números son pares el divisor también debe ser par.*

[12] Estos son trabajo nuestro para ubicar al lector

Fue notable, en todos los trabajos, que el uno aparece como divisor de los números implícitos en la actividad, y los estudiantes lo argumentaban afirmando que, el uno era divisor de todos los números, lo que revela que ellos están pensando en aspectos teóricos bastante mecánicos relacionados con divisores y múltiplos, más no en relaciones entre dichos números.

También se observa que los estudiantes no se apoyan en la descomposición de factores primos, ni en los criterios de divisibilidad, a pesar de haberlos trabajado en los grados cuarto y quinto[13]. Lo que sucede es que los estudiantes crean sus propias estrategias a la hora de buscar divisores de un número y desde éstas se les interpreta un intento por construir relaciones asociadas a la divisibilidad.

De hecho, así lo plantea Zazkis y Campbell (1996), citados por Bodí (2006), cuando expresan que un primer acercamiento para ver las relaciones de divisibilidad como una relación entre números es a través de la acción, lo que se evidenció en los tres participantes cuando intentaban construir sus propios criterios para decidir la divisibilidad o no de un número por otro, tal como durante este proceso, los estudiantes han manifestado que, un número es divisor de otro cuando se realiza la división y el residuo da cero.

Esto es considerado una primera aproximación a establecer relaciones de divisibilidad, porque los estudiantes ya saben que un número es divisor de otro, cuando hay una división exacta, es decir, no ven al divisor sólo como un término

[13] Así se evidenció en las clases que observamos al docente cooperador y en los cuadernos de grado 4° y 5°

dentro de la operación, sino que este debe cumplir con la característica especial que ellos reconocen, lo que nos hace considerar que los estudiantes ya están pensando en relaciones entre números, logrando esto a partir de sus propios métodos de solución.

### 4.3. DEPENDENCIA DE OPERACIONES ALGORITMICAS PARA EL CÁLCULO DE MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Los tres estudiantes para encontrar múltiplos y divisores de un número, se apoyan en las operaciones multiplicación o división, aspecto que se puede observar en la forma de abordar la actividad donde se pedía encontrar el mayor número que dividiera a la vez a los números 48 y 60, es decir, buscar el M.C.D de dichos números.

Andrés desarrolló la actividad así:

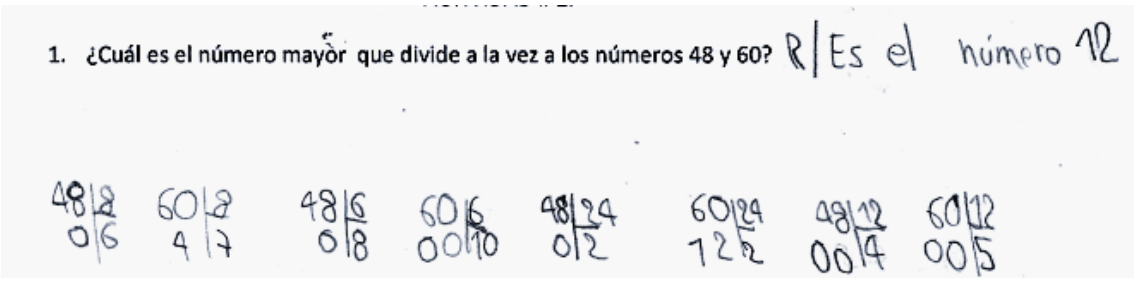



Figura Nº16

Se observa que Andrés recurrió a una estrategia basada en la búsqueda de divisores pares, pero solamente del número 48, esto lo podemos afirmar porque al dividir el 60 por algunos de estos números las divisiones no le daban exactas, finalmente reconoce al número 12 como solución, dado que la división fue exacta cuando dividió al 48 y al 60 por 12, además era el mayor de los números con los que había ensayando.

Al indagarle al estudiante el por qué de sus acciones responde lo siguiente:

*Profesor: ¿cuál es el mayor número que divide a la vez al 48 y al 60?*

*Andrés: el 12*

*Profesor: ¿cómo lo hiciste?*

*Andrés: dividiendo y en las divisiones que me sobraba los descartaba. Claro que tampoco uno se va a poner hacer eso a la loca porque uno nunca termina, yo busque que fueran par.*

*Profesor: ¿dividiendo hasta que lo encontró, y estás completamente seguro que el 12 es el mayor?*

*Andrés: si*

*Profesor: ¿y uno como garantiza que sea el mayor divisor?*

*Andrés: cuando a uno el profesor le dice que está bueno.*

De acuerdo con el testimonio de Andrés se observa que el estudiante estaba realizando las divisiones que le dieran residuo cero, escogiendo números por ensayo y error, intentando llegar al mayor divisor, pero es evidente que no

puede garanizar cual es el mayor, ya que espera la aprobación del profesor.

La misma actividad la abordó Maria Fernanda así:

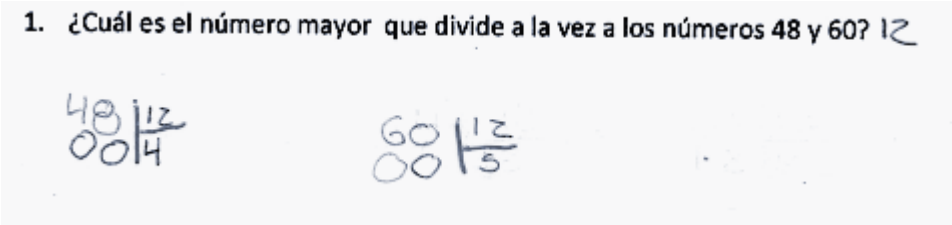



Figura Nº17

Al parecer, de entrada, la alumna tiene en su mente, que el mayor número que divide al 48 y 60 es el 12, y lo verifica haciendo las divisiones. Como no se tenía claridad de su trabajo, fue necesario dialogar con Maria Fernanda, para tener mayor conocimiento de sus razonamientos y esto fue lo que obtuvimos:

*Profesor: ¿encontró el 12 de inmediato?*

*Maria Fernanda: no, buscamos con varios números y no nos daban y luego fuimos encontrando.*

*Profesor: ¿y cómo garantizo que el 12 si sea divisor común del 48 y 60?*

*Maria Fernanda: que al dividir no me sobre nada.*

Pero, aunque en la respuesta plantea que hace divisiones por varios números, en su trabajo escrito no se puede percibir a primera vista cuáles son esos números, no obstante, en las huellas de su trabajo se puede observar que multiplica

16x3=48 y luego realiza una división para comprobar si el 16 es divisor del 60 y al no darle residuo cero lo descarta.

Respecto a la misma actividad Yuliana nos arrojó la siguiente solución:

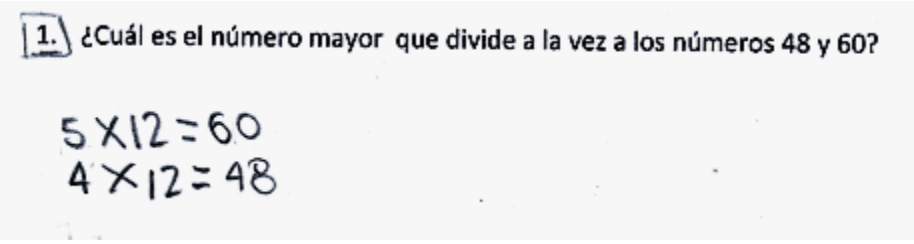



Figura Nº 18

Se puede ver en los procedimientos de Yuliana que hace lo mismo que Maria Fernanda, pero, no lo verifica a través de divisiones, sino a través de las multiplicaciones, en las que busca dos números que al ser multiplicados respectivamente por el 12, le generen el 60 y 48. Interpretaciones que se confirman a través del siguiente diálogo con la estudiante:

*Profesor: ¿encontró el 12 de inmediato?*

*Yuliana: yo empecé a buscar por el 10, 11, 12 y encontré el 12, también intentamos por otros números.*

*Profesor: ¿porque te dio por hacerlo por medio de multiplicaciones?*

*Yuliana: porque se me ocurrió primero la multiplicación.*

*Profesor: ¿al realizarlo por una multiplicación como garantizo que el 12 sea el mayor divisor?*

*Yuliana: que dividiendo no sobre nada*

Como se evidencia, Yuliana a pesar de hallar el M.C.D por medio de multiplicaciones, requiere realizar al igual que Maria Fernanda, una división, para comprobar que el número si es divisor.

Se puede afirmar que los estudiantes desde esta actividad, están reflejando una escases de construcción de relaciones, puesto que aún no coordinan las ideas que hay detrás de una relación de divisibilidad, porque desde esta actividad al calcular el M.C.D de 48 y 60, se ve que lo hacen por ensayo y error, particularizando la mirada en algunos divisores de los números y el único referente para controlar sus respuestas es haciendo divisiones, de la obtención o no de una división exacta confirman su solución.

Desde esta actividad se observa que a los estudiantes se les dificulta establecer relaciones de divisibilidad, debido a que los algoritmos que ellos utilizan no trascienden de un proceso mecánico, además se observa la no utilización de criterios de divisibilidad y la descomposición de factores primos; puesto que su enseñanza sólo brindó la posibilidad de memorizar reglas que no permitían la utilización de estos conceptos en diferentes situaciones, lo que dificulta a los alumnos establecer relaciones entre números. Por todo lo anterior podríamos decir, de acuerdo a Zazkis y Campbell (1996) y Bodí (2006), que los estudiantes se encuentran en un nivel de comprensión *acción,* puesto que este nivel se caracteriza por la necesidad de realizar una operación para comprobar que un número sea múltiplo o divisor, Según la teoría APOE.

Lo anterior se sigue evidenciando cuando se les solicita a los participantes de la investigación hallar los divisores comunes del 48 y 60, donde ellos concluyen que los divisores deben ser pares, debido a que el 48 y el 60 son números pares, como se puede constatar en las evidencias presentadas en la segunda categoría (Figura 10, 11,12) pág. 58, 59, 60.

Andrés realiza una serie de divisiones por números pares, que él cree, que pueden ser divisores de los números. Así lo confirmamos desde el siguiente dialogo:

*Profesor: ¿cómo hiciste para encontrar los divisores comunes de 48 y 60?*

*Andrés: dividiendo por números pares y en las divisiones que me sobraba los descartaba.*

*Profesor: ¿Usted por qué sólo toma divisores pares y no mira si tiene divisores impares?*

*Andrés: es que los profesores como ya sabían nos decían que miráramos en las tablas y todos buscábamos los números y como los dos números son pares el divisor también debe ser par.*

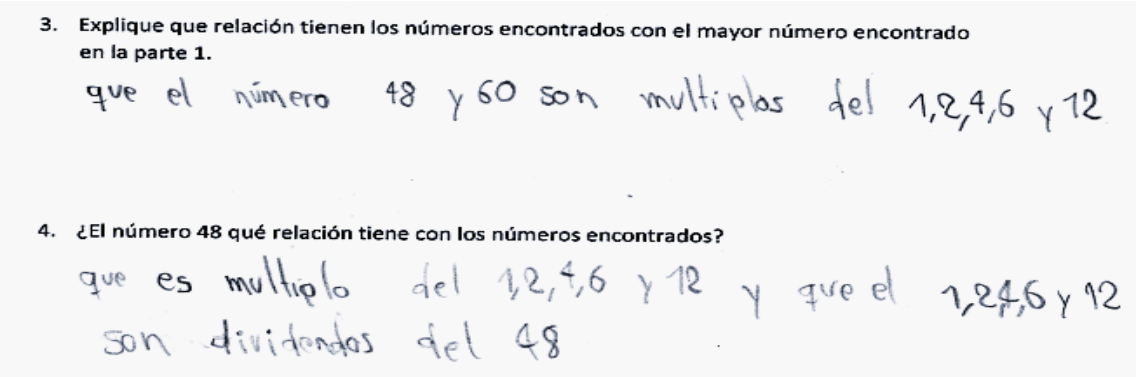
De acuerdo a estos testimonios el estudiante no tiene en cuenta al 3 como un divisor común de los números 48 y 60. Esta situación, presente también en María Fernanda y Yuliana, conlleva a generalizaciones incorrectas.

Según Bodí (2006) esto se presenta cuando los alumnos están en la primera fase de la teoría APOE, es decir, conocen como acción la idea “q es divisible por p”, debido a esto “pueden inventarse criterios de divisibilidad o realizar adaptaciones

no correctas de los criterios”. En este caso, considerar que dos números pares no pueden tener un divisor impar.

A continuación documentamos la información obtenida, desde la misma actividad, donde se le solicitaba a los alumnos que establecieran relaciones, entre, de un lado, el 12 y los números1, 2,4, 6[14], y de otro, entre el 48 y los números 1, 2, 4, 6.

La siguiente es la actividad desarrollada por Andrés:


3. Explique que relación tienen los números encontrados con el mayor número encontrado en la parte 1.

que el número 48 y 60 son multiplos del 1,2,4,6 y 12

4. ¿El número 48 qué relación tiene con los números encontrados?

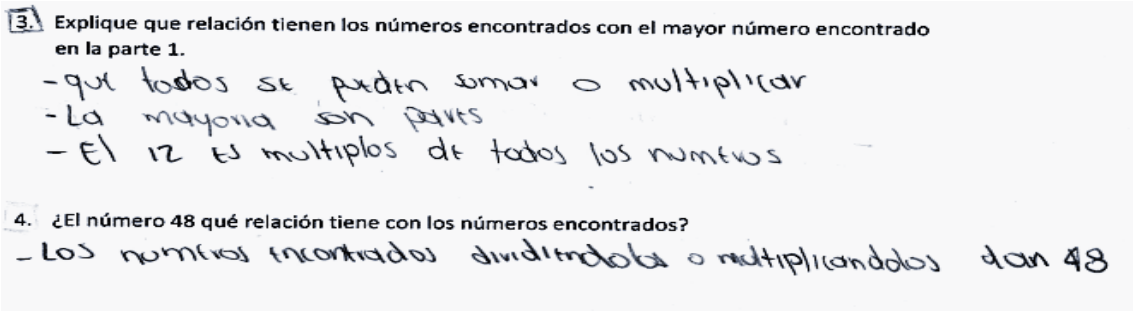
que es multiplo del 1,2,4,6 y 12 y que el 1,2,4,6 y 12 son dividendos del 48

Figura Nº 19

Como se observa, Andrés, a pesar de que no estableció la relación entre los números está expresando que 48 y 60 son múltiplos del 1, 2, 4, 6 y 12; sin necesidad de argumentarlo a partir de una multiplicación o una división, lo mismo ocurre con la pregunta 4, aunque en esta última respuesta también expresa que los números 1, 2, 4, 6 y 12 son divisores del 48.

Frente a esta misma actividad Yuliana procedió así:

[14] Números encontrados en la segunda parte de la actividad cuando se les pedía hallar los demás divisores comunes del 48 y el 60.



3. Explique que relación tienen los números encontrados con el mayor número encontrado en la parte 1.

- que todos se pueden sumar o multiplicar
- La mayoria son pares
- El 12 es multiplos de todos los numeros

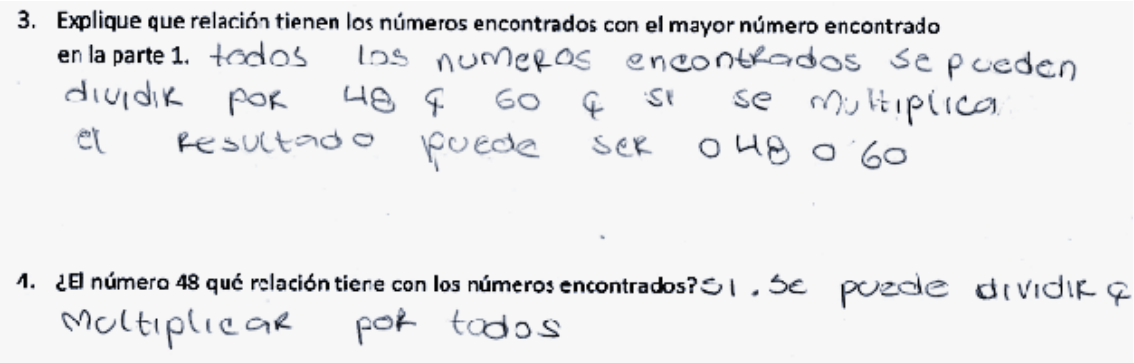
4. ¿El número 48 qué relación tiene con los números encontrados?

- Los numeros encontrados dividiendolos o multiplicandolos dan 48

Figura Nº 20

Como se observa, la estudiante intenta establecer una serie de relaciones, expresando que el 12 es múltiplo de todos los números, pensando posiblemente en los números 1, 2, 4, 6; pero esto no es expresado por ella. En la pregunta 4, se observa que la alumna no está pensando en relaciones de divisibilidad sino en la operación que ella realiza para encontrar los divisores comunes del 48 y el 60, esto se debe, según Fernández (2005), a que cuando los algoritmos que realizan los estudiantes se convierten en sumisos, lo que ocasiona en ellos, es que traten de imitar mentalmente la forma como opera el algoritmo.

María Fernanda procedió así:



3. Explique que relación tienen los números encontrados con el mayor número encontrado en la parte 1. todos los numeros encontrados se pueden dividir por 48 ¢ 60 ¢ si se multiplica el resultado puede ser o 48 o 60

4. ¿El número 48 qué relación tiene con los números encontrados? Si. se puede dividir ¢ multiplicar por todos

Figura Nº 21

La estudiante presenta la misma confusión de Andrés, ya que no relaciona los números como tal, y expresa que los números encontrados, es decir, el 1, 2, 4, 6, se pueden dividir por 48, e igualmente expresa que si estos números se multiplican pueden dar 48 o 60, pero, no especifica que los números son divisores o múltiplos, manifestándose las mismas dificultades que Yuliana.

En las respuestas de Yuliana y María Fernanda, se observa que las relaciones que describen entre los números, están ligadas a los procedimientos que anteriormente utilizaron para encontrar los divisores comunes del 48 y el 60, es decir, la multiplicación o la división, y no establecen las relaciones que tienen los números dentro de la operación, por el contrario, Andrés logra reconocer cuáles son múltiplos y cuáles son divisores.

Parafraseando a Bodí (2006), cuando los alumnos se encuentran en un nivel de acción muestran dificultades al definir lo que es un múltiplo o un divisor de un número, sin embargo, son capaces de encontrar múltiplos o divisores de números concretos.

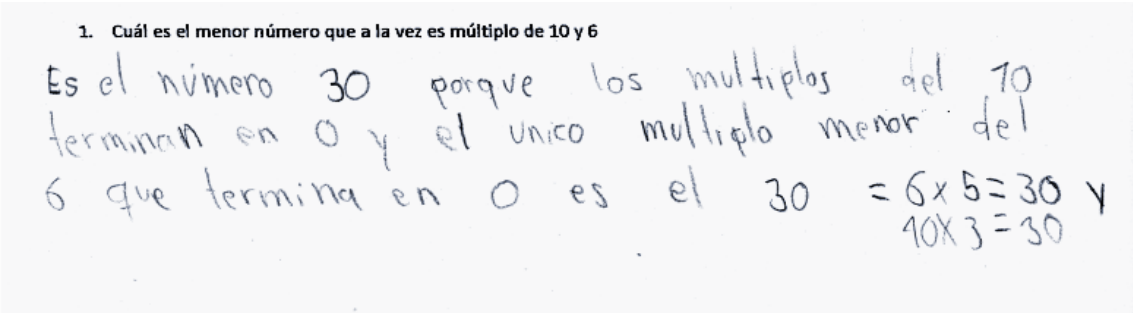
Con lo anterior podríamos afirmar que el nivel de comprensión de los sujetos de la investigación, se queda en la acción, pero al analizar todos los trabajos es importante resaltar como Andrés en algunos de ellos, muestra una aproximación al segundo nivel de comprensión que es denominado proceso[15], pero sólo cuando

[15] Este nivel se caracteriza porque el estudiante no necesita realizar una operación para encontrar múltiplos o divisores de un número, es decir, la operación se piensa pero no se realiza.

deja a un lado los algoritmos enseñados en la educación básica primaria y crea sus propias relaciones que le ayuden a construir una solución.

A continuación se analiza uno de los trabajos realizados por Andrés, lo que nos permite comprobar lo planteado anteriormente.

Uno de los casos en donde se observa que Andrés, se aproxima al nivel de comprensión, llamado *proceso,* es en la actividad donde se pedía encontrar el m.c.m del 6 y el 10. Así trabajó Andrés:


1. Cuál es el menor número que a la vez es múltiplo de 10 y 6

Es el número 30 porque los multiplos del 10 terminan en 0 y el unico multiplo menor del 6 que termina en 0 es el 30 = 6x5=30 y 10X3=30

Figura Nº 22

Se interpreta que Andrés crea sus propias relaciones para llegar a la solución, sin depender en esta situación, de los algoritmos enseñados en la escuela, se puede inferir que el estudiante utiliza el criterio de divisibilidad por 10, y establece una conexión con los múltiplos del 10 y los del 6.

Con el ánimo de ahondar más en el trabajo de Andrés, fue necesario realizar una sesión de profundidad, para constatar lo que había realizado.

*Profesor: ¿usted cómo encontró que el menor múltiplo común del 6 y el 10 era el 30?*

*Andrés: porque los múltiplos del 10, todos los múltiplos del 10 terminan en 0, y el primer múltiplo del 6 que termina en cero es el 30.*

*Profesor: ¿y a usted le han enseñado que los múltiplos del 10 terminan en cero?*

*Andrés: no*

*Profesor: ¿entonces como llegaste a esa conclusión?*

*Andrés: porque 10x1 10, 10x2 20, pues todos terminan en cero*

*Profesor: ¿Por qué?*

*Andrés: porque de 10 en 10 todo da cero.*

*Profesor: ¿Por qué se te ocurrió realizarlo así?*

*Andrés: no sino que yo no me acordaba como encontrar el mínimo común múltiplo.*

Esto nos hace pensar que la dificultad que tienen los estudiantes para pasar de un nivel de acción a un nivel del proceso, se debe a la enseñanza que reciben, puesto que, se hace énfasis en la aplicación de algoritmos y en repetir definiciones, dejando de lado la comprensión de los estudiantes. Estos métodos de enseñanza no permiten establecer relaciones entre los conceptos, puesto que, el alumno sólo está pensando en dar una respuesta acertada para el profesor sin reflexionar el porqué de sus procedimientos y mucho menos centrando la atención en la construcción de relaciones.

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- En las diferentes actividades presentadas los alumnos identificaron que cuando un número divide a otro, es porque ese otro se vuelve múltiplo de él, es decir, están empezando a establecer la relación que en términos matemáticos se expresa de la siguiente manera: ***"Si a divide a b, es porque b es múltiplo de a".***

- Se observó que los estudiantes realizaban la misma estrategia para reconocer cuando un número es múltiplo de otro, esto era validado por medio de una operación, ya fuera la multiplicación o la división, sin embargo, dentro de las operaciones visualizaban al producto como múltiplo de sólo uno de los factores, lo que imposibilitó a los sujetos de la investigación una comprensión completa de las relaciones "ser múltiplo de" y "ser divisor de".

- Los alumnos buscan los divisores de un número por ensayo y error, y aunque tienen claro, cuando un número es divisor de otro, validado a partir de una división con residuo cero, no comprenden algunas relaciones que este concepto involucra, como el reconocer que el divisor y el cociente son divisores del dividendo.

- Se observó en los tres participantes que la escasa construcción de relaciones de divisibilidad se debe a que sus desempeños no han superado el nivel de acciones algorítmicas, así lo constata el hecho que sus argumentos y procedimientos son validados a partir de una operación. Situación que fue general, aunque, en algunas actividades realizadas por Andrés, se evidenció que no requería realizar una operación para garantizar que un número es divisor o múltiplo de otro.

- Podemos pensar que la dificultad que tienen los tres estudiantes para establecer relaciones de divisibilidad se debe a la enseñanza que recibieron, puesto que, se hizo énfasis en la aplicación de algoritmos y en repetir definiciones, dejando de lado la comprensión de los conceptos. Por este motivo los alumnos convierten los algoritmos enseñados en algoritmos sumisos lo que les impide reflexionar sobre el porqué de sus procedimientos, además de no dejarlos pensar los números en función de sus relaciones.

- La enseñanza de la divisibilidad puede trascender de la simple aplicación de algoritmos, desde un enfoque que se centre en las relaciones de divisibilidad, y de esta manera el alumno pueda lograr una mayor comprensión de los elementos que intervienen en ellas.

Este estudio deja abierto nuevas posibilidades de investigación que pueden favorecer la comprensión de las relaciones de divisibilidad, abordándolas desde los criterios de divisibilidad y el teorema fundamental de la aritmética,

elementos que dentro de esta investigación no fueron tomados en profundidad, pero que tienen gran importancia en la construcción de relaciones de divisibilidad.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Bodi, S. (2006). Analisis de la comprención de divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Tesis doctoral. [Version electrónica] Universidad de Alicante, Alicante.

Bodi, S., Valls, J., & Llinares, S. (2007). La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo. [Version electrónica] en: http://www.asi4.uji.es/actas/p2a1.pdf

Fernández, J. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. [Version electrónica]. Revista iberoamericana de educación matemática. Nº4. Pág. 31- 46.

Fernández, J. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética una barrera epistemológica. [Version electrónica]. Revista iberoamericana de educación Matemática. Nº 43. Pág. 119-130.

González, V. (2006). El diario como instrumento de diagnóstico y estimulación del desarrollo profesional del profesorado. [Version electrónica]. Revista iberoamericana de educación. Vol.38. Nº2. Pág. 1 – 14.

Herrera, I. J, et al. (2003). Movilización del pensamiento numérico desde las relaciones de divisibilidad en el educación Básica primaria. Medellín.

LACE. (1999). introducción al estudio de caso en educación. universidad de cádiz. [Version electronica] en: http://www.grupolace.org/documentos/docs/EC.pdf

Meel. D. (2003). Modelos y teorías de comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. [Version electrónica]. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol.6. Número 3. Pág. 221-271.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá: Magisterio.

MEN. (2003). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

Sierra, M., González, M., Sánchez, A. & González, M. (1997). Divisibilidad. Madrid. Síntesis.

Taylor, S.J., & Bodgan, R. (1996) Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Barcelona, España: Paidos.

Zazkis, R. (2001). Múltiplos, divisores y factores: Explorando la red de conexiones de los estudiantes. [Version electrónica]. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4, 63 – 92.

# 7. ANEXOS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Caldas, 4 de junio de 2009

Señores Padres de Familia

De la estudiante Yuliana Echavarriaga Acevedo:

Cordial saludo:

En la clase de matemáticas se está desarrollando el proyecto de investigación denominado "Relaciones de divisibilidad asociadas al Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números naturales". Dicho proyecto tiene el aval de las directivas de la Institución Educativa.

Queremos solicitar formalmente su autorización para que ***YULIANA ECHAVARRIAGA ACEVEDO*** forme parte de nuestro grupo de investigación como sujeto de la misma e igualmente presentar a su hija en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hija en forma de grabación: fotos, video, guías de clase, entre otras.

Agradecemos su atención y colaboración.

Lyda Monsalve Julian Darío García Lina M. Patiño L.

Lyda Johana Monsalve Julián Darío García Lina marcela Patiño

Estudiantes investigadores

JOHN JAIRO MÚNERA

Docente Asesor

---

Autorizamos la participación de nuestra hija ***YULIANA ECHAVARRIAGA ACEVEDO*** en la investigación "Relaciones de divisibilidad asociadas al Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números naturales."

Doris Elena Acevedo

CC 43 686 860

Jaid Acevedo Mendoza

CC

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Caldas, 4 de junio de 2009

Señores Padres de Familia

De la estudiante Andrés Soto García:

Cordial saludo:

En la clase de matemáticas se está desarrollando el proyecto de investigación denominado "Relaciones de divisibilidad asociadas al Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números naturales". Dicho proyecto tiene el aval de las directivas de la Institución Educativa.

Queremos solicitar formalmente su autorización para que ***ANDRÉS SOTO GARCÍA*** forme parte de nuestro grupo de investigación como sujeto de la misma e igualmente presentar a su hija en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hija en forma de grabación: fotos, video, guías de clase, entre otras.

Agradecemos su atención y colaboración.

Lyda Monsalve Julian Dario Garcia Lina M. Patiño C.

Lyda Johana Monsalve Julián Darío García Lina marcela Patiño

Estudiantes investigadores

JOHN JAIRO MÚNERA

Docente Asesor

---

Autorizamos la participación de nuestro hijo ***ANDRÉS SOTO GARCÍA*** en la investigación "Relaciones de divisibilidad asociadas al Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números naturales."

Blanca García B

cc 43682763 caldas Aut cc

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Caldas, 4 de junio de 2009

Señores Padres de Familia

De la estudiante María Fernanda Giraldo Escobar:

Cordial saludo:

En la clase de matemáticas se está desarrollando el proyecto de investigación denominado "Relaciones de divisibilidad asociadas al Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números naturales". Dicho proyecto tiene el aval de las directivas de la Institución Educativa.

Queremos solicitar formalmente su autorización para que ***MARÍA FERNANDA GIRALDO ESCOBAR*** forme parte de nuestro grupo de investigación como sujeto de la misma e igualmente presentar a su hija en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hija en forma de grabación: fotos, video, guías de clase, entre otras.

Agradecemos su atención y colaboración.

Lyda Monsalve Julian Darío García Lina M. Patiño C.

Lyda Johana Monsalve Julián Darío García Lina marcela Patiño

Estudiantes investigadores

JOHN JAIRO MÚNERA

Docente Asesor

---

Autorizamos la participación de nuestra hija ***MARÍA FERNANDA GIRALDO ESCOBAR*** en la investigación "Relaciones de divisibilidad asociadas al Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números naturales."

Monica Escobar

CC 43.400.365

CC