

# ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO EXTENSIÓN LATAACUNGA



## PROYECTO DE AULA

*Física*

*Ing. Roberto Salazar*

**Paralelo "Q"**

**NRC: 1954**

**LATAACUNGA-2013**

## Índice

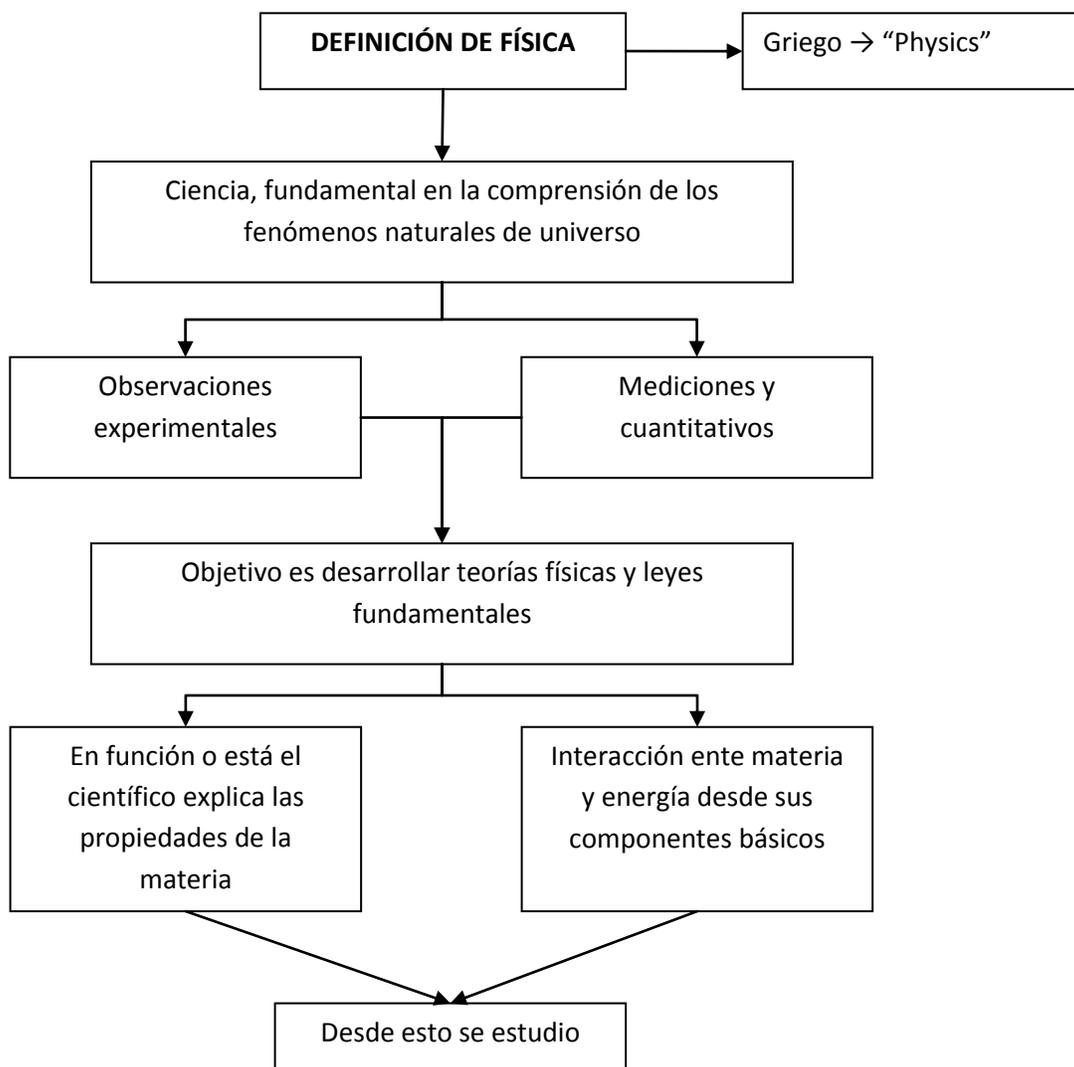
DEFINICIÓN DE FÍSICA .....	5
TIPOS DE FENÓMENOS.....	6
ANÁLISIS DIMENSIONAL.....	9
ECUACIONES DIMENSIONALES.....	9
PROPIEDADES.....	9
CIFRAS SIGNIFICATIVAS .....	12
Reglas para determinar el número de cifras significativas .....	12
REGLA DE REDONDEO .....	13
TEORÍA DE LOS ERRORES.....	14
CONVERSIÓN DE UNIDADES.....	15
VECTORES.....	16
Resolución de triángulos rectángulos .....	16
SISTEMA DE COORDENADAS Y MARCOS DE REFERENCIA .....	17
COORDENADAS RECTANGULARES .....	17
COORDENADAS POLARES.....	18
Transporte de vectores libres al plano.....	19
Coordenadas geográficas.....	19
Componentes vectoriales de un vector .....	20
EXPRESIÓN DE UN VECTOR A TÉRMINOS DE LOS VECTORES UNITARIOS.....	20
COSENOS DIRECTORES .....	21
El Unitario.....	21
VECTORES EN EL ESPACIO .....	21
TEOREMA DE SENOS .....	23
TEOREMA DE COSENOS.....	24
SUMA Y RESTA VECTORIAL.....	27
Suma de vectores .....	27
Resta de vectores .....	27
MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UN VECTOR .....	36
PRODUCTO ESCALAR.....	39
PRODUCTO VECTORIAL .....	44

Componentes de los vectores.....	44
Cálculo del área del paralelogramo.....	45
CINEMÁTICA.....	53
Desplazamiento ( $\vec{Ar}$ ).....	53
Velocidad media ( $\vec{v}_m$ ).....	54
Rapidez media ( $V_m$ ).....	54
Aceleración $\vec{a}$ .....	55
MOVIMIENTOS.....	61
Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.).....	61
Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado.....	64
GRÁFICO POSICIÓN CONTRA TIEMPO.....	71
GRÁFICO VELOCIDAD CONTRA TIEMPO.....	72
Gráfico Aceleración Contra Tiempo.....	73
Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado.....	74
Movimiento Rectilíneo Uniforme.....	76
ANÁLISIS GRAFICO.....	77
APLICACIONES DEL M.R.U.....	81
Lanzamiento Vertical.....	82
Tipos De Lanzamiento Verticales.....	82
Lanzamiento Vertical Hacia Arriba.....	82
Lanzamiento Vertical Hacia Abajo O Caída Libre.....	82
Ecuaciones.....	82
MOVIMIENTO EN 2 DIMENSIONES.....	86
Velocidad y aceleración de 2 dimensiones.....	86
ECUACIONES.....	88
DINÁMICA.....	95
Introducción.....	95
Interacciones.....	95
LEYES DE NEWTON.....	96
• <b>Primera Ley de Newton</b> .....	96
<b>Fuerza neta externa</b> .....	96

- **Segunda Ley de Newton** ..... 97
- MOVIMIENTO CIRCULAR..... 106
- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME MCU ..... 110
- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO ..... 115
- CUADRO DE COMPARACIONES ..... 116
- DINÁMICA LINEAL ..... 121
- DINÁMICA CIRCULAR ..... 148
- TORQUE Y DINÁMICA ROTACIONAL..... 155
  - Torque ..... 156
  - Inercia rotacional o momento de inercia..... 157
  - Inercia rotacional de cuerpos extensos ..... 159
  - Torque y aceleración angular..... 160
  - Ecuación general de la dinámica rotacional..... 161
  - Equilibrio rotacional ..... 162
  - Equilibrio total..... 163
  - Cantidad de movimiento angular (CMA) ..... 164
  - Ecuación impulso angular-CMA ..... 165
  - Principio de conservación de la cantidad de movimiento angular ..... 165
  - Cantidad de movimiento angular asociado al movimiento lineal..... 166



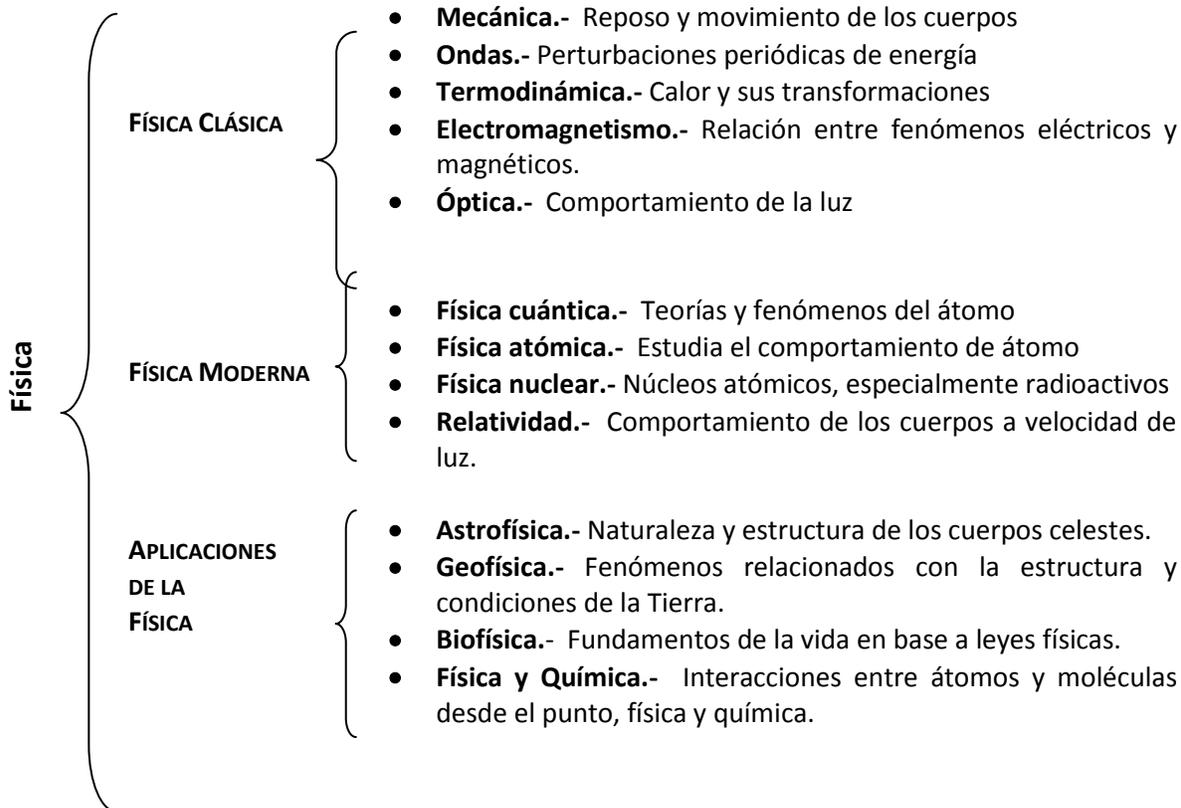
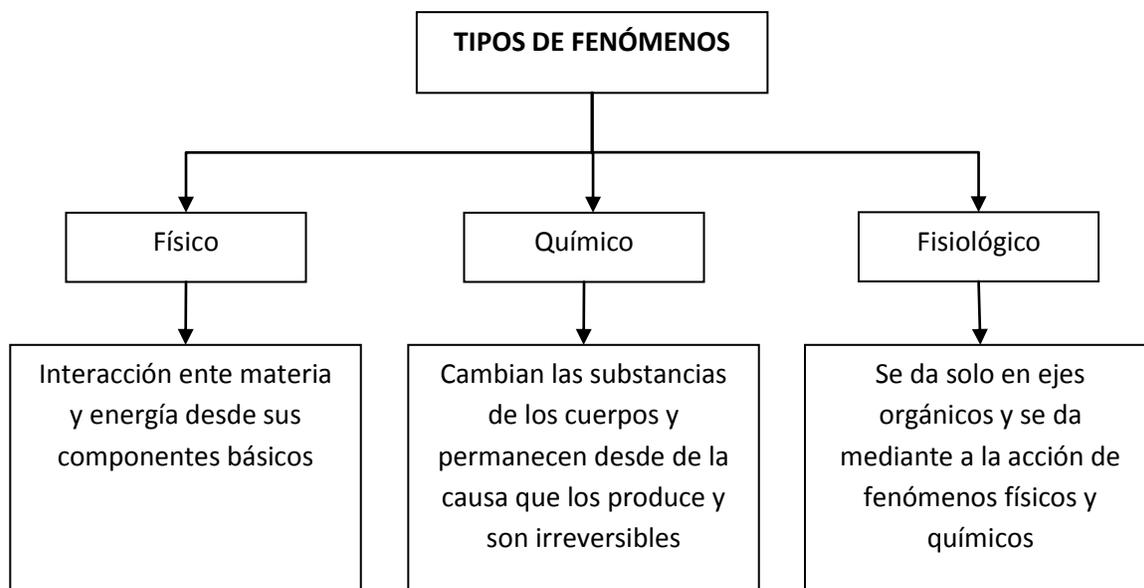
## DEFINICIÓN DE FÍSICA

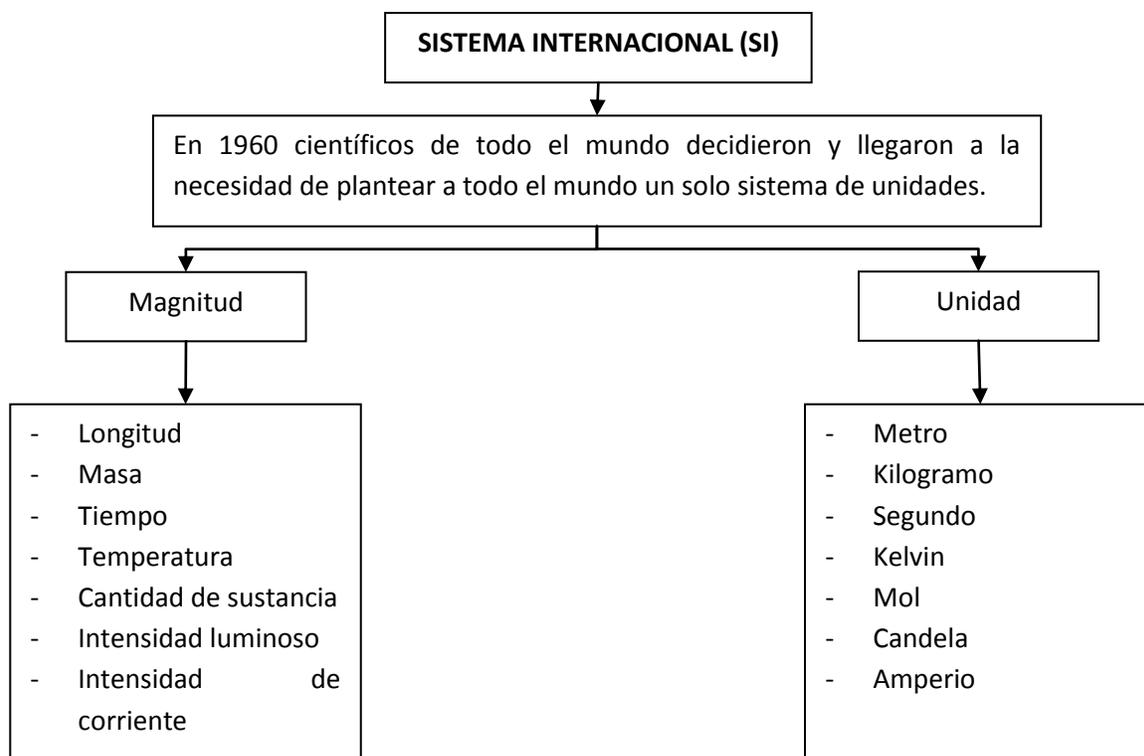
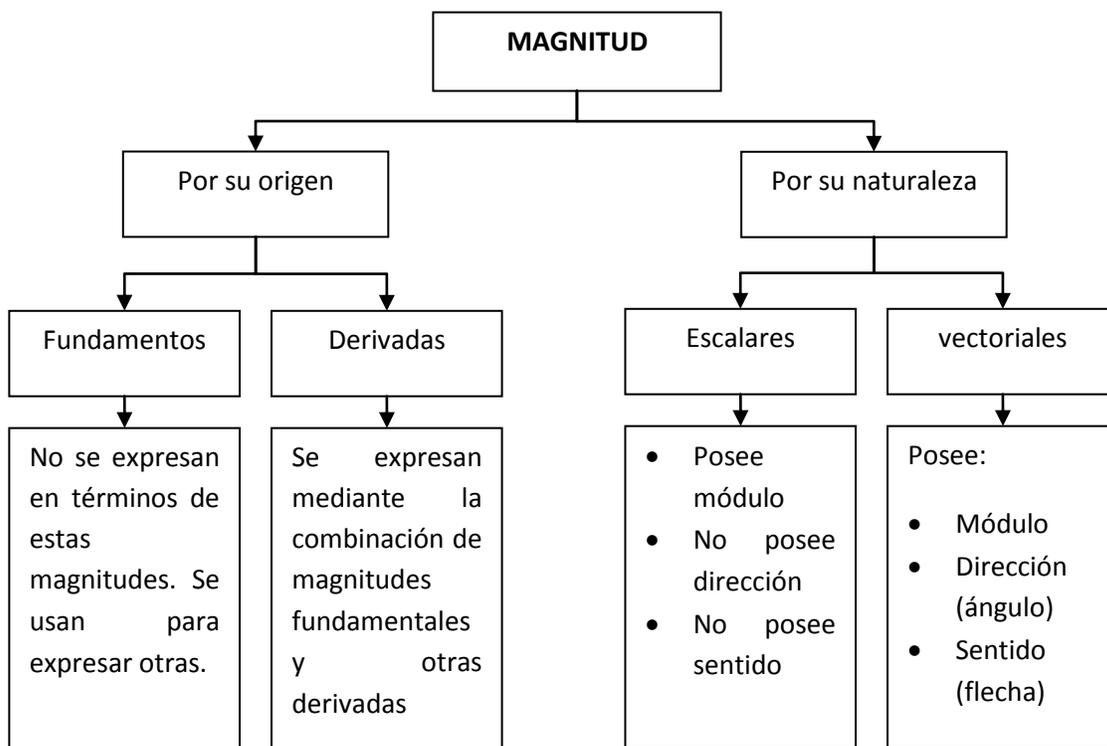


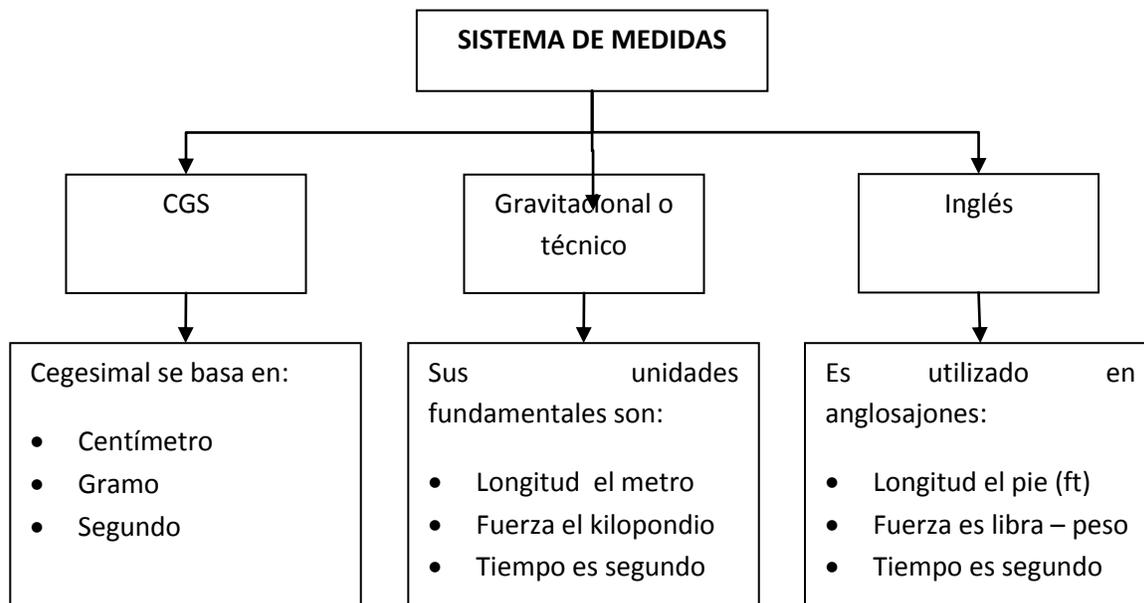
- Propiedades generales de cuerpos
- Transferencia de energía
- Fuerzas modificadores
- Interacción entre partículas



## TIPOS DE FENÓMENOS







	<b>SI</b>	<b>CGS</b>	<b>TÉCNICO</b>	<b>INGLÉS</b>
<b>LONGITUD</b>	Metro (m)	Centímetro (cm)	Metro (m)	Pie (ft)
<b>MASA</b>	Kilogramo (Kg)	Gramo (g)	Unidad técnica de masa (utm)	Slug
<b>TIEMPO</b>	Segundo (s)	Segundo (s)	Segundo (s)	Segundo (s)

## FÍSICA

SISTEMA INTERNACIONAL (S.I)			
Magnitud	Unidad	Símbolo	Dimensión
Longitud	Metro	m	L
Masa	Kilogramo	Kg	M
Tiempo	Segundo	s	T
Temperatura	Kelvin	$^{\circ}\text{K}$	$\theta$

### ANÁLISIS DIMENSIONAL

Nos permite saber cómo se relacionan las magnitudes derivadas con las fundamentales, además nos permite verificar si una fórmula física es correcta o no mediante el principio de homogeneidad dimensional.

### ECUACIONES DIMENSIONALES

Son expresiones matemáticas que nos permiten colocar las magnitudes derivadas en función de las fundamentales a través de procesos algebraicos excepto la suma y la resta.

### PROPIEDADES

#### 1. Principio de homogeneidad dimensional o principio de FOURIER

Nos indica que cada uno de los términos (monomios) de una ecuación serán iguales dimensionales.

En la práctica debemos cambiar los signos de suma o resta de una ecuación por el igual.

#### 2. Términos adimensionales

Los ángulos, los números, las KSTES numéricas, los logaritmos, las funciones trigonométricas son considerados términos sin dimensión por lo que se asume que su dimensión es igual a la unidad siempre que sean cocientes o coeficientes, caso contrario se conserva su valor.

### 3. Suma o resta

No se cumple la suma o resta algebraica.

$$[L] + [L] = [L]$$

$$[M] + X = [M]$$

### 4. Todas las ecuaciones dimensionales deben expresarse como productos y no como cocientes

$$\frac{ML}{T^2} MLT^2$$

## EJERCICIOS

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

**Determinar las dimensiones de G**

$$MLT^2 = \frac{[G]M.M}{L^2}$$

$$\frac{ML^3T^{-2}}{M^2} = [G]$$

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

F= Fuerza

G= Konstante

m1, m2 = masa

r= distancia.

$$m_1 m_2 = M$$

$$r = L$$

$$F = Kg \frac{m}{s^2} = MLT^2$$

**Determinar el valor de x y y**

$$P = \frac{1}{3} D^x V^y$$

$$ML^{-1}T^{-2} = \frac{1}{3} (M.L^{-3})^x (LT^{-1})^y$$

$$ML^{-1}T^{-2} M^x L^{-3x} L^y T^{-y}$$

$$ML^{-1}T^{-2} M^x L^{-3x} L^y T^{-y}$$

$$M = M^x \quad T^{-2} = T^{-y}$$

$$X = 1 \quad Y = 2$$

$P =$  Presión

$D =$  Densidad

$V =$  Velocidad

$$P = \frac{F}{A} = \frac{Kgm}{m^2 s^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$D = \frac{m}{V} = M.L^{-3}$$

$$V = \frac{m}{s} = LT^{-1}$$

**Determinar [X]**

$$at^2 = 3e(m+x)4 \quad \text{como no hay datos}$$

$$M = [X]$$

**Determinar Ax A/B**

$$E = AV^2 BP$$

$$E = AV^2 = BP$$

$$AV^2 = BP$$

$$A(LT^{-1}) = B(ML^{-1}T^{-2})$$

$$\frac{A}{B} = \frac{ML^{-1}T^2}{LT^{-1}}$$

$$\frac{A}{B} = ML^{-2}T^{-1}$$

$E =$  Energía

$V =$  Velocidad

$P =$  Presión

$$E = Kg \frac{m}{s^2} m = ML^2T^{-2}$$

$$V = LT^{-1}$$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{Kg}{m^2} \frac{m}{s^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

## CIFRAS SIGNIFICATIVAS

**Cifras concretas.-** Son aquellas que resultan de la medición directa de las marcas del instrumento de medida.

**Cifras estimadas.-** También son llamadas cifras dudosas, aproximadas o inciertas y se obtienen de la aproximación razonable de una fracción de la división, más pequeña de instrumento.

Tolerancia ( $\pm$ )     $103 \pm 0,7$   
                              (102,3)  
                              (103.7)

Las cifras significativas están conformadas por las cifras estimadas y concretas.

### Reglas para determinar el número de cifras significativas

a. Todo dígito diferente de cero es una cifra significativa

456,728    6 CS

b. Si el cero o los ceros aparecen entre 2 dígitos distintos de cero se les considera como cifra significativa

9 000 56,768    9 CS

560.0789        7 CS

c. Si el cero o los ceros aparecen para indicar la posición decimal de un número mayor o igual a la unidad se le considera como cifras significativas.

56 000 Km        5 CS

1.00 Kg            3 CS

- d. Si el cero o los ceros aparecen para indicar posición decimal en un número menor que la unidad no se los considera cifra significativa.

0.034                    2 CS

0.009                    1 CS

- e. Si el cero o los ceros aparecen a la derecha de la posición decimal después de dígitos distintos de cero en un número menor que la unidad se los considera cifras significativas.

0.340                    3 CS

0.009000                4 CS

- f. Si el cero o los ceros aparecen después de dígitos distintos de cero en un número mayor que la unidad a veces se los considera como cifras significativas.

340                        2 o 3

50 000                    1 o 5

## REGLA DE REDONDEO

Para poder aplicar el redondeo en ciertas cantidades solamente se lo puede hacer en la parte decimal.

### 1. Regla

Si el dígito o los dígitos decimales a eliminar son mayores o iguales a 5.500,50, etc. la cifra que le antecede aumenta en 1. **Ejemplo**

Redondear                456.0557 → a            4 CS

**456,1**

Redondear                7,999 →            a            2 CS

**8,00**

## 2. Regla

Si el dígito o los dígitos a eliminar son menores a 5, 50, 300, etc. La cifra que le antecede queda igual.

**Redondear**                      789,0477      →      4 CS

**788,0**

**Redondear**                      789,047 → a 1 CS

**789      → 7,89 x 10<sup>2</sup> → 8 x 10<sup>2</sup>**

## TEORÍA DE LOS ERRORES

1. Cuando realizamos un experimento y medimos varias veces una misma magnitud no obtenemos un mismo resultado, esto se debe no solo a las condiciones físicas de la medida sino a la temperatura, presión y humedad.
2. También se deben los errores cometidos por el observador
3. Las medidas realizadas no son totalmente confiables muchas veces se limitan a la exactitud y la precisión.

La magnitud a medida que se obtiene de un aparato o instrumento se llaman DIRECTA y las que se obtienen de una formula se llaman INDIRECTA.

### Ejemplo

$$V = IR$$

$$V = 110V$$

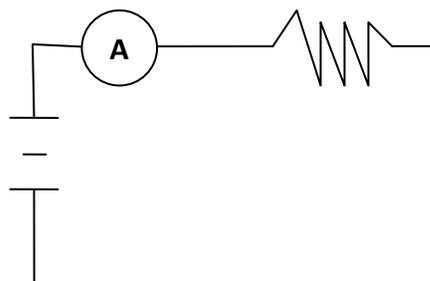
$$R = 1\Omega$$

$$I = ?$$

$$I = \frac{V}{R}$$

$$I = \frac{110V}{1\Omega}$$

$$I = 110A$$



$$I = 110 \pm 0,6A$$

$$I_1 = 109.1A$$

$$I_1 = 110,6$$

Toda medida debe estar formada por el valor estimado, el valor de la medida y la unidad de medida usada.

$$\text{Medida} = (\text{Valor estimado} \pm \text{error}) \mu$$

### CONVERSIÓN DE UNIDADES

Un factor de conversión es una fracción cuyo numerador y denominador son la misma cantidad expresada en diferentes unidades.

#### Ejemplo

2,54 y 1 in ya que no una pulgada es 2,54 cm.

Esta relación nos permite escribir 2 factores de conversión.

$$\frac{2,54\text{cm}}{1\text{in}} \quad \text{ó} \quad \frac{1\text{in}}{2,54\text{cm}}$$

#### Ejemplo

- Convertir 23,50 cm a in.

$$23,5\text{cm} \left| \frac{1\text{in}}{2,54\text{cm}} \right| = 9,251\text{ in} \rightarrow 9,3\text{ in}$$

- Convertir 3 toneladas

$$3\text{Tm} \left| \frac{1000\text{Kg}}{1\text{Tm}} \right| \left| \frac{6,85 \times 10^2\text{slug}}{1\text{Kg}} \right| = 205,5\text{ slug}$$

- Convertir 78 unidades técnicas de masa a toneladas

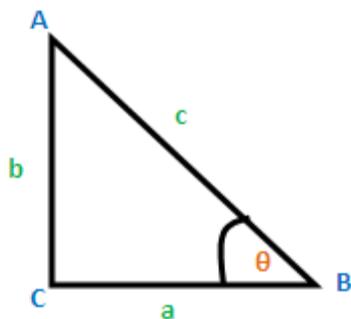
$$78\text{utm} \left| \frac{9,81\text{Kg}}{1\text{utm}} \right| \left| \frac{1\text{Tm}}{1000\text{Kg}} \right| = 0,76\text{tm} //$$

## VECTORES

Se lo representa con un segmento dirigido a la recta, la magnitud y la dirección de vector están representadas por la longitud y la dirección respectivamente del segmento dirigido de la recta.

### Resolución de triángulos rectángulos

Un triángulo rectángulo es una figura formada por 3 segmentos que unen 3 puntos no colineales y uno de sus ángulos no interiores mide  $90^\circ$  y los otros 2 ángulos son complementarios.



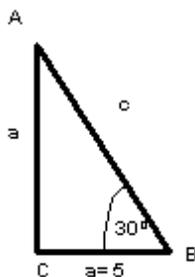
#### Funciones trigonométricas

$$\text{Sen } \theta = \frac{b}{c} \qquad c^2 = b^2 + a^2$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{a}{c}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{b}{a}$$

#### Ejemplos



#### Hallar b y c

$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{a}{c}$$

$$\text{Sen } 30 = \frac{b}{5,77}$$

$$c = \frac{5}{\sqrt{3}} 2$$

$$b = \frac{1}{2} 5,77$$

$$c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

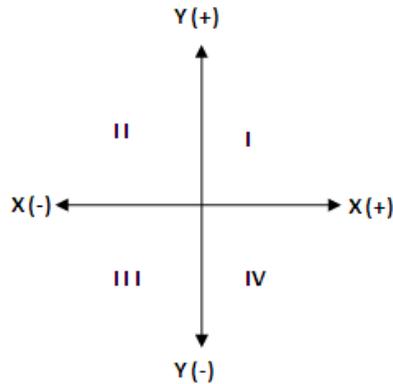
$$b = 2,88m //$$

$$c = 5,77m$$



## SISTEMA DE COORDENADAS Y MARCOS DE REFERENCIA

Está formado por 2 ejes perpendiculares entre si, es decir forman 4 ángulos rectos, su punto de intersección se denomina origen de coordenadas y es designado por la letra O, el eje horizontal se llama eje de las abscisas y el eje vertical se llama eje de las coordenadas.



La posición de un punto en el plano xy es la intersección de la abscisa x y la ordenada y. A este punto se la denomina coordenadas rectangulares.

## COORDENADAS RECTANGULARES

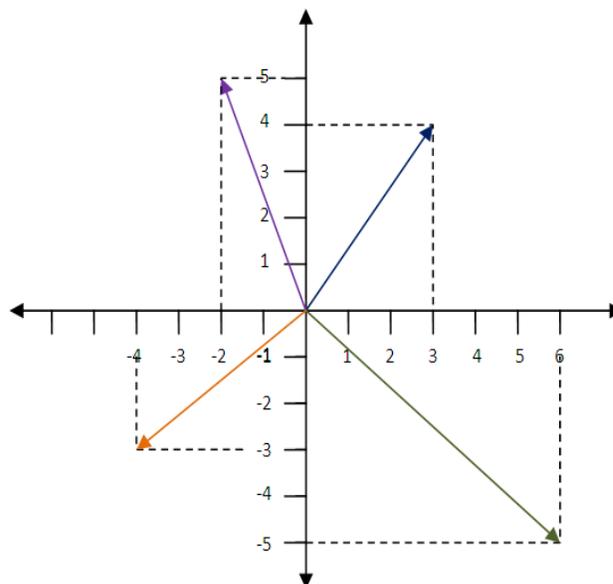
**Grafique los siguientes puntos**

A= (3, 4)

B= (-2, 5)

C= (-4, -3)

D= (6, -5)



## COORDENADAS POLARES

Están formados por un eje de referencia  $x$  llamado eje polar que en un punto cualquiera de este se encuentra el eje de coordenadas (0) llamado origen o polo.

$r$  es el radio vector y representa al modulo de la coordenada, es decir la distancia positiva desde el origen hasta el punto final de la coordenada.

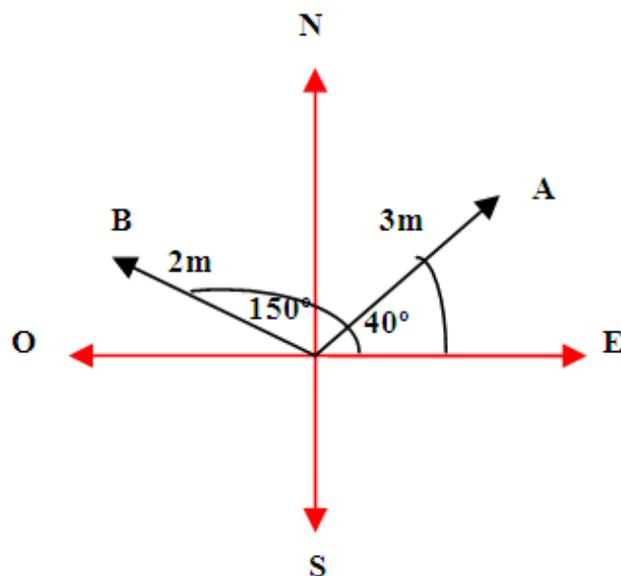
$\theta$  es el ángulo polar y corresponde a la medida del ángulo formado entre el eje polar y el radio vector en sentido anti horario.

### Ejemplos

**Grafique las siguientes coordenadas**

$$A = (3m, 40^\circ)$$

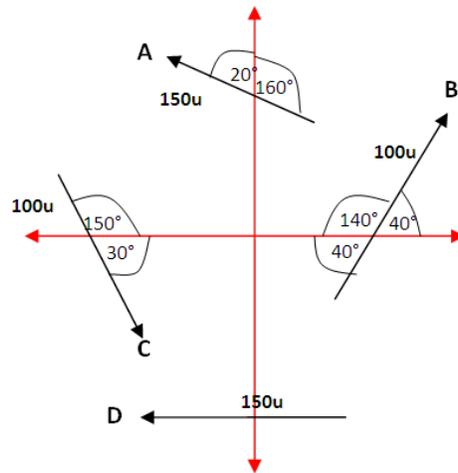
$$B = (2, 150^\circ)$$



2 vectores son iguales si tienen igual magnitud y dirección esto implica que un vector puede ser trasladado siempre que se conserve su magnitud y dirección.



## Transporte de vectores libres al plano



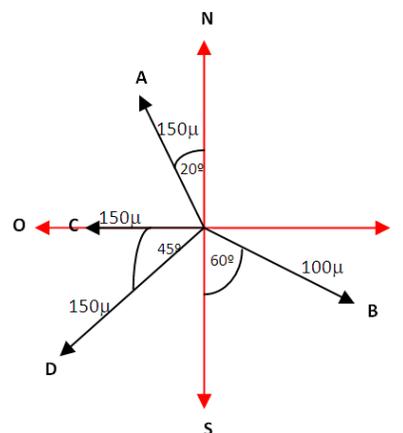
## Coordenadas geográficas

Están formadas por 2 ejes perpendiculares entre si, el punto de intersección divide el plano en 4 puntos en el plano, queda determinado por un par ordenado (r, rumbo) r es la distancia o módulo y el rumbo representa la dirección. Para representar rumbo, primero se menciona la palabra Norte o Sur y luego el ángulo agudo y finalmente la posición Este u Oeste.

### Ejemplo

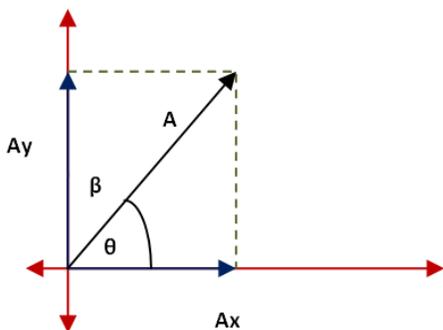
Representar las siguientes coordenadas geográficas

- $A = (150 \mu; N 20^\circ O)$
- $B = (100 \mu; S 60^\circ E)$
- $C = (150 \mu; O)$
- $D = (150 \mu; 45^\circ S)$



## Componentes vectoriales de un vector

Existe un número infinito de descomponer un vector en 2 o tres etc. vectores cualquiera sin embargo solo existe una forma de descomponer un vector A en 2 vectores de modo que el uno sea paralelo al eje x y el otro paralelo al eje, a estos 2 vectores se los llama componentes vectoriales rectangulares de vector A o simplemente componentes vectoriales que se denotaran Ax y Ay y se obtendrán al proyectar el vector sobre los ejes Ax, Ay.



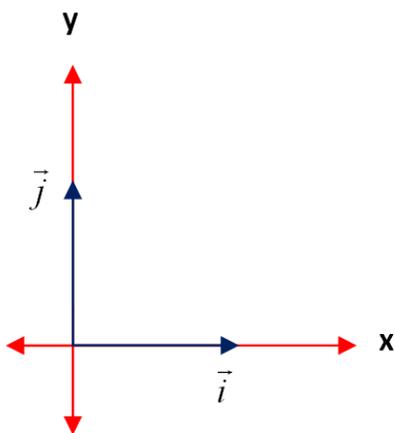
$$\cos \theta = \frac{Ax}{A} \quad \sin \theta = \frac{Ay}{A} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{Ay}{Ax}$$

$$Ax = A \cos \theta \quad Ay = A \sin \theta \quad A^2 = Ax^2 + Ay^2$$

**Nota:** La magnitud de un vector es siempre positiva pero sus componentes Ax y Ay pueden ser positivos o negativos o cero.

## EXPRESIÓN DE UN VECTOR A TÉRMINOS DE LOS VECTORES UNITARIOS

Las direcciones positivas de los ejes x, y están definidos por los vectores unitarios  $(\vec{i}, \vec{j})$ .



Los vectores  $(\vec{i}, \vec{j})$  siempre son menores que 1

$$A = Ax\vec{i} + Ay\vec{j}$$

## COSENOS DIRECTORES

Los cosenos o ángulos directores son aquellos que forma el vector con los ejes positivos x,y de sistema de coordenadas rectangulares y varían entre 0 y 180°; los ángulos directores en el plano son  $\alpha$ , es el vector que se forma con el eje positivo (x) y  $\beta$  es el que se forma con el eje positivo (y).

$$\begin{array}{l} \alpha(x) \\ \beta(y) \end{array} \quad \begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{Ax}{A} \\ (1) \quad Ax = A.\cos\alpha \end{array} \quad \begin{array}{l} \cos\beta = \frac{Ay}{A} \\ (2) \quad Ay = A.\cos\beta \end{array} \quad (3) \quad A^2 = Ax^2 + Ay^2$$

1, 2 en (3)

$$A^2 = (A.\cos\alpha)^2 + (A.\cos\beta)^2$$

$$A^2 = A^2.\cos^2\alpha + A^2.\cos^2\beta$$

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$$

## El Unitario

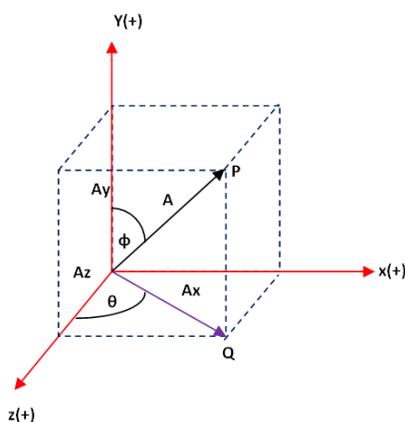
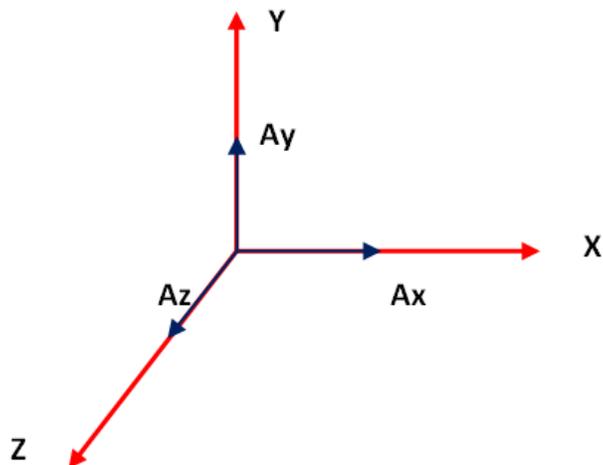
El vector unitario es igual al vector en sus vectores base dividido a su modelo

$$\vec{\mu}_A = \frac{(Ax\vec{i} + Ay\vec{j})}{A}$$

$$\vec{\mu}_A = \frac{Ax\vec{i}}{A} + \frac{Ay\vec{j}}{A} \quad \text{ó} \quad \vec{\mu}_A = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j}$$

## VECTORES EN EL ESPACIO

En el espacio son válidos todos los conceptos vistos para vectores en el plano, cambia la forma de indicar la dirección se aumenta una componente y se añade el vector unitario que da la dirección del vector A en el eje positivo Z.



$$\cos \phi = \frac{A_y}{A}$$

$$A_y = A \cdot \cos \phi$$

$$\sin \phi = \frac{\overline{AQ}}{A}$$

$$\overline{OQ} = A \cdot \sin \phi$$

$$xy = xz$$

$$OA = AQ$$

$$\cos \theta = \frac{A_2}{OQ}$$

$$A_2 = \overline{OQ} \cdot \cos \theta$$

$$A_2 = A \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta$$

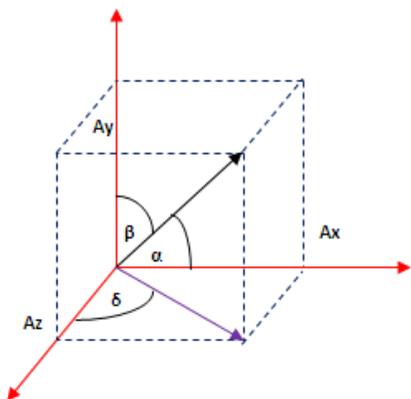
$$\vec{A} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_2 \vec{k})$$

$$\sin \theta = \frac{A_x}{OQ}$$

$$A_x = \sin \theta \cdot \overline{OQ}$$

$$A_x = A \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta$$

También se puede indicar la dirección de un vector en el espacio con los ángulos  $\alpha, \beta, \delta$  en forma que el vector tendrá en los ejes x positivo, y positivo y z negativo, estos ángulos se los denomina ángulos directores.



$$\cos\alpha = \frac{Ax}{A} \quad \cos\beta = \frac{Ay}{A} \quad \cos\delta = \frac{Az}{A}$$

$$Ax = A.\cos\alpha \quad Ay = A.\cos\beta \quad Az = A.\cos\delta$$

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2 + Az^2}$$

$$A^2 = Ax^2 + Ay^2 + Az^2$$

$$A^2 = (A.\cos\alpha)^2 + (A.\cos\beta)^2 + (A.\cos\delta)^2$$

$$\vec{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

$$\vec{\mu}_A = \frac{Ax}{A}\vec{i} + \frac{Ay}{A}\vec{j} + \frac{Az}{A}\vec{k}$$

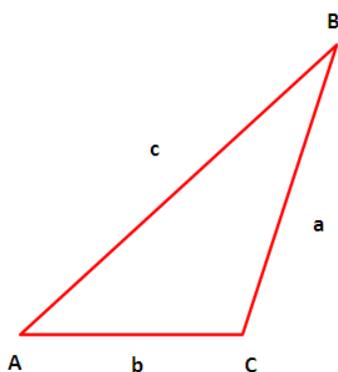
$$\vec{\mu}_A = \frac{A.\cos\alpha}{A}\vec{i} + \frac{A.\cos\beta}{A}\vec{j} + \frac{A.\cos\delta}{A}\vec{k}$$

$$\vec{u}_A = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\delta\vec{k}$$

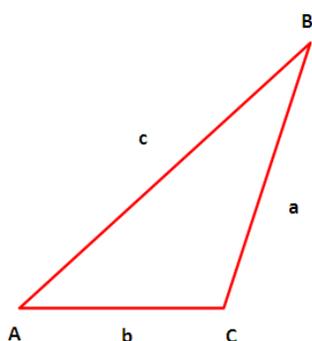
### TEOREMA DE SENOS

$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$

El teorema de senos dice que los lados de un triángulo no rectángulo son proporcionales con los senos de sus ángulos opuestos.



## TEOREMA DE COSENOS



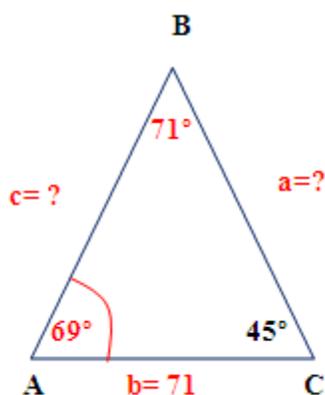
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

## EJERCICIOS

Encontrar los lados a y c mediante el teorema de senos y cosenos



$$\frac{\text{Sen} C}{c} = \frac{\text{Sen} B}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Sen} A}{\text{Sen} B}$$

$$\frac{\text{Sen} 45}{c} = \frac{\text{Sen} 71}{71}$$

$$\frac{a}{71} = \frac{\text{Sen} 64}{\text{Sen} 71}$$

$$c = \frac{0.707(71)}{0.945}$$

$$a = \frac{71(\text{Sen} 64)}{\text{Sen} 71}$$

$$c = 53.1$$

$$a = 67.5$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos c$$

$$c^2 = (67.5)^2 + (71)^2 - 2(67.5)(71)\cos 45$$

$$c = 53.1$$

Si el  $\text{Cos } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$  y el vector forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje y, determinar:

- Los cosenos directores
- Si el módulo de vector es de 5u. encontrar el vector en función de los unitarios normalizados.

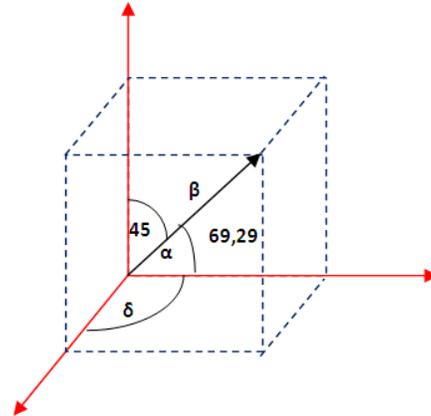
Datos

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \alpha \Rightarrow 69.29^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$

a)  $\alpha, \beta, \delta = ?$

b)  $\vec{A} = (Ax\vec{i} + Ay\vec{j} + Az\vec{k})$



a.  $1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \delta$

$$\cos^2 \delta = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$$

$$\cos^2 \delta = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \cos^2(45)$$

$$\cos^2 \delta = 1 - \frac{2}{16} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\cos^2 \delta = 1 - \frac{2}{16} - \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \delta = \frac{16 - 2 - 8}{16}$$

$$\cos^2 \delta = \frac{6}{16}$$

$$\cos^2 \delta = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

b.  $\vec{\mu}_A = (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \delta \vec{k})$

$$\vec{\mu}_A = \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{\sqrt{16}}{4} \vec{k} \right)$$

$$\vec{A} = A \vec{\mu}_A$$

$$\vec{A} = 5 \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{\sqrt{16}}{4} \vec{k} \right)$$

$$\vec{A} = \left( \frac{5\sqrt{2}}{4} \vec{i} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{5\sqrt{16}}{4} \vec{k} \right)$$

Dado el siguiente vector en el espacio  $\vec{A} = (\sqrt{3}a\vec{i} + 2a\vec{j} - 3a\vec{k})$ . Determinar

- Los cosenos directores
- El vector unitario paralelo al vector proyección en el plano xz
- El ángulo que forma el vector con su proyección en el eje y

**Datos**

$$\vec{A} = (\sqrt{3}a\vec{i} + 2a\vec{j} - 3a\vec{k})$$

a.  $\cos\alpha = ?$

$\cos\beta = ?$

$\cos\delta = ?$

b.  $\mu_{Axz} = ?$

c.  $\angle -y$

b.  $\vec{A}_{xz} = (\sqrt{3}a\vec{i} - 3a\vec{k})$

$$\vec{\mu}_{Axz} = \frac{\vec{A}_{xz}}{A_{xz}}$$

$$\vec{\mu}_{Axz} = \frac{\sqrt{3}a\vec{i}}{2a\sqrt{3}} - \frac{3a\vec{k}}{2a\sqrt{3}}$$

$$\vec{\mu}_{Axz} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$$

a.  $A^2 = Ax^2 + Ay^2 + Az^2$

$$\sqrt{A^2} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (2a)^2 + (-3a)^2}$$

$$A = \sqrt{3a^2 + 4a^2 + 9a^2}$$

$$A = \sqrt{16a^2}$$

$$A = 4a$$

$$A_{xz} = \sqrt{Ax^2 + Az^2}$$

$$A_{xz} = \sqrt{3a^2 + 9a^2}$$

$$A_{xz} = \sqrt{12a^2}$$

$$A_{xz} = 2a\sqrt{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ax}{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ay}{A} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\delta = \frac{Az}{A} = \frac{-3}{4}$$

c.  $\cos\beta = \frac{1}{2}$

$$\beta = 60$$

## SUMA Y RESTA VECTORIAL

### Suma de vectores

- **Método paralelogramo.-** La resultante de 2 vectores cuyas direcciones forman un ángulo que se presentan con un vector cuya dirección es la diagonal de paralelogramo formado por los vectores dados cuyo origen coincide con el punto de ambos.
- **Método analítico.-** Cuando los vectores se encuentran expresados en función de sus vectores base.

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (Ax\vec{i} + Ay\vec{j} + Az\vec{k}) \\ \vec{B} &= (Bx\vec{i} + By\vec{j} + Bz\vec{k}) \\ \vec{A} + \vec{B} &= (Ax + Bx)\vec{i} + (Ay + By)\vec{j} + (Az + Bz)\vec{k}\end{aligned}$$

### Resta de vectores

Para restar el vector  $\vec{B}$  del vector  $\vec{A}$  basta con sumar geoméricamente el vector  $\vec{A}$  con el opuesto al  $\vec{B}$  (todos sus signos cambiados) es decir:

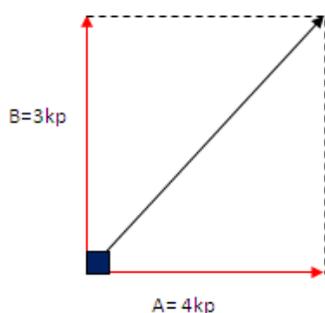
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (Ax - Bx)\vec{i} + (Ay - By)\vec{j} + (Az - Bz)\vec{k}$$

### EJERCICIOS

Hallar el vector resultante de 2 vectores Fuerza de 2kp y 3kp aplicados en un punto O y formando un ángulo de:

- 90°
- 60°



$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{A}{C}$$

$$C = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$C = 5kp$$

$$\alpha = 36.9^\circ$$



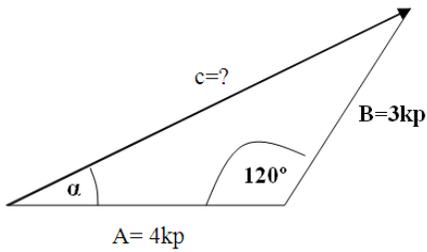
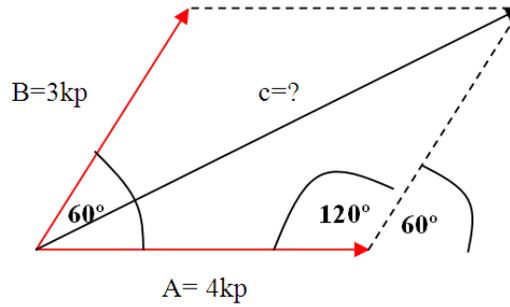
$$\vec{C} = (5kp; 36.9^\circ)$$

**Datos**

$$\vec{A} = 4kp$$

$$\vec{B} = 3kp$$

$$\vec{C} = ?$$



$$\frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$

$$\text{Sen} \alpha = \frac{3(\text{Sen}120^\circ)}{6,08}$$

$$\alpha = 25.19^\circ$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{Cos}C$$

$$c^2 = (4)^2 + (3)^2 - 2(4)(3)\text{Cos}120$$

$$c^2 = 16k^2 + 9k^2 - 24k^2 \text{Cos}120$$

$$c^2 = 37k^2$$

$$c = 6.08kp$$

$$\vec{c} = (6.08kp; 25.29^\circ)$$

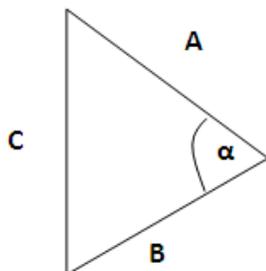
Hallar el ángulo que deben formar 2 vectores de igual módulo para que su resultantes sea la mitad del valor de uno de ellos.

**Datos**

$$\alpha = ?$$

$$A = B = X$$

$$C = \frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{X}{2}$$



$$c^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot \cos \alpha$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = (x)^2 + (x)^2 - 2(x)(x)\cos \alpha$$

$$\frac{x^2}{4} - 2x^2 = -2x^2 \cos \alpha$$

$$-\frac{7x^2}{4} = -2x^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{7x^2}{4 \cdot 2x^2} = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{8}$$

$$\alpha = 29^\circ$$

Dos vectores forman entre si un ángulo de  $53^\circ$  uno de ellos es de  $75u$  y su resultante es de  $300u$ . Hallar la magnitud del otro vector y la dirección resultante.

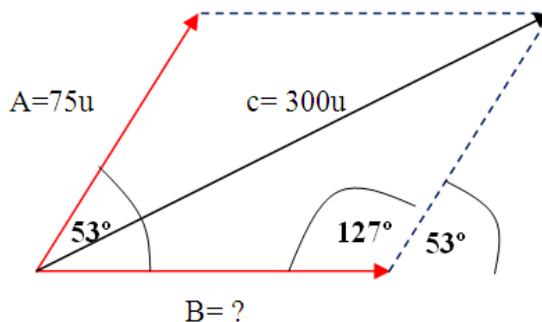
**Datos**

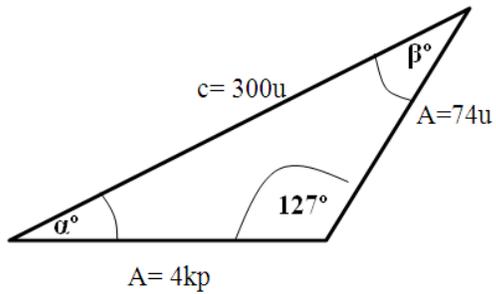
$$\alpha = 53^\circ$$

$$A = 75u$$

$$B = ?$$

$$C = 300u$$





$$\frac{c}{\text{Sen } C} = \frac{a}{\text{Sen } A}$$

$$\frac{300}{\text{Sen } 127} = \frac{75}{\text{Sen } \alpha}$$

$$\text{Sen } \alpha (300) = 75 \cdot \text{Sen } 127$$

$$\text{Sen } \alpha = \frac{75 \cdot \text{Sen } 127}{300}$$

$$\text{Sen } \alpha = 0,199$$

$$\alpha = 11,52^\circ$$

$$\beta = 180 - 11,52^\circ - 127$$

$$\beta = 41,48^\circ$$

$$B^2 = C^2 + A^2 - 2AC \cdot \text{Cos } \beta$$

$$B^2 = (300u)^2 + (75u)^2 - 2(300)(75)\text{Cos}(41,48)$$

$$B^2 = 90000u^2 + 5625u^2 - 45000(0,749)$$

$$B^2 = 61920$$

$$B = 248,83u$$

Un excursionista inicia un viaje caminando primero 25 km SE desde su base. Al segundo día camina 40 km. En una dirección N30° E en cuyo punto descubre la torre de guardabosque. Determinar:

- Establezca las componentes del establecimiento del excursionista en el primero y segundo día.
- Establezca las componentes de desplazamiento total de excursionista para el viaje.
- Determine la magnitud y dirección del desplazamiento desde la base

**Datos**

$$\vec{A} = (25 \text{ Km}; SE)$$

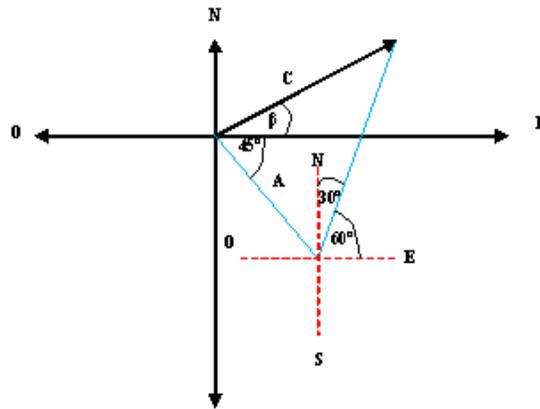
$$\vec{B} = (40 \text{ Km} : M 30^\circ E)$$

$$a.) \vec{A} = (A_x, A_y)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y)$$

$$b.) \vec{C} = ?$$

$$c.) (c, \theta)$$



$$a.) A_x = A \cdot \cos \alpha$$

$$A_x = 25 \text{ Km} (\cos 45)$$

$$A_x = 17,68$$

$$A_y = A \cdot \sin \alpha$$

$$A_y = -17,68 \text{ Km}$$

$$b.) B_x = B \cdot \cos \delta$$

$$B_y = B \cdot \sin \delta$$

$$B_x = 40 \text{ km} \cdot \cos 60^\circ$$

$$B_y = 40 \text{ Km} \cdot \sin 60^\circ$$

$$B_x = 20^\circ$$

$$B_y = 34.64$$

$$c.) C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$$

$$C = \sqrt{37,68^2 + 16,69^2}$$

$$C = 41,32 \text{ Km}$$

$$\cos \beta^\circ = \frac{C_x}{C}$$

$$\cos \beta^\circ = \frac{37,68}{41,2}$$

$$\beta = 24,22^\circ$$

$$\vec{C} = (41,32 \text{ Km}; 24,22^\circ)$$

$$\vec{A} = (17,68\vec{i} - 17,68\vec{j}) \text{ Km}$$

$$+ \vec{B} = (20\vec{i} + 34,64\vec{j}) \text{ Km}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (37,68\vec{i} + 16,69\vec{j}) \text{ Km}$$

Un avión vuela desde su campamento base hasta el lago A a una distancia de 280 Km en dirección N 70° E después de dejar caer provisiones vuela hacia el lago B ubicado a 190 Km N 60° O de lago A. Determine gráficamente la distancia y a la dirección del lago B al campamento base.

**Datos**

$$\vec{A} = (280\text{Km}; N70^\circ E)$$

$$\vec{B} = (190\text{Km}; N60^\circ O)$$

$$Ax = A \cdot \cos \theta_1$$

$$Ay = A \cdot \sin \theta_1$$

$$Ax = 280 \cdot \text{Km} \cdot \cos 20^\circ$$

$$Ay = 280 \cdot \text{Km} \cdot \sin 20^\circ$$

$$Ax = 263,11\text{Km}$$

$$Ay = 95,77\text{Km}$$

$$Bx = A \cdot \cos \theta_2$$

$$By = A \cdot \sin \theta_1$$

$$Bx = 190 \cdot \text{Km} \cdot \cos 150^\circ$$

$$By = 190 \cdot \text{Km} \cdot \sin 150^\circ$$

$$Bx = 164,54\text{Km}$$

$$By = 95 \cdot \text{Km}$$

$$\vec{A} = (263,11\vec{i} + 95,77\vec{j})\text{Km}$$

$$C = \sqrt{Cx^2 + Cy^2}$$

$$\vec{B} = (-164,54\vec{i} + 95\vec{j})\text{Km}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (98,57\vec{i} + 190,77\vec{j})\text{Km}$$

$$C = \sqrt{(98,57)^2 + (190,77)^2}$$

$$C = 214,73\text{Km}$$

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{Cy}{Cx}$$

$$\text{tg } \theta_2 = \frac{190,77\text{Km}}{98,57\text{Km}}$$

$$\theta_3 = 62,67^\circ //$$

Una montaña rusa se mueve 200 ft horizontalmente en el eje positivo de los x y después viaja 135,77 en un ángulo de 30° sobre la horizontal. Luego recorre 135 ft. En un ángulo de 40° debajo de la horizontal. ¿Cuál es su desplazamiento desde su punto de partida?. Utilice técnicas gráficas.

**Datos**

$$\vec{A} = (200\text{ft}; 0^\circ)$$

$$\vec{B} = (135\text{ft}; 30^\circ)$$

$$\vec{C} = (135\text{ft}; 320^\circ)$$

$$B = B_x; B_y$$

$$A = A_x; A_y$$

$$B_x = B \cdot \cos 30^\circ$$

$$B_y = B \cdot \sin 30^\circ$$

$$A = (200\text{ft}; 0\text{ft})$$

$$B_x = 135\text{ft} + \cos 30^\circ$$

$$B_y = 135\text{ft} + \sin 30^\circ$$

$$B_x = 116,91\text{ft}$$

$$B_y = 67,5\text{ft}$$

$$C = C_x; C_y$$

$$C_x = C \cdot \cos 320^\circ$$

$$C_y = C \cdot \sin 320^\circ$$

$$C_x = 135\text{ft} + \cos 320^\circ$$

$$C_y = 135\text{ft} + \sin 320^\circ$$

$$C_x = 103,42\text{ft}$$

$$C_y = -86,78\text{ft}$$

$$\vec{A} = (200\vec{i} + 0\vec{j})\text{ft}$$

$$\vec{B} = (116,91\vec{i} + 67,5\vec{j})\text{ft}$$

$$\vec{C} = (103,42\vec{i} - 86,78\vec{j})\text{ft}$$

$$\vec{D} = (400,33\vec{i} - 19,28\vec{j})\text{ft}$$

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{D_y}{D_x}$$

$$D = \sqrt{(420,33)^2 + (-19,28)^2}$$

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{-19,28}{420,33}$$

$$D = 420,77$$

$$\theta_1 = -2,63^\circ$$

$$\theta_1 = 357,37^\circ$$

Al explorar una cueva una arqueóloga aficionada comienza en la entrada y recorre las siguientes distancias. Se desplaza 75 mts al Norte, 250 mts al Este, 125 mts en un ángulo de  $N60^\circ E$  y 150 mts al Sur. Encuentre el desplazamiento resultante.

**Datos**

$$\vec{A} = (75m; 90^\circ)$$

$$\vec{B} = (250m; 0^\circ)$$

$$\vec{C} = (125m; 30^\circ)$$

$$\vec{D} = ?$$

$$\vec{A} = (Ax\vec{i}; Ay\vec{j})$$

$$\vec{B} = (Bx\vec{i}; By\vec{j})$$

$$\vec{A} = (0\vec{i}; 75\vec{j})m$$

$$\vec{B} = (250\vec{i}; 0\vec{j})$$

$$\vec{C} = (Cx\vec{i}; Cy\vec{j})$$

$$Cy = C \cdot \cos 60^\circ$$

$$Cx = C \cdot \sin 60^\circ$$

$$Cy = 125m \cdot \cos 60^\circ$$

$$Cx = 125m \cdot \sin 60^\circ$$

$$Cy = 62.5m$$

$$Cx = 108,25m$$

$$\vec{C} = (108,25\vec{i}; 62,5\vec{j})m$$

$$\vec{A} = (0\vec{i} + 75\vec{j})$$

$$\vec{D} = (Dx\vec{i}; Dy\vec{j})$$

$$E = \sqrt{(358,25)^2 + (-12,5)^2}$$

$$\vec{B} = (250\vec{i} + 0\vec{j})$$

$$\vec{D} = (0\vec{i}; -150\vec{j})m$$

$$E = 358,46m$$

$$\vec{C} = (108,25\vec{i} + 62,5\vec{j})$$

$$\vec{D} = (358,25\vec{i} - 12,5\vec{j})m$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Ey}{Ex}$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{-12,5}{358,25}$$

$$\theta_1 = -1,99^\circ$$

$$\theta_1 = 358^\circ$$

El vector  $\vec{A}$  tiene componentes x, y de  $(-8, 7)$  cm y  $15$ cm respectivamente el vector  $\vec{B}$  tiene componentes x, y de  $13,2$  cm y de  $-6,6$  cm respectivamente si  $\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C} = 0$ . Determine cuales son las componentes de  $\vec{C}$ .

Datos

$$\vec{A} = (-8,7\vec{i} + 15\vec{j})$$

$$\vec{B} = (13,2\vec{i} - 6,6\vec{j})\text{cm}$$

$$\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C} = 0$$

$$\vec{C} = ?$$

$$3\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$3\vec{c} = (13,2\vec{i} - 6,6\vec{j})\text{cm} - (-8,7\vec{i} + 15\vec{j})\text{cm}$$

$$3\vec{c} = (13,2\vec{i} + 8,7\vec{i} - 6,6\vec{j} - 15\vec{j})\text{cm}$$

$$\vec{c} = \left( \frac{21,9\vec{i}}{3} - \frac{21,6\vec{j}}{3} \right)\text{cm}$$

$$\vec{c} = (7,3\vec{i} - 7,2\vec{j})\text{cm}$$

Si el vector A es igual a  $(6\vec{i} - 8\vec{j})$ , el vector  $B = (-8\vec{i} + 3\vec{j})\text{cm}$  y el vector  $\vec{c} = (26\vec{i} + 19\vec{j})$ . Determine a y b de manera que a  $\vec{A} + b\vec{B} + \vec{C} = 0$

Datos

$$\vec{A} = (6\vec{i} - 8\vec{j})$$

$$\vec{B} = (-8,3\vec{j})$$

$$\vec{C} = (26\vec{i} + 19\vec{j})$$

$$a\vec{A} + b\vec{B} + \vec{C} = 0$$

$$a(6\vec{i} - 8\vec{j}) + b(-8\vec{i} + 3\vec{j}) + (26\vec{i} + 19\vec{j}) = 0$$

$$6a\vec{i} - 8a\vec{j} - 8b\vec{i} + 3b\vec{j} + 26\vec{i} + 19\vec{j} = 0$$

$$(6a - 8b + 26)\vec{i} + (-8a + 3b + 19)\vec{j} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

$$(6a - 8b + 26)\vec{i} = 0\vec{i}$$

$$6a - 8b + 26 = 0$$

$$6a = 8b + 26 = 0$$

$$a = \frac{8b - 26}{6}$$

$$a = \frac{4b - 13}{3}$$

$$a = \frac{4(7) - 13}{3} = \frac{28 - 13}{3} = 5 //$$

$$(-8a + 3b + 19)\vec{j} = 0\vec{j}$$

$$-8a + 3b + 19 = 0$$

$$-8\left(\frac{4b - 13}{3}\right) + 3b + 19 = 0$$

$$\frac{-32}{3} + \frac{104}{3} + 3b + 19 = 0$$

$$\frac{-32b}{3} + 3b = -\frac{104}{3} - 19$$

$$\frac{-32 + 9b}{3} = \frac{-104 - 57}{3}$$

$$-23b = -161$$

$$b = 7 //$$

Dados los puntos A (3, 4, -5), B(1, -3, -2). Determinar los cosenos directores del vector  $\vec{A} - 20\vec{B}$ .

**DATOS**

$$2B = 2(1, -3, -2)$$

$$\cos \alpha = \frac{C_x}{c} = \frac{1}{\sqrt{102}} = 0.09$$

$$\vec{c} = 0\vec{A} - 20\vec{B} \Rightarrow \vec{C} = A - 2B$$

$$2B = (2, -6, -4)$$

$$\cos \beta = \frac{C_y}{c} = \frac{10}{\sqrt{102}} = 0.99$$

$$A = (3, 4, -5)$$

$$A = (3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k})$$

$$\cos \delta = \frac{C_z}{c} = \frac{-1}{\sqrt{102}} = -0.09$$

$$B = (1, -3, -2)$$

$$2B = (-2\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k})$$

$$\vec{C} = (\vec{i} + 10\vec{j} - \vec{k})$$

$$c = \sqrt{(1)^2 + (10)^2 + (7)^2}$$

$$c = \sqrt{102}$$

$$\vec{u}_c = (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \delta \vec{k})$$

$$\vec{u}_c = (0.09\vec{i} + 0.99\vec{j} - 0.09\vec{k})$$

## MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

El producto de un escalar k por un vector A es otro vector cuyo módulo es k veces la longitud de vector A y cuya dirección y sentido coincide con la del vector A, su  $k > 0$  es opuesto a la del vector A y si  $k < 0$  y si  $k = 0$  la longitud es igual a 0 y el vector se convierte en nulo.

$$KA = \overbrace{\vec{A} + \vec{A} + \vec{A} \dots + \vec{A}}$$

El producto de un escalar k por un vector A se obtiene multiplicando nk por las componentes de a.

$$\vec{A} = (Ax\vec{i} + Ay\vec{j} + Az\vec{k})$$

$$k\vec{A} = k(Ax\vec{i} + Ay\vec{j} + Az\vec{k})$$

$$k\vec{A} = (kAx_1 + kAy\vec{j} + kAz\vec{k})$$

### Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector

- **Conmutativa:**  $a\vec{A} = \vec{A}a$
- **Asociativa:**  $a(b\vec{A}) = (ab)(\vec{A})$
- **Distributiva escalar**  $(a + b)(\vec{A}) = a\vec{A} + b\vec{A}$
- **Distributiva vectorial**  $a(\vec{A} + \vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$

### EJEMPLOS

So  $k=4$  y el vector  $\vec{A} = (15Km; 258^\circ)$ . Determinar:  $k\vec{A}$

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta$$

$$A_x = 15km \times \cos 258^\circ$$

$$A_y = 15Km \times \sin 258$$

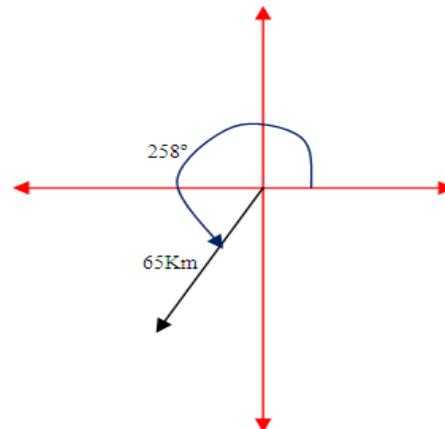
$$A_x = -3.11Km$$

$$A_y = -14.67Km$$

$$\vec{A} = (3.11\vec{i} - 14.67\vec{j})Km$$

$$K\vec{A} = 4(-3.11\vec{i} - 14.67\vec{j})km$$

$$k\vec{A} = (-12.44\vec{i} - 58.68\vec{j})Km$$



$$KA = \sqrt{(-12.44)^2 + (-58.68)^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-58.68}{-12.44}$$

$$KA = 60 \text{ Km}$$

$$\theta = 78^\circ$$

$$\vec{KA} = (60 \text{ Km}; 258^\circ)$$

$$\alpha = 180 + 78 = 258^\circ$$

Si  $k=-3$  y el  $\vec{B}(3,-2)$ . Hallar  $k\vec{B}$

$$\vec{B} = (3\vec{i} - 2\vec{j})$$

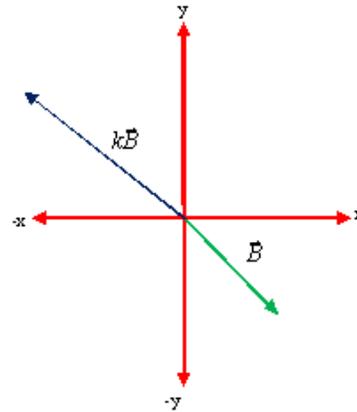
$$k\vec{B} = -3(3\vec{i} - 2\vec{j})$$

$$k\vec{B} = (-9\vec{i} + 6\vec{j})$$

$$k\vec{B} = \sqrt{(-9)^2 + (6)^2}$$

$$k\vec{B} = \sqrt{117}$$

$$k\vec{B} = 10.82$$



Si  $k = \frac{1}{2}$  y  $\vec{c} = (60 \text{ km})$  en dirección N30° E. Hallar  $k\vec{c}$

**Datos**  $\vec{c}(60 \text{ km}; N30^\circ E)$

$$k = \frac{1}{2} \quad \vec{c} = (60 \text{ Km}; 60^\circ)$$

$$\vec{c} = (60 \text{ km}; N30^\circ E)$$

$$Cx = C \cdot \cos 60^\circ$$

$$Cy = C \cdot \cos 60^\circ$$

$$K\vec{c} = ?$$

$$Cx = 60 \text{ Km} \times \cos 60^\circ$$

$$Cy = 60 \text{ Km} \times \operatorname{Sen} 60^\circ$$

$$Cx = 30 \text{ Km}$$

$$Cy = 51.96 \text{ Km}$$

$$\vec{C} = (30\vec{i} + 51,96\vec{j})Km$$

$$K\vec{c} = 0,5(30\vec{i} + 51,96\vec{j})Km$$

$$k\vec{c} = (15\vec{i} + 25,98\vec{j})Km$$

$$Kc = \sqrt{(15)^2 + (25,98)^2}$$

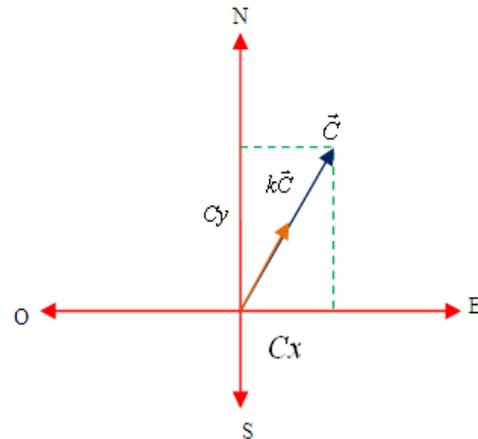
$$kc = 30Km$$

$$tg \theta = \frac{Cy}{Cx}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{25,98}{15}\right)$$

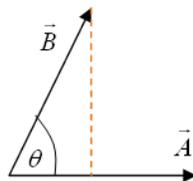
$$\theta = 60^\circ$$

$$k\vec{c}(30km, 60^\circ)$$



## PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar o producto punto de 2 vectores es un escalar igual al producto de los módulos de los vectores dados por el coseno del menor ángulo que forman entre si.



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \theta$$

### Propiedades

- **Conmutativa**=  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- **Distributiva**=  $\vec{A}(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\vec{B} + \vec{A}\vec{C}$
- **Asociativa Mixta**  $m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = m\vec{A}(\vec{B}) = m\vec{B}(\vec{A})$

### Componentes de los vectores

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ?$$

$$\vec{A} = (Ax\vec{i} + Ay\vec{j} + Az\vec{k}) \quad \vec{B} = (Bx\vec{i} + By\vec{j} + Bz\vec{k})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = Ax \cdot Bx + Ay \cdot By + Az \cdot Bz \Rightarrow \text{es un escalar.}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = Ax^2 + Ay^2 + Az^2$$

Si el vector A y B son distintos de cero y si el producto punto  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  es igual a cero entonces A y B son perpendiculares.

El producto permite encontrar el ángulo entre 2 vectores con la siguiente expresión.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

La proyección de un vector sobre otro vector se lo encuentra de la siguiente manera.

$$\vec{A}_B = A \cdot \cos \theta \mu_B$$

$$\vec{B}_A = B \cdot \cos \theta \mu_A$$

**EJEMPLOS**

Dados los vectores  $\vec{A} = (8\vec{i} + \vec{j})Km$  y el  $\vec{B} = (12Km; N15^\circ E)$ . Determinar

- El producto escalar del vector  $\vec{A} \cdot \vec{B}$
- El ángulo formado por el vector A y B
- La proyección del vector A sobre el Vector B
- La proyección de vector B sobre el vector A

**Datos**

$$\vec{A} = (8\vec{i} + \vec{j})Km$$

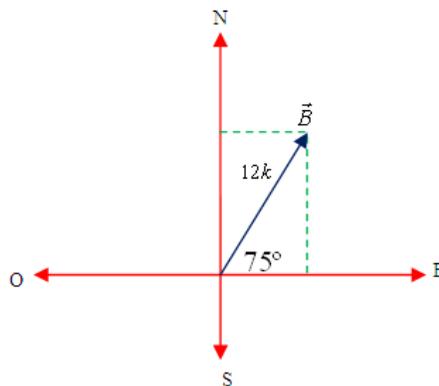
$$\vec{B} = (12km; N15^\circ E)$$

a)  $\vec{A} \cdot \vec{B}$

b)  $\angle \theta = \vec{A}$  y  $\vec{B}$

c)  $\vec{A}B$

d)  $\vec{B}A$



$$B_x = B \cdot \cos 75^\circ$$

$$B_x = 12Km \cdot \cos 75^\circ$$

$$B_x = 3.11Km$$

$$B_y = B \cdot \sin 75^\circ$$

$$B_y = 12Km \cdot \sin 75^\circ$$

$$B_y = 11.60Km$$

$$\vec{B} = (3.11\vec{i} + 11.60\vec{j})Km$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$A = \sqrt{(8)^2 + (1)^2}$$

$$A = 8.06Km$$

$$AB = 12Km \times 8.06Km$$

$$AB = 67.84Km^2$$

a.  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (8 \times 3.11) + (1 \times 11.60)Km^2$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 36.48Km^2$$

b.  $\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$

$$\cos \theta = \frac{36.48Km^2}{96.72Km^2}$$

$$\theta = 67.84^\circ$$

c.  $\vec{A}_B = A \cdot \cos \theta \cdot \mu B$

$$\vec{u}_B = \frac{Bx\vec{i}}{B} + \frac{Bj}{B}$$

$$\vec{u}_B = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{u}_B = \cos 75^\circ \vec{i} + \sin 75^\circ \vec{j}$$

$$\vec{u}_B = 0.26\vec{i} + 0.97\vec{j}$$

$$\vec{AB} = 8.06 \text{ Km} \cdot \cos(67.84^\circ) (0.26\vec{i} + 0.97\vec{j})$$

$$\vec{AB} = (0.8\vec{i} + 2.97\vec{j}) \text{ Km} //$$

d.  $\vec{B}_A = B \cdot \cos \theta \cdot \mu B$

$$\vec{u}_A = \frac{Ax\vec{i}}{A} + \frac{Aj}{A}$$

$$\vec{u}_A = \frac{8\vec{i}}{8.06} + \frac{1\vec{j}}{8.06}$$

$$\vec{u}_A = 0.99\vec{i} + 0.12\vec{j}$$

$$\vec{B}_A = 12 \text{ Km} \cdot \cos(67.84^\circ) (0.99\vec{i} + 0.12\vec{j})$$

$$\vec{B}_A = (4.51\vec{i} + 0.55\vec{j}) \text{ Km}$$

Dado el vector  $\vec{C} = (45; 32^\circ)$  y el vector  $\vec{D} = (-56\vec{i} + 21\vec{j})$ . Calcular

- El producto escalar  $\vec{C} \cdot \vec{D}$ .
- El ángulo formado por  $\vec{C}$  y  $\vec{D}$
- La proyección de  $\vec{D}_C$

**DATOS**

**Datos**

$$\vec{C} = (45\text{m}; 32^\circ)$$

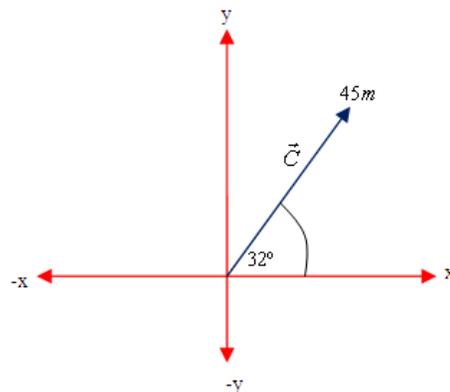
$$\vec{D} = (-56\vec{i} + 21\vec{j})$$

a)  $\vec{C} \cdot \vec{D}$

b)  $\angle \theta = \vec{C}$  y  $\vec{D}$

c)  $\vec{C}_D$

d)  $\vec{D}_C$



$$C_x = C \cdot \cos \theta$$

$$C_x = 45\text{m} \cdot \cos 32^\circ$$

$$C_x = 38.16\text{m}$$

$$C_y = C \cdot \sin \theta$$

$$C_y = 45\text{m} \cdot \sin 32^\circ$$

$$C_y = 23.85\text{m}$$

$$\vec{C} = (38.16\vec{i} + 23.85\vec{j}) \text{ m}$$



a.  $\vec{C} \cdot \vec{D} = C_x \cdot D_x + C_y \cdot D_y$

$$\vec{C} \cdot \vec{D} = (38.16 \times -56)m^2 + (23.85 \times 21)m^2$$

$$\vec{C} \cdot \vec{D} = -2136.96m^2 + 500.85m^2$$

$$\vec{C} \cdot \vec{D} = -1636.11m^2$$

b.  $\cos \theta = \frac{\vec{C} \cdot \vec{D}}{CD}$

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}$$

$$D = \sqrt{(-56)^2 + (21)^2}$$

$$D = 59.8m$$

$$C \cdot D = 59.8m \times 45m$$

$$C \cdot D = 2691m^2$$

$$\cos \theta = \frac{-1636.11}{2691}$$

$$\theta = 127.44^\circ$$

c.  $\vec{C}_D = C \cdot \cos \theta \cdot \mu D$

$$\vec{u}_D = \frac{Dx\vec{i}}{D} + \frac{Dy\vec{j}}{D}$$

$$\vec{u}_D = \frac{-56\vec{i}}{59.8} + \frac{21\vec{j}}{59.6}$$

$$\vec{u}_D = (-0.94\vec{i} + 0.35\vec{j})$$

$$\vec{C}_D = 45m \cdot \cos(127.44^\circ) \cdot (-0.94\vec{i} + 0.35\vec{j})$$

$$\vec{C}_D = (25.71\vec{i} - 9.57\vec{j})m$$

d.  $\vec{D}_C = D \cdot \cos \theta \cdot \mu C$

$$\vec{u}_C = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{u}_C = \cos 32^\circ \vec{i} + \sin 32^\circ \vec{j}$$

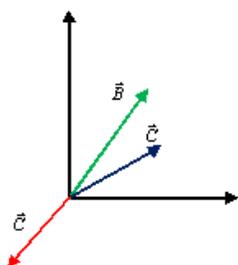
$$\vec{u}_C = 0.85\vec{i} + 0.53\vec{j}$$

$$\vec{D}_C = 59.8m \cdot \cos 127.44^\circ \cdot (0.85\vec{i} + 0.53\vec{j})$$

$$\vec{D}_C = (-30.9\vec{i} - 19.27\vec{j})m$$

## PRODUCTO VECTORIAL

Producto vectorial o cruz de 2 vectores da como resultado un tercer vector. El producto cruz de los vectores viene dado por:



$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

$$C = AB \sin \theta$$

El vector  $\vec{C}$  es perpendicular tanto al vector A como al vector B.

### Propiedades

- **Anticonmutativa**

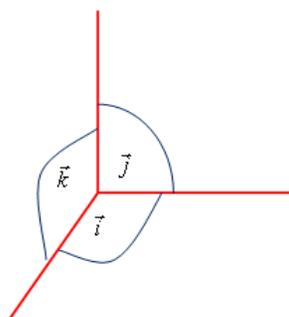
$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

- **Distributiva**

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

### Componentes de los vectores

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$



$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\begin{aligned}
 A &= (Ax\vec{i} + Ay\vec{j} + Az\vec{k}) \\
 B &= (Bx\vec{i} + By\vec{j} + Bz\vec{k}) \\
 \vec{A} + \vec{B} &= (Ax + Bx)\vec{i} + (Ay + By)\vec{j} + (Az + Bz)\vec{k}
 \end{aligned}$$

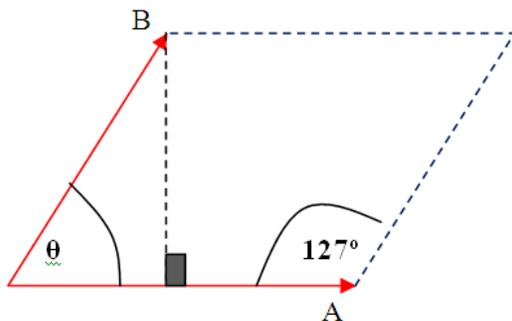
$$\vec{A} + \vec{B} = (AyBz - AzBy)\vec{i} + (AzBx - AxBz)\vec{j} + (AxBy - AyBx)\vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ Ax & Ay \\ Bx & By \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$(AxBy - AyBx)\vec{k}$$

## Cálculo del área del paralelogramo



$$\text{Sen } \theta = \frac{h}{B}$$

$$h = B \cdot \text{Sen } \theta$$

$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}$$

$$\text{Area} = A \cdot h$$

$$\text{Area} = A \cdot B \cdot \text{Sen } \theta$$

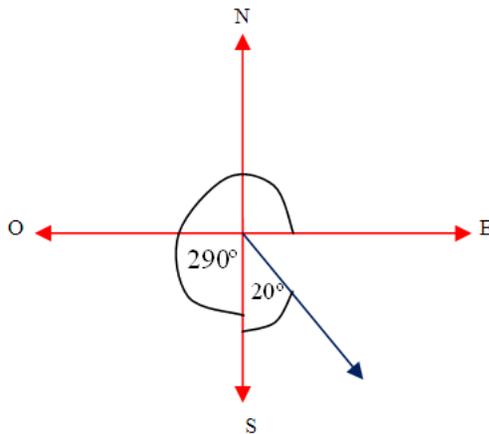
$$C = A \cdot B \cdot \text{Sen } \theta$$



Dado el vector  $\vec{A} = (30Km; S20^\circ E)$  y el vector  $\vec{B} = (40Km)(-0.548\vec{i} + 0.689\vec{j})$

Determinar:

- El producto vectorial de  $\vec{B} \times \vec{A}$
- El producto vectorial de  $\vec{A} \times \vec{B}$
- El área de paralelogramo que forman los 2 vectores
- El ángulo comprendido entre el vector A y el vector B



$$A_x = A \cdot \cos \theta$$

$$A_y = A \cdot \sin \theta$$

$$A_x = 30Km \cdot \cos 290^\circ$$

$$A_y = 30km \cdot \sin 290^\circ$$

$$A_x = 10.26Km$$

$$A_y = -28.19Km$$

$$u_{\vec{B}} = \frac{\vec{B}}{B} \quad \vec{B} = B u_{\vec{B}}$$

$$B_x = 40Km(-0.548\vec{i}) = -21.92Km$$

$$B_y = 40Km(0.689\vec{j}) = 27.56Km$$

$$a. \quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 10.26 & -28.19 \\ -21.92 & 27.56 \end{vmatrix} \vec{k} Km^2$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = [(10.20) \times (27.28) - (-28.19)(-21.92)]$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-335.10\vec{k}) Km^2$$

$$b. \quad \vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -21.92 & 27.56 \\ 10.26 & -28.19 \end{vmatrix} \vec{k} Km^2$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = [(-21.92)(-28.19) - (27.28)(10.20)]$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = 535.16\vec{k}$$

c. Área =  $A.B \text{ Sen } \theta = \vec{C} 335.16 \text{ Km}^2$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = A.B \text{ Sen } \theta$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \quad \vec{C} = A.B \text{ Sen } \theta$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB.\text{Sen } \theta$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{AB}$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{335.16 \text{ Km}}{(30)(40)}$$

d.  $\theta = 16.22^\circ$

Dados los vectores  $\vec{A} = (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$  y  $\vec{B} = (4\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})$  y  $\vec{C} = (-4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k})$ .

Determinar:

a. ¿Qué vectores son perpendiculares?

b. ¿Qué vectores son paralelos? Justifique analíticamente.

a.  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \cdot B_x) + (A_y \cdot B_y) + (A_z \cdot B_z)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2 \cdot 4) + (3 \cdot -1) + (-1 \cdot 5)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 8 - 3 - 5$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{Son perpendiculares}$$

b.  $\vec{B} \cdot \vec{C} = (B_x \cdot C_x) + (B_y \cdot C_y) + (B_z \cdot C_z)$

$$\vec{B}\vec{c} = (4 \cdot -4) + (-1 \cdot -6) + (5 \cdot 2)$$

$$\vec{B}\vec{c} = -16 + 6 + 10$$

$$\vec{B}\vec{c} = 0 \Rightarrow \text{Son perpendiculares}$$

$$\vec{A}\vec{c} = (Ax(x) + Ay(y) + Az(z))$$

$$\vec{A}\vec{c} = (2 \cdot -4) + (3 \cdot -6) + (-1 \cdot 2)$$

$$\vec{A}\vec{c} = -8 - 18 - 2$$

$$\vec{A}\vec{c} = -28 \Rightarrow \text{No son perpendiculares}$$

Dado el vector  $\vec{B} = \left( \frac{9}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}\vec{j} + \vec{a}\vec{k} \right)$  y el vector  $\vec{A} = ?$ , su módulo es igual a  $6a$  y que su proyección en el plano  $xy$  tiene un módulo  $3a$  y forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje  $y$ .  
Determinar

- El vector  $\vec{A}$  en términos de los unitarios normalizados
- El ángulo que forma el vector  $\vec{B} - \vec{A}$ , con su proyección en el plano  $xy$ .

Datos

$$B = 30^\circ$$

$$B = \frac{a}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}\vec{j} + \vec{a}\vec{k}$$

$$\cos B = \frac{Ay}{Axy}$$

$$\vec{A} = ?$$

$$Ay = \cos \beta Axy$$

$$A = 6a$$

$$Ay = \cos 30^\circ \cdot 30$$

$$Axy = 39$$

$$Ay = \frac{3\sqrt{3}}{2} a //$$

$$\angle 30^\circ - y$$

$$(Axy)^2 = (\sqrt{Ax^2 + Ay^2})^2$$

$$Ax^2y = Ax^2 + Ay^2$$

$$Ax^2 = Axy^2 - Ay^2$$

$$Ax^2 = (3a)^2 - \left(3\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{Ax^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{9(3)}{4}a^2}$$

$$Ax = \frac{\sqrt{9a^2}}{4}$$

$$Ax = \frac{3}{2}a^2$$

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2 + Az^2}$$

$$Az = \sqrt{A^2 - Ax^2 - Ay^2}$$

$$Az = \sqrt{(6a)^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a\right)^2}$$

$$Az = \sqrt{\frac{44a^2 - 9a^2 - 27a^2}{4}}$$

$$Az = \sqrt{27a^2}$$

$$Az = 3a\sqrt{3}$$

$$\text{b. } \vec{B} - \vec{A} = \left(\frac{9}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{i}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) + (a\vec{k} - 3\sqrt{3})\vec{k}$$

$$\text{a. } \vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

$$\vec{u}_A = \frac{Ax}{A}\vec{i} + \frac{Ay}{A}\vec{j} + \frac{Az}{A}\vec{k}$$

$$\vec{u}_A = \frac{3a}{62a}\vec{i} + \frac{3\sqrt{3}9\vec{j}}{2.6a} + \frac{3a\sqrt{3}}{6}\vec{k}$$

$$\vec{u}_A = \left(\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}\right)$$

$$\vec{B} - \vec{A} = \left( \frac{-2a}{2} \vec{i} \right) - 2\sqrt{3}a\vec{j} - 4.2a\vec{k}$$

$$\vec{B} - \vec{A} = -a\vec{i} - 2\sqrt{3}a\vec{j} - 4.2a\vec{k}$$

$$\cos \theta = \frac{A_{xy}}{|\vec{B} - \vec{A}|}$$

$$\cos \theta = \frac{3a}{5.539}$$

$$\cos \theta = 0.54$$

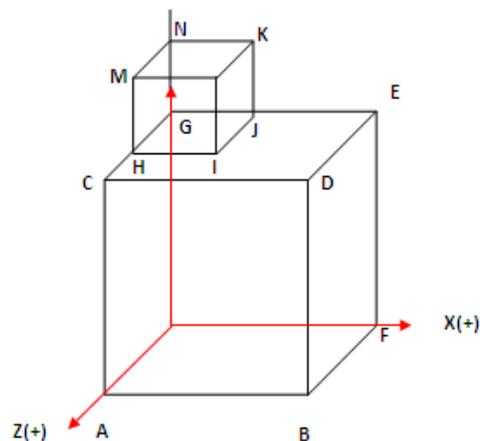
$$\theta = 57.18^\circ$$

$$|B - A| = \sqrt{(-1)^2 + (-2\sqrt{3})^2 + (-4.2)^2}$$

$$|B - A| = 5.53a$$

Dos cubos de 12 y 20 unid. Respectivamente están colocadas como indica la figura. Determine:

- El vector  $\vec{A_j}$  y  $\vec{NB}$
- El ángulo formado por los vectores  $\vec{JM}$  y  $\vec{GF}$
- La proyección del vector  $\vec{MK}$



a.  $\vec{A}_j = 20\vec{j} - 20\vec{k} + 12\vec{i}$   
 $\vec{A}_j = 12\vec{i} + 20\vec{j} - 20\vec{k}$

b.  $\vec{JM} = -12\vec{i} + 12\vec{j} + 12\vec{k}$   
 $\vec{GF} = (20\vec{i} - 20\vec{j} + 0\vec{k})$

$$\vec{NB} = (-32\vec{j} + 20\vec{k} + 20\vec{i})$$

$$\vec{NB} = (20\vec{i} - 32\vec{j} + 20\vec{k}) //$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{JM} \cdot \vec{GF}}{JM \cdot GF}$$

$$\vec{JM} \cdot \vec{GF} = (Jm_x \cdot GF_x) + (Jm_y + GF_y) + (Jm_z + GF_z)$$

$$\vec{JM} \cdot \vec{GF} = (-12 \cdot 20) + (10 \cdot -20) + (20 \cdot 0)$$

$$\vec{JM} \cdot \vec{GF} = -480$$

$$JM = \sqrt{JM_x^2 + JM_y^2 + JM_z^2}$$

$$JM = \sqrt{(-12)^2 + (12)^2 + (12)^2}$$

$$JM = 20.78G \quad F = 28.28$$

$$JM \times GF = \frac{20.78(28.28)}{387.66}$$

$$\cos \theta = -\frac{480}{587.66}$$

$$\theta = 144.76 //$$

c.  $\vec{HK}_{GF} = HK \cos \theta \vec{u}_{EF}$   
 $\vec{HK} = (12\vec{i} + 12\vec{j} - 12\vec{k})$

$$HK = 20.78$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{HK} \cdot \vec{GF}}{|\vec{HK}| |\vec{GF}|}$$

$$\vec{HK} \cdot \vec{GF} = (12 \times 20) + (12 \times -20) + (-12 \times 0)$$

$$\vec{HK} \cdot \vec{GF} = 0$$

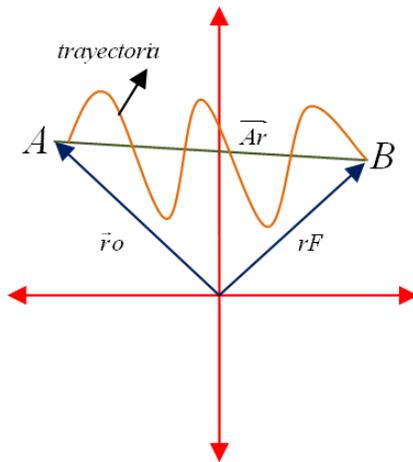
$$\vec{HK} \cdot \vec{GF} = |\vec{HK}| \cos \theta_{GF}$$

$$\vec{HK} \cdot \vec{GF} = 0 \Rightarrow \text{No hay proyección}$$

## CINEMÁTICA

### Desplazamiento ( $\vec{Ar}$ )

En el vector que une 2 posiciones determinadas en un intervalo de tiempo. Es independiente de la trayectoria que siga la partícula y solo dependerá de las posiciones inicial y final, su módulo generalmente no coincide con la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria. Tiene las mismas unidades que la distancia.



$$(\vec{Ar}) = \vec{r_f} - \vec{r_o}$$

$$\vec{Ar} = (Ax\vec{i} + Ay\vec{j})$$

$$Ar = Ar1 + Ar2 + \dots$$

Un móvil parte del punto  $C = (3, 4)m$  y llega al punto  $D = (-5, -2)m$ . Determine:

- Los vectores posición de cada punto.
- El vector desplazamiento
- El módulo del vector desplazamiento
- La distancia total recorrida

#### DATOS

$C = (3, 4)m$

$D = (-5, -2)m$

a)  $(\vec{i}, \vec{j})$

b)  $\vec{A}_r = ?$

c)  $A_r = ?$

a.  $\vec{C} = (3\vec{i} + 4\vec{j})m$

$\vec{D} = (-5\vec{i} + 2\vec{j})m$

b.  $\vec{Ar} = \vec{D} - \vec{C}$

c.  $Ar = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} m^2$

$Ar = \sqrt{100m^2}$

$Ar = 10m$

d.  $d = |Ar|$

d)  $d = ?$

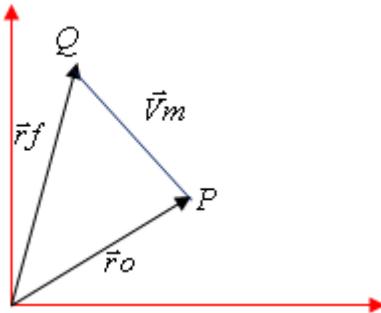
$$\vec{Ar} = (-5\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{i} - 4\vec{j})m$$

$$d = 10m$$

$$\vec{Br} = (-8\vec{i} - 6\vec{j})m$$

### Velocidad media ( $\vec{v}_m$ )

Se la calcula dividiendo el vector desplazamiento para el intervalo de tiempo empleado para realizar dicho desplazamiento.



$$V_m = \frac{\vec{Ar}}{At}$$

$$V_m = (V_{mx}\vec{i} + V_{my}\vec{j})$$

$$V_m = LT^{-1}$$

### Rapidez media ( $V_m$ )

Se determina mediante el cociente en la distancia recorrida por la partícula y el intervalo de tiempo transcurrido.

$$V_m = \frac{d}{At}$$

### Ejemplo

Un auto parte del punto  $P_1 = (-3,8)m$ ,  $P = (5,-3)m$ , en 20 segundos. Determinar

- Los vectores posición inicial y final
- El desplazamiento realizado
- La distancia recorrida
- La velocidad media
- La rapidez media

#### Datos

a.  $\vec{i}, \vec{j}$

a.  $\vec{P}_1 = (-3\vec{i} + 8\vec{j})m$

$\vec{P}_2 = (5\vec{i} - 3\vec{j})m$

d.  $\vec{V}_m = \frac{(8\vec{i} - 11\vec{j})}{20s}$

b.  $\vec{A}r$

c.  $d$

d.  $\vec{v}m$

e.  $Vm$

b.  $\vec{A}r = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$

$$A\vec{r} = (5\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{i} - 8\vec{j})m$$

$$A\vec{r} = (8\vec{i} - 11\vec{j})$$

c.  $Ar = \sqrt{(8)^2 + (-11)^2}$

$$Ar = \sqrt{85}$$

$$Ar = 13,6m$$

$$d = |Ar| = 13.6m$$

$$\vec{V}m = (0,9\vec{i} - 0,55\vec{j})m/s$$

e.  $Vm = \sqrt{(0.4)^2 + (-0.55)^2}$

$$Vm = 0.68m/s$$

$$Vm = \frac{d}{t}$$

$$Vm = \frac{13.6m}{20s}$$

$$Vm = 0.65m/s$$

### Aceleración $\vec{a}$

Es el cociente entre la variación de la velocidad y el intervalo de tiempo que transcurre para dicha variación

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}v}{At}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}f - \vec{V}o}{At}$$

$$\vec{a} = ax\vec{i} + ay\vec{j}$$

$$\vec{a} = LT^{-2}$$

Un auto parte del reposo en una vía recta, adquiere una velocidad de  $(36\vec{i} - 54\vec{j})Km/h$  en 50 seg. Determine:

a. La aceleración producida

### DATOS

$$V_0 = 0$$

$$\vec{V}_f = (36\vec{i} - 54\vec{j}) \text{ Km/h} \Rightarrow (10\vec{i} - 15\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$t = 50 \text{ s.}$$

$$a = ?$$

$$\text{a. } \vec{a} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{(10\vec{i} - 15\vec{j}) \text{ m/s}}{50 \text{ s}}$$

$$\vec{a} = [0.2\vec{i} - 0.3\vec{j}] \text{ m/s}^2$$

### EJERCICIOS

Un barco puede navegar en aguas tranquilas con una rapidez de 50Km/h. si el barco navega en un río cuya corriente tiene una rapidez de 4Km/h. Determine.

a. ¿Qué tiempo necesitara el barco para recorres 120 Km?

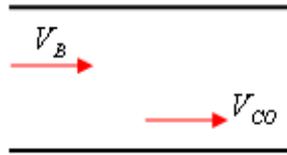
**Datos**

$$V_B = 50 \text{ Km/h}$$

$$V_{CO} = 4 \text{ Km/h}$$

$$t = ?$$

$$d = 120 \text{ Km}$$



$$V_{T1} = V_B + V_{CO}$$

$$V_r = (50 + 4) \text{ Km/h}$$

$$V_r = 54 \text{ Km/h}$$



$$V_{T2} = V_B - V_{OB}$$

$$V_{r2} = (50 - 4) \text{ Km/h}$$

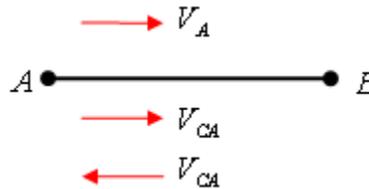
$$V_{r2} = 46 \text{ Km/h}$$

Una canoa va y regresa entre los puntos A y B de la misma orilla de un río cuyas aguas fluyen desde A hacia B a razón de  $V_A = V_m / \text{seg}$ , si la canoa tiene una rapidez de  $V_{CA} = 2V_m / \text{seg}$ . En aguas tranquilas. Calcule:

**Datos**

$$V_A = V_m / \text{seg}$$

$$V_{CA} = 2V_m / \text{seg}$$



$$V_T = 2V + V$$

$$V_T = 3V$$

$$V_{ir} = \frac{d}{\Delta t_{ir}}$$

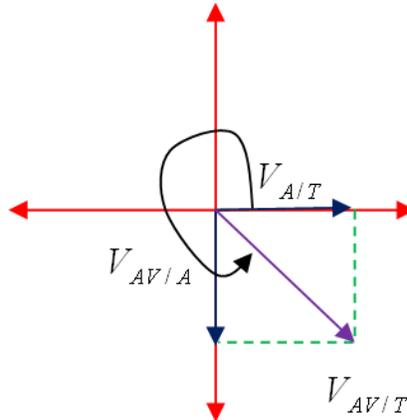
$$t_{ir} = \frac{d}{3v \text{ m/s}} \quad t_{reg} = \frac{d}{V_m / s}$$

$$\frac{t_{ir}}{t_{reg}} = \frac{\frac{d}{3V_m / s}}{\frac{d}{V_m / s}}$$

$$\frac{t_{ir}}{t_{reg}} = \frac{1}{3}$$

Un avión viaja respecto al aire hacia el sur con una rapidez de 540 Km/h y atraviesa una corriente de aire que se mueve hacia el este a 270 Km/h. Determinar.

- En qué dirección se mueve el avión con respecto a la tierra
- Cuál es la velocidad del avión con respecto
- ¿Qué distancia recorre el avión en 15 minutos?



**Datos**

$$V_{AV/A} = (540 \text{ Km})$$

$$V_{A/T} = (270 \text{ Km/h; E})$$

a.  $\theta = ?$

b.  $V_{AV/T} =$

c.  $d = ?; t = 15 \text{ m}$

$$A_v = \text{avion}$$

$$A = \text{aire}$$

$$T = \text{tierra}$$

b)  $V_{AV/T} = \sqrt{(V_{A/T})^2 + (V_{AV/A})^2}$

$$V_{AV/T} = \sqrt{(270)^2 + (540)^2}$$

$$V_{AV/T} = 603.73 \text{ Km/h}$$

a)  $\text{tg } \theta = \frac{-540}{270}$

$$\theta = -63.43$$

$$\theta = 296.57^\circ$$

c)  $V = \frac{d}{t}$

$$d = V.t$$

$$d = 603.73 \frac{Km}{h} \cdot 0.25h$$

$$d = 150.93 Km //$$

Un barco que va con dirección Este es perseguido por un submarino que viaja en la misma dirección cuando, se encuentra a 50 millas de distancia cambia instantáneamente de dirección. ¿Qué rumbo debe tomar el submarino para alcanzar el barco sabiendo que este siguió un rumbo E 30° N. la rapidez del barco y el submarino son respectivamente 3 millas/h y 5 millas/h. Determinar.

a. El tiempo que se demora en darle alcance

**Datos**

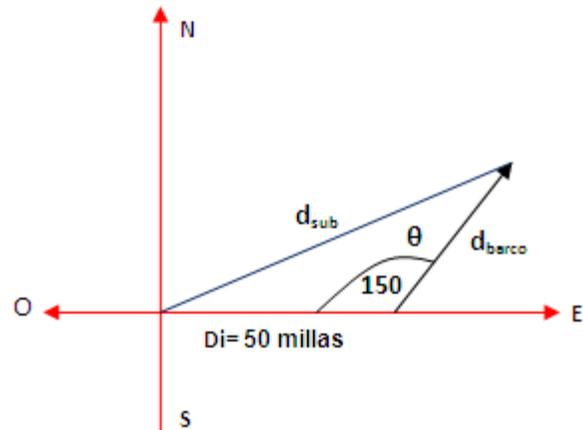
$$\theta = ? \text{ submarino}$$

$$E30^\circ N = \text{Barco}$$

$$V_B = 3 \text{ mil} / h$$

$$V_{sub} = 5 \text{ mi} / h$$

$$t = ? \text{ En darle alcance}$$



$$\frac{d_{sun}}{d_B} = \frac{Sen \theta}{Sen \theta}$$

$$Sen \theta = \frac{Sen \theta \cdot dB}{d_{sub}}$$

$$Sen \theta = 0.3$$

$$\theta = 17.46^\circ$$

Dirección : N72°; 54° E

$$(d_{sub})^2 = (d_B)^2 + (d_i)^2 - 2(d_B)(d_i)Cos \theta$$

$$(5t)^2 = (5t)^2 + (50)^2 - 2(3t)(50)Cos 150^\circ$$

$$25t^2 = 9t^2 + 2500 - (-229.81t)$$

$$25t^2 - 9t^2 - 2500 - (-229.81t)$$

$$16t^2 - 259.81t - 2500 = 0$$

$$t = \frac{-(-259.81) \pm \sqrt{(-259.81)^2 - 4(16)(-2500)}}{2(16)}$$

$$t = \frac{259.81 \pm 476.97}{32}$$

$$t_1 = 23.05h$$

$$t_2 = -6.78h$$

## MOVIMIENTOS

### Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.)

Se considera movimiento rectilíneo uniforme cuando el vector velocidad permanece constante, el módulo, dirección y sentido recorre espacios iguales en tiempos iguales.

#### Características

La velocidad y rapidez es constante

Recorre espacios iguales en tiempos iguales

Los vectores velocidad y desplazamiento llevan la misma dirección.

$$\text{Velocidad } (\vec{v}) = \frac{\vec{A}_r}{At} \Rightarrow \text{este}$$

$$\text{Rapidez}(v) = \frac{d}{At} \Rightarrow \text{este}$$

La velocidad media posee la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento.

Ejemplos.

Un vehículo recorre con MRU en una distancia = 30 millas con una velocidad este de  $(-30\vec{i} + 40\vec{j})\text{Km/h}$ . Hallar:

- La rapidez en m/s
- El vector desplazamiento realizado
- El tiempo empleado.

#### Datos

$$d = 30\text{millas}$$

$$\vec{v} = (-30\vec{i} + 40\vec{j})\text{Km/h}$$

$$a) \vec{V} = m/s$$

$$b) \vec{A}_r = ?$$

$$c) t = ?$$

$$a. \vec{v} = (-30\vec{i} + 40\vec{j})\text{cm/h}$$

$$v = \sqrt{(-30)^2 + (40)^2}$$

$$v = 50\text{Km/h}$$

$$v = 13.89\text{m/s}$$

$$b. \vec{A}_r = du_{Ar}$$

$$\vec{A}_r = d\vec{u}_v$$

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\vec{u}_r = \left( \frac{-30\vec{i} + 40\vec{j}}{50\text{Km/h}} \right)\text{Km/h}$$

$$\vec{u}_r = (-0.6\vec{i} + 0.8\vec{j})$$

$$\vec{A}_r = 30\text{millas}(-0.6\vec{i} + 0.8\vec{j})$$

$$\vec{A}_r = (-18\vec{i} + 24\vec{j})\text{millas}$$

Una partícula que se mueve por una trayectoria recta con una velocidad Keste de

$36\vec{i} - 72\vec{j} \text{ Km/h}$ , Si  $t = 0 \text{ s}$ . Se encuentra en la posición  $(8\vec{i} - 7\vec{j}) \text{ m}$ . Encuentre:

- Para  $t = 85$  a posición final.
- El desplazamiento realizado como vector
- La distancia recorrida

**Datos**

$$\vec{v} = (36\vec{i} - 72\vec{j}) \text{ Km/h}$$

$$t = 0; \vec{r}_0 = (8\vec{i} - 7\vec{j}) \text{ m}$$

$$a) t = 85; \vec{r}_F = ?$$

$$b) \vec{A}_R = ?$$

$$c) d = ?$$

$$\vec{v} = (10\vec{i} - 20\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$a. \vec{A}_r = \vec{r}_t - \vec{r}_0$$

$$\vec{r}_k = \vec{A}_r + \vec{r}_C$$

$$\vec{r}_F = (80\vec{i} - 160\vec{j} + 8\vec{i} - 7\vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_F = (88\vec{i} - 167\vec{j}) \text{ m}$$

$$b. \vec{v} = \frac{\vec{A}_r}{t}$$

$$\vec{A}_r = (10\vec{i} - 20\vec{j}) \text{ m/s} \cdot 85$$

$$\vec{A}_r = (80\vec{i} - 160\vec{j}) \text{ m}$$

$$c. d = \sqrt{(80)^2 + (-160)^2}$$

$$d = 178.88 \text{ m}$$

Al instante  $p = 2 \text{ s}$  una partícula A se encuentra en el punto  $P(4, 5) \text{ m}$  y se mueve con una

velocidad KSTE  $\vec{v}_A = (-2\vec{i} + 3\vec{j}) \text{ m/s}$ . Otra partícula P que se encuentra con MRU al

instante  $t = 5 \text{ s}$  se encuentra en el punto  $Q(3, 5) \text{ m}$  y al instante que  $t = 10 \text{ s}$  en el punto  $R(-5, -7) \text{ m}$ . Determine:

- La velocidad de B
- La posición de A respecto a B en el tiempo  $t = 20 \text{ s}$ .

**Datos**

$$t_A = 2s$$

$$\vec{r}_{OA} = (4\vec{i} + 5\vec{j})m$$

$$\vec{v}_A = (-2\vec{i} + 3\vec{j})m/s$$

$$t_B = 5s.$$

$$\vec{r}_{OB} = (3\vec{i} + 5\vec{j})m$$

$$t = 10s; \vec{r}_0 = (-5\vec{i} - 7\vec{j})m$$

a)  $\vec{v}_B = ?$

b)  $\vec{r}_{A/B} = ?$

$$t = 20s$$

$$\begin{aligned} \text{a. } \vec{v}_B &= \frac{\vec{A}r_B}{At_B} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_{OB}}{t_B - t_{OB}} \\ &= \frac{(-5\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{i} - 5\vec{j})m}{10s - 5s} \\ &= \frac{(-8\vec{i} - 12\vec{j})m}{5s} \end{aligned}$$

$$(-1.6\vec{i} - 2.4\vec{j})m/s$$

b.  $\vec{A}r_A = \vec{V}_A \cdot At$

$$\vec{A}r_A = (-2\vec{i} + 3\vec{j})\frac{m}{s} \cdot (20 - 2)s$$

$$\vec{A}r_A = (-2\vec{i} + 3\vec{j})m(18)$$

$$\vec{A}r_A = (-36\vec{i} + 54\vec{j})m$$

$$\vec{A}r_A = \vec{r}_A - \vec{r}_{oA}$$

$$\vec{r}_A [(-36\vec{i} + 54\vec{j}) + (4\vec{i} + 5\vec{j})m]$$

$$\vec{r}_A (-32\vec{i} + 59\vec{j})m$$

$$\vec{A}r_B = \vec{V}_B \cdot At$$

$$\vec{A}r_B = (-1.6\vec{i} - 2.4\vec{j})\frac{m}{s} \cdot (20 - 2)s$$

$$\vec{A}r_B = (-1.6\vec{i} - 2.4\vec{j})m(15s)$$

$$\vec{A}r_B = (-2.4\vec{i} - 36\vec{j})m$$

$$\vec{A}r_B = \vec{V}_B - \vec{V}_{OB}$$

$$\vec{r}_{jB} = \vec{A}_{rB} + \vec{r}_{OB}$$

$$\vec{r}_{jB} = (-24\vec{i} - 36\vec{j})m + (3\vec{i} + 5\vec{j})m$$

$$\vec{r}_{jB} = (-21\vec{i} - 31\vec{j})m$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_{FB} - \vec{r}_{FA}$$

$$\vec{r}_{A/B} = (-32\vec{i} + 59\vec{j} + 21\vec{i} + 31\vec{j})m$$

$$\vec{r}_{A/B} = (-11\vec{i} + 90\vec{j})m$$

## Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

Un móvil se encuentra en MRUV cuando el vector aceleración permanece constante en módulo y dirección.

### Características

- La variación de la velocidad es KSTF en relación con el tiempo
- La aceleración es fSTE
- Puede ser acelerado cuando los vectores velocidad, desplazamiento y aceleración son iguales  $\vec{u}_0 = \vec{u}_{Ar} = \vec{u}a$  o puede ser retardado cuando el vector aceleración posee sentido contrario al de la velocidad o desplazamiento.

$$\vec{u}_v = \vec{u}_{AR} = ua$$

### Ecuaciones

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}_f - V_o}{At} \quad \vec{V}_f^2 = V_o^2 + 2ad \quad \vec{A}_r = V_o t + \frac{1}{2} \vec{a}t^2 \quad \vec{V}_m = \frac{\vec{V}_f + \vec{V}_o}{2}$$

Las ecuaciones anteriores también se pueden utilizar como escalares en función de sus módulos.

### EJEMPLO

Un auto parte de reposo, en una vía recta adquiere una velocidad de  $(36\vec{i} - 54\vec{j})\text{Km/h}$  en 50s. Determine

- La aceleración producida
- La velocidad media
- El desplazamiento realizado
- La distancia recorrido
- Los unitarios de la aceleración y desplazamiento

### Datos

$$\vec{v}_0 = 0$$

$$\vec{v} = (36\vec{i} - 54)\frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

$$t = 50\text{s}$$

a.  $\vec{a} = \frac{\vec{V}_f - \vec{V}_0}{At}$

$$\vec{a} = \frac{(10\vec{i} - 15\vec{j})m/s}{50s}$$

$$\vec{a} = (0.2\vec{i} - 0.3\vec{j})m/s$$

b.  $\vec{V}_m = \frac{\vec{V}_0 + \vec{V}}{2}$

$$\vec{V}_m = (5\vec{i} - 7.5\vec{j})m/s$$

c.  $\vec{A}_r = \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$

$$\vec{A}_r = \frac{1}{2} (0.2\vec{i} - 0.3\vec{j}) \frac{m}{s} (50s)^2$$

$$\vec{A}_r = (0.1\vec{i} - 0.15\vec{j})m(2500s^2)$$

$$\vec{A}_r = (250\vec{i} - 352\vec{j})m$$

---

Un auto se mueve con una velocidad de  $(6\vec{i} - 8\vec{j})m/s$  y recorre una distancia de 200m e

15s. Determine.

- La aceleración producida
- La velocidad final alcanzada
- El desplazamiento realizado
- La velocidad media

**Datos**

$$\vec{v}_0 = (-6\vec{i} - 8\vec{j})m/s$$

$$d = 200m$$

$$t = 15s$$

a)  $\vec{a} = ?$

$$v_0 = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2}$$

$$\vec{\theta} = a\vec{u}_a = a\vec{u}_v$$

b)  $\vec{v} = ?$

$$v_0 = 10m/s$$

$$\vec{u}_{v_0} = \frac{\vec{v}_0}{v} = \left( -\frac{6}{10}\vec{i} - \frac{8}{10}\vec{j} \right)$$

c)  $\vec{A}_r = ?$

$$d = V_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\vec{u}_{v_0} = (-0.6\vec{i} - 0.8\vec{j})$$

d)  $\vec{V}_m = ?$

$$d - V_0t = \frac{1}{2}at^2$$

$$\vec{u}_{v_0} = 0.44 \frac{m}{s} (-0.6\vec{i} - 0.8\vec{j})$$

$$2 \frac{(200m - (10)m/s \cdot 15s)}{(15s)^2} = a$$

$$\vec{a} = (-0.26\vec{i} - 0.35\vec{j})m/s^2$$

$$a = \frac{2(50m)}{225s^2}$$

$$a = 0.44m/s^2$$

c)  $\vec{A}_r = d\vec{u}_{Ar}$

b)  $\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

$$\vec{A}_r = 200m(-0.6\vec{i} - 0.8\vec{j})$$

$$\vec{A}_r = (-120\vec{i} - 160\vec{j})m$$



$$\vec{v}_f = (-6\vec{i} - 8\vec{j}) + (-0.26\vec{i} - 0.35\vec{j})(15s)$$

$$\vec{v}_f = (-6\vec{i} - 8\vec{j}) + (-3.9\vec{i} - 5.62\vec{j})m/s$$

$$\vec{v}_f = (-9.9\vec{i} - 13.25\vec{j})m/s$$

$$v_f = 16.54m/s$$

$$d) \vec{v}_m = \frac{\vec{V}_0 + \vec{V}_f}{2}$$

$$\vec{v}_m = \frac{(-6\vec{i} - 8\vec{j} - 9.9\vec{i} - 13.25\vec{j})m/s}{2}$$

$$\vec{v}_m = \frac{(-15.9\vec{i} - 21.25\vec{j})m/s}{2}$$

$$\vec{v}_m = (-7.9\vec{i} - 10.63\vec{j})m/s$$

Un auto parte del reposo y recorre 100m con una aceleración  $(-0,8\vec{i} + 0,6\vec{j})\text{m/s}^2$ .

**Determinar:**

- El tiempo empleado
- El desplazamiento realizado
- La velocidad final
- La velocidad media.

**Datos**

$$\vec{v}_0 = 0$$

$$d = 100\text{m}$$

$$\vec{a} = (-0,8\vec{i} + 0,6\vec{j})\text{m/s}^2$$

$$a) At = ?$$

$$b) \vec{A}i = ?$$

$$c) \vec{v}_f = ?$$

$$d) \vec{v}_r = ?$$

$$b) A_r = d\vec{u}_{Af} = u_{Ar} = \vec{u}_a$$

$$\vec{u}_a = (-0,8\vec{i} + 0,6\vec{j})$$

$$\vec{A}_r = 100\text{m}(-0,8\vec{i} + 0,6\vec{j})$$

$$\vec{A}_r = (-80\vec{i} + 60\vec{j})\text{m}$$

$$a) A_r = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$100 = \frac{1}{2} \left( 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) t^2$$

$$\frac{100\text{m}}{\text{m/s}^2} = t^2$$

$$t = 14,14\text{s}$$

$$a = \sqrt{(-9,8)^2 + (0,6)^2}$$

$$a = 1\text{m/s}^2$$

$$c) \vec{a} = \frac{\vec{V}_f - V_0}{At}$$

$$(-0,8\vec{i} + 0,6\vec{j})\text{m/s}^2 (14,14)\text{s} = \vec{V}_f$$

$$(-11,3\vec{i} + 8,48\vec{j})\text{m/s} = \vec{v}_r$$

$$d) \vec{v}_m = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_f}{2}$$

$$\vec{v}_m = \frac{(-11,31\vec{i} + 8,48\vec{j})\text{m/s}}{2}$$

$$\vec{v}_m = (-5,65\vec{i} + 4,24\vec{j})\text{m/s}$$

En una carretera recta un móvil parte del reposo con una aceleración de  $(1.12\vec{i} - 1.656\vec{j})m/s$  que mantiene durante 30s, después se mueve 2 minutos con velocidad  $kSTE$  y finalmente aplicado los frenos con una desaceleración de  $(-2.24\vec{i} + 3.312\vec{j})m/s^2$  hasta que se detiene. Determine:

- El espacio total recorrido
- El tiempo empleado

**Datos**

$$\vec{v}_0 = 0$$

$$\vec{a} = (1.12\vec{i} - 1.656\vec{j})\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{v} = kSTE$$

$$-\vec{a} = (-2.24\vec{i} + 3.312\vec{j})m/s^2$$

$$v_f = 0$$

$$a) d_T = ?$$

$$b) t_T = ?$$

$$d = V_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$d = \frac{1}{2}at^2$$

$$a = \sqrt{(1.12)^2 + (-1.656)^2}$$

$$a = 2m/s^2$$

$$d = \frac{1}{2}(2m/s^2)(30s)^2$$

$$d = 900m$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}_f - +V_0}{At}$$

$$V_f = a.At$$

$$V_f = 2\frac{m}{s^2}.30s$$

$$V_f = 60\frac{m}{s}$$

$$v = \frac{d}{t}$$

$$d = v.t$$

$$d = 60 \frac{m}{s} . 120s$$

$$d_2 = 7.200$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2ad$$

$$-v_0^2 = -2ad$$

$$d = \frac{v_0^2}{2a}$$

$$d = \frac{(60m/s)^2}{2(4m/s^2)}$$

$$d_3 = 450m$$

$$d_T = d_1 + d_2 + d_3$$

$$d_T = 8550m //$$

$$b) a = \frac{v_f - V_0}{t}$$

$$t = \frac{V_f - V_0}{a}$$

$$t = \frac{-V_0}{a}$$

$$t = \frac{-(60m/s)}{(-4)m/s^2}$$

$$t = 15s //$$

### GRÁFICO POSICIÓN CONTRA TIEMPO

Para analizar el movimiento de un cuerpo, que se mueve en línea recta, se miden distancias y tiempos, Primero se necesita elegir un sistema de referencia: un eje ligado a la trayectoria rectilínea, por ejemplo el eje x y el origen 0 de este eje. Si se miden las distancias desde el origen O hasta la posición en la que se encuentra la partícula, en los diferentes instantes, se puede elaborar una tabla de posiciones en función de tiempo.

La pendiente  $m$  de la cuerda de la Fig. 2-23  $(x_3 - x_1) / (t_3 - t_1) = \Delta x / \Delta t$  y representa la velocidad media en ese intervalo de tiempo. La pendiente de la tangente de la curva en el punto señalado para el instante  $t_1$  es  $m_1$  y su valor representa la velocidad en ese instante, que equivale al límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero.

En forma general, la pendiente de la cuerda que uno dos puntos del gráfico x contra t representa la velocidad media de la partícula, en el intervalo de tiempo analizado.

Las pendientes de las tangentes a la curva en los instantes  $t_2$  y  $t_3$  dan los valores de las velocidades  $v_{x2}$  y  $v_{x3}$  de la partícula en esos instantes.

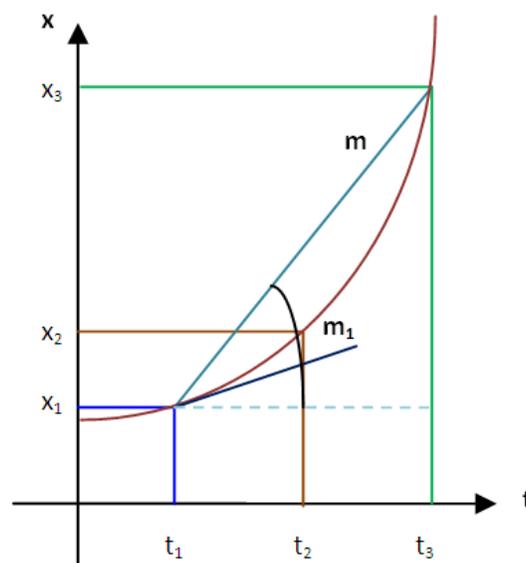


Fig. 2 – 23

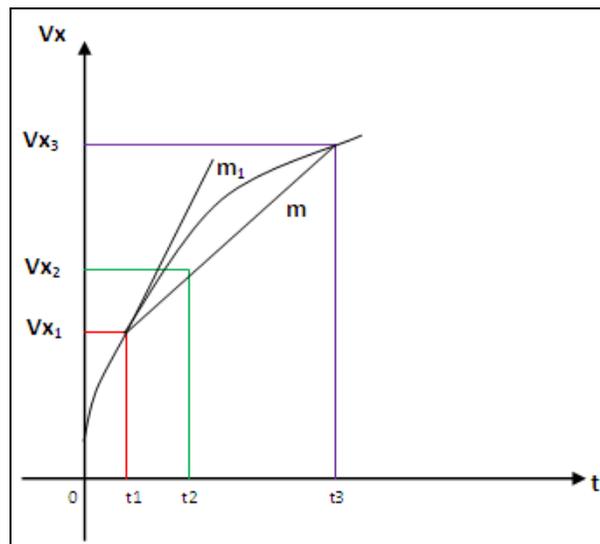
Cuando el gráfico  $x$  contra  $t$  es una línea recta, la pendiente de la cuerda para cualquier intervalo de tiempo sería la misma, como también lo es la pendiente de la tangente a la curva para cualquier instante esto significa que la velocidad  $V_x$  es igual a la velocidad media  $V_{mx}$ , es decir, que la velocidad  $V_x$  es constante.

### GRÁFICO VELOCIDAD CONTRA TIEMPO

Con las pendientes de las tangentes trazadas a diferentes instantes en un gráfico  $x$  contra  $t$ , se puede hacer una tabla de la velocidad en función de tiempo.

La pendiente  $m$  de la cuerda de la Fig. 2-24 es  $\Delta V_x / \Delta t$  y representa la aceleración media de la partícula para el intervalo de tiempo  $\Delta t = t_3 - t_1$ .

Al observar la Fig 2-24, se ve que la pendiente de la tangente a la curva es mayor que la pendiente de la cuerda; es decir  $m_1 > m$ , lo que significa que la aceleración al instante inicial de intervalo es mayor que la aceleración media en el intervalo considerado.



**Fig. 2-24.- La aceleración media  $a$ , como pendiente de la cuerda para un intervalo.**

Las pendientes de las tangentes a la curva en los instantes  $t_2$  y  $t_3$ . Definen las aceleraciones de las partículas, en esos instantes.

En el intervalo de  $t_1$  a  $t_3$  la pendiente de la tangente  $y$ , por lo tanto, la aceleración  $a_x$  cambia con el tiempo.

En el caso en el cual el gráfico  $V_x$  contra  $t$  es una línea recta la pendiente de la cuerda para cualquier intervalo de tiempo sería la misma como también lo que es la pendiente de la tangente a la curva para cualquier instante.

Además, en este gráfico el área comprendida entre la curva, el eje de tiempo y las rectas  $t = t_1$  y  $t = t_2$  representa el desplazamiento que realiza la partícula en el intervalo de tiempo considerado.

Para encontrar la distancia recorrida por la partícula sobre la trayectoria en un  $\Delta t$ , se deben sumar las magnitudes de los desplazamientos parciales.

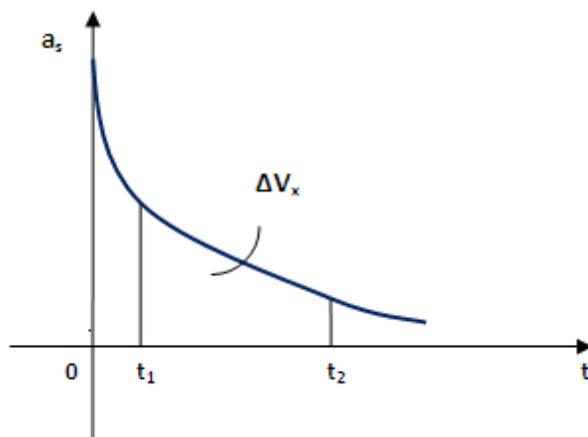
Mediante el cálculo integral se podrá encontrar el área en un solo paso, sin estos inconvenientes.

A partir del gráfico  $x$  contra  $t$  del movimiento de una partícula siguiendo el procedimiento de calcular pendientes de rectas tangentes, se pueden hacer los gráficos  $V_x$  contra  $t$  y  $a_x$  contra  $t$  que en conjunto describen completamente el movimiento. La pendiente de la tangente a esta curva representa la velocidad instantánea.

Es importante recalcar que el par de acción y reacción son instantáneas.

### **Gráfico Aceleración Contra Tiempo**

Con las pendientes de las tangentes trazadas a diferentes instantes en un gráfico  $V_x$  contra  $t$ , se puede hacer una tabla de la aceleración en función del tiempo. Estos puntos representados en un gráfico  $a_x$  contra  $t$ , permiten obtener una curva como la indicada en la Fig. 2-26.



**Fig. 2-26**

La pendiente de la tangente a la curva en este gráfico no tiene un significado físico.

A partir del gráfico  $x$  contra  $t$  del movimiento de una partícula siguiendo el procedimiento de calcular pendientes de rectas tangentes.

De manera similar, si se conoce el gráfico  $a_x$  contra  $t$  y los valores de la velocidad  $V_x$  y la posición  $x$  a cierto instante y siguiendo el procedimiento de calcular áreas bajo las curvas.

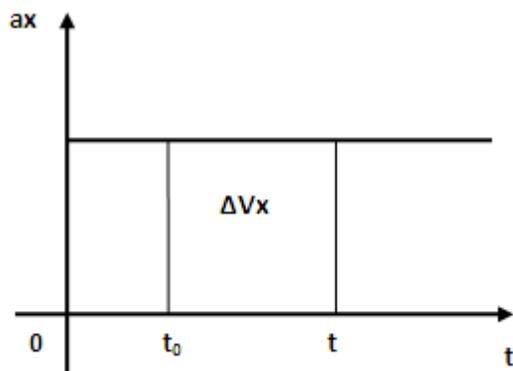
Si la partícula se mueve en un plano, por ejemplo el plano  $xy$ , por una trayectoria rectilínea a curvilínea, entonces se tienen dos gráficos para la posición ( $x$  contra  $t$  y  $y$  contra  $t$ ) dos para la velocidad ( $V_x$  contra  $t$  y  $V_y$  contra  $t$ ).

### **Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado**

Es un movimiento de las siguientes características

- Trayectoria rectilínea  $\Rightarrow u_{11} = cte \Rightarrow \delta_N = 0 \rightarrow V \neq cte, a = cte$
- La magnitud de la velocidad cambia uniformemente  $\Rightarrow \delta_T = cte \neq 0 \rightarrow V \neq cte, a = cte$

El gráfico  $a_x$  contra  $t$  será uno como el mostrado en la Fig. 2-27.



**Fig. 2-27**

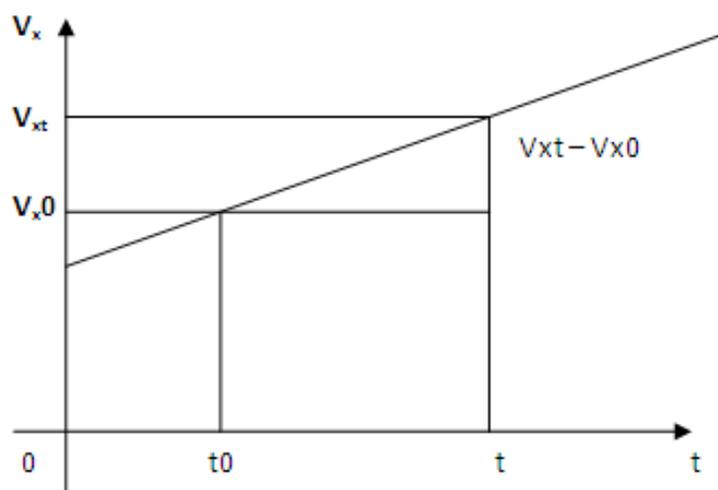
De donde  $V_{x1} - V_{x0} = a_x(t - t_0)$

Donde  $V_{xt}$  es la velocidad al tiempo  $t$ . Finalmente se tiene:  $V_{xt} = V_{x0} + a_x(t - t_0)$  (1-23b)

Que es la ecuación de la velocidad  $V_x$  en función del tiempo  $t$  para el MRUV.

El gráfico de  $V_x$  contra  $t$  es una recta como de la Fig. 2-28.

Un ejemplo de gráficos  $X$ 1  $V_x$  y  $a_x$  contra  $t$  para el MRUV se indica en la Fig. 2-29

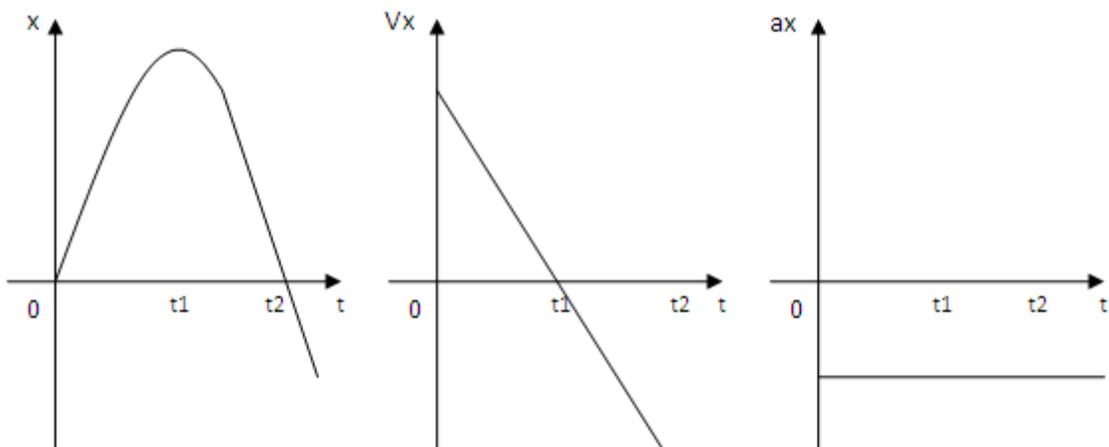


### Movimiento Rectilíneo Uniforme

Es un movimiento de las siguientes características:

- Trayectoria rectilínea  $\rightarrow U_V = cte \Rightarrow a_N = 0 \Rightarrow V = cte, B = 0$
- La magnitud de la velocidad constante  $\Rightarrow a_T = 0 \rightarrow V = Cte, B = 0$

Un ejemplo de los gráficos  $x$ ,  $V_x$ ,  $a_x$  contra  $t$  de MRU se muestra en la Fig. 2-30



**Figura: 2-29: Un ejemplo de los gráficos  $x$ ,  $y$ ,  $a_x$  contra  $t$  para el MRUV.**

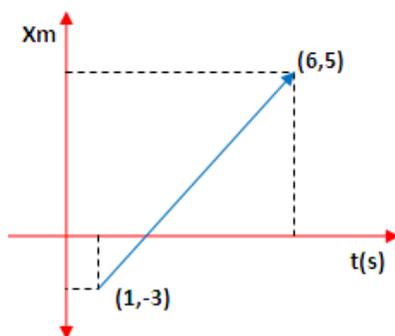


## ANÁLISIS GRAFICO

En  $t= 1s$  una partícula que se mueve con velocidad constante se localiza en  $x= -3m$  y en  $t= 6s$  la partícula se localiza en  $x=5m$ . Determine:

a. La velocidad de la partícula a partir de la pendiente de esta gráfica

t(s)	x(m)
1	-3
6	5



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5 - (-3)}{6 - 1} \frac{m}{s}$$

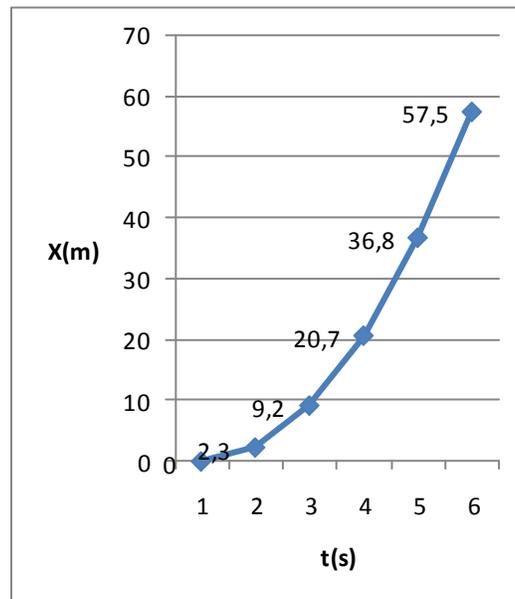
$$m = 1.6m/s$$

$$v = 1.6m/s$$

Con los siguientes datos, construya una gráfica de posición contra tiempo

- Construyendo tangentes para la curva  $x, t$  encuentre la velocidad instantánea del auto en diferentes instantes.
- Grafique la velocidad, instantánea contra el tiempo y a partir de eso determine la aceleración promedio de automóvil.
- ¿Cuál es la velocidad inicial del vehículo?

t(0)	X(m)
0	0
1	2,3
2	9,2
3	20,7
4	36,8
5	57,5



a)  $\phi(x,t)$

b)  $v = ?$

c)  $\phi(v,t)$

$a_{prom} = ?$

d)  $V_0 = ?$

$$V_0 = 0$$

$$V = V_0 + at$$

$$V = ay$$

$$d = V_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\frac{2d}{t^2} = a$$

$$a = 2 \frac{(9.2)m}{(2)^2 \cdot s^2}$$

$$a = 4,6m/s^2$$

$$v(0) = 4,6 \frac{m}{s^2} (0) = 0m/s$$

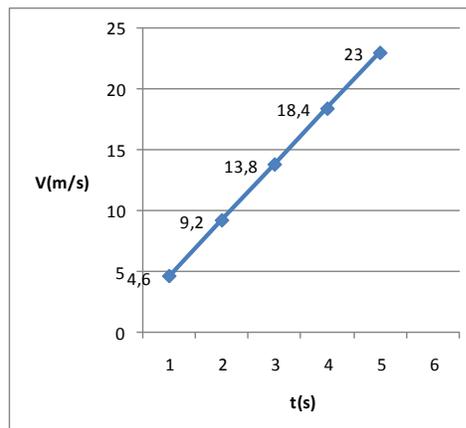
$$v(1) = 4,6 \frac{m}{s^2} (1) = 4.6m/s$$

$$v(2) = 4,6 \frac{m}{s^2} (2) = 9.2m/s$$

$$v(3) = 4,6 \frac{m}{s^2} (3) = 13.8m/s$$

$$v(4) = 4,6 \frac{m}{s^2} (4) = 18.4m/s$$

$$v(5) = 4,6 \frac{m}{s^2} (5) = 23m/s$$



c)

$$a_{prom} = \frac{V_f - V_0}{t_f - t_0}$$

$$a_{prom} = \frac{23 - 0}{5 - 0}$$

d)  $V_0 = 0m/s$

**Determine la velocidad instantánea de la partícula descrita en la figura en los siguientes tiempos**



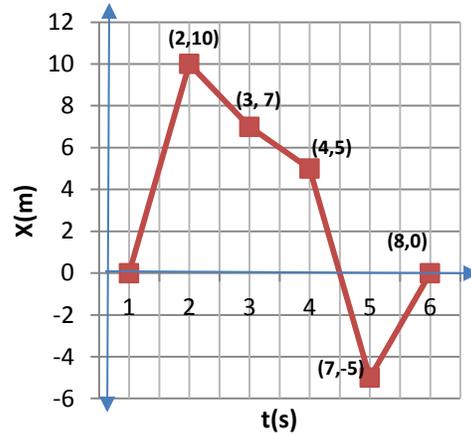
$t(s)$

a) 1

b) 3

c) 4.5

d) 7.5



$$V = \frac{\Delta_r}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$V_1 = \frac{5-0}{1-0} = 5m/s$$

$$V_3 = \frac{5-10}{4-2} = \frac{-5}{2} m/s = -2.5m/s$$

$$V_{(4.5)} = 0m/s$$

$$V_{(5.5)} = \frac{(5)}{8-7} = \frac{5}{1} = 5m/s$$

Una partícula parte del reposo y acelera como se indica en la figura. Determine

a. La velocidad de la partícula en  $t= 10s$  y  $t= 20s$

b. La distancia recorrida en los primeros 20s.

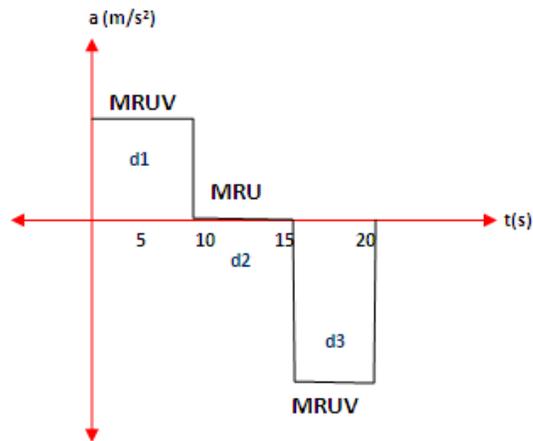
$V_0 = 0$

a)  $v = 0$

$t = 10s; t = 20s$

b)  $d = ?$

$t = 20s$



a)  $V = V_0 + at$   
 $V = at$

$$V(10) = 2 \frac{m}{s} (10s)$$

$$V(20) = -3 \frac{m}{s} (20s)$$

$$V(10) = 20m/s$$

$$V(20) = -60m$$

$$d_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$V = \frac{d}{t}$$

$$d = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a}$$

$$d_1 = \frac{1}{2} (10)^2 s^2 \frac{m}{s}$$

$$d_2 = V \cdot t$$

$$v = at$$

$$d_1 = 100m$$

$$d_2 = 20 \frac{m}{s} (15 - 10)s$$

$$v(0) = -3 \frac{m}{s^2} (15s)$$

$$d_2 = 20(5)m$$

$$v(0) = -4.5 \frac{m}{s}$$

$$d_2 = 100m$$

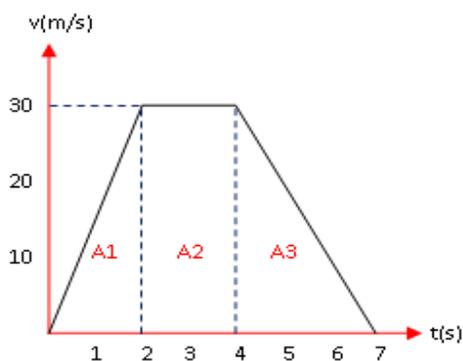
$$v(f1) = -3 \frac{m}{s^2} (80)s$$

$$v(f1) = -60 \frac{m}{s}$$

$$d = \frac{(-60)^2 - (-4.5)^2}{2(3)}$$

$$d = 262.5$$

La velocidad de un móvil varía como se indica en la figura. Calcular la distancia total recorrida.



$$A_1 = \frac{2(30)}{2}$$

$$A_2 = 30(2)$$

$$A_3 = \frac{30(3)}{2}$$

$$A_1 = 30m$$

$$A_2 = 60m$$

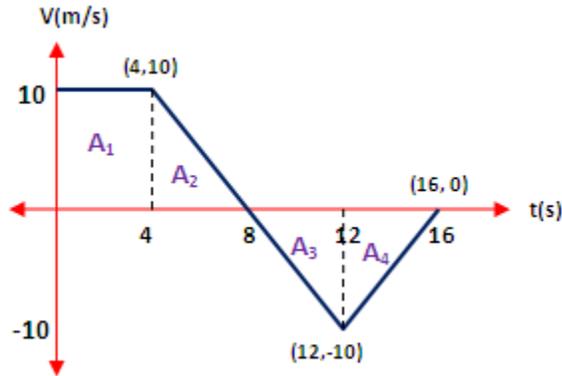
$$A_T = 135m$$

$$A_3 = 45m$$

El movimiento de un vehículo que parte de reposo desde una posición  $15\vec{i}$  respecto al origen se indica en el gráfico velocidad en función del tiempo construya los gráficos.

a. Aceleración función de tiempo

Posición función del tiempo



$$a_1 = 0 \frac{m}{s^2}$$

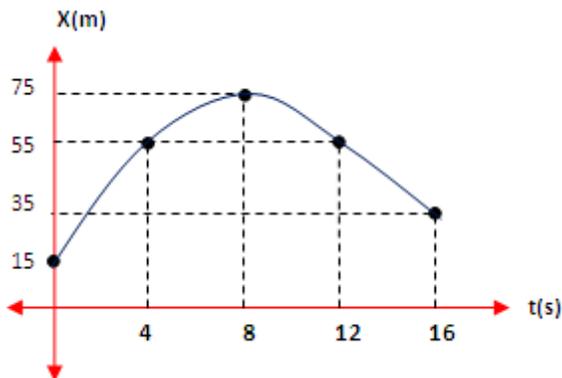
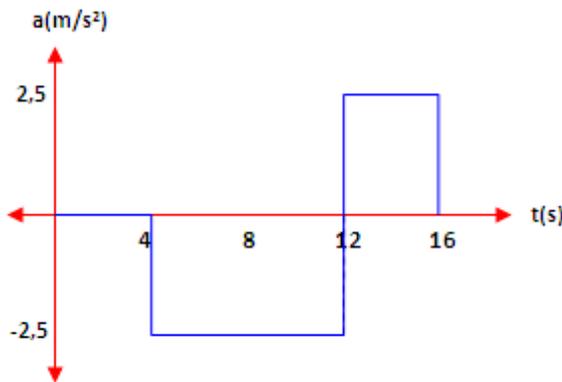
$$a_2 = \frac{10+10}{4-12}$$

$$a_2 = -2.5 \frac{m}{s^2}$$

$$a_3 = \frac{0+10}{6-12}$$

$$a_3 = \frac{10}{4}$$

$$a_3 = -2.5 \frac{m}{s^2}$$



$$v = \frac{d}{t} d$$

$$d = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$d(4) = 10 \frac{m}{s} (4s)$$

$$d = \frac{1}{2} a t^2$$

$$d(4) = 40m$$

$$d(8) = \frac{1}{2} \left( 2.5 \frac{m}{s^2} \right) (4s)^2$$

$$d(8) = 20m$$

## APLICACIONES DEL M.R.U.

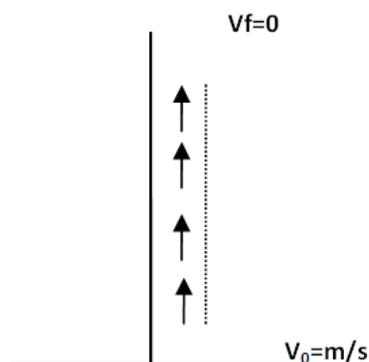
## Lanzamiento Vertical

$$\vec{g} = -9.8 \vec{j} \frac{m}{s^2} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

$$g = 9.8 \frac{m}{s^2} \quad \vec{\Delta r} = \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

## Tipos De Lanzamiento Verticales

### Lanzamiento Vertical Hacia Arriba



$$V_f^2 = V_0^2 - 2gh \quad V = V_0 - gt$$

$$h_{\max} = \frac{V_0^2}{2g} \quad t = \frac{V_0}{g}$$

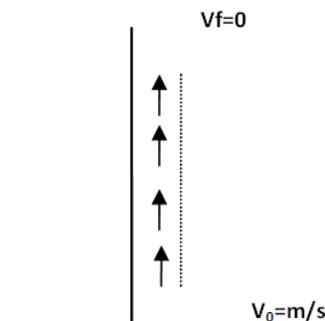
$$t_v = 2t$$

El movimiento es desacelerado ya que el desplazamiento tiene sentido contrario a la aceleración.

### Lanzamiento Vertical Hacia Abajo O Caída Libre

Es un movimiento que se desarrolla en el eje y negativo, su dirección es a favor de la gravedad por tanto es un movimiento acelerado.

### Ecuaciones



$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t$$

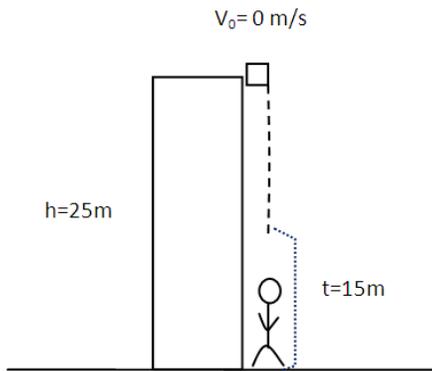
$$\vec{\Delta}_v = \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad V = V_0^2 + 2gh$$

$$h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

## EJEMPLOS



Otro plan para atrapar al correcaminos ha fracasado y una caja fuerte cae desde el reposo desde la parte más alta de un peñasco de 25m de alto hacia el coyote que se encuentra en el fondo, se percata de la caja después que esta ha caído 15 mts. ¿Cuánto tiempo tendrá para quitarse?



$$h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$25m = \frac{1}{2} (9.8m/s^2) (t^2)$$

$$t^2 = \frac{25m \times 2}{9.8m/s^2}$$

$$t^2 = \frac{15m \times 2}{9.8m/s^2}$$

$$t_{total} = 2.25s$$

$$tg = t_{total} - t_{caer}$$

$$tg = 0.51s$$

Una pelota fue lanzada directamente hacia abajo con una  $\vec{V}_0 = 8m/s$  desde una altura de 30mts. ¿En qué momento la pelota golpea al suelo?

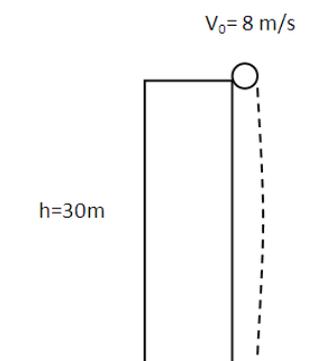
**Datos**

$$V_0 = 8m/s$$

$$h = 30m$$

$$t = ?$$

$$g = 9.8m/s^2$$



$$h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$30m = 8mt + \frac{1}{2}(9.8)t^2$$

$$30 = 8m/s + 4.9t^2$$

$$4.9t^2 + 8t - 30 = 0$$

$$t = -8 \pm \sqrt{8^2 - 4(4.9)(-30)}$$

$$t = \frac{-8 \pm 25.53}{9.8}$$

$$t_1 = 1.78s //$$

$$t_2 = -3.2s //$$

Una pelota de beisbol es golpeada con el bat de manera que viaja en linea recta hacia arriba un aficionado observa que son necesarios 3 segundos para que la pelota alcance su altura máxima.

- Encuentre su velocidad inicial
- Encuentre su altura máxima

**Datos**

$$t = 3s$$

$$V_0 = ?$$

$$h_{\max} = ?$$

$$g = 9.8m/s^2$$

$$V_f = V_0 - gt$$

$$V_0 = gt$$

$$V_0 = 9.8 \frac{m}{s^2} (3s)$$

$$V_0 = 29.4m/s$$

$$h_{\max} = \frac{V_0^2}{2g}$$

$$h_{\max} = \frac{(29.4m/s)^2}{2(9.8m/s)}$$

$$h_{\max} = 4.41m //$$

**EJERCICIOS**

Se deja caer una piedra desde la azotea de un edificio, cuando pasa cerca de una ventana de 1.2m de altura se observa que la piedra se demora 0.2s en pasar desde el marco superior hasta el marco inferior de dicha ventana. Determine.

La distancia que existe entre la azotea y el marco superior de la ventana.

**Datos**

$$V_0 = 0m/s$$

$$Ven \tan a =$$

$$h = 2.2m$$

$$t = 0.2s$$

$$d_{A/MS} = ?$$

$$g = 9.8m/s^2$$

$$d_{A/MS} = \frac{1}{2}t_1^2$$

$$d_{A/MS} = \frac{1}{2}(9.8)t_1^2$$

$$d_{A/MS} = 4.9t_1^2$$

$$(2) d_{A/MS} = 5.11m$$

$$1. d_{A/MI} - d_{A/MS} = hr$$

$$d = V_0t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$d = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \text{Es general}$$

$$d_{A/MI} = \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$d_{A/MI} = \frac{1}{2}(9.8)t_2^2$$

$$(3)d_{A/MI} = 4.9(t_1 + 0.2)^2$$

**Reemplazando 2, 3 en (1)**

$$4.9(t_1 + 0.2)^2 - 4.9t_1^2 = 2.2m$$

$$4.9(t_1^2 + 0.4t_1 + 0.04) - 4.9t_1^2 = 2.2m$$

$$4.9t_1^2 + 1.96t_1 + 0.196 - 4.9t_1^2 = 2.2m$$

$$1.96t_1 = 2.004$$

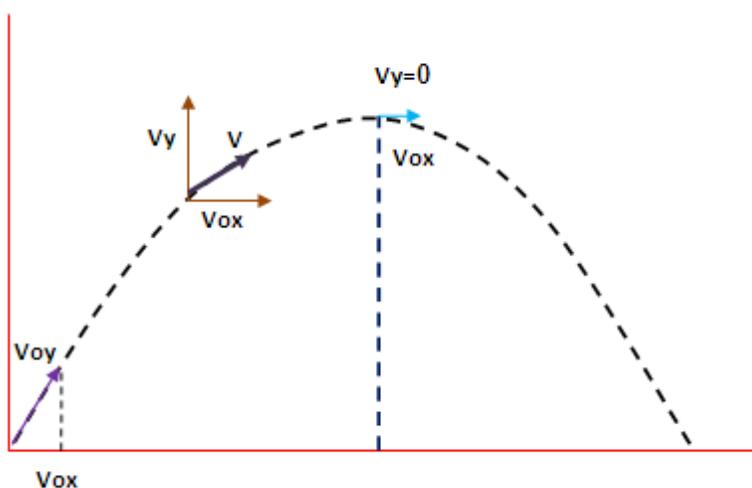
$$t_1 = 1.022A$$

## MOVIMIENTO EN 2 DIMENSIONES

Se denomina movimiento en 2 dimensiones cuando la trayectoria recorrida por el objeto es en forma parabólica.

### Velocidad y aceleración de 2 dimensiones

En el eje x al no existir aceleración horizontal el movimiento que se genera es rectilíneo uniforme es decir que la componente de la velocidad en el eje de las x no varía con aceleración de la gravedad el movimiento que se genera es RUV, desacelerando en el ascenso hasta alcanzar su altura máxima y acelerando en el descenso en el ascenso hasta alcanzar su altura máxima y acelerado en el descenso desde su altura máximo hasta el punto situado a la misma altura que el punto de lanzamiento.



La **aceleración total** es el vector gravedad, es decir es igual  $\vec{a} = \vec{g} = -9.8\vec{j}m/s^2 = 9.8m/s^2$

**Aceleración tangencial** definida como la proyección del vector aceleración total sobre el vector velocidad, para controlar:  $\vec{a}_r = (\vec{g}\vec{u}_v)\vec{u}_v$

**Aceleración centrípeta** definida como la diferencia entre la aceleración total y la aceleración tangencial.

$$\vec{a}_c = \vec{a} - \vec{a}_t = \vec{g} - \vec{a}_T$$



### ECUACIONES

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t \quad \vec{\Delta}_r = \vec{V}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad V_{0x} = V_0 \cos \theta \quad t_s = \frac{V_0 \sin \theta}{g} \quad t_v = 2t_s$$

$$y = h_{\max} = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad X = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad V_{0y} = V_0 \sin \theta$$

#### Ejemplo

Un cañón dispara un proyectil con una rapidez de 50m/s y un ángulo de 25° sobre la horizontal, determine.

- La altura máxima alcanzada
- El tiempo de vuelo
- El alcance horizontal
- La posición luego de 2s
- La velocidad final al impactar en el piso.

#### Datos

$$V_0 = 50m/s$$

$$\theta = 25^\circ$$

- Hmax=?
- tv=?
- x=?

$$a. \quad h_{\max} = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$h_{\max} = \frac{\left(50 \frac{m}{s}\right)^2 \frac{\sin^2}{25}}{2(9.8m/s)}$$

$$h_{\max} = 22.78$$

$$b. \quad t_s = \frac{V_0 \sin \theta}{g}$$

$$t_s = \frac{50 \sin 25}{9.8}$$

$$t_s = 2.15A$$

$$t_v = 2t_s$$

$$t_v = 4.3s$$

$$d. \quad \vec{A}_r = V_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$V_{0x} = 50 \sin 25 = 45.32$$

$$V_{0y} = 50 \sin 25 = 21.23$$

$$c. \quad x = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2}$$

$$x = \frac{(50)^2 \sin 2\theta}{9.8}$$

$$x = 195.42$$

$$e. \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + at \text{ a}$$

$$\vec{v}(45.32\vec{i} + 21.13\vec{j}) + (-9.8\vec{j})(4.31)$$

$$\vec{v}(45.32\vec{i} - 21.21\vec{j})m/s$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = V_0 t + \frac{1}{g} a t^2$$

$$\vec{r} = (45.32\vec{i} + 21.12\vec{j})2 + \frac{1}{2} \left( -9.8\vec{j} \frac{m}{s^2} \right) (2)^2$$

$$\vec{r} = (90.64\vec{i} + 42.26\vec{j} - 19.6\vec{j})m$$

$$\vec{r} = (90.64\vec{i} + 22.66\vec{j})m$$

Desde un edificio de 15m. un niño lanza una pelota con una rapidez de 60m/s y un ángulo de 40°, sobre la horizontal. Determine

- Aceleración, velocidad y posición para cualquier tiempo
- Altura máxima
- Qué tiempo tarda en llegar al piso.
- El alcance horizontal
- Velocidad adquirida a los 2s. de haber sido lanzado
- Aceleración tangencial y centrípeta para un tiempo de 2s.

a.  $\vec{a} = \vec{g} = -9.8\vec{j}m/s^2$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + at$$

$$V_{ox} = 60.Cos40 = 45.96\vec{i}$$

$$V_{oy} = 60.Sen.40 = 38.57\vec{j}$$

$$\vec{v} = (45.96\vec{i} + 38.57\vec{j}) - (-9.8\vec{j})$$

$$\vec{v} = (45.96\vec{i} + (38.57 - 9.8t)\vec{j}) //$$

$$\vec{\Delta}_r = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Delta_r = (45.96\vec{i} + 38.57\vec{j}) + 4.9\vec{j}t^2$$

$$\Delta_r = (45.96t)\vec{i} + (38.57t - 4.39t^2)\vec{j}$$

$$\vec{A}_r = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\vec{A}_r = (45.96\vec{i} + 38.57\vec{j}) + (-4.9\vec{j})t^2$$

$$\vec{A}_r = (45.96t)\vec{i} + (38.57t - 4.9t^2)\vec{j}m$$

b.  $y = \frac{V_0^2 Sen^2 \theta}{2g}$

$$y = \frac{(38.57)^2}{2(9.8)}$$

$$y = 75.89m$$

c.  $tv = ts + tb$

$$h_{\max} = g.t.h$$

$$h_{\max} = 75.89 + 15m$$

$$h_{\max} = 90.89m$$

$$t_s = \frac{V_o y}{9} = \frac{V_o \cdot \text{Sen } \theta}{9}$$

$$t_s = \frac{38.57}{9.8}$$

$$t_s = 3.94s$$

$$t_v = 8.24$$

$$y = V_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\frac{2y}{a} = t^2$$

$$t_b = \sqrt{\frac{2(90.89)}{9.8}}$$

$$t_b = 4.31s //$$

d.  $V_{0x} = \frac{dx}{t}$

$$dx = V_{0x} t$$

$$dx = 45.96(8.24)$$

$$dx = 379.17m$$

e.  $\vec{v} = (45.96\vec{i} + (38.57\vec{j} - 9.8t)\vec{j})$

$$\vec{v} = (45.96\vec{i} + (38.57 - 9.8(2))\vec{j})$$

$$\vec{v} = (45.96\vec{i} + 18.97\vec{j})$$

f.  $\vec{a}_t = (\vec{g}\vec{u}_v)\vec{u}_v$

$$\vec{u}_v = \frac{45.96\vec{i}}{49.72} + \frac{18.97\vec{j}}{49.72}$$

$$\vec{u}_v = (0.92\vec{i} + 0.38\vec{j})$$

$$\vec{a}_r = (-9.8\vec{j}(0.92\vec{i} + 0.38\vec{j})(0.92\vec{i} + 0.38\vec{j}))$$

$$\vec{a}_r = (-3.42\vec{i} - 1.41\vec{j})m/s^2$$

$$\vec{a}_c = \vec{a} - \vec{a}_r$$

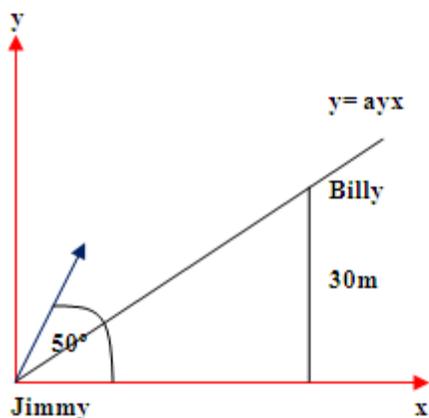
$$\vec{a}_c = -9.8\vec{j} - (-3.42\vec{i} - 1.41\vec{j})$$

$$\vec{a}_c = (3.42\vec{i} - 8.39\vec{j})m/s^2$$

### EJERCICIOS

Jimmy está en la parte inferior de una colina, mientras que Billy se encuentra 30m arriba de la misma.

Jimmy esta en el origen de un sistema de coordenadas xy y la línea que sigue la pendiente está dada por la ecuación  $y=0.4x$ . como se muestra en la figura. Si Jimmy lanzó una manzana a Billy con un ángulo de  $50^\circ$  respecto de la horizontal. ¿Con qué velocidad debe lanzar la manzana para que pueda llegar a Billy.



$$x = V_0 t$$

$$x = \frac{y}{0.4}$$

$$\frac{75}{V_{0x}} = t$$

$$y = \frac{V_0 t}{y} + \frac{1}{2} a t^2$$

$$30m = V_{0y} \left( \frac{75}{V_{0x}} \right) + \frac{1}{2} (9.8) \left( \frac{75}{V_{0x}} \right)^2$$

$$30m = V_0 \cdot \text{Sen } \theta \left( \frac{75}{V_0 \cdot \text{Cos } \theta} \right) - \frac{27562.5}{(V_0 - \text{Cos } \theta)^2}$$

$$30m = \text{tg } \theta (75) - \frac{27562.5}{V_0^2 \cdot \text{Cos}^2 \theta}$$

$$V_0^2 = \frac{27562.5}{(75 \text{tg } \theta - 30) \text{Cos}^2 \theta}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{27562.5}{(75 \text{tg } \theta - 30) \text{Cos}^2 \theta}}$$

$$V_0 = 33.51 \text{ m/s}$$

Un patinador de fútbol debe patear el balón desde un punto a 36m de la zona de gol y el balón debe librar los postes que están a 3.05 m de alto. Cuando se patea el balón

abandona el suelo con una velocidad de 20m/s y un ángulo de 53° respecto a la horizontal.

**Determinar**

a. Por cuanto distancia el balón libra o no los postes el balón se aproxima a los postes mientras continúa ascendiendo o cuando va descendiendo.

**Datos**

$$x = 36m$$

$$V_0 = 20m/s$$

$$\angle = 53^\circ$$

$$h = 3.05m$$

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos \theta$$

$$V_{0x} = 20m / \cos 53^\circ$$

$$V_{0x} = 12.036m/s$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin \theta$$

$$V_{0y} = 20m/s \cdot \sin 53^\circ$$

$$V_{0y} = 15.972m/s$$

$$h_{\max} = \frac{(V_0 \sin \theta)^2}{2g}$$

$$h_{\max} = \frac{(15.972m/s)^2}{2(9.8m/s^2)}$$

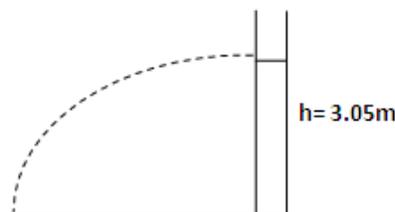
$$h_{\max} = 13.0m$$

$$X_p = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$X_p = \frac{(20m/s)^2 \cdot \sin 106^\circ}{9.8m/s^2}$$

$$X_p = 39.21m$$

Cuando va descendiendo



$$x = 36m$$

a.  $t_s = \frac{V_0 \cdot \sin \theta}{g}$

$$t_s = 1.6s$$

$$V_{0x} = \frac{dx}{t}$$

$$t = \frac{36m}{12.036m/s}$$

$$y = V_0 y - \frac{1}{2} at^2$$

$$y = 15.97(3) - \frac{1}{2}(9.8)(3)^2$$

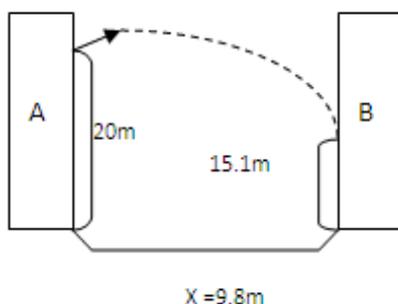
$$y = 3.81$$

$$Y_T = y - h$$

$$Y_T = 0.78m //$$

2 personas A y B se encuentran en las ventan de 2 edificios ubicados uno frente al otro en los lados opuestos de una calle, los edificios están separados entre si 9.8m y las alturas de las ventanas respecto al piso son 20m para A y 15.1 m para B, si A lanza hacia la derecha un globo con agua con la intención de impactar a B y la rapidez inicial de globo es 9.8 m/s. Calcule.

- El ángulo de disparo respecto a la horizontal
- El vector velocidad de proyectil el momento de impacto



$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos \theta$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin \theta$$

$$V_{0x} = 9.8 \cos \theta$$

$$V_{0y} = 9.8 \text{ m/s} \cdot \sin \theta$$

$$V_{0x} = 9.8 \cdot \cos 63.43$$

$$V_{0y} = 9.8 \cdot \sin 63.43$$

$$V_{0x} = 4.38 \text{ m/s}$$

$$V_{0y} = 8.77 \text{ m/s}$$

(x)

(y)

$$V_{0x} = \frac{x}{t}$$

$$V_{0y} = V_0 y t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$t = \frac{x}{V_{0x}}$$

$$-4.9 = V_0 \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{\cos \theta} \right) + \frac{1}{2} (-9.8) \left( \frac{1}{\cos \theta} \right)^2$$

$$t = \frac{9.8 \text{ m/s}}{9.8 \cos \theta}$$

$$-4.9 = 9.8 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 4.9 \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$t = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$-1 = 2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 4.9 \frac{1}{\cos^2 \theta}$$



$$-1 = 2 \frac{\text{Sen } \theta}{\text{Cos } \theta} - \frac{1}{\text{Cos}^2 \theta}$$

$$1 - \text{Cos}^2 \theta = 2 \cdot \text{Sen } \theta \cdot \text{Cos } \theta$$

$$\text{Sen}^2 \theta = 2 \cdot \text{Sen } \theta \cdot \text{Cos } \theta$$

$$\frac{\text{Sen } \theta}{\text{Cos } \theta} = 2$$

$$\theta = 63.43^\circ$$

$$\vec{V}_t = \vec{V}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{V}_f = (4.38\vec{i} - 13.18\vec{j}) \text{ m/s}$$

Una piedra es lanzada desde un punto A con una velocidad inicial  $V_0$ . Si la piedra impacta al punto P o 250 m de A. Determine: la velocidad de lanzamiento en  $\vec{i}, \vec{j}$  bajo las siguientes condiciones.

**DATOS**

$$V_0 = (i, \vec{j})$$

$$x = 250 \cdot \text{Cos} 37 \quad y = 250 \cdot \text{Sen} 37$$

$$x = 199.66 \text{ m} \quad y = 150.45 \text{ m}$$

$$(x) \quad (y)$$

$$V_{0x} = \frac{x}{t} \quad y = V_0 t + t \frac{1}{g} at^2$$

$$t = \frac{x}{V_{0x}} \quad -150.45 \text{ m} = (V_0 \cdot \text{Sen } \theta) \left( \frac{V_x}{V_0 \cdot \text{Cos } \theta} \right) + \frac{1}{2} (-9.8) \left( \frac{x}{V_0 \text{Cos } \theta} \right)^2$$

$$t = \frac{x}{V_0 \cdot \text{Cos } \theta}$$

$$V_0 y = 36.04 \text{ Sen } 53$$

$$V_0 x = V_0 \cdot \text{Cos } \theta$$

$$V_0 y = 28.78 \vec{j}$$

$$V_0 x = 36.04 \cdot \text{Cos } 53$$

$$\vec{V}_0 (21.69 \vec{i} + 28.78 \vec{j})$$

$$V_0 x = 21.69 \vec{i}$$

$$-150.45 = x \operatorname{tg} \theta - 4.9 \frac{x^2}{V_0^2 \cdot \operatorname{Cos}^2 \theta}$$

$$150.45 + x \operatorname{tg} \theta = \frac{4.9x^2}{V_0^2 \operatorname{Cos}^2 \theta}$$

$$V_0^2 = \frac{4.9x^2}{\operatorname{Cos}^2 \theta (150.45 + x \operatorname{tg} \theta)}$$

$$V_0 = 36.04 \text{ m/s}$$

## DINÁMICA

### Introducción

Newton desarrolló varias teorías, entre ellas la teoría de la gravitación universal, que fueron la base fundamental de una nueva concepción de hacer Física en relación con la que se tenía hasta entonces.

Es importante anotar que hasta la fecha muchos de los aportes de Newton han sido la base fundamental para explorar nuevas ideas sobre el universo.

### Interacciones

Desde que el hombre empezó a preguntarse como las estrellas estaban sobre su cabeza sin caer, surgieron muchas explicaciones. Otros pensaban que existían seres que controlaban dichos objetos en el firmamento, pero también, existían personas que pensaron que las estrellas se mantienen sobre la tierra por una interacción entre ellas (Tierra - Estrellas).

En la actualidad, el desarrollo de la Física ha permitido establecer que en la naturaleza se pueden encontrar cuatro tipos de interacciones fundamentales, a saber.

- Gravitacional
- Electromagnética
- Fuerte
- Débil

La electromagnética es la interacción entre cuerpos, debido a otra propiedad de la materia que es la carga.

La interacción fuerte mantiene estable al núcleo de átomo y la débil permite la ruptura de mismo.

El valor y la dirección de la interacción define la cantidad física vectorial llamada fuerza, la misma que siempre está presente en toda la naturaleza.

## LEYES DE NEWTON

- **Primera Ley de Newton**

Analice el movimiento de un cuerpo al que se le ha dado un impulso sobre una pista recta con rozamiento.

La ley que explica el comportamiento señalado se conoce con el nombre de Primera Ley de Newton o ley de la inercia y podría expresarse como: Esta ley se llama también principio de la inercia y el movimiento de un cuerpo libre de fuerzas externas se dice que es un movimiento por inercia.

Con esto se puede ver que la primera ley de Newton no se cumple para sistemas que tienen aceleración, este sistema no es inercial.

Cualquier sistema de referencia que se encuentre en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme respecto a cualquier sistema inercial es también inercial.

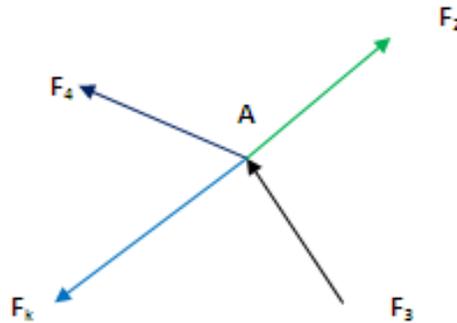
Dado que en este documento se considera a la tierra en reposo debido a su gran masa, un sistema de referencia ligado a ella será considerado inercial.

Además esta interacción ocasiona deformaciones en los cuerpos.

### **Fuerza neta externa.**

Llamada fuerza resultante o fuerza externa neta, que no es más que una representación de una sola fuerza que matemáticamente es igual a la suma vectorial de las fuerzas mencionadas, es decir:

$$F_{neta} = \Sigma F_k$$



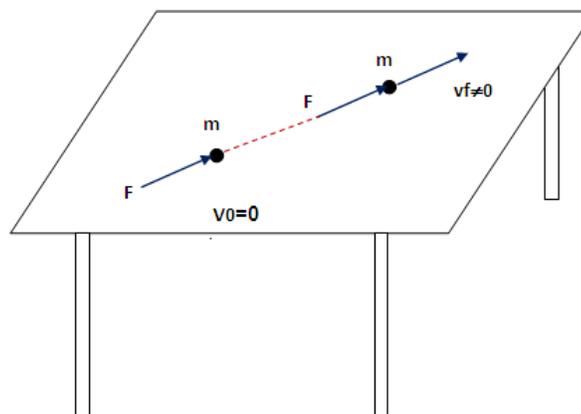
**Fig. 3-1 Fuerzas que actúan sobre un punto A**

Cuando se estudia un sistema cualquiera de cuerpos o partículas, las fuerzas que se deben a la acción mutua de dichos puntos materiales se llaman fuerzas internas al sistema.

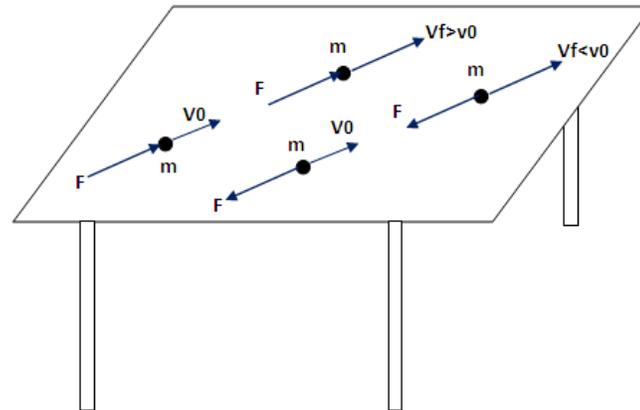
- **Segunda Ley de Newton**

Para entender el efecto producido por una fuerza resultante  $F$  en un cuerpo que se encuentra sobre una masa horizontal sin rozamiento, es necesario analizar las siguientes situaciones posibles.

1. Un cuerpo se encuentra en reposo sobre la mesa y al aplicarle una fuerza constante  $F$ , durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , se pone en movimiento cambiando su velocidad de cero a un valor diferente de cero, entonces la fuerza  $F$  se produce una aceleración en el cuerpo.

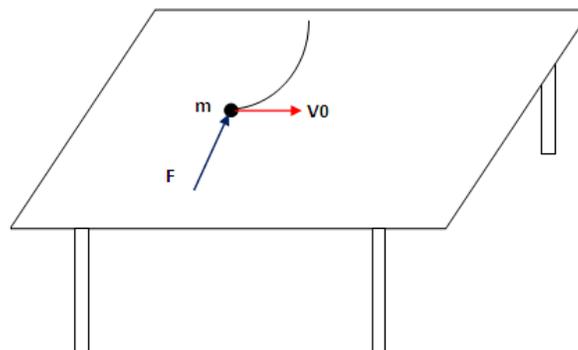


- Si el cuerpo inicialmente se mueve con una velocidad  $V_0$  y en un instante determinado se le aplica la fuerza constante  $F$ , colineal con la velocidad, la rapidez de la partícula aumentará o disminuirá generándose también una aceleración colineal con  $V_0$ .



**Figura 3 – 2** Fuerzas aplicadas a la velocidad

- Si el cuerpo inicialmente se mueve con una velocidad  $V_0$  que no es colineal con la fuerza aplicada  $F$ , la dirección y el módulo de la velocidad cambiarán y la partícula también adquirirá una aceleración.



**Figura 3 – 4** Fuerza no colineal a la velocidad actuando sobre un cuerpo en movimiento.

Al realizar las experiencias anteriores aplicando, en cada caso, la misma fuerza a cuerpos diferentes se concluirá que la misma fuerza neta aplicada a cuerpos diferentes produce efectos distintos.

La inercia es una de las pocas propiedades elementales que no pueden expresarse en función de algo más fundamental.

**Peso y masa.-** La diferencia entre la masa de un cuerpo y su peso es motivo de confusión, por lo que es necesario aclarar que la masa es una cantidad escalar que cuantifica la inercia y el peso es una fuerza, es decir, una cantidad vectorial.

**Unidades de masa.-** Al igual que otras cantidades fundamentales de la física, las unidades de la masa son determinadas al establecer un patrón arbitrario. Así la unidad arbitraria básica es el kilogramo patrón, abreviado Kg,

Para conseguir lo propuesto se debe asegurar que las unidades en los dos lados de la ecuación sean iguales.

**Diagrama del cuerpo libre (DCL):** Es un gráfico donde están dibujadas todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo analizado, debido a la acción que ejercen los alrededores sobre él; pero no deben constar las fuerzas que realiza este cuerpo sobre los demás.

**Tensión (T).-** Es la fuerza que se realiza sobre una partícula con ayuda de una cuerda que se considerará inextensible y de masa despreciable.

**Fuerza Normal (N).-** Cuando un cuerpo de masa  $m$  se encuentra en reposo o movimiento sobre un plano, la componente perpendicular a las superficies en contacto de la fuerza que se realiza el plano sobre el cuerpo se llama fuerza normal.

**Fuerza de Rozamiento ( $f_r$ ).-** Cuando un bloque A de masa  $m$  se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal rugosa y se le somete a la acción de una fuerza externa horizontal  $F$  que tiene un módulo diferente en cada uno de los gráficos señalados a continuación.



Reposo

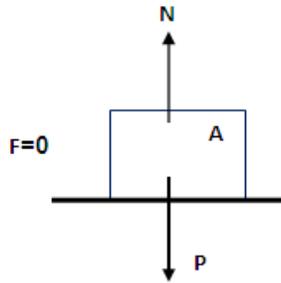


Figura 3-5 (a)

Reposo

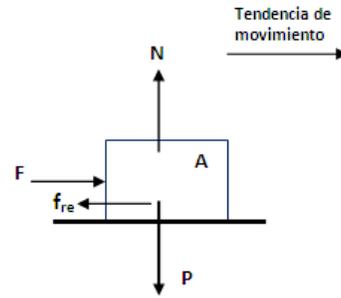


Figura 3-5 (b)

Reposo

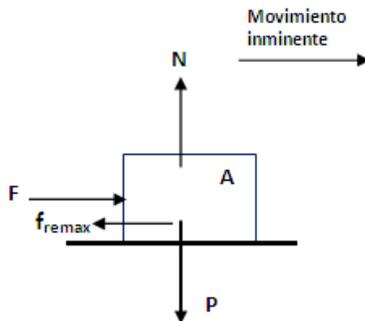


Figura 3-5 (c)

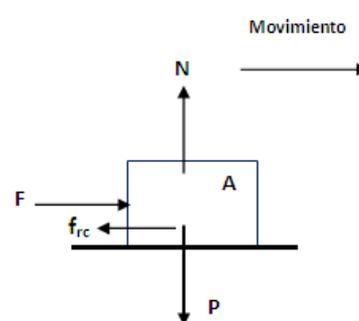


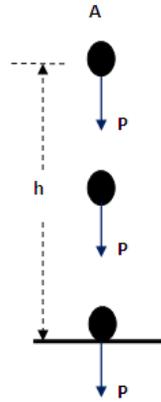
Figura 3-5 (d)

**Figuras 3-5 (a) – 3 – 5 (d)** Diagramas del cuerpo libre de A

**Ejemplo 1.-** Un bloque A de peso  $P$ , se deja caer libremente desde una altura  $h$ ; como se indica.

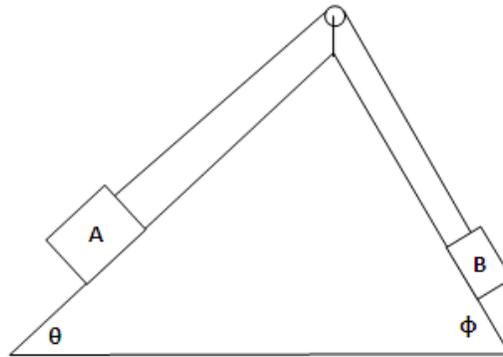
Sin considerar las resistencias del aire y con ayuda de la segunda ley de Newton demostrar que  $p=m.g$ .

La Fig. 3-6 muestra el diagrama del cuerpo libre de A, en las diferentes posiciones durante su caída. La única fuerza que actúa sobre él es su peso  $P$ , se considera que no existe resistencia del aire.



**Figura 3-6 Diagrama del cuerpo libre de A**

**Ejemplo 2:** Es el sistema de la Fig. 3-7 considere que el rozamiento entre todas las superficies en contacto es despreciable, y determine la aceleración de los cuerpos A y B. Suponga que  $m_A > m_B$



**Figura 3-7 Sistema de masas A y B**

En el siguiente cuadro ejemplifica lo sugerido para el cuerpo A.

**CUERPO ACTUANTE**

Tierra  
Plano inclinado  
Cuerda

**FUERZA APLICADA SOBRE A**

Peso (P)  
Normal (N)  
Tensión (T)

Una vez identificadas las fuerzas que actúan sobre la masa puntual, se la representa en el diagrama de cuerpo libre (DCI). Estos diagramas se indican en las Figs. 3-8 (a) y 3-8(b) para las masas puntuales A y B.

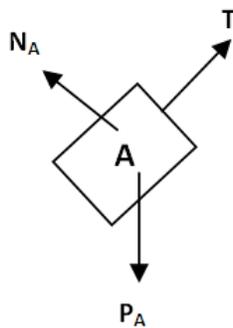


Figura 3-8 (a) DCI de A

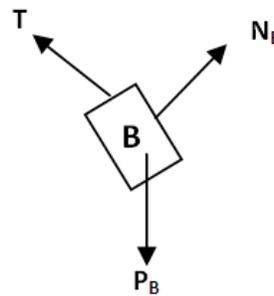


Figura 3-8 (b) DCI de B

**Ejemplo 3**

Un bloque de masa, se gira en sentido anti horario en una trayectoria circular, localizada en un plano vertical, atado a una cuerda de longitud L alrededor de un eje fijo que pasa por el extremo O de la cuerda.

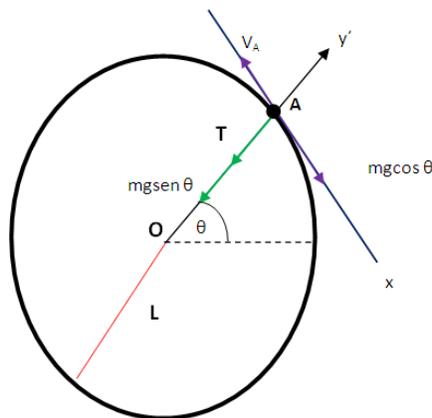
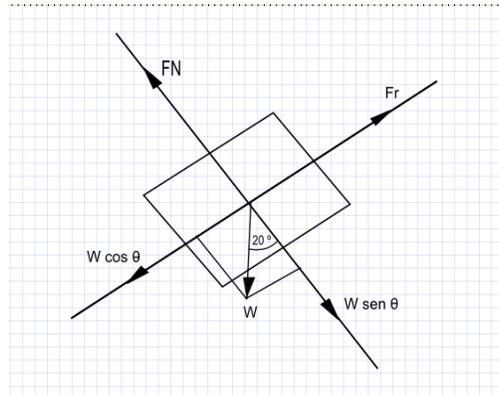
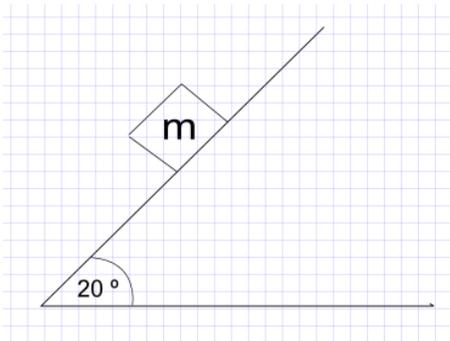


Figura 3-10: DCL del bloque en el instante que pasa por A

En la siguiente figura determine el coeficiente de fricción para que el bloque de masa  $M$  Kg permanezca en reposo sobre el plano.



Datos:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

Masa =  $m$

$$W \sin \theta - Fr = 0$$

$$FN - W \cos \theta = 0$$

$\theta = 20^\circ$

$$W \sin \theta - \mu \cdot FN = 0$$

$$FN = W \cos \theta$$

$$W \sin \theta - \mu \cdot W \cos \theta = 0$$

$$W (\sin \theta - \mu \cdot \cos \theta) = 0$$

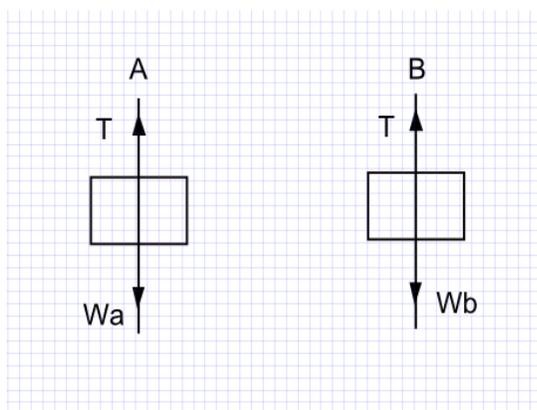
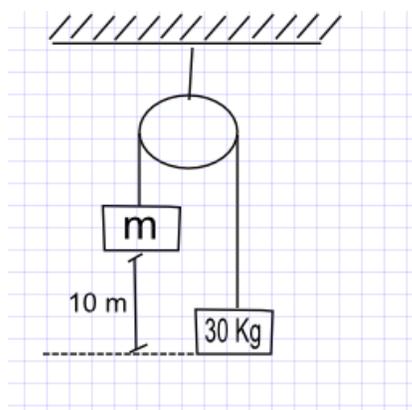
$$\sin \theta - \mu \cdot \cos \theta = 0$$

$$\mu \cdot \cos \theta = \sin \theta$$

$$\mu = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$\mu = 0.36$$

En el sistema mostrado en la figura se observa que partiendo del reposo el bloque de masa M tarda 2 s en llegar al suelo. Determine el valor de la masa M.



$$a = \frac{2d}{t^2} = 2 \frac{(10)}{4}$$

$$a = 5 \frac{m}{s^2}$$

Datos:

$M_A = ?$

$M_B = 30 \text{ Kg}$

$d = 10 \text{ m}$

$v_0 = 0 \text{ m/s}^2$

$$\varepsilon f y = (m_A + m_B) a$$

$$W_A - T = (m_A + m_B) a$$

$$W_A - W_B = (m_A + m_B) a$$

$$m_A \cdot g - m_B \cdot g = a \cdot m_A + a \cdot m_B$$

$$m_A \cdot g - m_A \cdot a = g \cdot m_B + a \cdot m_B$$

$$m_A (g - a) = m_B (g + a)$$

$$m_A = \frac{m_B (g+a)}{g-a}$$

$$m_A = \frac{30(9,8+5)}{9,8-5}$$

$$m_A = 92,5 \text{ Kg}$$

$$\varepsilon f y = 0$$

$$T - W_B = 0$$

$$T = W_B$$

Una fuerza horizontal  $F$  empuja el bloque B contra una pared vertical, el bloque pesa 70 [N] y el bloque A que está unido a B por medio de una cuerda pesa 15 [N]. Si el coeficiente de rozamiento entre la pared y el bloque es 0,5 y la fuerza es igual 40 [N]. Determine la aceleración con la que bajan los bloques A y B.

$$F = 40\text{N}$$

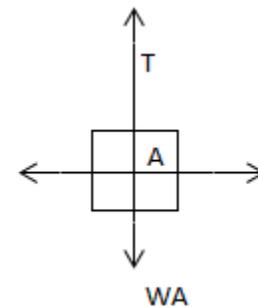
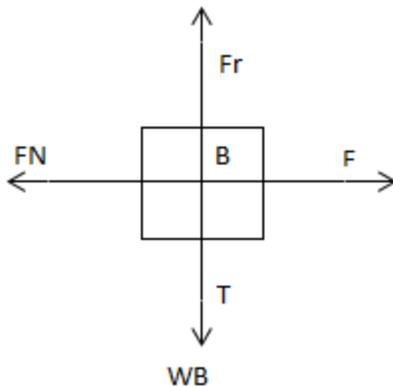
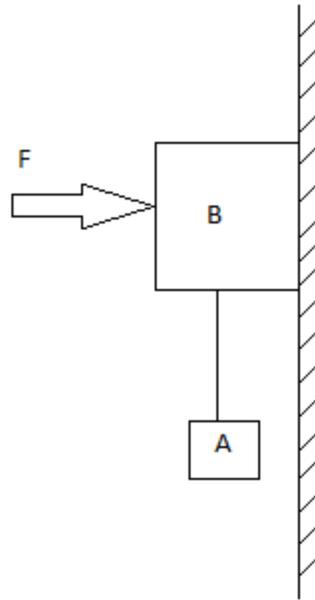
$$\mu_r = 0,5$$

$$W_B = 70\text{ [N]}$$

$$W_A = 15\text{ [N]}$$

$$a = ?$$

$$T = ?$$



$$\sum F_x = 0$$

$$F = FN_B$$

$$\sum F_y = m \cdot a$$

$$W_A - T = m \cdot a$$

$$T = W_A - m_A \cdot a$$

$$\sum F_y = m \cdot a$$

$$W_B - Fr + T = m_B \cdot a$$

$$W_B - \mu_r \cdot FN_B + T = m_B \cdot a$$

$$W_B - \mu_r \cdot F + T = m_B \cdot a$$

$$W_B - \mu_r \cdot FN_B + W_A - m_A \cdot a = m_B \cdot a$$

$$a = \frac{W_B - \mu_r \cdot FN_B + W_A}{m_B + m_A} = \frac{70 - (0.5 \cdot 40) + 15}{\frac{70 + 15}{9.8}} = 7,5 \text{ m/s}^2$$

## MOVIMIENTO CIRCULAR

**Desplazamiento Angular.-** Se expresa.

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i - \theta_i \quad rad$$

**Velocidad angular medio**

$$W_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} \quad \frac{rad}{seg}$$

$$W_m = \frac{W_i + W_f}{2} \quad \frac{rad}{seg}$$

**Aceleración Angular**

$$\alpha = \frac{\Delta W_m}{\Delta t} = \frac{W_f - W_i}{2} \quad \frac{rad}{seg^2}$$

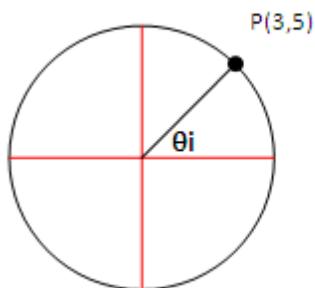
### Ejemplo

Una partícula animada de movimiento circular parte del punto (3, 5) y gira anti horario con centro en origen de 1000 en 12s. Determinar

- El desplazamiento angular
- La velocidad angular media
- La posición angular inicial
- La posición final

#### Datos

- $\Delta\theta = ?$
- $V_0 m =$
- $\theta_i = ?$
- $r_f = ?$



$$a.) \quad 1000^\circ \left( \frac{1\pi rad}{180^\circ} \right) = 17.45 rad = \Delta\theta$$

$$b.) \quad W_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$W_m = \frac{17.45 rad}{12s}$$

$$W_m = 1.45 rad / s$$

$$c.) \quad tg \theta = \frac{5}{3}$$

$$\theta_i = 59,03^\circ \left| \frac{1\pi rad}{180^\circ} \right|$$

$$\theta_i = 1.03 rad$$

$$d.) \vec{r}_f = \vec{r}_i(\cos\theta_f + \text{Sen}\theta_f)$$

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

$$\theta_f = \Delta\theta + \theta_i$$

$$\theta_f = (17.45 + 1.03)\text{rad}$$

$$\theta_f = 18.48\text{rad}$$

$$\theta_f = 1058.83^\circ$$

$$\vec{r}_i \cdot \cos\theta = \frac{9.83 \times \cos 1058.83^\circ}{5.43\vec{i}}$$

$$\vec{r}_i \cdot \text{Sen}\theta = \frac{5.83 \times \text{Sen} 1058.88^\circ}{-2.14\vec{j}}$$

$$\vec{r}_i = (5.43\vec{i} - 2.14\vec{j})$$

Un móvil gira con MCU y describe con un ángulo de 3 rad, en 0.4 seg. Si el radio mide 50 cm. calcular

- Velocidad angular
- Velocidad lineal
- Periodo
- Frecuencia

$$\Delta\theta = 3\text{rad}$$

$$\Delta t = 0.4\text{s}$$

$$R = 50\text{ cm}$$

$$a. \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= \frac{3}{0.4}$$

$$\omega = 7.5\text{ rad/s}$$

$$b. v = \omega R$$

$$v = 7.5(50)$$

$$v = 375\text{ cm/s}$$

$$c. T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{7.5}$$

$$T = 0.84\text{ s/revolucion}$$

$$T = 0.84\text{ s/revolucion}$$

$$d. f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{1}{0.84}$$

$$f = 1.19\text{ rev/s : [Hz]}$$

$$\Delta c = \Delta\theta \cdot R$$

$$\Delta c = 3(50)$$

$$\Delta c = 150\text{ cm}$$

$$ó$$

$$e = v \cdot t$$

$$e = 375 \times 0.4$$

$$e = 150\text{ cm}$$

Calcular la  $\omega$  de cada una de las tres manecillas de un reloj.

- Segundero
- Minutero
- Horero

$$\omega_{ms} = \frac{2\pi rad}{60s}$$

$$\omega_{m(m)} = \frac{2\pi rad}{3600s}$$

$$\omega_{m(m)} = \frac{2\pi rad}{(3600 \times 12)s}$$

$$\omega_{ms} = 0.104 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_{m(m)} = 1.74 \times 10^{-3} \frac{rad}{seg}$$

$$\omega_{m(m)} = 1.45 \times 10^{-4} \frac{rad}{seg}$$

El radio de una rueda de bicicleta gira con una velocidad angular de 0.7 rad/s durante 4 min.  
Determinar :

- El ángulo descrito en grados
- Cuántas vueltas ha dado

$$\omega = 0.7 \frac{rad}{s}$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$N^\circ vueltas = \frac{9625.69^\circ}{360}$$

$$t = 4 \text{ min.}$$

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$$

$$N^\circ Vueltas = 26.7$$

$$\theta = ?$$

$$\Delta\theta = 0.7 \frac{rad}{s} (2405)$$

$$\Delta\theta = 168 rad \left( \frac{180}{1\pi rad} \right)$$

$$\Delta\theta = 9625.69^\circ$$

Una partícula gira por una trayectoria circular con una velocidad angular  $k$  ESTE de  $8 \text{ rad/s}$  determinar.

- El tiempo necesario para girar un ángulo de  $1000^\circ$
- El tiempo necesario para dar una revolución
- El ángulo girado en un minuto
- El número de revoluciones que da por minuto

a.

$$w = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad 1000^\circ \left( \frac{1\pi\text{rad}}{180^\circ} \right) = 17.45\text{rad}$$

$$t = \frac{\Delta\theta}{w}$$

$$t = \frac{17.45\text{rad}}{8\text{rad/s}}$$

$$t = 2.18\text{s}$$

b.

$$W = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$t = \frac{2\pi\text{rad}}{8\text{rad/s}}$$

$$t = 0.78\text{s}$$

c.

$$W = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\Delta\theta = w.t$$

$$\Delta\theta = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 60\text{s}$$

$$\Delta\theta = 480\text{rad}$$

d.

$$N^\circ = 480\text{rad} \left| \frac{1\text{rev}}{2\pi\text{rad}} \right|$$

$$N^\circ = 76.39\text{rev}$$

Un cuerpo parte del punto (4,7) cm en sentido anti horario por una trayectoria circular y gira en ángulo de 120 rad en 8s. Alcanzando una velocidad angular de 25 rad/s. Determinar

- La velocidad angular media
- La velocidad angular inicial
- La posición angular final
- La aceleración angular

Datos

$$\vec{r}_0 = (4\vec{i} + 7\vec{j})$$

$$\Delta\theta = 120\text{rad}$$

$$t = 8\text{s}$$

$$w = 25\text{rad/s}$$

$$\text{a. } W_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$wm = \frac{120}{8\text{s}}$$

$$wm = 15 \text{ rad/s}$$

$$\text{b. } wm = \frac{w_0 + wf}{2}$$

$$w_0 = 2wm - wf$$

$$w_0 = (2(15) - 25)$$

$$w_0 = 5\text{rad/s}$$

$$\text{c. } \Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

$$\theta_f = \Delta\theta + \theta_i$$

$$\theta_f = 120\text{rad} + 1.05\text{rad}$$

$$\theta_f = 221.05 \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{W_F - W_0}{t}$$

$$\alpha = \frac{(25 - 5) \text{ rad}}{8\text{s}}$$

$$\alpha = 2.5 \text{ rad/s}^2$$

## MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME MCU

Es el movimiento circular de una partícula cuya velocidad angular es k ESTE.

$$\Delta\theta = W \cdot \Delta t$$

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

### Periodo (T)

Es el tiempo empleado en recorrer una vuelta completa

$$T = \frac{2\pi\text{rad}}{w} (s)$$

### Frecuencia (f)

Es el número de revoluciones por unidad de tiempo

$$f = \frac{1}{t} (s^{-1}) (\text{Hertz})$$

### Distancia (d)

Es la distancia que recorre una partícula en MRU es la longitud del arco que se determina.

$$d = \Delta\theta \cdot R \quad \Delta\theta \text{ se mide en radianes}$$

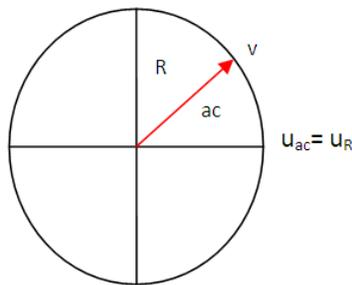
### Rapidez (V)

$$V = \omega \cdot R$$

Es la aceleración total es igual a la aceleración centrípeta porque la velocidad angular es constante lo que hace que no se genere una aceleración tangente al

$$a = a_c = \frac{V^2}{R}$$

La dirección de la aceleración es hacia el centro de la trayectoria opuesta a la del radio y perpendicular a la velocidad del movimiento.



Si la rotación de la Tierra aumenta hasta el punto  $a_c =$  fuera igual a la  $g$  en el Ecuador.

- ¿Cuál sería la velocidad?
- Cuánto duraría el día

$$a_c = g = 9.8m/s^2$$

$$R_T = 6.4 \times 10^6 m$$

- $V = ?$
- $t = \text{día}$

$$T = 2 \frac{\pi}{\omega} rad$$

$$T = \frac{2\pi rad}{1.24 \times 10^3 rad}$$

$$T = 5.07 \times 10^3 s$$

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

$$V^2 = a_c \cdot R$$

$$V = \sqrt{a_c \cdot R}$$

$$V = \sqrt{9.8m/s^2 \times 6.4 \times 10^6 m}$$

$$V = 7919.59 m/s$$

$$V = W \cdot R$$

$$W = \frac{V}{R}$$

$$W = \frac{7.92 \times 10^3}{6.4 \times 10^6 m}$$

$$W = 1.24 \times 10^{-3} rad/s$$

El joven David quien venció a Goliat practicaba con ondas antes de derribar al gigante, descubrió que con una onda de 0.6m de longitud podía girarla a razón de 8 rev/s si hubiera incrementado la longitud 0.9m podría haber hecho girar la onda solo a 6 rev/s. Calcule.

Qué tasa de rotación de la velocidad lineal es la mas alta.

Cuáles son sus velocidades angulares.

Cuál es la aceleración centrípeta a 8 y 6 rev/s

$d_1 = 0.6m$	$f_1 = 8rev/s$	a. $V = d\left(\frac{1}{t}\right)$ $V = d \cdot f$	
$R = 0.3m$	$f_2 = 6rev/s$		
$d_2 = 0.9m$	$V_{L2} = ?$		$V = 0.6\left(8\frac{rev}{s}\right)$ $V = 0.9m\left(6\frac{rev}{s}\right)$
$R_2 = 0.45m$	$W_2 = ?$		
$V_{LA} = ?$	$a_{C2} = ?$	$V = 04.8\frac{m}{s}$	$V = 5.4\frac{m}{s}$
$W_1 = ?$			
$a_{c1} = ?$			
b. $W = \frac{V}{R}$		c. $a_c = \frac{V^2}{R}$	
$W = \frac{4.8m/s}{0.3s}$	$W_2 = \frac{5.4}{0.45}$	$a_c = \frac{(4.8)^2}{93s^2}$	$a_{c2} = \frac{V^2}{R}$ $a_{c2} = \frac{(5.4)^2}{0.45s^2 \cdot m}$
$W = 16\frac{rad}{s}$	$W_2 = 12\frac{rad}{s}$	$a_c = 76.8m/s^2$	$a_{c2} = 64.8m/s^2$

Un atleta hace girar un disco de 1kg a lo largo de una trayectoria circular de 1.06 m de radio, la velocidad del disco es 20 m/s. determine la magnitud de su aceleración centrípeta.

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

$$a_c = \frac{(20)^2}{1.06m}$$

$$a_c = 377.358m/s^2$$

La órbita de la luna alrededor de la Tierra es aproximadamente circular con un radio medio de  $3.84 \times 10^8$  m se requiere 27.3 días para que la luna complete una revolución alrededor de la tierra. Determine.

- La velocidad orbital media de la luna
- Su aceleración centrípeta

$$R = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

$$t = 27.3 \text{ dias}$$

$$a. \quad T = \frac{2\pi \text{ rad}}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{2358720 \text{ s}}$$

$$\omega = 2.66 \times 10^{-6} \text{ rad / s}$$

$$b. \quad a_c = \frac{V^2}{R}$$

$$a_c = \frac{(1.02 \times 10^3 \text{ m/s})^2}{3.84 \times 10^8 \text{ m}}$$

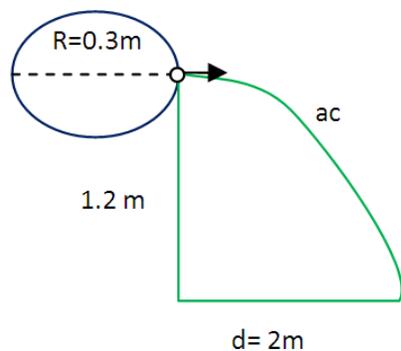
$$a_c = 2.7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

$$V_L = \omega \cdot R$$

$$V_L = 1022.90$$

$$V_L = 1.02 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Una pelota en el extremo de una cuerda se hace girar alrededor de un círculo horizontal de 0.3m de radio el plano del círculo se encuentra 1.2 sobre el punto sobre la superficie directamente debajo de la posición de la pelota. Cuando la cuerda se rompió encuentre la aceleración centrípeta de la pelota durante su movimiento circular.



$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

$$a_c = \frac{(4.08 \text{ m/s})^2}{(0.3)}$$

$$y = V_0 y + \frac{1}{2} g t^2$$

$$a V_0 x = \frac{d}{t}$$

$$a_c = 155.49 \text{ m/s}^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$V_0 x = \frac{2m}{0.49 \text{ s}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(1.2 \text{ m})}{(9.8 \text{ m/s}^2)}}$$

$$V_0 x = 4.08 \text{ m/s}$$

$$t = 0.49 \text{ s}$$

## MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO

La aceleración angular es  $\alpha$  (STE)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \omega_f - \omega_0$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

En el movimiento circular uniformemente variado el vector velocidad varía simultáneamente en módulo, dirección y sentido por consiguiente la aceleración tendrá las componentes tangencial y centrípeta.

$$a_T = \alpha \cdot r$$

$$v_f = \omega_0 r + a_T t$$

$$a_T = \frac{V_f - V_0}{t}$$

Cuando el movimiento es acelerado la aceleración tangencial tiene igual dirección y sentido que la velocidad

$$u_{\vec{a}_T} = u_{\vec{v}}$$

Si el movimiento es retardado tiene la misma dirección pero diferente sentido

$$u_{\vec{a}_T} = -u_{\vec{v}}$$

$$a_c = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R = \omega v$$

De este análisis concluimos que si la aceleración angular es  $\alpha$  ESTE también lo será el módulo de la aceleración, tangencial pero no el de la aceleración centrípeta por tanto la aceleración total varía continuamente en módulo y dirección.

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_c$$

$$a^2 = a_T^2 + a_c^2$$

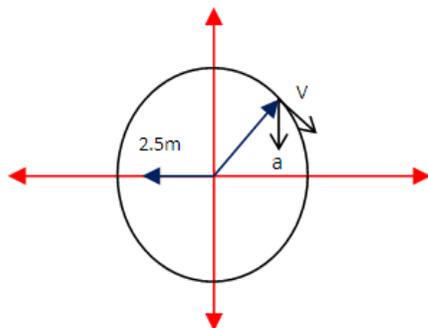


### CUADRO DE COMPARACIONES

MOVIMIENTO	UNIFORME	U. VARIADO
Rectilíneo	$V = cte$  $V = \frac{A_r}{A_t}$	$a = cte$  $v = v_0 + at$  $A_r = V_0 t + \frac{1}{2} at^2$  $V_f^2 = v_0^2 + 2a.A_r$  $V_m = \frac{V_0 + V_f}{2}$
Circular	$\omega = cte$  $\omega_m = \frac{A\theta}{At}$	$\alpha = ckf$  $\alpha = \frac{w_f - w_0}{t}$  $\Delta\theta = w_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$  $w t^2 = w_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$  $w_m = \frac{w_0 + w_f}{\alpha}$

La figura representa en un instante dado la aceleración total de una partícula que se mueve en la dirección de las manecillas del reloj en un círculo de 2.5m de radio en ese instante de tiempo encuentre:

- La aceleración centrípeta
- La velocidad de la partícula
- La aceleración tangencial



**Datos**

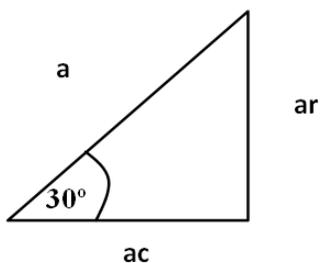
$$a = 15m/s^2$$

$$R = 2.5m$$

$$a_c = ?$$

$$a_t = ?$$

$$V = ?$$



$$a_c = a \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow 13 \text{ m/s}^2$$

$$a_r = a \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow 7.5 \text{ m/s}^2$$

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

$$v = \frac{V^2}{R}$$

$$v = \sqrt{a_c \cdot R}$$

$$v = \sqrt{ac \cdot R}$$

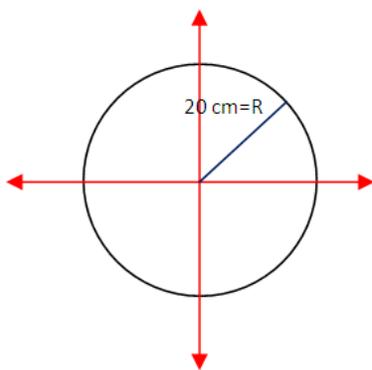
$$v = \sqrt{13 \text{ m/s}^2 \times 2.5}$$

$$v = 7.5 \text{ m/s}$$

Un punto sobre una mesa giratoria a 20cm del centro acelera desde el reposo hasta 0.7 m/s en un tiempo de 1.75s.

Para el tiempo igual a 1.25s encuentre la magnitud y dirección de:

- La aceleración centrípeta y tangencial
- La aceleración total de punto



$$a_r = \frac{V \cdot V_0}{t}$$

$$a_r = \frac{0.7 - 0}{1.75}$$

$$a_r = 0.4 \text{ m/seg}^2$$

$$V_f = V_0 + a_r t$$

$$V_f = (0.4 \text{ m/s}^2)(1.25)$$

$$V_f = 0.5 \text{ m/s}$$

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

$$a_c = \frac{(0.5)^2}{0.2}$$

$$a_c = 1.25 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_r^2}$$

$$a = \sqrt{(1.25)^2 + (0.4)^2}$$

$$a = 1.31 \text{ m/s}^2$$

Un tren frena cuando libra una curva pronunciada reduciendo su velocidad de 90 Km/h a 50 km/h en 15s que tarda en recorrer el radio de la curva que es de 150 metros. Calcule:

La aceleración en el momento en que la velocidad del tren alcanza 50 Km/h.

$$V_0 = 90 \text{ Km/h} \Rightarrow 25 \text{ m/s}$$

$$a_T = \frac{V - V_0}{t}$$

$$V = 50 \text{ Km/h} \Rightarrow 13.88 \text{ m/s}$$

$$a_T = \frac{(13.88 - 25) \text{ m/s}}{15 \text{ s}}$$

$$R = 150 \text{ m}$$

$$a = ?$$

$$a_y = -0.741 \text{ m/s}^2$$

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2}$$

$$a_c = \frac{(13.88 \text{ m/s})^2}{(150 \text{ m})}$$

$$a = \sqrt{(0.741)^2 + (1.28)^2}$$

$$a = 1.48 \text{ m/s}^2$$

$$a_c = 1.28 \text{ m/s}^2$$

Una rueda de 2m de radio tiene una aceleración angular **KESTE** de 0.5 rad/s<sup>2</sup>, en un intervalo de 4s gira un ángulo de 120 radianes, alcanzando posteriormente una velocidad angular de 96 rad/s. suponiendo que partió del reposo. Determinar:

- El tiempo que había estado en movimiento antes de intervalo
- El ángulo total girado
- La longitud del arco de la circunferencia recorrida por un punto extremo de la rueda desde que empezó a moverse.

**Datos**

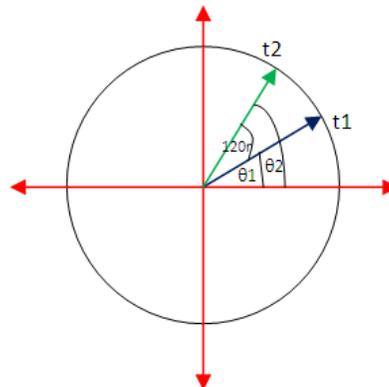
$$R = 2 \text{ m}$$

$$\alpha = 0.5 \text{ rad/s}^2$$

$$t = 4 \text{ s}; \Delta\theta = 120 \text{ rad}$$

$$w = 96 \text{ rad/s}$$

$$w_0 = 0$$





$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$(1) 120rad = \theta_2 - \theta_1$$

$$4s = t_2 - t_1$$

$$\theta = w_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\theta_2 = W_0 t_2 + \frac{1}{2} \alpha t_2^2$$

$$\theta_1 = W_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha t_1^2$$

$$(2) \theta_2 = \frac{1}{2} \alpha t_2^2$$

$$(3) \theta_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2$$

$$t_2 = 4s + t_1 \quad (4)$$

**2, 3 en (1)**

$$120rad = \frac{1}{2} \alpha t_2^2 - \frac{1}{2} \alpha t_1^2$$

**4 en (5)**

$$120seg = 4seg + t_1 + t_1$$

$$120rad = \frac{1}{2} \alpha (t_2^2 - t_1^2)$$

$$116seg = 2t_1$$

$$t_1 = 58seg$$

$$120rad = \frac{1}{2} \alpha (t_2 + t_1)(t_2 - t_1)$$

$$120rad = \frac{1}{2} \alpha (t_2 + t_1)(4s)$$

$$120rad = \frac{1}{2} \left( \frac{1 \text{ rad}}{2 \text{ s}^2} \right) (t_2 + t_1)(4s)$$

$$t_1 + t_2 = 120s$$

**b)**  $w^2 = w_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$

$$wf^2 = 2\alpha\Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{wf^2}{2\alpha}$$

$$\Delta\theta = \frac{(96rad/s)^2}{2(0.5)}$$

$$\Delta\theta = 9216rad$$

**c)**  $d = \Delta\theta.R$

$$d = 9216rad(2m)$$

$$d = 18032m$$

Dos móviles recorren una pista circular horizontal como se indica en la figura. Parten el mismo instante de dos puntos A y B diametralmente opuestos moviéndose en sentidos contrarios se cruzan por primera vez en el punto "N", PN=40m y una segunda vez en el punto "P", AP= 20m, si entre la primera y la segunda vez que se cruzan transcurren 20s.

Determinar:

- La longitud de la pista circular
- La rapidez de cada móvil.

**DATOS:**

PN=40m

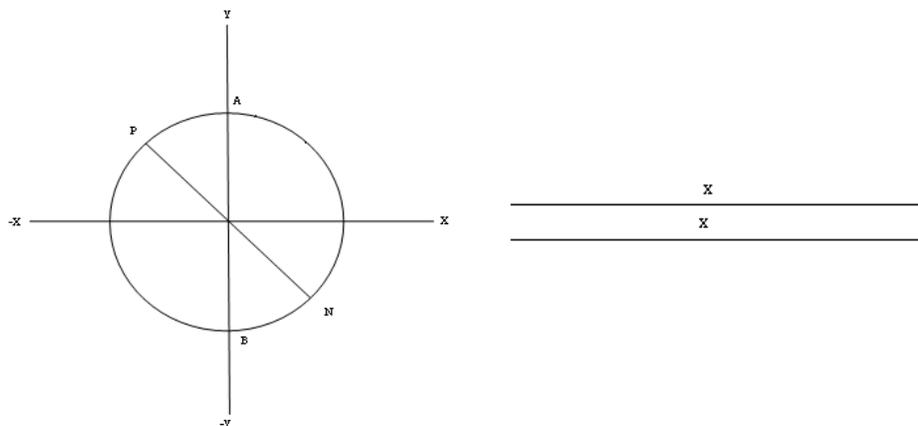
AP= 20m

t<sub>2</sub>= 20s

d= 200m

**VA= 6m/s**

**VB= 4m/s**



$$V = \frac{d}{t} \quad \frac{tx-40}{v_1} = \frac{40}{v_2}$$

$$\frac{x-40}{40} = \frac{x+20}{x-40}$$

$$t = \frac{d}{v} \quad \frac{x-40}{40} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$(x-40)(x-20) = (40)(x+20)$$

t<sub>2A</sub> = t<sub>2B</sub> = 20s

$$x^2 - 20x - 40x + 800 = 40x + 800$$

$$\frac{40+x-20}{v_1} = \frac{x-40+20}{v_2}$$

$$x^2 = 100x$$

$$\frac{x+20}{v_1} = \frac{x-20}{v_2}$$

$$x = 100$$

$$\frac{x+20}{x-20} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$d = 2x = 200m.$$

$$v_1 = \frac{d}{t} = \frac{40+x-20}{20}$$

$$v_2 = \frac{x-40+20}{20} = \frac{100-40+20}{20}$$

$$v_1 = 6m/s$$

$$v_2 = 4m/s.$$

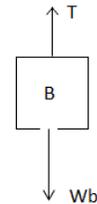
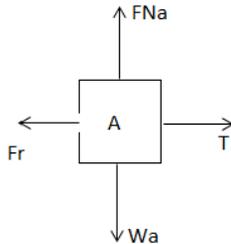
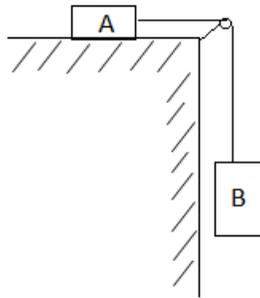
## DINÁMICA LINEAL

El sistema de la figura esta en reposo cuando la masa de A = 12kg y la de B= 3kg. Determinar:

- El valor de la tensión en la cuerda.
- Que fuerza de rozamiento actúa sobre el bloque A.
- Cuál es el máximo valor de la masa del bloque B para que el sistema permanezca aun en equilibrio, si el coeficiente de rozamiento entre el bloque A y la superficie horizontal es 0.4.

### DATOS

$\mu_r = 0,4$   
 $m_B = 3 \text{ [kg]}$   
 $m_A = 12 \text{ [kg]}$   
 $T = ?$   
 $F_r = ?$   
 $m_b = ?$



$$\sum F_y = 0$$

$$FNa - Wa = 0$$

$$FNa = Wa$$

$$FNa = 117.6 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$T - Fra = 0$$

$$T = Fra$$

$$29.4 \text{ N} = Fra$$

$$\sum F_y = 0$$

$$Wb - T = 0$$

$$T = Wb$$

$$T = 24.9 \text{ N}$$

$$Wb - T = 0$$

$$T_{\text{max}} = Wb$$

$$Mb = \frac{T_{\text{max}}}{g}$$

$$Mb = 4.8 \text{ kg}$$

T max que soporta A

$$\sum F_x = 0$$

$$T - Fra = 0$$

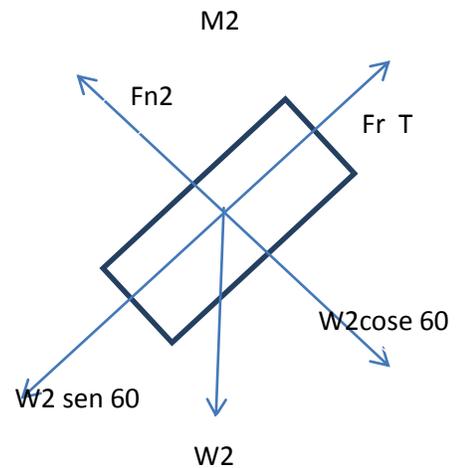
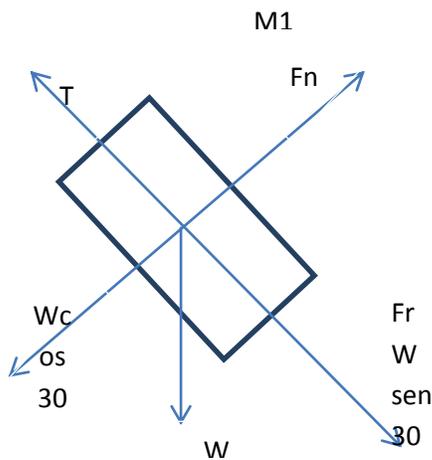
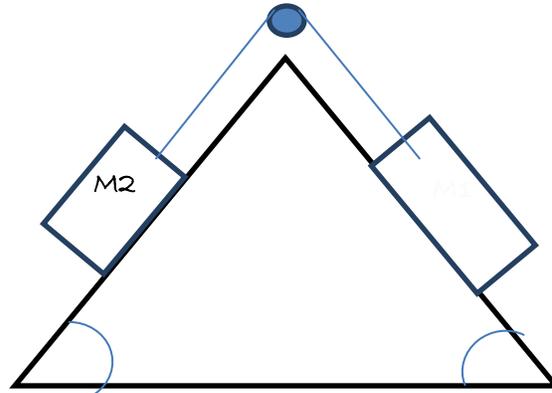
$$T = \mu * FNa$$

$$T = 0.4 * 117.6$$

$$T = 47.04 \text{ N}$$



Sobre un plano inclinado se muestra un bloque  $m_1=100\text{kg}$  que está unido por medio de un cable a otra de masa  $m_2$  como se indica en la figura. Si el coeficiente único de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,25 determinar los valores extremos de  $m_2$  entre los cuales debería variar para que exista equilibrio.



Para bajar

$$\begin{aligned} E_{fx} &= 0 \\ T - Fr - W_1 \text{sen} 30 &= 0 \\ T &= W_1 \text{sen} 30 + Fr_1 \\ E_{fy} &= 0 \\ F_n - W_1 \text{cos} 30 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{fx} &= 0 \\ W_2 \text{sen} 60 - Fr_2 - T &= 0 \\ E_{fy} &= 0 \\ F_{n2} &= W_2 \text{cos} 60 \end{aligned}$$

$$W_2 \sin 60 - Fr_2 - T = 0$$

$$W_2 \sin 60 - Fr_2 - (w_1 \sin 30 + Fr_1) = 0$$

$$W_2 \sin 60 - Ur Fn_2 - W_2 \cos 60 = Ur W_1 \cos 30 + W_1 \sin 30$$

$$W_2 (\sin 60 - Ur \cos 60) = W_1 (Ur \cos 30 + \sin 30)$$

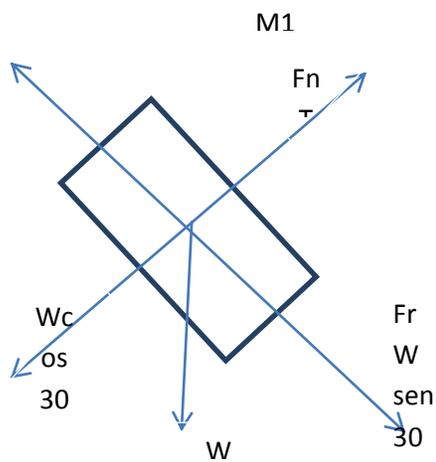
$$m_2 \cdot g (\sin 60 - Ur \cos 60) = m_1 \cdot g (Ur \cos 30 + \sin 30)$$

$$m_2 = \frac{m_1 (Ur \cos 30 + \sin 30)}{\sin 60 - Ur \cos 60}$$

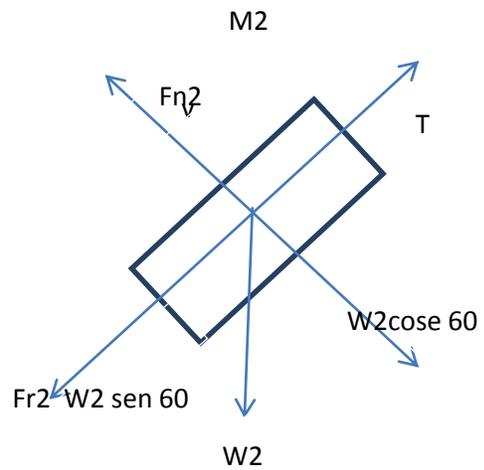
$$m_2 = \frac{100 \text{ kg} (0,25 \cos 30 + \sin 30)}{\sin 60 - (0,25 \cos 60)}$$

$$m_2 = 96,69 \text{ kg}$$

**Para subir**

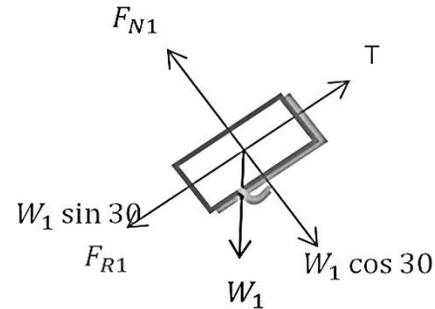
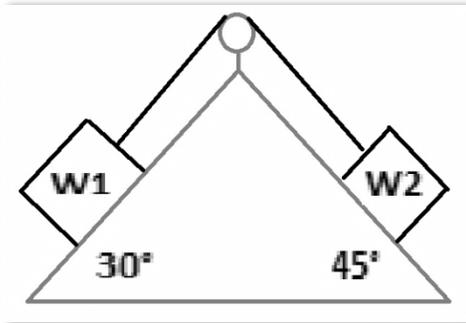


$E_{fx} = 0$ $W_1 \sin 30 - F - T - Fr = 0$ $E_{fy} = 0$ $Fn - W_1 \cos 30 = 0$
--



$E_{fx} = 0$ $T - W_2 \sin 60 - Fr_2 = 0$ $E_{fy} = 0$ $Fn_2 - W_2 \cos 60 = 0$ $Fn_2 = W_2 \cos 60$
--

Se tiene el sistema que se indica en la figura hallar la aceleración y la tensión de la cuerda si el coeficiente de rozamiento es  $\mu_1 = 0,3$ ,  $\mu_2 = 0,15$ , el  $\omega_1 = 10N$ ,  $\omega_2 = 50N$



$$\sum Fx = m \cdot a$$

$$T - F_{R1} - W_1 \sin 30 = m \cdot a$$

$$\sum Fy = 0$$

$$F_{N1} = W_1 \cos 30$$

$$T = m \cdot a + F_{R1} + W_1 \sin 30 \text{ ①}$$

$$\sum Fx = m \cdot a$$

$$W_2 \sin 45 - T - F_{R2} = m_2 \cdot a \text{ ②}$$

$$\sum Fy = 0$$

$$F_{N2} = W_2 \cos 45$$

$$W_2 \sin 45 - (m \cdot a + F_{R1} + W_1 \sin 30) - F_{R2} = m_2 \cdot a$$

$$W_2 \sin 45 - F_{R1} - W_1 \sin 30 - F_{R2} = m_2 \cdot a + m_1 \cdot a$$

$$W_2 \sin 45 - \mu \cdot F_{N1} - W_1 \sin 30 - \mu \cdot F_{N2} = a(m_2 + m_1)$$

$$\frac{W_2 \sin 45 - \mu \cdot F_{N1} - W_1 \sin 30 - \mu \cdot F_{N2}}{(m_2 + m_1)} = a$$

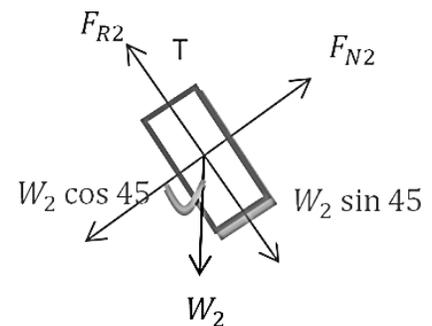
$$\frac{50 \sin 45 - (0,3)10 \cos 30 - 10 \sin 30 - (0,15)50 \cos 45}{50 + 10} = a$$

$$3,67 = a \text{ ③}$$

$$\text{③ en ①}$$

$$T = m \cdot a + F_{R1} + W_1 \sin 30$$

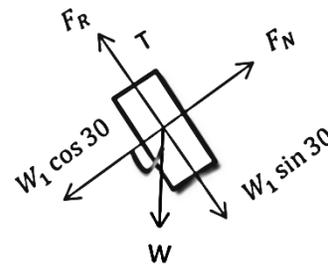
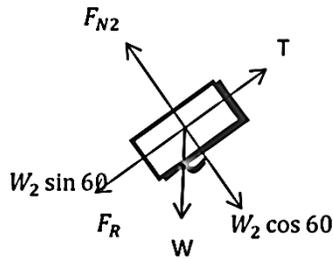
$$T = m \cdot a + \mu \cdot F_{N1} + W_1 \sin 30$$



$$T = \frac{10}{9,8}(3,67) + (0,3)10 \cos 30 + 10 \sin 30$$

$$T = 11,34$$

**A PUNTO DE BAJAR**



$$\sum F_x = 0$$

$$W_2 \sin 60 - F_{R2} - T = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{N2} = W_2 \cos 60 \text{ ①}$$

$$T - F_{R1} - W_1 \sin 30 = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{N1} = W_1 \cos 30$$

$$T = F_{R1} + W_1 \sin 30 \text{ ②}$$

$$W_2 \sin 60 - F_{R2} - (F_{R1} + W_1 \sin 30) = 0$$

$$W_2 \sin 60 - \mu \cdot F_{N2} - \mu \cdot F_{N1} - W_1 \sin 30 = 0$$

$$W_2 \sin 60 - \mu \cdot W_2 \cos 60 = \mu \cdot W_1 \cos 30 + W_1 \sin 30$$

$$W_2(\sin 60 - \mu \cdot \cos 60) = W_1(\mu \cdot \cos 30 + \sin 30)$$

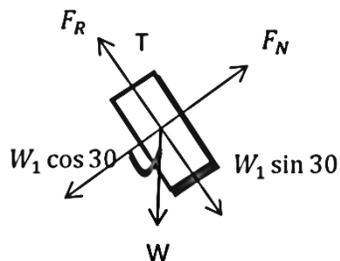
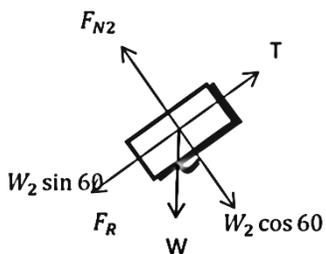
$$m_2 g(\sin 60 - \mu \cdot \cos 60) = m_1 g(\mu \cdot \cos 30 + \sin 30)$$

$$m_2 = \frac{m_1(\mu \cdot \cos 30 + \sin 30)}{(\sin 60 - \mu \cdot \cos 60)}$$

$$m_2 = \frac{100_{kg}(0,25 \cdot \cos 30 + \sin 30)}{(\sin 60 - 0,25 \cdot \cos 60)}$$

$$m_2 = 96,69_{kg}$$

**A PUNTO DE SUBIR**



$$\sum F_x = 0$$

$$W_2 \sin 60 + F_{R2} - T = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T + F_{R1} - W_1 \sin 30 = 0$$

$$T = -F_{R1} + W_1 \sin 30 \text{ ②}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{N2} = W_2 \cos 60 \text{ ①}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{N1} = W_1 \cos 30$$

$$W_2 \sin 60 + F_{R2} - (-F_{R1} + W_1 \sin 30) = 0$$

$$W_2 \sin 60 + \mu \cdot F_{N2} + \mu \cdot F_{N1} - W_1 \sin 30 = 0$$

$$W_2 \sin 60 + \mu \cdot W_2 \cos 60 = -\mu \cdot W_1 \cos 30 + W_1 \sin 30$$

$$W_2 (\sin 60 + \mu \cdot \cos 60) = W_1 (-\mu \cdot \cos 30 + \sin 30)$$

$$m_2 g (\sin 60 + \mu \cdot \cos 60) = m_1 g (-\mu \cdot \cos 30 + \sin 30)$$

$$m_2 = \frac{m_1 (-\mu \cdot \cos 30 + \sin 30)}{(\sin 60 + \mu \cdot \cos 60)}$$

$$m_2 = \frac{100_{kg} (-0,25 \cdot \cos 30 + \sin 30)}{(\sin 60 + 0,25 \cdot \cos 60)}$$

$$m_2 = 28,61_{kg}$$

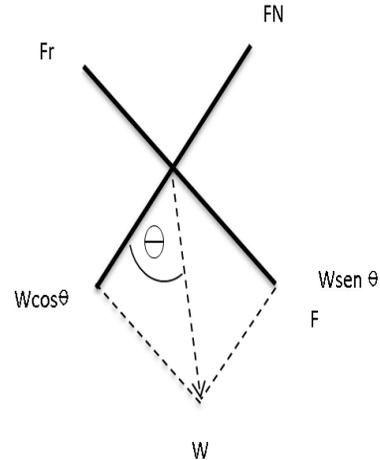
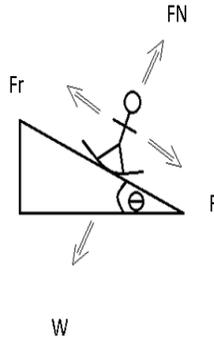
Un esquiador de masa  $m$  desciende por una pendiente de un ángulo total sin impulsar el coeficiente de rozamiento entre el esquí y la nieve es de coeficiente de rozamiento existe una fuerza de aire  $F=K*V^2$  donde  $K$  es la constante, cual será la velocidad máxima que tendrá el esquiador.

Masa=  $m$

$\alpha = \theta$

$F=K*V^2$

$V^2=?$



$\Sigma Fy=0$

$FN - W \cos \theta = 0$

$FN = W \cos \theta$

$FN = m \cdot g \cdot \cos \theta$

$\Sigma Fx=0$

$W \sin \theta - F_r - F = 0$

$m \cdot g \cdot \sin \theta - U \cdot FN - K V^2 = 0$

$m \cdot g \cdot \sin \theta - U(m \cdot g \cdot \cos \theta) = K V^2$

$$V = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot (\sin \theta - U \cos \theta)}{k}}$$

El coeficiente de rozamiento único entre el bloque de peso  $W$  y el plano inclinado es. Determinar el valor de la fuerza para que el cuerpo:

- Suba con velocidad constante.
- Baje con aceleración constante.

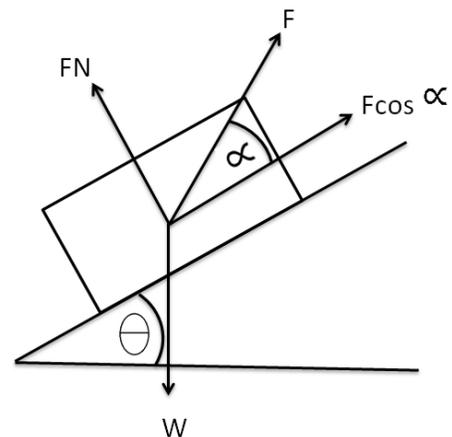
Peso= $W$

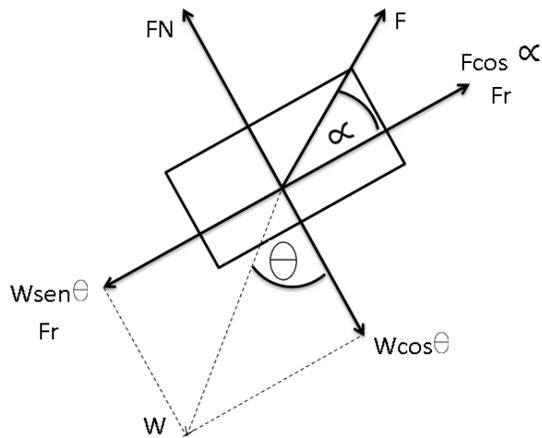
$U_r=U$

$F=?$

Suba con velocidad constante

Baje con aceleración constante





$$\Sigma F_x = 0$$

$$F \cos \alpha - F_r - W \sin \theta = 0$$

$$F \cos \alpha - \mu_r F_N - W \sin \theta = 0$$

$$F \cos \alpha - \mu (W \cos \theta - F \sin \alpha) - W \sin \theta = 0$$

$$F \cos \alpha - \mu W \cos \theta + \mu F \sin \alpha - W \sin \theta = 0$$

$$F \cos \alpha + \mu F \sin \alpha = \mu W \cos \theta + W \sin \theta$$

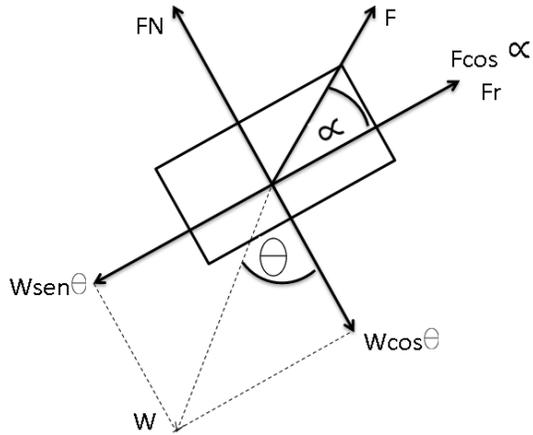
$$F (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = W (\mu \cos \theta + \sin \theta)$$

$$\frac{W (\mu \cos \theta + \sin \theta)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = F$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_N + F \sin \alpha - W \cos \theta = 0$$

$$F_N = W \cos \theta - F \sin \alpha$$



$$\Sigma F_x = m \cdot a.$$

$$W \sin \theta - F \cos \alpha - F_r = m \cdot a.$$

$$W \sin \theta - F \cos \alpha - U F_N = m \cdot a.$$

$$W \sin \theta - F \cos \alpha - U (W \cos \theta - F \sin \alpha) = m \cdot a.$$

$$W \sin \theta - F \cos \alpha - U W \cos \theta + U F \sin \alpha = m \cdot a.$$

$$U F \sin \alpha - F \cos \alpha = U W \cos \theta - W \sin \theta + m \cdot a.$$

$$F (U \sin \alpha - \cos \alpha) = U W \cos \theta - W \sin \theta + m \cdot a.$$

$$\frac{U W \cos \theta - W \sin \theta + m \cdot a}{U \sin \alpha - \cos \alpha} = F$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_N + F \sin \alpha - W \cos \theta = 0$$

$$F_N = W \cos \theta - F \sin \alpha$$

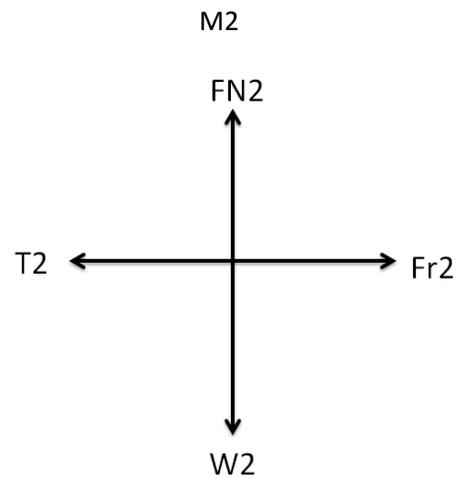
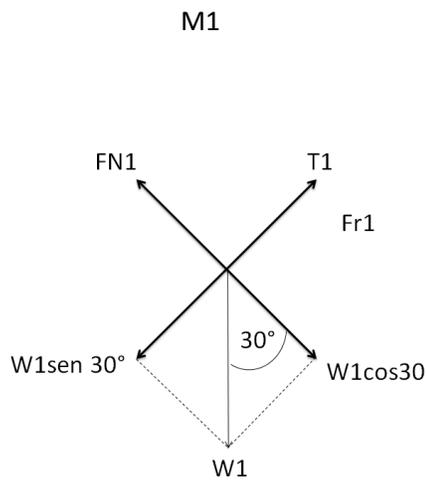
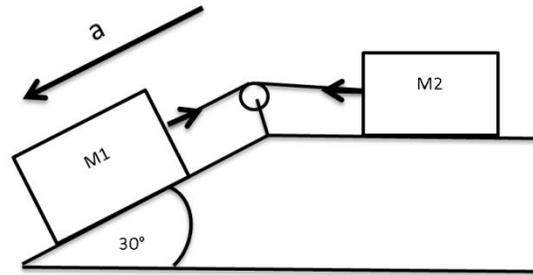
En el sistema mostrado en la figura. Demostrar el valor de la aceleración.

$$m_1 = 10 \text{ kg}$$

$$m_2 = 5 \text{ kg}$$

$$U = 0,5$$

$$a = ?$$



$$\Sigma F_x = m_1 \cdot a.$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_x = m_2 \cdot a.$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$W_1 \text{sen} 30 - T_1 - Fr_1 = m_1 \cdot a.$$

$$FN = W_1 \text{cos} 30$$

$$T - Fr_2 = m_2 \cdot a.$$

$$FN_2 = W_2$$

$$W_1 \text{sen} 30 - (Fr_2 + m_2 \cdot a) - Fr_1 = m_1 \cdot a.$$

$$T = Fr_2 + m_2 \cdot a.$$

$$W_1 \text{sen} 30 - Fr_2 - m_2 \cdot a - Fr_1 = m_1 \cdot a.$$

$$W_1 \text{sen} 30 - \mu_r FN_2 - \mu_r FN_1 = m_2 \cdot a + m_1 \cdot a.$$

$$W_1 \text{sen} 30 - \mu_r W_2 - \mu_r W_1 \text{cos} 30 = a (m_1 + m_2)$$

$$\frac{W_1 \text{sen} 30 - \mu_r W_2 - \mu_r W_1 \text{cos} 30}{m_1 + m_2} = a$$

$$\frac{(10)(9,8) \text{sen} 30 - (0,5)(5)(9,8) - (0,5)(10)(9,8) \text{cos} 30}{10 + 5} = a$$

$$\frac{49 - 24,5 - 42,43}{15} = a$$

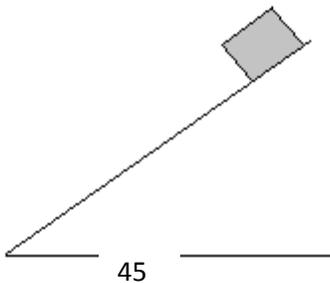
$$a = -1,2 \text{ m/s}^2 \quad \rightarrow \quad \text{Reposo}$$

Un bloque de masa  $m$  resbala desde el reposo como se muestra en la figura en un plano inclinado y forma un ángulo de 45 grados sobre la horizontal en un tiempo que es el doble del que se tardara en resbalar por un plano de la misma longitud pero sin rozamiento que también forma un ángulo de 45 con la horizontal ¿determinar el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano?

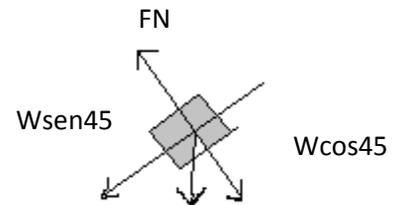
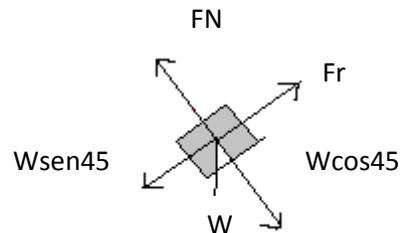
Datos

$\theta = 45$

Con rozamiento



sin rozamiento



$$\sum f_x = m_1 a_1$$

$$W \sin 45 - f_r = m_1 a_1$$

$$W \sin 45 - \mu F_N = m_1 a_1$$

$$W(\sin 45 - \mu \cos 45) = m_1 a_1$$

$$m_1 g(\sin 45 - \mu \cos 45) = m_1 a_1$$

$$m_1 g(\sin 45 - \mu \cos 45) = m_1 a_1$$

$$g(\sin 45 - \mu \cos 45) = a_1$$

$$\sum f_y = 0$$

$$F_N = W \cos 45$$

$$\sum f_x = m_2 a_2$$

$$w \sin 45 = m_2 a_2$$

$$m_2 g \sin 45 = m_2 a_2$$

$$g \sin 45 = a_2$$

$$l = vt + \frac{1}{2} at^2$$

Con rozamiento

$$l = \frac{1}{2}at^2$$

$$l = \frac{1}{2}a(2t)^2$$

$$l = \frac{1}{2}a4t^2$$

$$l = 2a1t^2$$

$$l = 2 g(\text{sen}45 - \mu \text{cos}45) t^2 \quad 1$$

Igualo 1 y 2

$$2 g (\text{sen}45 - \mu \text{cos}45) t^2 = \frac{1}{2} g \text{sen}45 t^2$$

$$4(\text{sen}45 - \mu \text{cos}45) = \text{sen}45$$

$$4\text{sen}45 - \text{sen}45 = 4 \mu \text{cos}45$$

$$3\text{sen}45 = 4 \mu \text{cos}45$$

$$\mu = \frac{3\text{sen}45}{4\text{cos}45}$$

$$\mu = 0.75$$

sin rozamiento

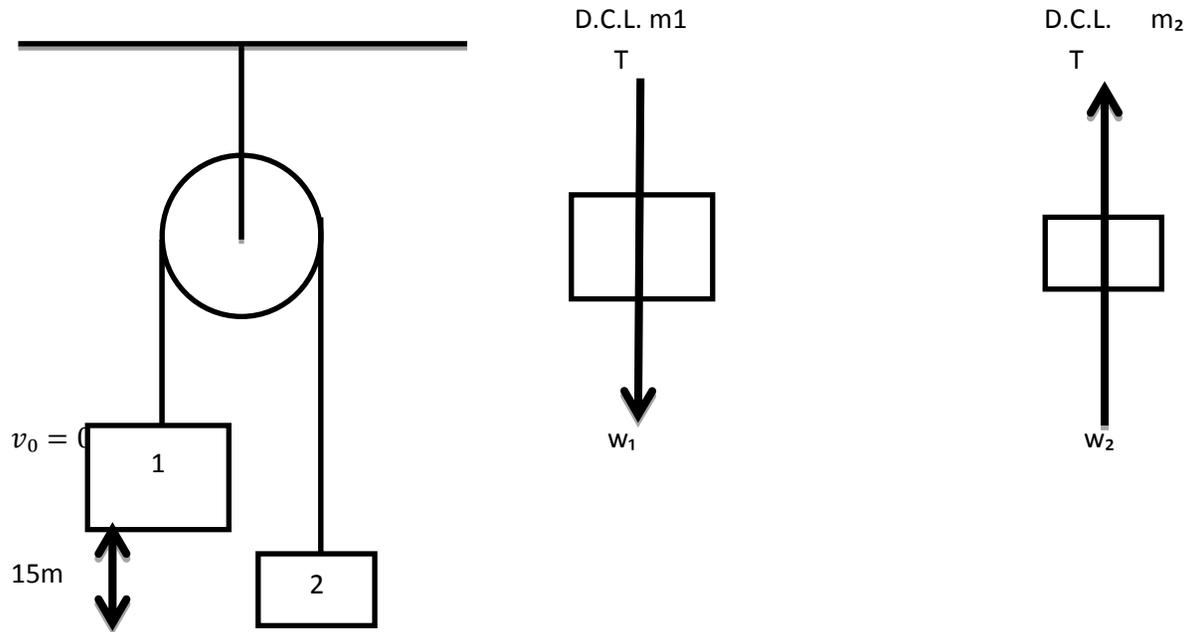
$$l = \frac{1}{2}at^2$$

$$l = \frac{1}{2}a(t)^2$$

$$l = \frac{1}{2}a2t^2$$

$$l = \frac{1}{2}g\text{sen}45t^2 \quad 2$$

A partir del instante indicado el sistema se deja en libertad y se pide determinar después de que tiempo el bloque 1 impacta al piso si  $m_1=2m_2$



$$\Sigma F_y = (m_1 + m_2) a$$

$$w_1 - T = (m_1 + m_2) a$$

$$w_1 - w_2 = (3 m_2) a$$

$$m_1 g - m_2 g = 3 m_2 a$$

$$g(2m_2 - m_2) = 3 m_2 a$$

$$g m_2 = 3 m_2 a$$

$$a = \frac{g m_2}{3 m_2}$$

$$a = 3,27 \text{ m/seg}^2$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T = w_2$$

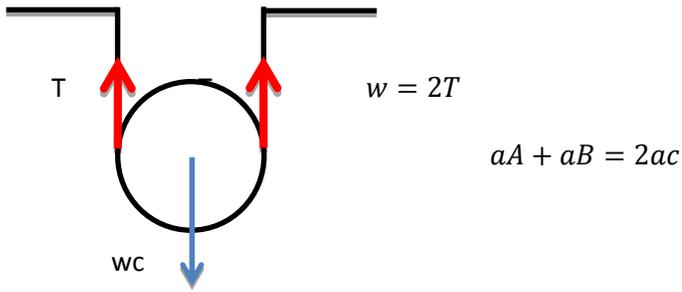
$$h = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$15 = \frac{1}{2} (3,27) t^2$$

$$t = \sqrt{9,17}$$

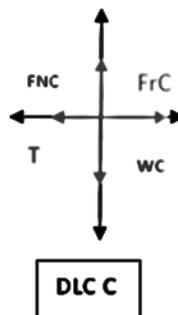
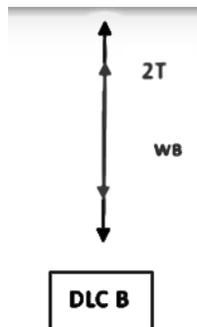
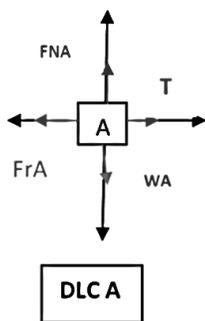
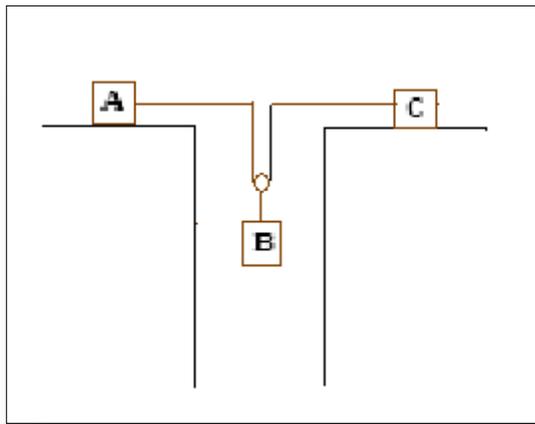
$$t = 3.03 \text{ seg}$$

Un peso soportado por dos cuerdas es igual a la fuerza ejercida hacia arriba por cada una de ella.



las relaciones de las aceleraciones es la misma que las tensiones.

Sabiendo que el unitario de rozamiento entre los bloques a y c con las superficies horizontales es 0.2. Calcule la aceleración de cada cuerpo si el peso de a=5n y el peso de b=10n. Utilice la gravedad (10m/s)



$$W=2T$$

$$aA+aB=2aC$$

$$\sum Fx = m \times a$$

$$T - FrA = mA \times aA$$

$$T - \mu rFnA = mA \times aA$$

$$T - \mu rWA = mA \times aA \quad (1)$$

$$\sum Fy = m \times a$$

$$WB - 2T = mB \times aB \quad (2)$$

$$aA + aC = 2aB$$

$$aB = \frac{aA + aC}{2} \quad (4)$$

$$aB = \frac{4.8 + 1.45}{2}$$

$$aB = 3.15 \frac{m}{s}$$

4 en 2

$$WB - 2T = mB \left( \frac{aA + aC}{2} \right)$$

$$10 - 2T = \left( \frac{aA + aC}{2} \right)$$

$$20 - 4T = aA + aC$$

$$20 - 4T - aC = aA \quad (5)$$

$$\sum FX = m \times a$$

$$T - FrC = mC \times aC$$

$$T - \mu r FNC = mC \times aC$$

$$T - \mu r WC = mC \times aC \quad (3)$$

$$T - 10\mu r = aC$$

$$\sum Fy = 0$$

$$FNC = WC$$

5 en 1

$$T - 5\mu r = \frac{1}{2}(20 - 4T - aC)$$

$$T - 5\mu r = \left(10 - 2T - \frac{aC}{2}\right)$$

$$T + 2T = 10 - \frac{aC}{2} + 5\mu r$$

$$5T = 10 - \frac{aC}{2} + 5\mu r$$

$$T = \frac{10 - \frac{aC}{2} + 5\mu r}{3}$$

$$T = \frac{10}{3} - \frac{aC}{6} + \frac{5}{3}\mu r \quad (6)$$

6 en 3

$$T - 10ur = ac$$

$$\frac{10}{3} - \frac{ac}{6} + \frac{5}{3}ur - 10ur = ac$$

$$\frac{10}{3} + \frac{5}{3}ur - 10ur = \frac{ac}{1} + \frac{ac}{6}$$

$$\frac{10}{3} + \frac{5}{3} \left( \frac{1}{5} \right) - 10 \left( \frac{1}{5} \right) = \frac{6ac + ac}{6}$$

$$ac = 1.43m/s^2$$

Sabiendo que el  $\mu$  entre los bloques a y c con las superficies horizontales es 0.2. Calcule la aceleración de cada cuerpo si el peso de A=5N y el peso B=C=10N. Utilice la gravedad ( $10 m/seg^2$ ).

Datos

$$\frac{a_A + a_C}{2} = a_B$$

$$\mu = 0.2$$

$$W_A = 5N$$

$$W_B = W_C = 10N$$

$$g = 10m/seg^2$$

$$a_A = ?$$

$$a_B = ?$$

$$a_C = ?$$

El partir del instante indicado el sistema se deja en libertad y se pide determinar después de que tiempo el bloque 1 impacta al piso. Si  $m_1=2m_2$

$$V_o = 10 \text{ m/s}$$

$$\text{Angulo} = 30^\circ$$

$$P < 30^\circ$$

$$dP = ?$$

$$v = (8.60i + 0j)$$

$$v_{ox} = 10 \cos 30 = 8.60$$

$$dP = ?$$

$$v = (8.66i + 0j)$$

$$v_{ox} = 10 \cos 30 = 8.66$$

$$\sum F_y = (m_1 + m_2)a \quad \sum F_y = 0$$

$$W_1 - T = (m_1 + m_2)a \quad T = W_2$$

$$m_1 - g - \left(\frac{m_1}{2}g\right) = m_1a + m_2a \quad T = \left(\frac{m_1}{2}\right)g$$

$$m_1 \cdot g - \left(\frac{m_1}{2}g\right) = m_1a + m_2a$$

$$g\left(m_1 - \frac{m_1}{2}\right) =$$

$$v_{ox} - \frac{d}{t} = \frac{x}{t}$$

$$t = \frac{x}{V_{ox}} = \frac{x}{V_o \cos \theta}$$

$$y = V_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$-y = V_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$-y = V_o \sin \theta \frac{x}{V_o \cos \theta} - \frac{1}{2}9.8 \frac{x^2}{V_o^2 \cos^2 \theta}$$

$$-xtg^3 \theta = tg30 \cdot x - \frac{4.9x^2}{V_o^2 \cos^2 \theta}$$

$$-2xtg30 = \frac{-49x^2}{V_o^2 \cos^2 \theta} \frac{2tg30 \cdot V_o^2 \cos^2 \theta}{4.9} = x$$

El paso soportado por 2 cuerdas es igual a la fuerza ejercida hacia arriba por cada una de ellas

Las relaciones de las aceleraciones es la misma que las tensiones

$$W=2T$$

$$a_A + a_B = 2a_C$$

$$\sum F_x = ma$$

5 en 1

$$T - Fr_A = m_A a_A$$

$$T - 5\mu r = \frac{1}{2}(20 - 4T - a_c)$$

$$T - \mu r F_{NA} = m_A a_A$$

$$T - 5\mu r = 10 - 2T - \frac{a_c}{2}$$

$$T - \mu r W_A = m_A a_A \quad (1)$$

$$T + 2T = 10 - \frac{a_c}{2} + 5\mu r$$

$$T\mu r(S) = \frac{1}{2}a_A$$

$$3T = 10 - \frac{a_c}{2} + 5\mu r$$

$$\sum F_y = ma$$

$$T = \frac{10 - \frac{a_c}{2} + 5\mu r}{3}$$

$$WB - 2T = m_B a_B \quad (2)$$

$$T = \frac{10}{3} - \frac{a_c}{6} + \frac{5}{3}\mu r \quad (6)$$

4 en (2)

$$WB - 2T = m_B \left( \frac{a_A + a_C}{2} \right)$$

$$a_A + a_C = 2a_B$$

$$10 - 2T = \frac{a_A + a_C}{2}$$

$$a_B = \frac{a_A + a_C}{2} \quad (4)$$

$$20 - 4T = a_A + a_C$$

$$a_B = 3.15 \text{ m/s}$$

$$\sum F_x = ma \quad 20 - 4T - a_c = a_A$$

$$T - Fre = m_c a_c$$

6 en 3

$$T - \mu r F_{NC} = m_c a_c$$

$$\frac{10}{3} - \frac{a_c}{6} + \frac{5}{3}\mu r - 10\mu r = a_c$$

$$T - \mu r W_C = m_c a_c \quad (3)$$

$$T - 10\mu r = a_c$$

$$\frac{10}{3} + \frac{5}{3}\mu r - 10\mu r = a_c + \frac{a_c}{6}$$

$$\sum F_y = 0 \quad T = a_c + 10\mu r$$

$$FNe = W_c$$

$$T = a_c + 10\mu r$$

$$\frac{10}{3} + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{5}\right) - 10\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{6a_c + a_c}{6}$$

$$T = 1.43 + 10(1/5)$$

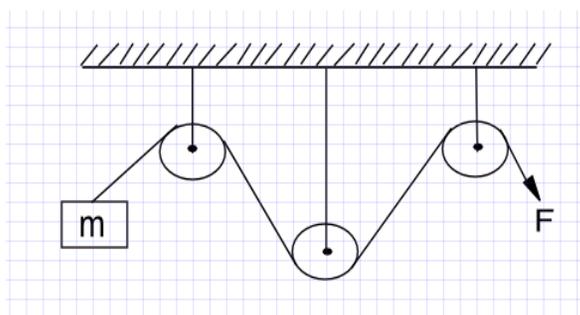
$$T = 3.43N$$

$$\frac{10}{3} + \frac{1}{3} - 2 = \frac{7a_c}{6}$$

$$a_c = 1.43 \text{ m/seg}^2$$

Se tienen 3 poleas fijas que sostienen un peso de masa igual a 50 Kg. Determinar

- ¿Cuál es el valor mínimo de la fuerza para que el sistema este en reposo?
- Si la fuerza alcanza un valor de 400 N. Hallar la aceleración del peso
- Si se desea que el peso suba con una  $a = 5 \text{ m/s}^2$  ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza?



a)

b)

c)

$$\sum F_y = 0$$

$$T - W = 0$$

$$T = W$$

$$T = 50 \text{ Kg} \cdot 9.8 \text{ m/seg}^2$$

$$T = 490 \text{ N}$$

$$F = T = 490 \text{ N}$$

$$\sum F_y = ma$$

$$W - T = ma_m$$

$$\frac{W - T}{m} = a_m$$

$$\frac{490 \text{ N} - 400 \text{ N}}{50} = a_m$$

$$a_m = 1.8 \text{ m/seg}^2$$

$$\sum F_y = ma$$

$$T - W = ma_m$$

$$T = ma_m + W$$

$$T = 50 \text{ Kg}(50(5 \text{ m/seg}^2)) + 480 \text{ N}$$

$$T = F = 740 \text{ N}$$

Para el sistema de poleas idénticas que se indica en la figura. Hallar la aceleración de la masa de 12 Kg. Las poleas son ideales.

Datos

$$m_1 = 8 \text{ Kg}$$

$$m_2 = 12 \text{ Kg}$$

$$a_2 = ?$$

$$a_1 = 2a_2$$

Son proporcionales a las tensiones  $a_2 = \frac{a_1}{2}$

$$\sum F_y = m_1 \cdot a_1$$

$$T - W_1 = m_1 \cdot a_1$$

$$T = m_1 \cdot a_1 + W_1$$

$$T = m_1 \cdot 2a_1 + W_1$$

$$T = 2m_1 \cdot a_1 + W_1 \quad (1)$$

$$\sum F_y = m_2 \cdot a_2$$

$$W_2 - 2T = m_2 \cdot a_2 \quad (2)$$

$$W_2 - 2(2m_1 \cdot a_2 + W_1) = m_2 a_2$$

$$W_2 - 4m_1 \cdot a_2 - 2W_1 = m_2 a_2$$

$$-4m_1 \cdot a_2 - m_2 a_2 = -W_2 + 2W_1$$

$$a_2(-4m_1 - m_2) = 2W_1 - W_2$$

$$a_2 = \frac{2W_1 - W_2}{-4m_1 - m_2}$$

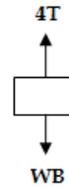
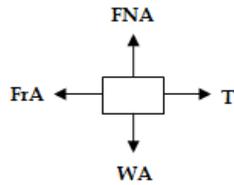
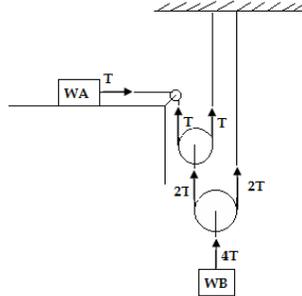
$$a_2 = \frac{2(8 * 9.8) - (12 * 9.8)}{-4(8) - 12}$$

$$a_2 = \frac{39.2}{-44}$$

$$a_2 = -0.82$$



Indique el valor de la fuerza de rozamiento sobre A cuyo peso es 800 Kg/F si se sabe que el bloque B pesa 600 Kg/F y las poleas son ideales. El  $\mu=0.8$ . Considere el sistema que esta en reposo y compruebe.



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T - F_{rA} = 0$$

$$T = F_{rA}$$

$$F_{NA} - W_A = 0$$

$$F_{NA} = W_A$$

$$4T - W_B = 0$$

$$T = \frac{W_B}{4}$$

$$T = F_{NA}\mu$$

$$150Kgf = F_{NA}\mu$$

$$T = F_{NA}\mu$$

$$150Kgf = F_{NA}\mu$$

$$T = \frac{600kg/f}{4}$$

$$T = 150Kgf/f$$

Equivalencias
$1N = 10^5 \text{Dinas}$
$1lbf = 4.45N$
$1Kgf = 9.8N$
$1utm = 9.8 Kg$
$g = 9.8 m/seg^2$
$g = 32.2ft/seg^2$

$$T_{max} = FrA$$

$$T_{max} = \mu r F_{NA}$$

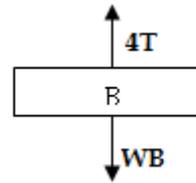
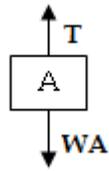
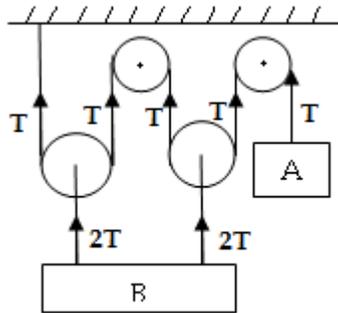
$$T_{max} = 0.8W_A$$

$$T_{max} = 0.8 * 800$$

$$T_{max} = 640 Kgf$$

$$640 > 150 Kgf$$

Los bloques A y B de la figura tienen masas de masa  $A=10\text{ Kg}$  y masa  $B=100\text{Kg}$ . Determinar la distancia que recorre B. Desde el instante que es liberado, partiendo del reposo hasta el momento en que su velocidad es  $2\text{m/seg}$ .





$$T - W_A = m_A a_A$$

2 en 1

$$T = W_A + m_A a_A$$

$$W_B - 4(4m_A a_B + W_A) = m_B a_B$$

$$W_B - 16m_A a_B - 4W_A = m_B a_B$$

$$a_A = 4a_B$$

$$W_B - 4W_A = m_B a_B + 16m_A a_B$$

$$T = m_A 4a_B + W_A \quad (2)$$

$$W_B - 4W_A = a_B(m_B + 16m_A)$$

$$W_B - 4T = m_B a_B \quad (1)$$

$$a_B = \frac{W_B - 4W_A}{m_B + 16m_A}$$

$$V_f^2 = V_o^2 + 2ad$$

$$a_B = \frac{(100 - 9.8) - 4(10 * 9.8)Kgm}{100 + 16(10)Kg \text{ seg}^2}$$

$$\frac{V_f^2}{2a_B} = dB$$

$$a_B = 2.26 \text{ m/seg}^2$$

$$dB = \frac{2^2 m^2 \text{ seg}^2}{2(2.86) \text{ seg}^2}$$

$$dB = 0.88 \text{ m}$$

Determinar la masa del bloque A de manera tal que cuando el bloque B de masa 5Kg. Sea soltado desde el reposo y recorra 0.75 m a lo largo del plano inclinado liso en un tiempo de 2 seg. Ignore las masas de las poleas y las cuerdas.

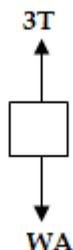
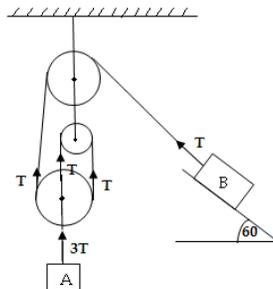
Datos

$m_A = ?$

$V_0 = 0$  m/seg

$D = 0.75$  m

$T = 2$  seg



$$d = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$d_B = \frac{1}{2} a_B t^2$$

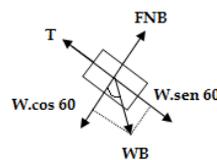
$$a_B = \frac{2d_B}{t^2}$$

$$a_B = \frac{2(0.75)m}{2^2 \text{seg}^2}$$

$$a_B = 0.38 \text{ m/seg}$$

$$a_B = 3a_A$$

$$a_A = \frac{a_B}{3}$$



$$\sum F_x = ma$$

$$T - W_B \text{Sen} 60^\circ = m_B a_B$$

$$T = m_B a_B + W_B \text{Sen} 60^\circ$$

$$T = 5(0.38) + 5(9.8) \text{Sen} 60^\circ$$

$$T = 44.34$$

$$\sum F_y = ma$$

$$W_A - 3T = m_A a_A$$

$$-3T = m_A a_A - W_A$$

$$-3T = m_A a_A - m_A g$$

$$3T = m_A g - m_A a_A$$

$$3T = m_A (g - a_A)$$

$$m_A = \frac{3T}{(g - a_B/3)}$$

$$m_A = \frac{3(44.34)}{(9.8 - 0.38/3)}$$

$$m_A = 13.75 \text{ Kg.}$$

Determine el valor de la tensión y la aceleración de los cuerpos

**Datos**

$m_1=10\text{Kg.}$

$m_2=2\text{Kg.}$

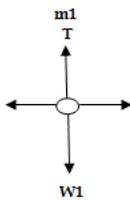
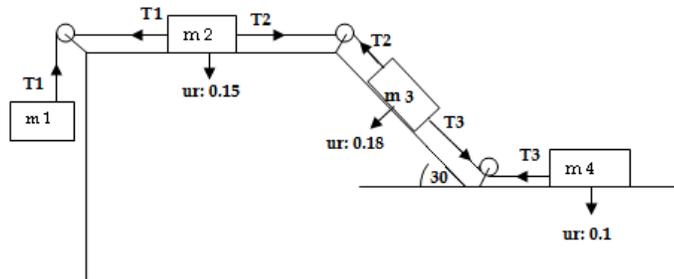
$m_3=4\text{ Kg.}$

$m_4=1.5\text{Kg.}$

$T_1=?$

$T_2=?$

$T_3=?$



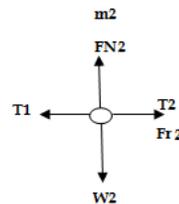
$$\sum Fy = m_1 \cdot a$$

$$W_1 - T_1 = m_1 \cdot a$$

$$T_1 = W_1 - m_1 a$$

$$T_1 = m_1 g - m_1 a$$

$$T_1 = m_1(g - a) \quad (1)$$



$$\sum Fx = m_2 \cdot a$$

$$T_1 - T_2 - Fr_2 = m_2 \cdot a$$

$$T_1 - T_2 - \mu_2 FN_2 = m_2 \cdot a$$

$$m_1(g - a) - T_2 - \mu_2 FN_2 = m_2 \cdot a$$

$$T_2 = m_1(g - a) - \mu_2 FN_2 = m_2 \cdot a$$

$$T_2 = m_1(g - a) - \mu_2(m_2 \cdot g) = m_2 \cdot a$$

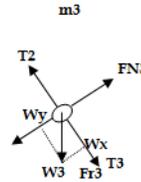
$$T_2 = m_1(g - a) - m_2(\mu_2 g + a)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$FN_2 - W_2 = 0$$

$$FN_2 = W_2$$

$$FN_2 = m_2 \cdot g$$



$$\sum F_y = 0$$

$$N_3 - W_3y = 0$$

$$N_3 = m_3 g \cos \theta$$

$$\sum F_x = m_3 \cdot a$$

$$T_2 - W_3x - FB = m_2 \cdot a$$

$$T_3 = T_2 - W_3x - FB - m_3 \cdot a$$

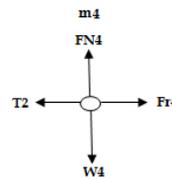
$$T_3 = m_1(g - a) - m_2(\mu_2 g + a) - m_3 g \cos \theta - \mu_3 FN_3 - m_3 \cdot a$$

$$T_3 = m_1(g - a) - m_2(\mu_2 g + a) - m_3(g \cos \theta + \mu_3 g + a)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_4 - W_4 = 0$$

$$N_4 = m_4 \cdot g$$



$$\sum F_x = m_4 a$$

$$T_3 - Fr_3 = m_4 a$$

$$T_3 = Fr_3 + m_4 a$$

$$T_3 = \mu m_4 g + m_4 a$$

$$T_3 = m_4(\mu g + a)$$

$$m_4(a + \mu g) = m_1(g - a) - m_2(\mu_2 g + a) - m_3 g \sin \theta - \mu_3 m_3 g \cos \theta - m_3 a$$

$$m_4 a + m_4 \mu g = m_1 g - m_1 a - m_2 \mu_2 g - m_2 a - m_3 g \sin \theta - \mu_3 m_3 g \cos \theta - m_3 a$$

$$m_4 a + a m_1 + m_2 a - m_3 a = m_1 g - m_2 g \mu_2 - m_3 g \sin \theta - \mu_2 m_3 g \cos \theta - m_4 \mu_3 g$$

$$a = \frac{(10 * 9.8) - 2(9.8)(0.18) - 4(9.8)\sin 30^\circ - 0.14 \cos 30^\circ}{(10 + 2 + 4 + 1.5)}$$

## DINÁMICA CIRCULAR

Un pequeño cuerpo de masa 100 Kg gira describiendo una circunferencia sobre una superficie horizontal lisa sujeto a un eje clavado en la superficie por una cuerda de 40 cm de longitud. Si el cuerpo da 2 vueltas por segundo. La fuerza ejercida por la cuerda sobre el cuerpo es

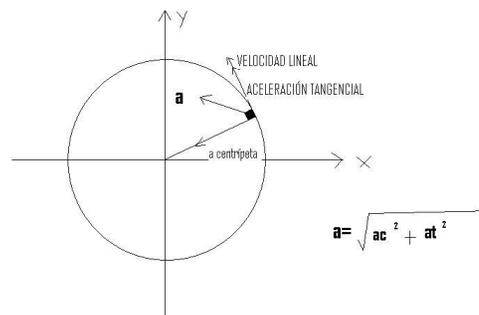
### Datos

$$m=100g$$

$$R=40 \text{ cm}$$

$$F=2 \text{ rev/seg}$$

$$T=?$$



$$\sum Fy = 0$$

$$\sum Fx = m \cdot a_n \quad \gamma = WR$$

$$FN - W = 0$$

$$FN = W$$

$$T = m \cdot a_n$$

$$T = m \cdot \frac{\gamma^2}{R}$$

$$T = m \cdot \frac{(WR)^2}{R}$$

$$T = m \cdot \frac{W^2 R^2}{R}$$

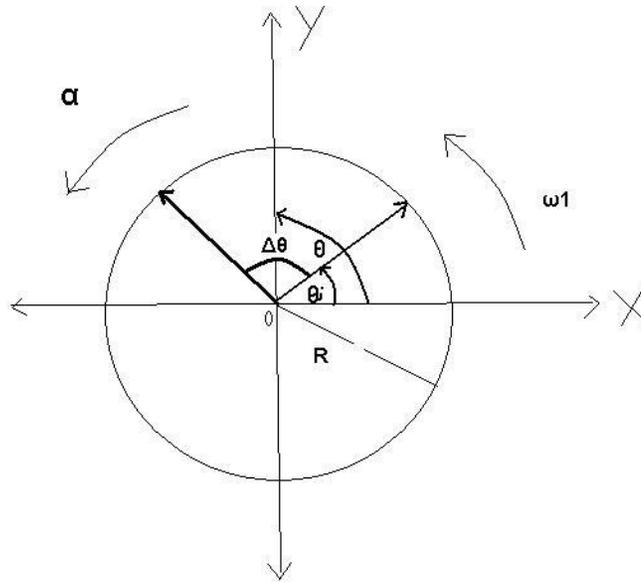
$$T = m \cdot W^2 R^2$$

$$W = 2 \frac{\text{rev}}{\text{seg}} * 2\pi \text{rad}/1\text{rev}$$

$$W = 4\pi \text{rad}/\text{seg}$$

$$T = 0.1 \text{ Kg} \cdot \left(\frac{4\pi \text{rad}}{\text{seg}}\right)^2 \cdot 0.4m$$

Un piloto de avión que pesa 750N realiza un rizo (vuelta) en un plano vertical a una velocidad de 180Km/h. Cuando se encuentra boca abajo en la posición más alta de la trayectoria. La fuerza que ejerce sobre el asiento del avión es 250 N. Hallar el radio del rizo.



**DATOS**

WA=750 N

V=180 Km/h

F=250 N

R=?

$$\sum Fy = m \cdot a_n$$

$$FN + W = m \cdot a_n$$

$$W + FN = \frac{mV^2}{R}$$

$$R = \frac{mV^2}{W + FN}$$

$$R = \frac{(750 / 9.8)(50m/s)^2}{750N + 250N}$$

$$R = 191.33m$$

Una esfera unida al extremo de un hilo de longitud (L) cuyo otro extremo es un punto fijo. La esfera describe una circunferencia horizontal r como se indica en la figura. Determinar la velocidad tangencial y la velocidad angular de la esfera sabiendo que el hilo forma un ángulo  $\theta$  con la vertical.

Datos

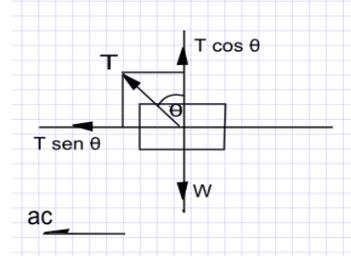
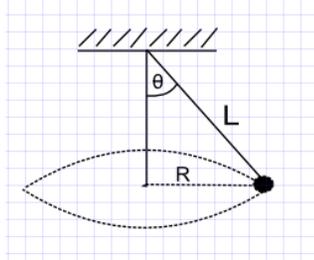
Longitud=L

Radio=r

Angulo= $\theta$

W=?

V=?



$$\sum F_x = m \cdot a_n$$

$$\sum F_y = m \cdot a_n$$

$$T \sin \theta = m \cdot a_n$$

$$\frac{W}{\cos \theta} \sin \theta = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

$$FN + W = m \cdot a_n$$

$$W \tan \theta = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

$$V^2 = \frac{W \tan \theta \cdot R}{m}$$

$$V^2 = \frac{mg \tan \theta \cdot R}{m}$$

$$V = \sqrt{g \tan \theta R}$$

$$V = WR$$

$$W = \frac{\sqrt{g \tan \theta \cdot R}}{R}$$

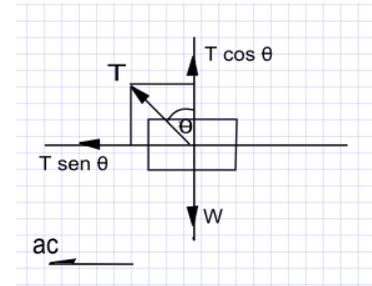
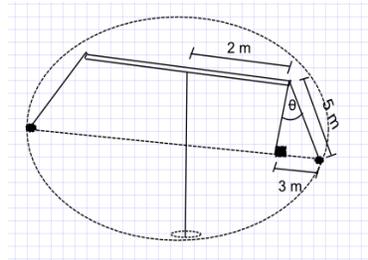
La barra vertical homogénea gira con una velocidad angular constante tal como se indica en la figura de tal manera que el radio de la circunferencia de la trayectoria de la esfera es 5m. Determinar la han de dicha esfera.

Datos

$W=cte$

$R=5m$

$A_n=?$



$$\sum F_x = m \cdot a_n$$

$$T \sin \theta = m \cdot a_n$$

$$\frac{W}{\cos \theta} \sin \theta = m \cdot a_n$$

$$mg \tan \theta = m \cdot a_n$$

$$g \tan \theta = a_n$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T \cos \theta - W = 0$$

$$T \cos \theta = W$$

$$T = \frac{W}{\cos \theta}$$

$$9.8m/seg^2 \tan 36.87 = a_n$$

$$a_n = 7.35 m/seg^2$$

Un bloque de 8 Kg representando en la figura esta unido a una varilla vertical por medio de 2 cuerdas .Cuando el sistema gira alrededor del eje de la varilla con  $W=cte$  de 4 rad/seg. Las cuerdas quedan tensadas. Determinar la tensión de la cuerda inferior.

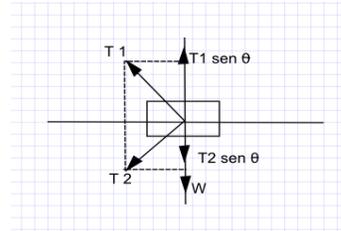
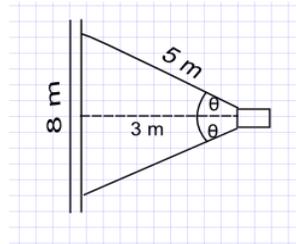
Datos

$W=4$  rad/seg

$T_2=?$  Interior

$m=8$  Kg

$R=3$



$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_y = ma_n$$

$$T_1 \sin \theta - T_2 \sin \theta - W_2 = 0$$

$$T_1 \cos \theta + T_2 \cos \theta = ma_n$$

$$T_1 \left(\frac{4}{5}\right) - T_2 \left(\frac{4}{5}\right) - W_2 = 0$$

$$T_1 \left(\frac{3}{5}\right) + T_2 \left(\frac{3}{5}\right) = m \frac{V^2}{R}$$

$$T_1 \left(\frac{4}{5}\right) = W_2 + T_2 \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$T_1 \left(\frac{3}{5}\right) + T_2 \left(\frac{3}{5}\right) = mW^2R$$

$$T_1 = \frac{5}{4}W_2 + T_2 \quad (1)$$

$$T_1 \left(\frac{3}{5}\right) + T_2 \left(\frac{3}{5}\right) = mW^2R \quad (2)$$

1 en 2

$$T_1 = \frac{5}{4}(9.8 * 8) + 271N$$

$$T_1 = 369N$$

$$\left(\frac{5}{4}W^2 + T_2\right) + \left(\frac{3}{5}\right)T_2 = mW^2R$$

$$\frac{6}{5}T_2 = mW^2R - \frac{3}{4}W$$

$$T_2 = \frac{5}{6}mW^2R - \frac{3}{4}W$$

$$T_2 = \frac{5}{6}(8.4^2.5 - \frac{3}{4}(8 * 9.8))$$

$$T_2 = 271 N$$



La barra OA en el plano vertical alrededor del punto O tal como se indica en la figura con una rapidez angular constante de 3 rad/seg. Cuando pasa por la posición horizontal se coloca sobre la barra un cuerpo de masa m a una distancia de  $r = 45\text{cm}$ . Se observa que el cuerpo comienza a deslizarse cuando  $\theta = 45^\circ$ . Determine el  $\mu$  entre el cuerpo y la barra OA.

Datos

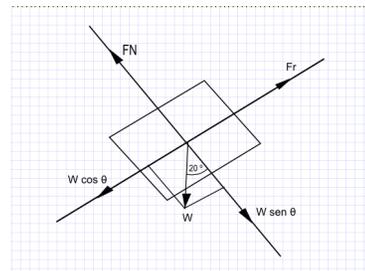
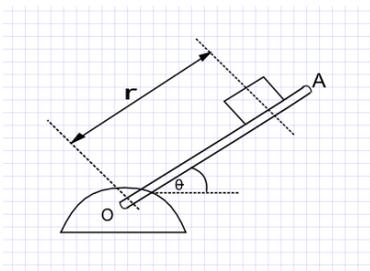
$\omega = 3\text{ rad/seg}$

Masa = m

$R = 45\text{ cm}$

$\theta = 45^\circ$

$\mu = ?$



$$\sum F_y = 0$$

$$FN - W \cos \theta = 0$$

$$FN = W \cos \theta$$

$$\sum F_x = m \cdot a_n$$

$$W \sin \theta - Fr = m \cdot a_n$$

$$W \sin \theta - \mu r FN = m \cdot a_n$$

$$W \sin \theta - \mu r W \cos \theta = m \cdot a_n$$

$$-\mu r W \cos \theta = m \cdot a_n - W \sin \theta$$

$$-\mu r = \frac{m \cdot a_n - W \sin \theta}{W \cos \theta}$$

$$\mu r = \frac{m \cdot g \sin \theta - m a_n}{m g \cos \theta}$$

$$\mu r = \frac{g \sin \theta - a_n}{g \cos \theta}$$

$$\mu r = \frac{g \sin \theta - \frac{V^2}{R}}{g \cos \theta}$$

$$\mu r = \frac{g \sin \theta - \omega^2 R}{g \cos \theta}$$

$$\mu r = \frac{9.8 \sin 45 - (3 \text{ rad} - \text{seg})^2 (0.45 \text{ m})}{9.8 \cos 45}$$

$$\mu r = 0.42$$



La esfera de masa  $M$  se impuso verticalmente hacia abajo en la posición  $A$  y se sabe que a pasar por la posición más baja la tensión de la cuerda es igual al  $5W$  de la esfera determine la velocidad en la posición más baja  $l$  de la cuerda  $=50$  cm.

Datos

$$T=5W=5M.g$$

$$L=50 \text{ cm}$$

$$T - W = mac$$

$$5W - W = mac$$

$$4W = mac$$

$$4mg = mac$$

$$4g = ac$$

$$4g = \frac{v^2}{R}$$

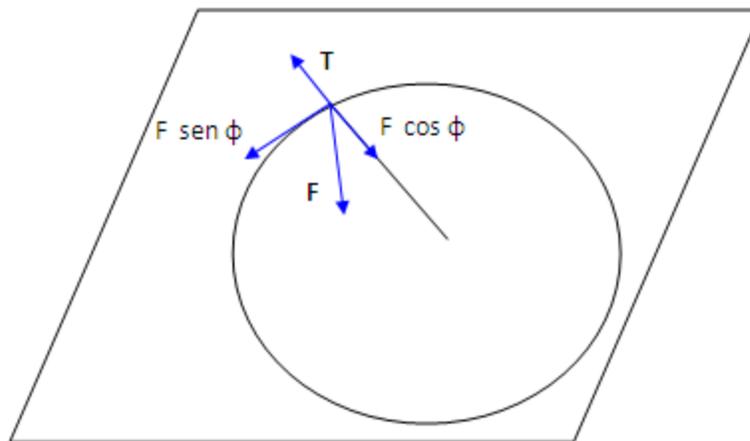
$$v = \sqrt{R4g}$$

$$v = \sqrt{0.5 * 4 * 9.8}$$

$$v = 4.42 \text{ m/seg}$$

## TORQUE Y DINÁMICA ROTACIONAL

Con el propósito de analizar los efectos que produce una fuerza resultante sobre un cuerpo rígido (se entiende por cuerpo rígido aquel que no se deforma por la acción de una fuerza y cuyas dimensiones físicas y distribución de masa no puede despreciarse en el análisis del movimiento), se considera una varilla de masa despreciable, en la que se ha soldado una masa en un extremo y gira sobre el otro, apoyada en una superficie horizontal sin rozamiento. Sobre la masa soldada a la varilla actúa una fuerza resultante horizontal  $F$ , como se muestra en la Fig. 3-16.



**Figura 3-16** Masa unida a una varilla que rota sobre una superficie horizontal sin rozamiento

La masa, unida al extremo de la varilla, está sometida a la acción de la fuerza  $T$  que sobre ella realiza la varilla, de su peso y de la fuerza normal, que ejerce sobre ella la superficie horizontal y lisa.

Al considerar un sistema cartesiano, en el que el eje  $x$  es paralelo a la varilla y el eje  $y$  perpendicular a la misma, y al aplicar la segunda ley de Newton sobre la masa, soldada a la varilla, se tiene:

En el eje  $x$  dirigido al centro de rotación (normal):

$$T - F \cos \phi = 0 \quad (\text{Mientras la partícula continúa en reposo})$$

En el eje  $y$  perpendicular al radio (tangencial):

$$F \text{ sen } \phi = ma_T$$

$$a_T = F \text{ Sen } \phi / m$$

Si se reemplaza  $\alpha r = a_T$  se tiene:

$$\alpha = F \cdot \text{Sen } \phi / mr$$

Al multiplicar los dos miembros de la fracción por  $r$  se obtiene

$$\alpha = Fr \text{ Sen } \phi / mr^2 \quad (3 - 12)$$

Es importante establecer que las expresiones  $F_r \text{ sen } \phi$   $Fr \text{ sen } \phi$   $mr^2$  representan el módulo del torque  $\tau$  y el momento de inercia o inercia rotacional de una partícula ( $I$ ), respectivamente. El momento de inercia es una propiedad de los cuerpos para oponerse a ser acelerados angularmente.

$$\tau = Fr \text{ Sen } \phi$$

$$I_{particula} = mr^2$$

### Torque

Al analizar detenidamente la expresión

$$Fr \text{ sen } \phi = \tau$$

y aplicando la definición de producto vectorial de dos vectores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{r}$ , que representan el valor de los vectores fuerza y posición del punto de aplicación de la fuerza en, relación al eje de rotación, se tiene que

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3-13)$$

De esta expresión, se concluye que el torque es un Vector, perpendicular al plano formado por los vectores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{r}$ , cuyo valor depende de la fuerza aplicada, de la posición de su punto de aplicación respecto al centro de giro del cuerpo y el ángulo formado por estos dos vectores.

A fin de comprender mejor el concepto de torque, se plantea las siguientes preguntas que deberán ser resueltas por el estudiante:

1. Si usted quiere abrir una puerta, aplicando con su mano la menor fuerza posible sobre la perilla ubicada en el extremo de la misma, ¿con qué ángulo en, relación a la puerta, aplica la fuerza? Explique su respuesta.

2. ¿Qué principio físico se usa al añadir un tubo al mango de una llave inglesa para aflojar una tuerca, cuando esto no ha sido posible realizarlo ejerciendo la fuerza directamente sobre el mango de la llave? Explique.

UNIDADES DEL TORQUE: En el S I. las unidades del torque vienen dadas en N.

### Inercia rotacional o momento de inercia

Como se estableció anteriormente, la primera ley de Newton dice que todos los cuerpos tienden a estar en reposo o moverse en línea recta, con velocidad constante. En la práctica encontramos que existe una ley similar para la rotación.

Todo objeto en rotación, permanece girando hasta que un agente externo (torque), modifique dicho estado. De aquí, se puede hablar que un cuerpo en rotación tiene cierta "inercia de rotación o momento de inercia".

Para movimientos rotacionales en los cuales el eje de rotación es fijo, el momento de inercia es considerado como un escalar positivo y sus dimensiones son ( $ML^2$ ). Este caso particular es el que se trata en el presente capítulo.

En ausencia de un torque neto o total, los cuerpos rígidos en rotación permanecen en rotación con velocidad angular constante (sin aceleración angular) y los cuerpos rígidos que no giran permanecen sin girar.

A diferencia de la inercia de traslación, que solamente depende de la masa, la inercia de rotación o momento de inercia depende tanto de la masa, como de su distribución (o sea de su geometría). Cuanto mayor sea la distancia entre la mayor parte de la masa de un objeto y el eje alrededor del cual se efectúa la rotación, mayor será su momento de inercia.

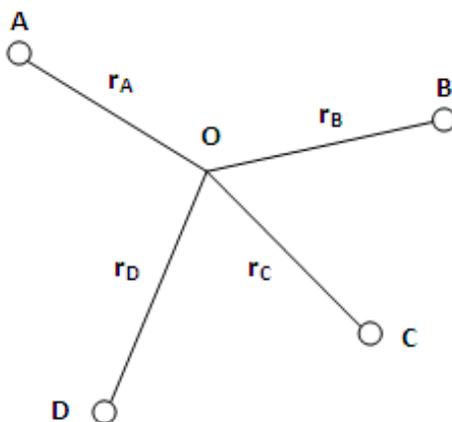
Los cuerpos que tienen la mayor parte de su masa hacia su periferia, una vez puestos en rotación, son más difíciles de detener, que aquellos cuya masa está más cerca al eje, puesto que tienen mayor inercia rotacional.

Como consecuencia de lo expuesto, una patinadora tiene gran inercia rotacional cuando gira sobre una de sus piernas y mantiene los brazos abiertos y la otra pierna estirada en el aire, por lo que rotará más lentamente que cuando se encoge en posición vertical. En posición vertical, con sus brazos pegados al cuerpo, la masa queda muy cerca del eje de

rotación por lo que disminuye su momento de inercia y aumenta significativamente su velocidad angular.

La inercia rotacional, respecto al eje de giro, por ejemplo, de un péndulo largo es mayor que la de un péndulo corto. El péndulo largo es más "perezoso", por lo que se mueve, de un lado a otro, más lentamente que un péndulo corto.

Como se estableció anteriormente, cuando toda la masa de un objeto se encuentra concentrada a la misma distancia del eje de rotación, como en el caso de una partícula, el momento de inercia es  $I = m.r^2$ . Para el caso de un sistema de partículas que gira alrededor de un solo punto "O", como se muestra en la Fig. 3-17, el momento de inercia será  $I_0$

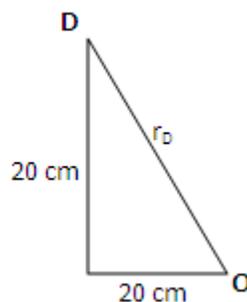
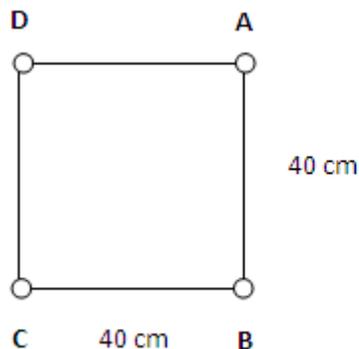


**Figura 3-17** Sistema de partículas que gira alrededor de O

$$I_0 = m_A r_A^2 + m_B r_B^2 + m_C r_C^2 + m_D r_D^2 = \sum m_i r_i^2 \quad (3 - 14)$$

El subíndice  $_0$  expresa que todas las partículas giran alrededor del punto "O".

**Ejemplo 5.** Cuatro pequeños cuerpos, considerados como partículas, están unidos por barras rígidas de masa despreciable, como muestra la Fig. 3-18. ¿Cuál es el momento de inercia del sistema, respecto a un eje perpendicular al plano de la figura, que pasa por el centro geométrico de la figura? Se conoce que  $m_A = 10$  g,  $m_B = 20$  g,  $m_C = 30$  g,  $m_D = 40$  g.



$$I_O = m_A r_A^2 + m_B r_B^2 + m_C r_C^2 + m_D r_D^2$$

$$r_A = r_B = r_C = r_D$$

Si el punto O coincide con el corte de las diagonales,

$$r_D^2 = (20^2 + 20^2) \text{cm}^2 = 800 \text{cm}^2, \text{ entonces:}$$

$$I_O = 10 \cdot 800 \text{gcm}^2 + 20 \cdot 800 \text{gcm}^2 + 30 \cdot 800 \text{gcm}^2 + 40 \cdot 800 \text{gcm}^2$$

$$= (10 + 20 + 30 + 40) \cdot 800 \text{gcm}^2 = 80.000 \text{gcm}^2$$

UNIDADES DEL MOMENTO DE INERCIA O INERCIA ROTACIONAL: En el sistema internacional son  $\text{kgm}^2$ .

## Inercia rotacional de cuerpos extensos

Para el caso de un cuerpo extenso (condición a que pertenecen la mayor parte de los cuerpos comunes), que no puede ser considerado como partícula ni como un sistema de partículas; pero sí como una distribución continua de masa, se utilizan procedimientos matemáticos adecuados: con los cuales se concluye que:

$$I_O = cml^2 \quad (3-15)$$

Donde c es una constante, que depende de la forma geométrica del cuerpo y de la posición del eje de rotación seleccionado, que pasa por el centro de rotación O, m la masa del cuerpo que se encuentra en rotación y / una dimensión característica del cuerpo.

A continuación se presenta una tabla con las ecuaciones para el cálculo de momento de inercia de algunos cuerpos extensos. .

Objeto	Fórmula
Péndulo simple	$I = mr^2$
Aro que gira alrededor de su eje normal	$I = mr^2$
Aro que gira alrededor de un diámetro	$I = \frac{1}{2}mr^2$
Cilindro sólido	$I = \frac{1}{2}mr^2$
Varilla que gira alrededor de su centro de gravedad*	$I = \frac{1}{12}mL^2$
Varilla que gira alrededor de uno de sus extremos*	$I = \frac{1}{3}mL^2$
Esfera sólida que gira alrededor de su centro	$I = \frac{2}{5}mr^2$

\* L: longitud de la varilla

## Torque y aceleración angular

Al remplazar en la Ec. (3-32) los valores del torque, del momento de inercia y como ti torque es un vector, se tiene:

$$\alpha = \tau/I \quad (3-16)$$

De esta ecuación, se concluye que el torque produce una aceleración angular a la partícula, en tanto esta gira soldada a la varilla a una distancia r del centro de rotación; es decir, en general, el torque es capaz de producir una aceleración angular en el cuerpo, que tiene el mismo unitario del torque y su valor es directamente proporcional al valor de este e inversamente proporcional al valor de la inercia rotacional.

A partir de esta relación se afirma que el torque es positivo cuando produce una aceleración angular en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y negativo, si la aceleración angular es en sentido horario.

### Ecuación general de la dinámica rotacional

La Ec. (3-16) expresa que la aceleración angular de una partícula, que gira alrededor de un eje fijo, es proporcional al momento de torsión que actúa alrededor de ese eje o que el momento de torsión, que actúa sobre la partícula, es proporcional a la aceleración angular, y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia. Nótese que  $\tau = I\alpha$  es el análogo de la segunda ley de Newton,  $F = m.a$ , para la rotación.

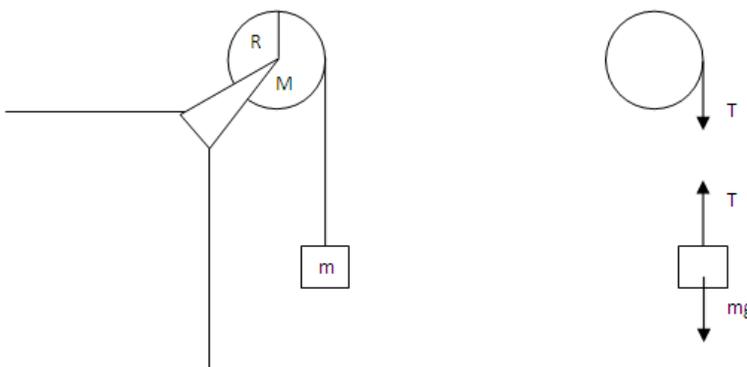
Dado que sobre un cuerpo rígido, usualmente, actúan varias fuerzas y cada una de ellas produce un torque, es necesario referir que el torque producido por todas las fuerzas, se denomina torque resultante o neto por lo que generalmente la Ec. (3-16) se expresara como:

$$\alpha = \Sigma\tau/I \quad (3-17)$$

Donde  $\Sigma\tau = \tau_{neto}$  es el torque total, respecto a un eje de rotación, que actúa sobre el cuerpo rígido;  $I$  es el momento de inercia del cuerpo rígido, sobre el cual actúa el torque; y,  $\alpha$  la aceleración angular del cuerpo rígido en rotación.

La Ec. (3-17), por tanto, expresa que el torque neto respecto a un eje de rotación es proporcional a la aceleración angular del cuerpo. El momento de inercia es el factor de proporcionalidad, el cual depende del eje de rotación, del tamaño y forma del cuerpo, básicamente.

**Ejemplo 6.** El volante, de radio  $R$ , masa  $M$  y momento de inercia  $I$ , se instala sobre un eje sin fricción, como muestra la siguiente figura. Una cuerda ideal, enrollada alrededor del volante, sostiene un cuerpo de masa  $m$ . Determine a) la aceleración angular del volante, b) la aceleración de la masa suspendida y c) la tensión de la cuerda de la que suspende el cuerpo.



**Figura 3-19** Rotación de un volante, de radio  $R$ .

a.  $\Sigma \tau = I\alpha$

$$\Sigma \tau = \tau_T = -TRk$$

$$-TRk = I\alpha$$

b.  $\Sigma F_y = -T + mg = ma_y = ma$

$$a = (mg - T)/m$$

$$a = -[(mg - T)/m]j$$

c. Como la aceleración de la masa suspendida es igual a la aceleración tangencial, en un punto de la periferia del volante, y dado que  $a = \alpha R$  se tiene:

$$a = aR = TR^2 / I = (mg - T)/m$$

$$T = mgI / (1 + mR^2)$$

$$T = mgl / (I + mR^2)j$$

## Equilibrio rotacional

Si la velocidad angular de un cuerpo extenso (velocidad de rotación), es constante, se afirma que se encuentra en equilibrio de rotación. Entonces un cuerpo en equilibrio de rotación es aquel cuya velocidad angular es constante, igual o diferente de cero.

Un ejemplo de este estado dinámico es el que tiene el plato de un tocadiscos al girar, no así los neumáticos de un auto cuando curva, pues aunque su rapidez se mantuviera constante, el plano de rotación del cuerpo rígido, en este caso el neumático, no es constante y por tanto la velocidad angular varía en dirección.

De lo anterior se concluye que la condición del equilibrio rotacional es  $\alpha = 0$ , de acuerdo con esta condición en la ecuación  $\Sigma \tau = I\alpha$  se concluye que  $\Sigma \tau = 0$ .

Es justo aclarar que el torque, que representa  $\Sigma \tau$ , es el torque neto externo, esto es, la suma vectorial de todas las torques ejercidas sobre el cuerpo, por las fuerzas externas a él. Es por ello que, en forma general, se puede expresar la condición para el equilibrio rotacional de cuerpos según la siguiente expresión:

$$\Sigma \tau_{Ext} = 0 \quad (3-18)$$

### Equilibrio total

Se dice que un cuerpo extenso está en equilibrio total cuando no posee aceleración, tanto para su movimiento de traslación, como para su movimiento de rotación y por tanto cumple simultáneamente con que:

$$\Sigma F = 0 \text{ y } \Sigma \tau_{Ext} = 0 \quad (3-19)$$

Un ejemplo del movimiento de un cuerpo en equilibrio total es el que se genera al lanzar un disco de jockey, a través del hielo (en ausencia de rozamiento). Su centro de masa C se moverá en línea recta, con velocidad lineal  $v$  constante, porque  $\Sigma F = 0$ , y girará, simultáneamente, alrededor de un eje vertical que atraviesa C con velocidad angular  $\omega$  constante, porque  $\Sigma \tau = 0$ .

**Ejemplo 7.** Si el sistema de la Fig. 3-20 se encuentra en equilibrio, determine el valor del peso suspendido en A.



**Figura 3-20**

Como el sistema está en equilibrio de traslación, se cumple que:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{Ext} &= 0 \\ -P_A j - P j + T j &= 0 \end{aligned}$$

Como, además, el sistema está en equilibrio de rotación, también se establece que:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_{Ext} &= 0 \\ (-10i) \times (-P_A j) + (20i) \times (-80 j) &= 0 \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones indica que:

$$P_A \quad 160N$$

$$T \quad 240N$$

## Cantidad de movimiento angular (CMA)

Así como la ecuación  $\Sigma \tau = I\alpha$  es la contraparte rotacional de la expresión  $\Sigma F = ma$ , el análogo rotacional de la cantidad de movimiento lineal,  $p = m.v$ , es la cantidad de movimiento angular,  $J$ . Si un cuerpo rota, respecto al mismo eje fijo, con relación al que se determinó su momento de inercia  $I$ , sin cambiar la orientación de su plano de rotación, con una cierta velocidad angular,  $\omega$ , su cantidad de movimiento angular es:

$$J = I\omega \quad (3-20)$$

En este caso, como  $I$  es un escalar positivo,  $J$  está en la misma dirección de  $\omega$ . En problemas de rotación simples se puede considerar a  $J$  como un escalar positivo para las rotaciones alrededor del eje en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo, en sentido de las manecillas.

Si el sistema está formado por una sola partícula, entonces la cantidad de movimiento angular se calculará con la expresión siguiente:

$$J = mr^2\omega \quad (3-21)$$

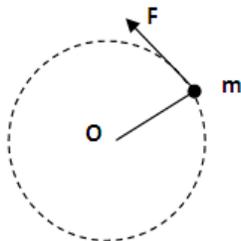
Para un sistema formado por  $n$  partículas, que giran con la misma velocidad angular

$$J = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots + m_nr_n^2)\omega = \Sigma m_i r_i^2 \omega \quad (3-22)$$

UNIDADES DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR: En el sistema internacional son  $(\text{kg m}^2/\text{s})$  y la dimensión  $[MLT^{-1}]$

### Ecuación impulso angular-CMA

El objeto de masa  $m$ , de la Fig. 3- 20, por efecto de un torque constante sobre él, varía su velocidad angular del valor  $\omega_0$  al valor  $\omega$ , en el tiempo  $\Delta t$ . Por tanto, se puede escribir:



**Figura 3-20** Objeto de masa  $m$ , que rota a una distancia  $r$ , del centro de rotación fijo  $O$ .

$$\Sigma_{\tau} = I\alpha = I(\omega - \omega_0) / \Delta t = (I\omega - I\omega_0) / \Delta t$$

Como la Ec. (3-20) establece  $J = I\omega$ , se tiene que:

$$\Sigma_{\tau} = (J - J_0) / \Delta t$$

$$\Sigma_{\tau} = \Delta J / \Delta t$$

$$\Delta J = \Sigma_{\tau} \cdot \Delta t \quad (3-23)$$

Esta ecuación es el análogo rotatorio de la ecuación  $\Sigma F = \Delta p / \Delta t$ , donde  $\Sigma_{\tau} \cdot \Delta t$  representa el impulso angular.

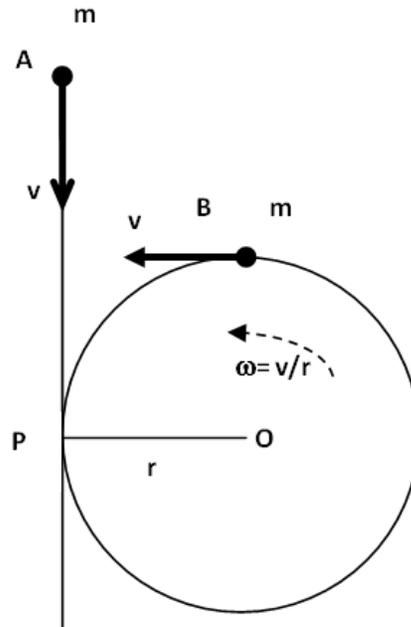
### Principio de conservación de la cantidad de movimiento angular

Cuando el torque neto,  $\Sigma \tau$ , que actúa sobre el sistema es cero, se tendrá que  $\Delta J / \Delta t = 0$ . En este caso, la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular es cero. Por tanto, el producto  $I \cdot \omega$  permanece constante en el tiempo; es decir,  $J_0 = J$ .

La cantidad de movimiento angular del sistema se conserva cuando el torque externo neto que actúa sobre el sistema es cero. Es decir, cuando  $\Sigma \tau = 0$ , la cantidad de movimiento angular inicial es igual a la cantidad de movimiento angular final.

### Cantidad de movimiento angular asociado al movimiento lineal

La cantidad de movimiento angular  $J$  tiene un significado independiente de la rotación real. Considere una partícula A, de masa  $m$ , que se mueve con velocidad lineal constante e igual a  $v$  por una línea recta como, se indica en la Fig. 3-21



**Figura 3-21 Cantidad de movimiento angular para el movimiento rectilíneo uniforme**

La máxima aproximación de esta partícula al punto fijo O será cuando está en P, a una distancia  $r$  de O. En el instante que A pasa por P no puede diferenciarse de una segunda partícula idéntica B, que estaría girando alrededor de O en un círculo de radio  $r$ , ni en su masa  $m$ , ni en su posición  $r$ , ni en su velocidad tangencial  $v$ , ni en su velocidad angular  $\omega = v/r$ . Esto permite asignar a A una cantidad de movimiento angular igual a la de B; esto es:

$$J = mr^2\omega = mr^2 v/r = mvr.$$

Puesto que A viaja con velocidad constante, no debe haber fuerza neta que actúe sobre la partícula, consecuentemente no debe haber torque. Note que  $mvr$  es el producto de  $r$  por la cantidad de movimiento lineal  $mv$ .

La ecuación anterior conduce a una definición más completa de la cantidad de movimiento angular. Tanto para el caso en el que no cambia el plano de rotación como para el que sí varía el plano. Entonces  $J$  puede escribirse de la siguiente manera:

$$J = mr \times v \quad (3-24)$$

Para una sola partícula, donde  $r$  es el radio vector de la partícula desde el punto alrededor del cual se calcula la cantidad de movimiento angular, y  $v$  es su velocidad. La cantidad de movimiento angular también puede escribirse como:

$$J = r \times p \quad (3-25)$$

Para un sistema de  $n$  partículas puede generalizarse como:

$$J = \sum r_i \times p_i \quad (3-26)$$

Donde  $r_i$  es el vector posición de la  $i$ -ésima partícula, respecto al punto desde el cual se calcula la cantidad de movimiento angular de la misma y,  $p_i$  es la cantidad de movimiento lineal de la  $i$ -ésima partícula.