

# LÓGICA MATEMÁTICA

## 1) Antecedentes científicos. Lectura

Iniciemos el estudio de este hermoso capítulo de la Matemática leyendo, analizando y comprendiendo la lectura del documento escrito por dos estudiantes Mexicanos JOSE ALFREDO JIMÉNEZ MURILLO y MARÍA ALEIDA HERNÁNDEZ YÁNEZ.

Ellos dicen- "Aprender Matemática, Física y Química "es muy difícil",- así se expresan la mayoría de estudiantes de todos los niveles; sin embargo, pocas veces se busca una explicación del porqué no aprenden las ciencias exactas los alumnos. Nuestra teoría es la siguiente: "Los alumnos no aprenden ciencias exactas, porque no saben relacionar los conocimientos que se proporcionan en la escuela (leyes, teoremas, fórmulas, etc.) con los problemas que se le presentan en la vida real".

Otro problema grave es que el aprendizaje no es significativo. El presente trabajo pretende motivar a los estudiantes para que con ayuda de la "lógica matemática", él sea capaz de encontrar estos relacionamientos entre los diferentes esquemas de aprendizaje, para que de esta manera tenga una buena estructura cognitiva.

Consideramos que si el alumno sabe lógica matemática puede relacionar estos conocimientos, con los de otras áreas para de esta manera crear conocimiento.

La lógica estudia la forma del razonamiento, es una disciplina que por medio de reglas y técnicas determina si un argumento es válido. La lógica es ampliamente aplicada en la Filosofía, Matemática, Computación, Física. En la Filosofía para determinar si un razonamiento es válido o no, ya que una frase puede tener diferentes interpretaciones, sin embargo la lógica permite saber el significado correcto.

En la Matemática para demostrar teoremas e inferir resultados matemáticas que puedan ser aplicados en investigaciones; en la computación para revisar programas.

En general la lógica se aplica en la tarea diaria, ya que cualquier trabajo que se realiza tiene un procedimiento lógico, por el ejemplo: para ir de compras al supermercado, una ama de casa tiene que realizar cierto procedimiento lógico que permita realizar dicha tarea. Si una persona desea pintar una pared, este trabajo tiene un procedimiento lógico, ya que no puede pintar si antes no prepara la pintura, o no debe pintar la parte baja de la pared si antes no pintó la parte alta porque se mancharía lo que ya tiene pintado, también dependiendo si es zurdo o derecho, él puede pintar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda según el caso, todo esto es la aplicación de la lógica.

La lógica es pues muy importante; ya que permite resolver incluso problemas a los que nunca se ha enfrentado el ser humano utilizando solamente su inteligencia y apoyándose de algunos conocimientos acumulados, se pueden obtener nuevos inventos innovaciones a los ya existentes o simplemente utilización de los mismos.

Consideramos que sí el alumno aprende lógica matemática no tendrá problemas para aprender ciencias exacta y será capaz de programar computadoras, ya que un programa de computadora no es otra cosa que una secuencia de pasos lógicos, que la persona establece para resolver un problema determinado.

Es importante mencionar que en las demostraciones no hay un solo camino para llegar al resultado. El camino puede ser más largo o más corto, dependiendo de las reglas de inferencia y tautologías que el alumno seleccione, pero definitivamente deberá llegar al resultado.

Puede haber tantas soluciones como alumnos se tenga en clase y todas estar bien; esto permite que el estudiante tenga confianza en la aplicación de reglas y fórmulas.

De tal manera que cuando llegue a poner en práctica esto, él sea capaz de inventar su propia solución, porque en la vida cada quien resuelve sus problemas aplicando las reglas de inferencia para relacionar los conocimientos y obtener el resultado".

## TALLER

Contestar en base a la lectura presentada y en base a sus vivencias

- 1) Piensa usted que aprender Matemática es difícil". ¿Por qué?
- 2) En general el nivel de interaprendizaje de Matemática es bajo, ¿a qué se debe esto?. Plantee posibles soluciones
- 3) Defina con sus propias palabras lo que entiende por Lógica
- 4) Brevemente, explique la importancia de la Lógica.

### 2) Aspectos Históricos de la Lógica Matemática

La Lógica Matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en Matemática para demostrar teoremas; en ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas; en las ciencias físicas y naturales, para sacar conclusiones de experimentos; y en las ciencias sociales y en la vida cotidiana, para resolver una multitud de problemas. Ciertamente se usa en forma constante el razonamiento lógico para realizar cualquier actividad.

La lógica es una materia antigua que forma parte de la ciencia denominada Filosofía. La Filosofía surgió en el siglo VI a.c, en la antigua Grecia y proviene de dos vocablos: *philos* que significa amor o amistad y *sophia* que significa sabiduría; entonces Filosofía significa amor o amistad hacia el conocimiento, éste no lo poseen los sabios en forma absoluta o definitiva, sino, aquel que "quiere saber", el que humildemente aspira al conocimiento.

El conocimiento le compete solamente al ser humano, conociéndose así mismo primero y luego conocer al mundo que le rodea. No sería posible la vida sin el conocimiento.

Así, Platón decía a Sócrates que "no vale la pena vivir una vida sin conocimiento".

¿Por qué la tierra se mueve?; ¿Por qué brilla el sol?; ¿Por qué hay estrellas?; ¿Qué es en si el mundo?; ¿Qué es el hombre frente a este inmenso universo?

De estas interrogantes nace la Filosofía, como un intento para dar contestación o respuestas.

Aristóteles menciona que por este asombro comenzó el hombre a filosofar.

A la escuela Pitagórica, fundada por Pitágoras de Samos en 570 - 497 a.c, se le atribuye el concepto de Filosofía; según ellos el principio o esencia de todas las cosas son los números; establecieron que el número uno es el punto, el dos la línea, el tres la superficie y el cuatro el sólido.

En la época moderna que surge en el siglo XV y XVI se producen grandes avances científicos y técnicos, se logra poner en crisis la concepción teocrática del mundo (Dios como centro de todo) y el deseo de transformar y dominar la naturaleza por medio de la ciencia.

En la época moderna surge también Descartes, llamado "El padre de la filosofía moderna", quien rompió con la tradición cuando dice "pienso, luego existo", según éste por más que dude, no puedo dudar de mi propia duda, y al hacerlo pienso, y al pensar existo, al menos como ser pensante.

En la época contemporánea, siglos XIX y XX se continúa con supuestos derivadas de la modernidad; con Hegel aparece el método dialéctico, la síntesis, la lógica.

El positivismo que es un rechazo a la Metafísica, fue creado por el filósofo Francés Augusto Comte y su lema es: "saber para prever, prever para actuar". Comte es autor de la lógica deductiva e inductiva.

**Tarea:** Realizar un organizador gráfico sobre aspectos Históricos de la Lógica Matemática.

### 3) Conceptos básicos en Lógica Matemática

**6.1) Proposición.-** Es una sucesión finita de signos (palabras o términos) que les puede calificar como verdaderos o como falsos, pero nunca como ambos valores a la vez

**6.2) Valor de verdad.-** Es la propiedad fundamental de toda proposición de ser verdadera o falsa, por ejemplo: la proposición, Quito es capital del Ecuador, tiene como valor de verdad la verdad.

**6.3) Conectiva lógica.-** Llamada también conector, que es cualquier letra o palabra tal como: *y, pero, o, si y solo si, si...entonces*, etc. Que sirven para unir a las proposiciones entre sí, dándoles además un sentido o significado lógico. Ejemplo: Está lloviendo y hace frío

#### **6.4) Tipo de proposiciones**

**6.4.1) Atómicas o simples.-** Son aquellas que dentro de sus signos no llevan conectiva lógica, o están constituidas por una sola expresión. Ejemplo: La educación ecuatoriana está en un proceso de desarrollo

**6.4.2) Compuestas o moleculares.-** Son aquellas que dentro de sus signos llevan por lo menos una conectiva lógica, o aquellas que están constituidas por 2 o más proposiciones atómicas unidas mediante una conectiva. Ejemplo: Ingresas en la universidad si y solo si obtienes una vacante.

#### **Tarea**

Proponga cinco ejemplos de cada uno de los conceptos básicos en Lógica Matemática

#### 4) Clasificación de las proposiciones compuestas

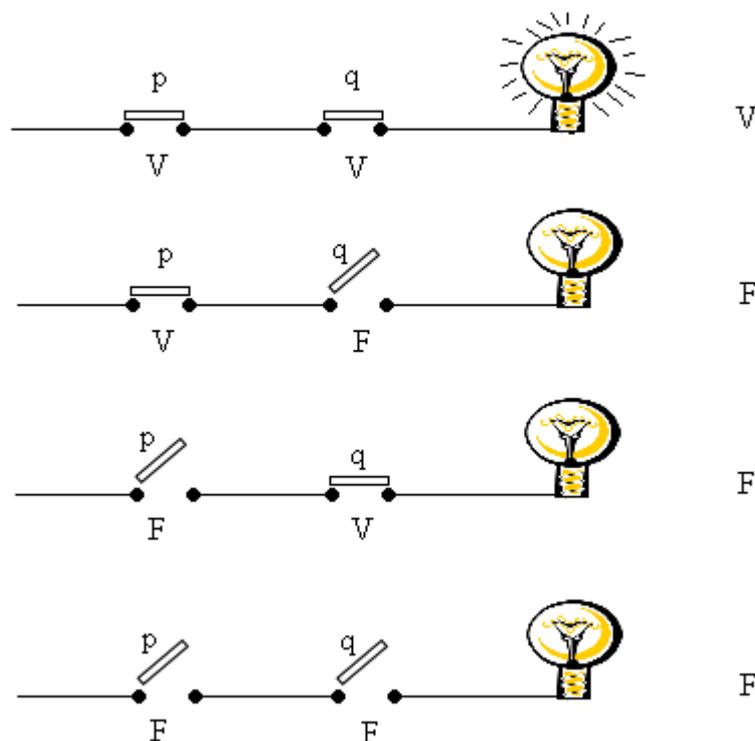
**Conjuntiva.-** Son aquellas proposiciones que llevan la conectiva lógica « y », y solamente serán verdaderas cuando sus dos componentes son verdaderos, y falsa en cualquier otro caso. Estas proposiciones son conmutativas, porque al cambiar el orden de sus componentes no se altera el sentido lógico de la proposición. Desde el punto de vista lógico son también conectivas de conjunción: « *pero* », « *e* », « *sin embargo* », « *empero* », « *no obstante* », « *todavía* », « *además* », « *aunque* », etc. El Operador lógico es «  $\wedge$  ». Su esquema modular es  $p \wedge q$ , se lee: p y q, como por ejemplo: Dyana es esposa de Mario y madre de Mathías. El cuadro de verdad o tabla de verdad (permite determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, la misma que depende de sus proposiciones simples y de los operadores que contenga, determinándose el valor de verdad en  $2^n$  casos) es:

p	$\wedge$	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F

Como el valor de verdad de una proposición es verdadero o falso se le utiliza para representar circuitos conmutadores, y la razón estriba en que un circuito sólo puede estar en uno de sus estados: circula la corriente o cerrado, o no circula la corriente o abierto. La palabra conmutador designa el elemento para impedir el paso de la corriente o deja pasar la corriente, por ejemplo: el interruptor de la luz. Cuando se prende la luz se ha cerrado el conmutador, lo que se simboliza por V ó 1, y cuando se apaga la luz se ha abierto el conmutador, lo que se simboliza con F o 0.

Se dice que dos conmutadores están conectados en serie cuando está dispuesto uno a continuación del otro, y se relacionan con la proposición conjuntiva.

Circuitos en serie ( $p \wedge q$ )

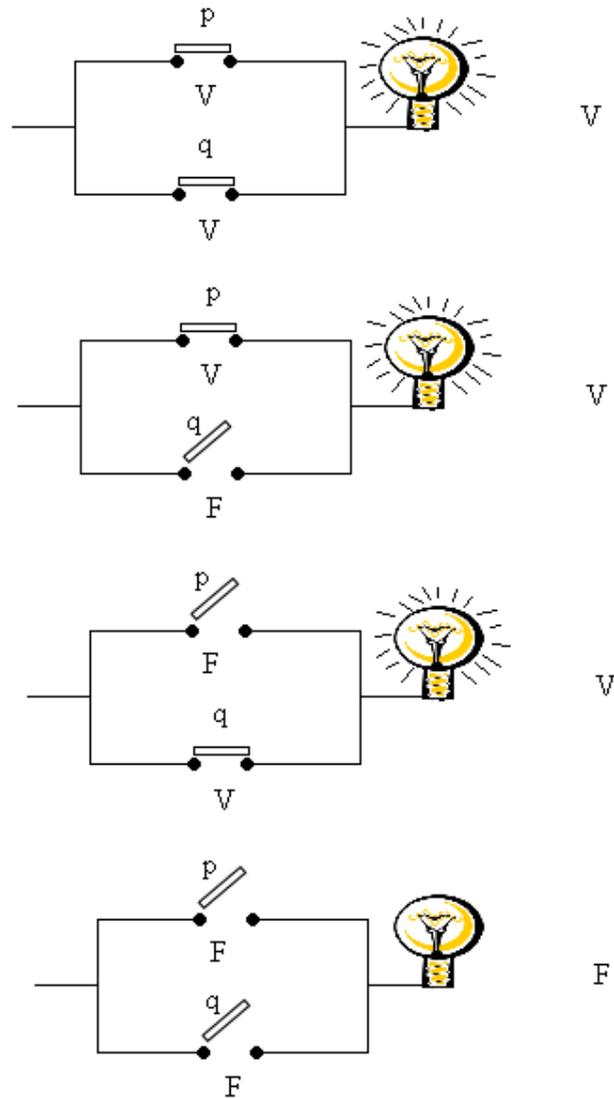


**Disyuntiva inclusiva (Débil).**- Son aquellas proposiciones que llevan la conectiva lógica «  $\vee$  », siendo verdadera en todos los casos, excepto cuando sus 2 componentes son falsos. Estas proposiciones son conmutativas y se interpretan como «**o una o la otra, probablemente ambas**». Desde el punto de vista lógico son también disyunciones inclusivas: «  $u$  », «  $y/o$  », etc.

El Operador lógico es «  $\vee$  ». Su esquema modular es  $p \vee q$ , se lee: “p o q”, como por ejemplo: Mario estudia Matemática  $\vee$  Estadística. El cuadro de verdad es:

p	$\vee$	q
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

Se dice que dos conmutadores están conectados en paralelo cuando están dispuestos de tal manera que basta que uno de ellos esté cerrado para que circule la corriente, y se relaciona con la proposición disyuntiva. Circuitos en serie ( $p \vee q$ )



**Disyuntiva exclusiva (Fuerte).**- Son aquellas proposiciones que llevan la conectiva lógica « **o** », siendo verdadera cuando sus dos proposiciones componentes tienen diferente valor, falsas en los otros casos. Estas proposiciones son conmutativas y se interpretan como «**o una, o la otra, pero no ambas a la vez**». Desde el punto de vista lógico son también disyunciones inclusivas: « **o..** », « **o bien** », etc. El Operador lógico es «  $\neq$  ». Su esquema modular es  $p \neq q$ , se lee: “p o q pero no ambas”, como por ejemplo:

O Mario estudia Matemática **o** Estadística

El número 2 es par **o** impar.

El cuadro de verdad es:

p	$\neq$	q
V	F	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

**Negación.**- Es una conectiva especial que no enlaza proposiciones sino que se aplica directamente sobre ellas modificando su valor de verdad; es decir, si la proposición es verdadera entonces su correspondiente negación será falsa u viceversa. Desde el punto de vista lógico la negación actúa como un inversor. De manera convencional se emplea la conectiva lógica « **No** » para negar proposiciones simples; y se emplean « **No es cierto que** », « **No se da el caso que** », « **No ocurre que** », « **No posible que** », etc. Para negar proposiciones compuestas, éstas expresiones van al comienzo de la proposición y la afectan en su conjunto.

Ejemplo:

El Ecuador **no** es una república monárquica

**No es cierto** que el 2 es un número impar

**No es verdad** que  $2+2$  sea igual a 6

El Operador lógico es «  $\sim$  ». Su esquema modular es  $\sim p$ , se lee: “no p”, “No es verdad que p”, “Es falso que p”. El cuadro de verdad es:

$\sim$	p
F	V
V	F

**Condicional.**- Son verdaderas en todos los casos, excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Las proposiciones condicionales tienen 2 formas:

a) *Forma Lógica (FL).*- Son aquellos condicionales que están lógicamente ordenados y se les reconoce porque llevan la conectiva compuesta « **Si...entonces...** ». La proposición que va entre si y entonces se denomina « *antecedente o condición suficiente* », y la proposición que va después de entonces se denomina « *consecuente o condición necesaria* ».

Ejemplo:

**Si** se gradúa de bachiller, **entonces** se puede iniciar con los estudios en la universidad (FL)

*Antecedente*

*Consecuente*

b) *Forma Ordinaria (FO)*. Son aquellas proposiciones condicionales que no están lógicamente ordenadas, porque primero tienen el consecuente y luego el antecedente. Las condicionales de forma ordinaria o indirecta llevan las conectivas « Si », « Pues », « Puesto que », « Porque », « Yo que », « Dado que », « A menos que », etc. Cada vez que un condicional esté escrito en la forma ordinaria necesariamente debe ser traducido a la correspondiente forma lógica.

Ejemplo:

Santiago puede iniciar con los estudios en la universidad **si** se gradúa de bachiller (FO)

*Consecuente*

*Antecedente*

**Si** Santiago se gradúa de bachiller puede iniciar con los estudios en la universidad

*Antecedente*

*Consecuente*

El Operador lógico es «  $\rightarrow$  ». Su esquema modular es  $p \rightarrow q$ , se lee: “Si p, entonces q”. La tabla es:

p	$\rightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

**Bicondicional.**- Son aquellas proposiciones que llevan la conectiva: « *si y sólo si* », y solamente serán verdaderas cuando sus 2 proposiciones componentes tienen igual valor, y falsas en los otros casos. Estas proposiciones son conmutativas y se interpretan como un doble condicional.

Ejemplo:

El agua se congela **si y sólo si** la temperatura está bajo cero

**Si** el agua se congela **entonces** la temperatura está bajo cero

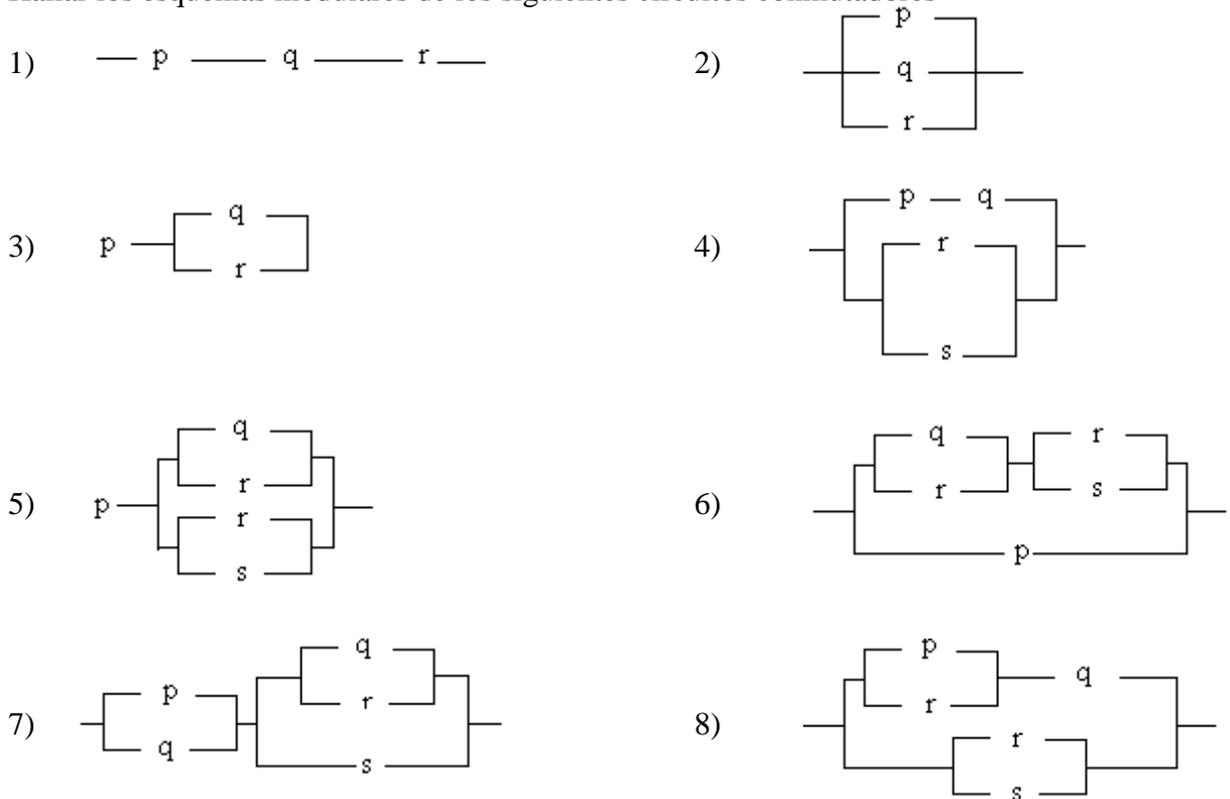
**Si** la temperatura está bajo cero **entonces** el agua se congela

El Operador lógico es «  $\leftrightarrow$  ». Su esquema modular es  $p \leftrightarrow q$ , se lee: “p si y sólo si q”. La tabla es:

p	$\leftrightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

## TAREA

Hallar los esquemas modulares de los siguientes circuitos conmutadores



### 5) Cuadros o tablas de verdad

Llamadas también método de las matrices o tablas verificativas, son procedimientos de decisión que la lógica emplea para demostrar la validez o invalidez de cualquier esquema molecular.

En la forma que toman en la actualidad fueron desarrolladas por Ludwig Wittgenstein en la obra *Tractatus logico-philosophicus*



Ludwig Wittgenstein (1889-1951), filósofo austriaco (nacionalizado británico), fue uno de los pensadores más influyentes del siglo XX, en especial por su contribución al desarrollo de la filosofía analítica. La evolución de sus teorías estuvo marcada por dos etapas. En la primera, representada por su obra *Tractatus logico-philosophicus* (1921), defendió que la pretensión filosófica es la clarificación lógica de las ideas. Un segundo momento de su pensamiento corresponde a la redacción de *Investigaciones filosóficas* (póstuma, 1953), obra en la que trató de superar la, según él mismo expresó, limitada visión del lenguaje que había ofrecido en el *Tractatus*.

Para construir una tabla de verdad se debe entrecruzar una recta vertical con una horizontal, llamándose margen al lado izquierdo y cuerpo al lado derecho. Las tablas de verdad tienen los siguientes elementos:

### 8.1) Variables proposicionales

p	q

### 8.2) Valores tabulares

Nº variables proposicionales	1	2	3	4	n
Nº valores tabulares	2	4	8	16	$2^n$

### 8.3) Esquema molecular

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

### 8.4) Cifra tabular (Matriz)

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Los esquemas moleculares según la cifra tabular o matriz son de 3 clases

- a) **Tautológico o tautología.**- Cuando la cifra tabular tiene todos sus valores verdaderos
- b) **Contingente o consistente.**- Cuando la cifra tabular tiene por lo menos una verdad y una falsedad
- c) **Contradictorio o inconsistente.**- Cuando la cifra tabular tiene todos sus valores falsos

## EJERCICIOS

- 1) Comprobar que  $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim q$  es contingente
- 2) Comprobar que  $p \rightarrow (p \vee q)$  es tautológico
- 3) Comprobar que  $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$  es contingente

- 4) Comprobar que  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$  es tautológico
- 5) Comprobar que  $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$  es contradictorio
- 6) Comprobar que  $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim (p \vee q)$  es contingente
- 7) Comprobar que  $(\sim q \rightarrow \sim r) \vee \sim p$  es contingente
- 8) Comprobar que  $[(q \rightarrow p) \wedge r] \rightarrow (q \rightarrow p)$  es tautológico
- 9) Comprobar que  $\sim [\sim (p \wedge q) \wedge \sim r] \leftrightarrow [\sim (p \wedge q) \vee \sim r]$  es contingente
- 10) Comprobar que  $\{[(p \wedge \sim q) \rightarrow r] \wedge \sim r\} \rightarrow (\sim p \wedge q)$  es contingente