DISTRIBUCIÓN BINOMIAL CON EXCEL, WINSTATS Y GEOGEBRA

Definición:
Cuando se dispone de una expresión matemática, es factible calcular la probabilidad de ocurrencia exacta correspondiente a cualquier resultado específico para la variable aleatoria.

La *distribución de probabilidad binomial* es uno de los modelos matemáticos (expresión matemática para representar una variable) que se utiliza cuando la variable aleatoria discreta es el número de éxitos en una muestra compuesta por n observaciones.

Propiedades:

- La muestra se compone de un número fijo de observaciones n

- Cada observación se clasifica en una de dos categorías, *mutuamente excluyentes* (los eventos no pueden ocurrir de manera simultánea. Ejemplo: Una persona no puede ser de ambos sexos) y *colectivamente exhaustivos* (uno de los eventos debe ocurrir. Ejemplo: Al lanzar una moneda, si no ocurre cruz, entonces ocurre cara). A estas categorías se las denomina éxito y fracaso.

- La probabilidad de que una observación se clasifique como *éxito, p,* es constante de una observación o otra. De la misma forma, la probabilidad de que una observación se clasifique como *fracaso, 1-p,* es constante en todas las observaciones.

- La variable aleatoria binomial tiene un rango de 0 a n

Ecuación:

$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

Donde:
$P(X) =$Probabilidad de X éxitos, dadas n y p
n = Número de observaciones
p = Probabilidad de éxitos
$1 - p$ = Probabilidad de fracasos
X = Número de éxitos en la muestra (X = 0, 1, 2, 3, 4,……… n)

Media de la distribución binomial
La media μ de la distribución binomial es igual a la multiplicación del tamaño n de la muestra por la probabilidad de éxito p

$$\mu = np$$

Desviación estándar de la distribución binomial

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{np(1-p)}$$

Ejemplos ilustrativos

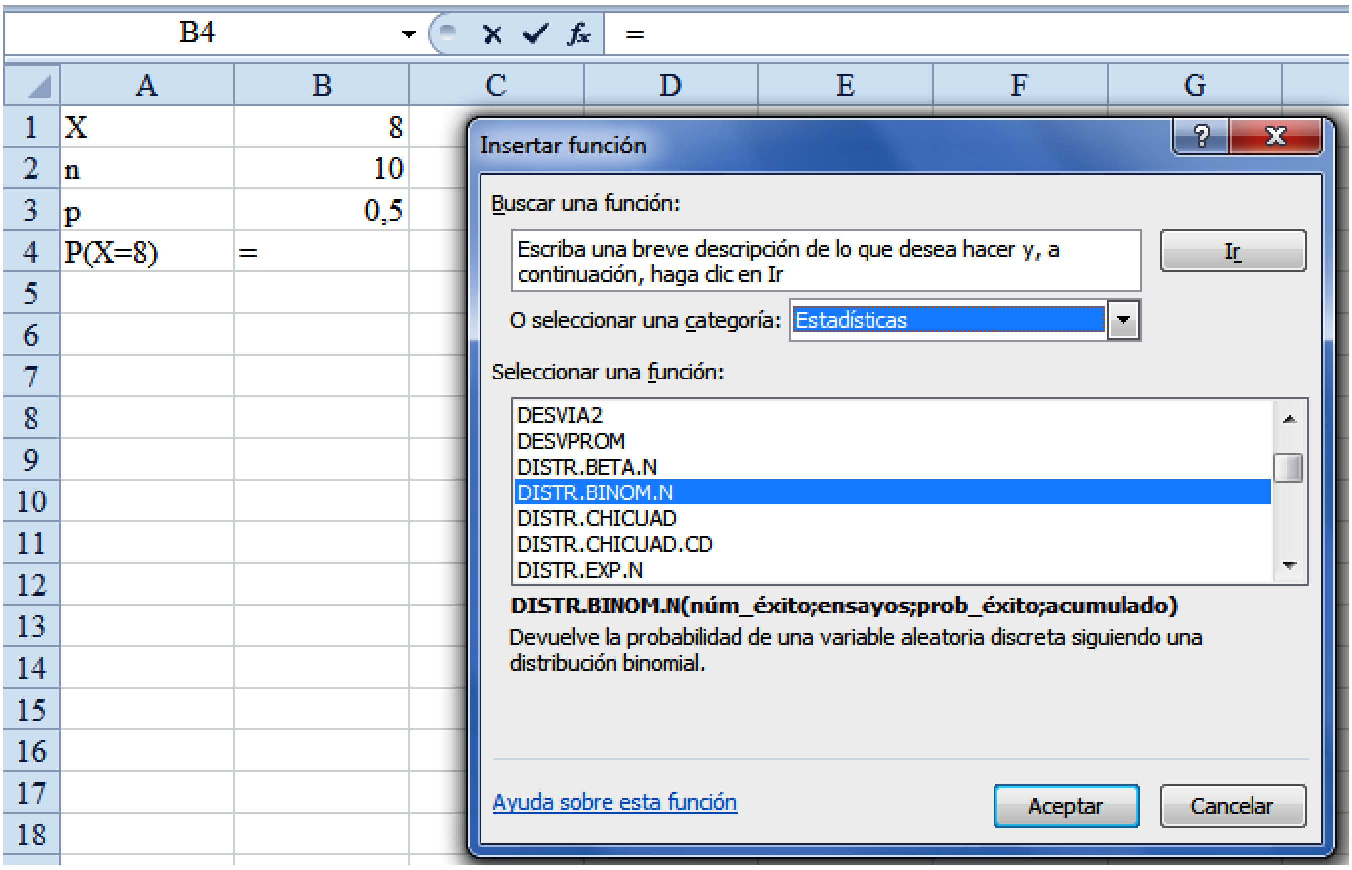
1) Determine P(X = 8) para n = 10 y p = 0,5

Solución:
Aplicando la ecuación se obtiene:
$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

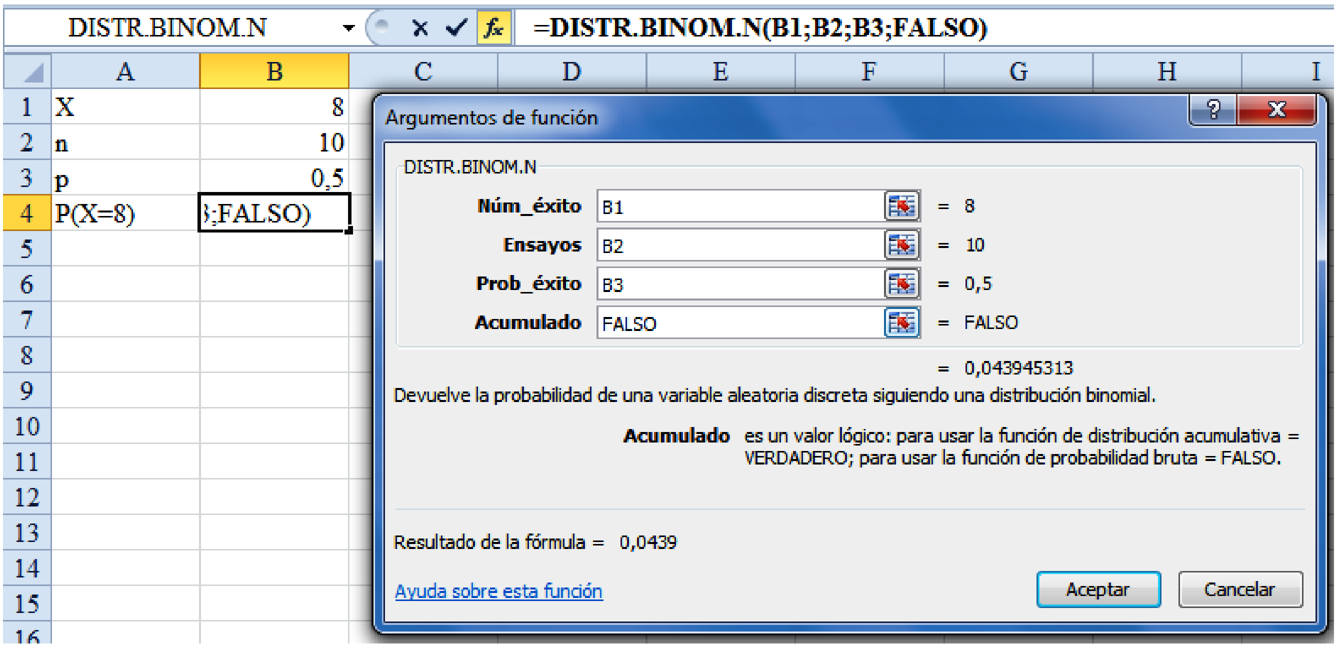
$$P(X=8)=\frac{10!}{8!\,(10-8)!}\cdot 0{,}5^8\cdot(1-0{,}5)^{10-8}$$
$$P(X=8)=45\cdot 0{,}003906\cdot 0{,}25=0{,}0439$$

En Excel se calcula de la siguiente manera:

a) Se escribe los datos y se inserta la función DISTR.BINOM.N como se muestra en la siguiente figura:



b) Clic en Aceptar. Los argumentos de la función escribir como se muestra en la figura:

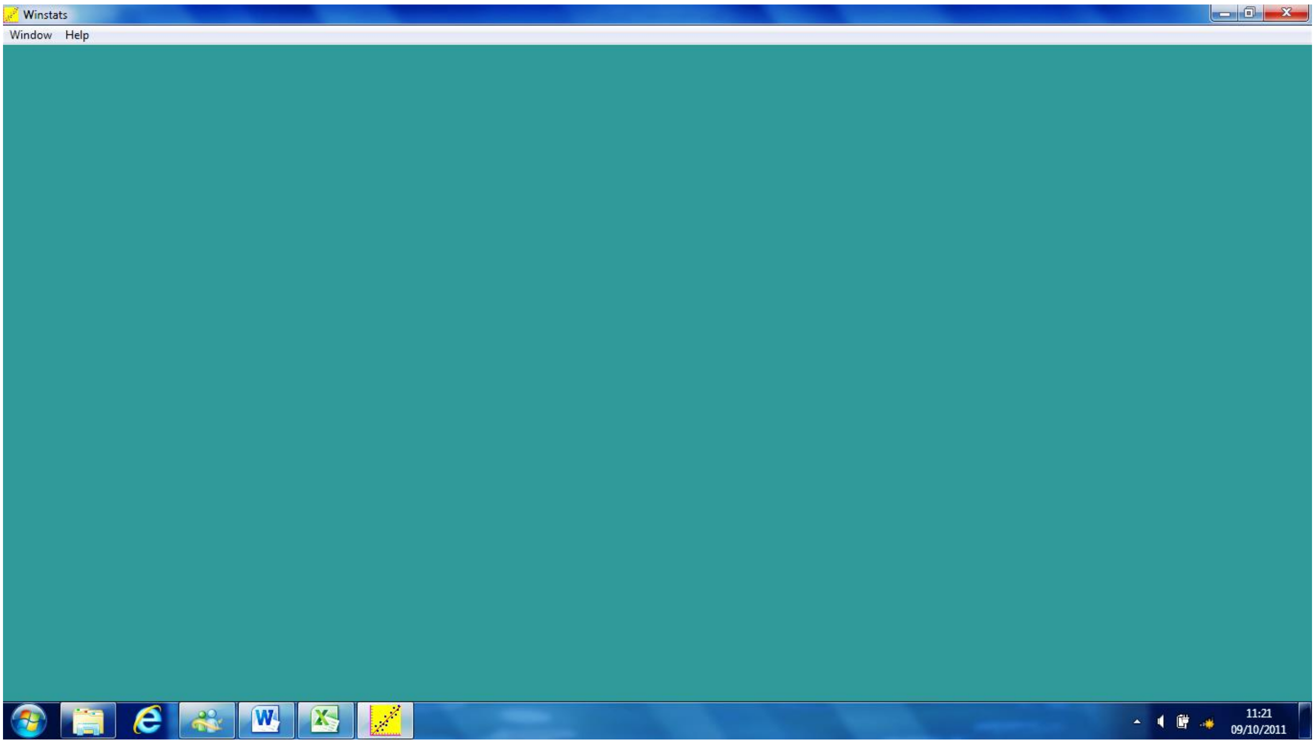


c) Clic en Aceptar

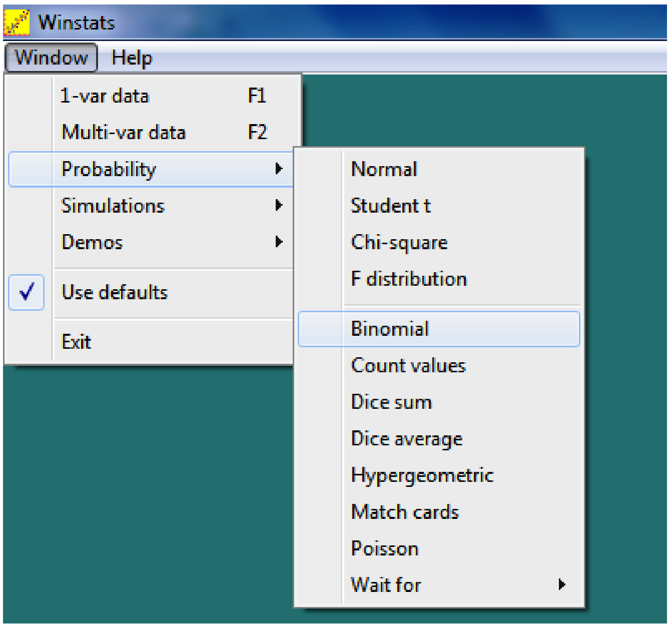
	A	B	C	D	E
1	X	8			
2	n	10			
3	p	0,5			
4	P(X=8)	0,0439	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

En Winstats se procede de la siguiente manera

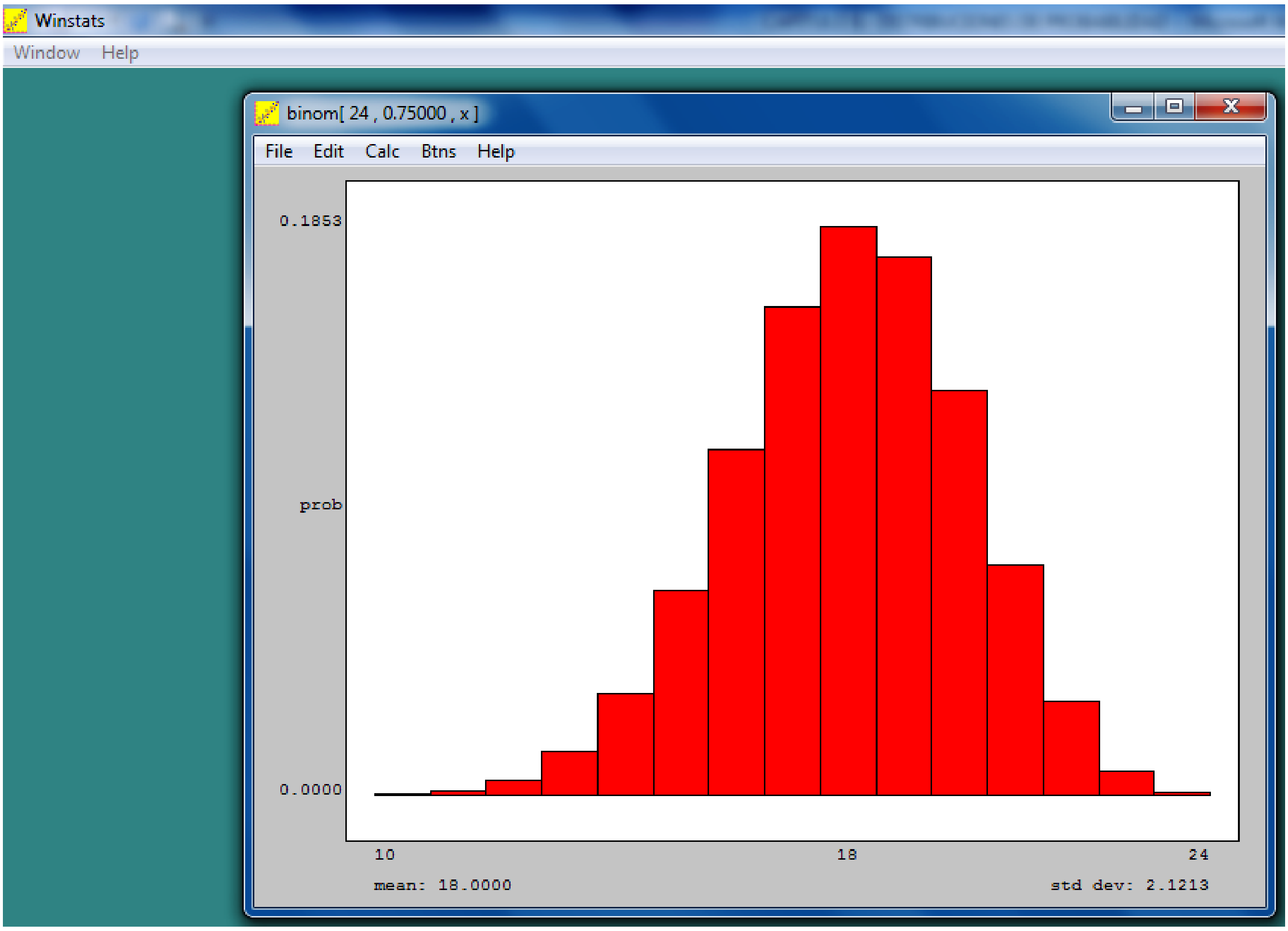
a) Se ingresa al programa Winstats



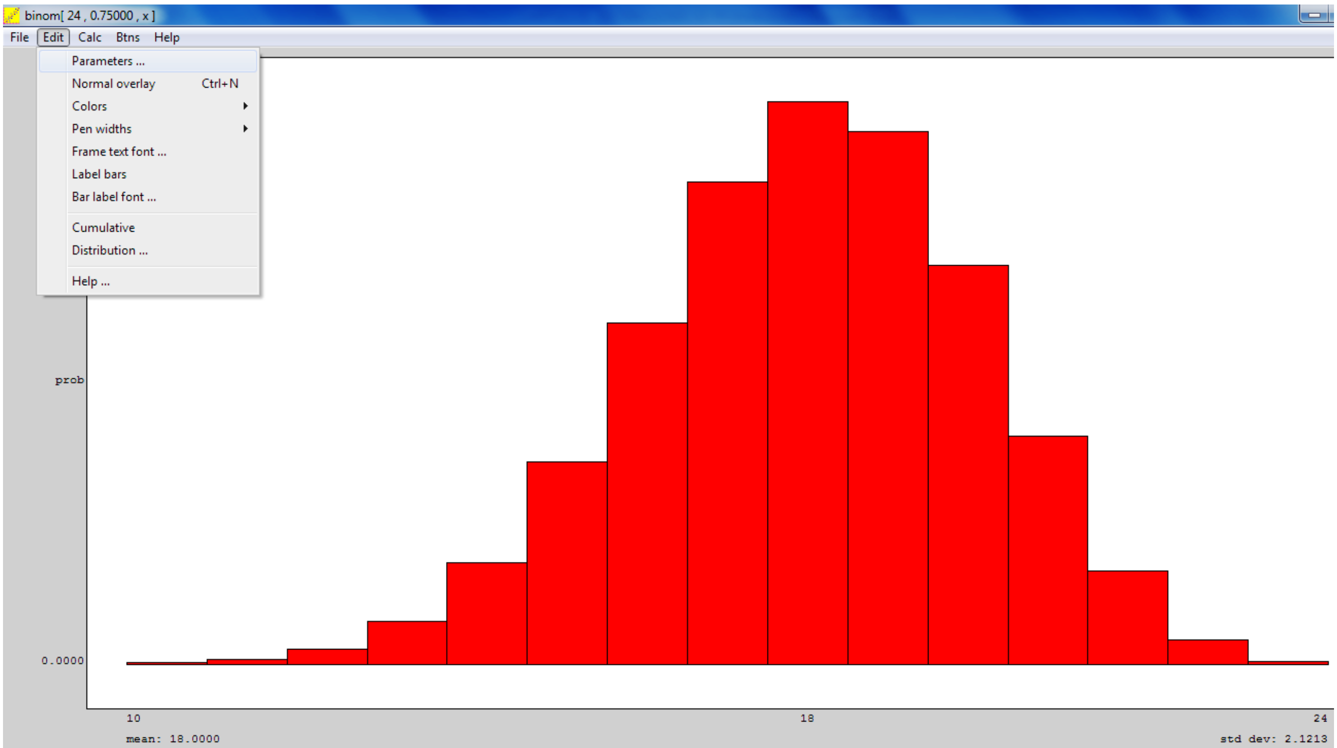
b) Clic en Window y luego en Probability



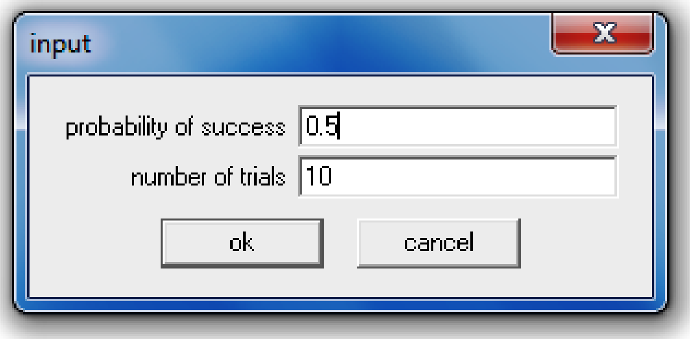
c) En Probability escoger Binomial



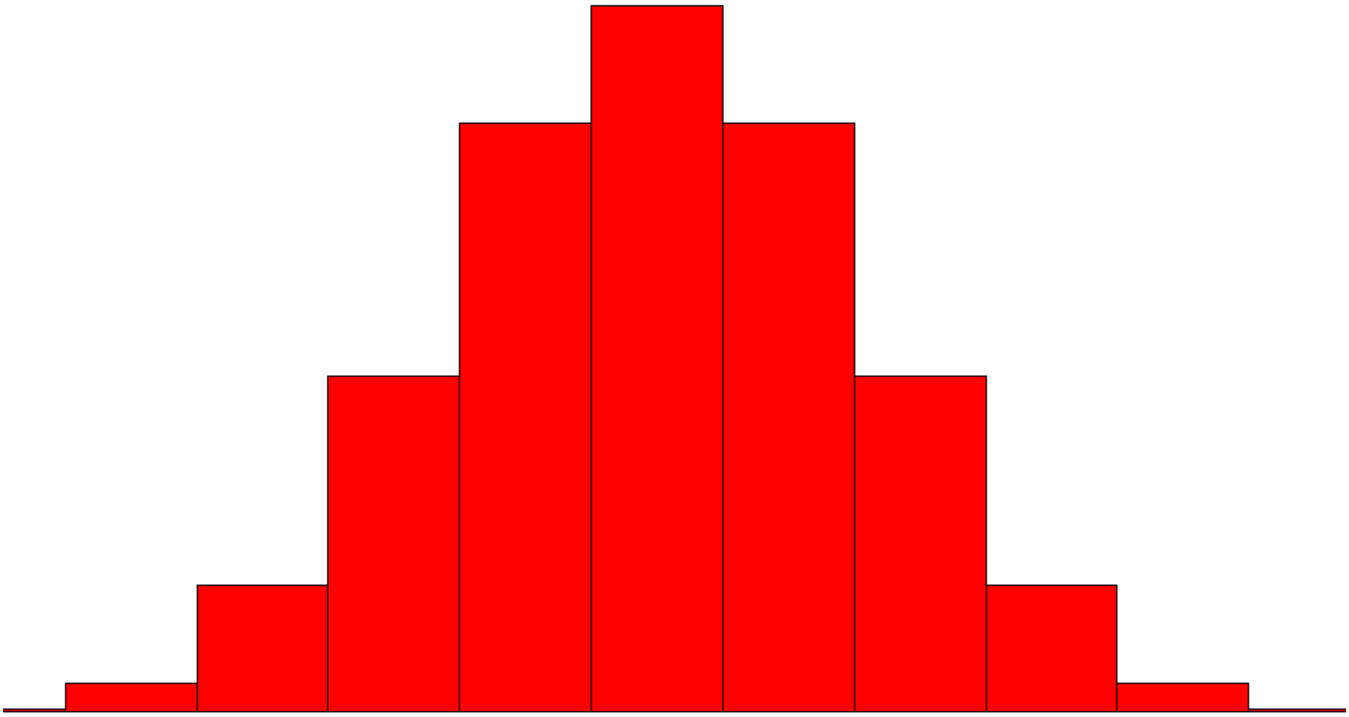
d) Clic en Edit.



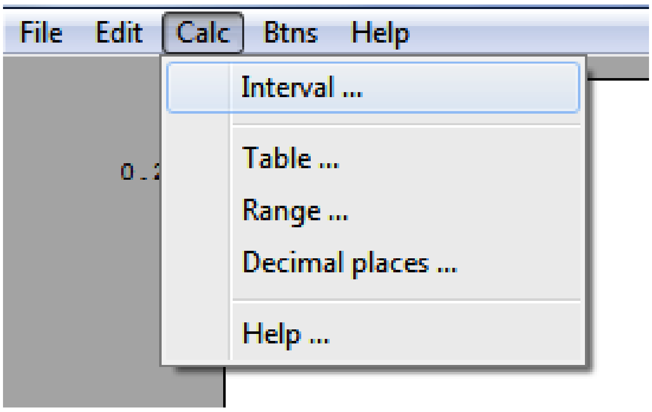
e) Clic en Parameters. En la casilla en probability of success escribir 0,5 y en number of trials escribir 10



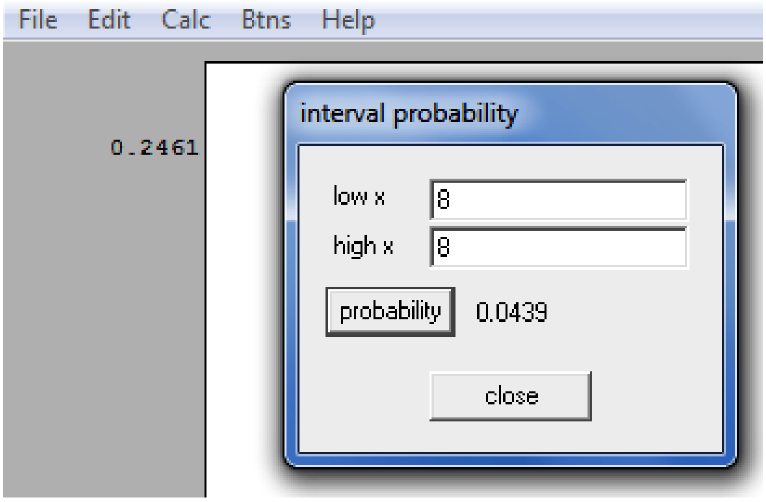
f) Clic en ok

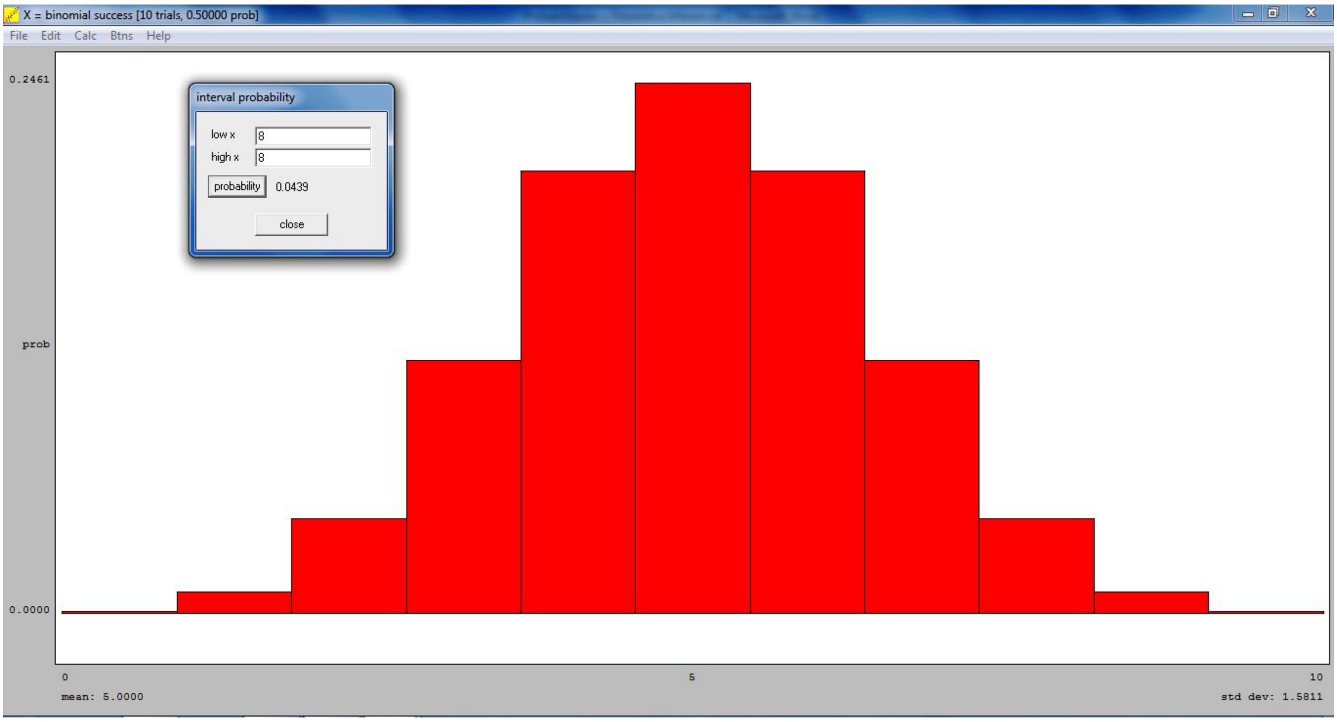


g) Clic en Calc



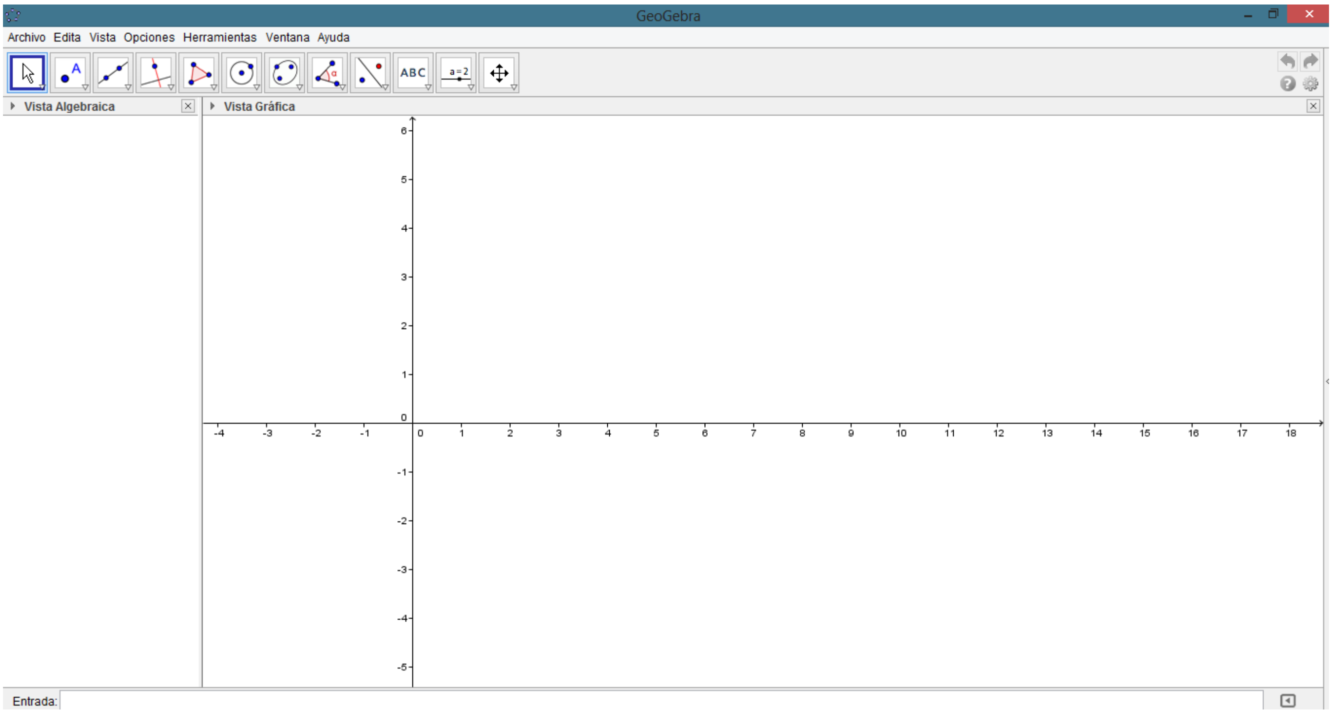
h) Clic en Intervalo. En la casilla low x escribir 8 y en la casilla high x escribir 8. Clic en probability



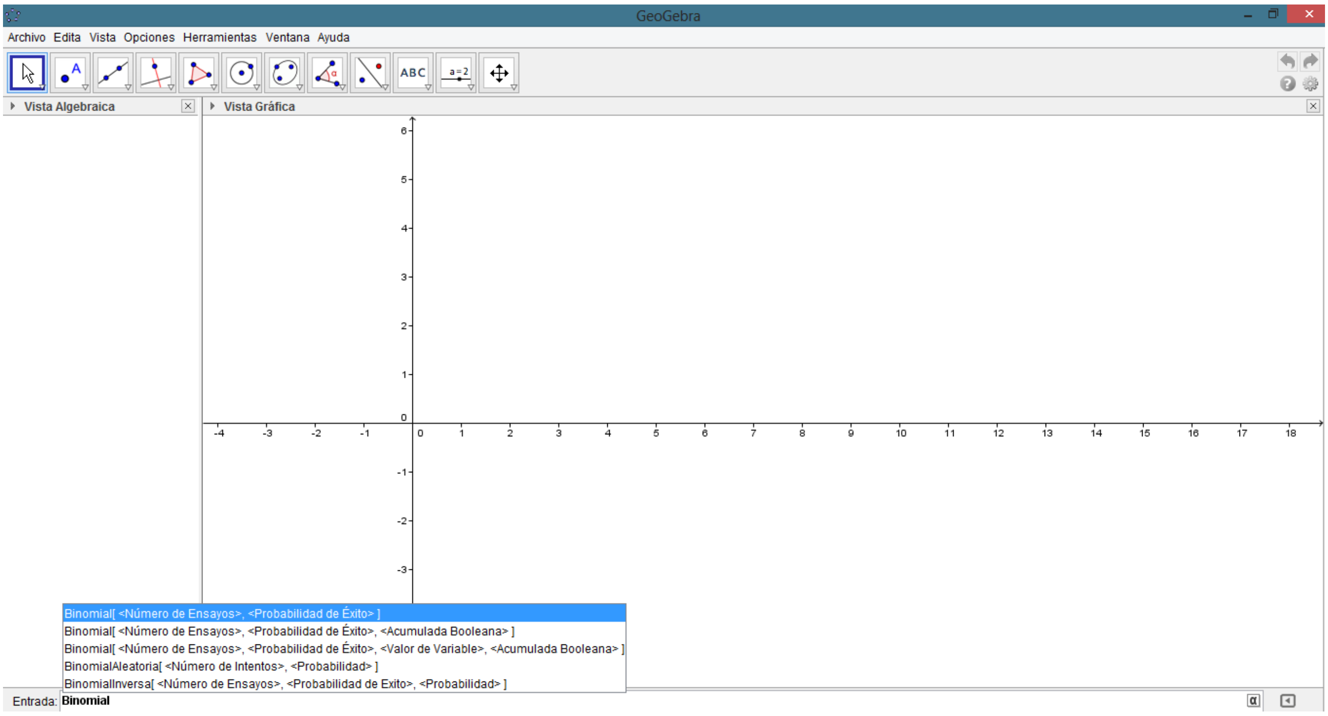


En GeoGebra se procede de la siguiente manera:

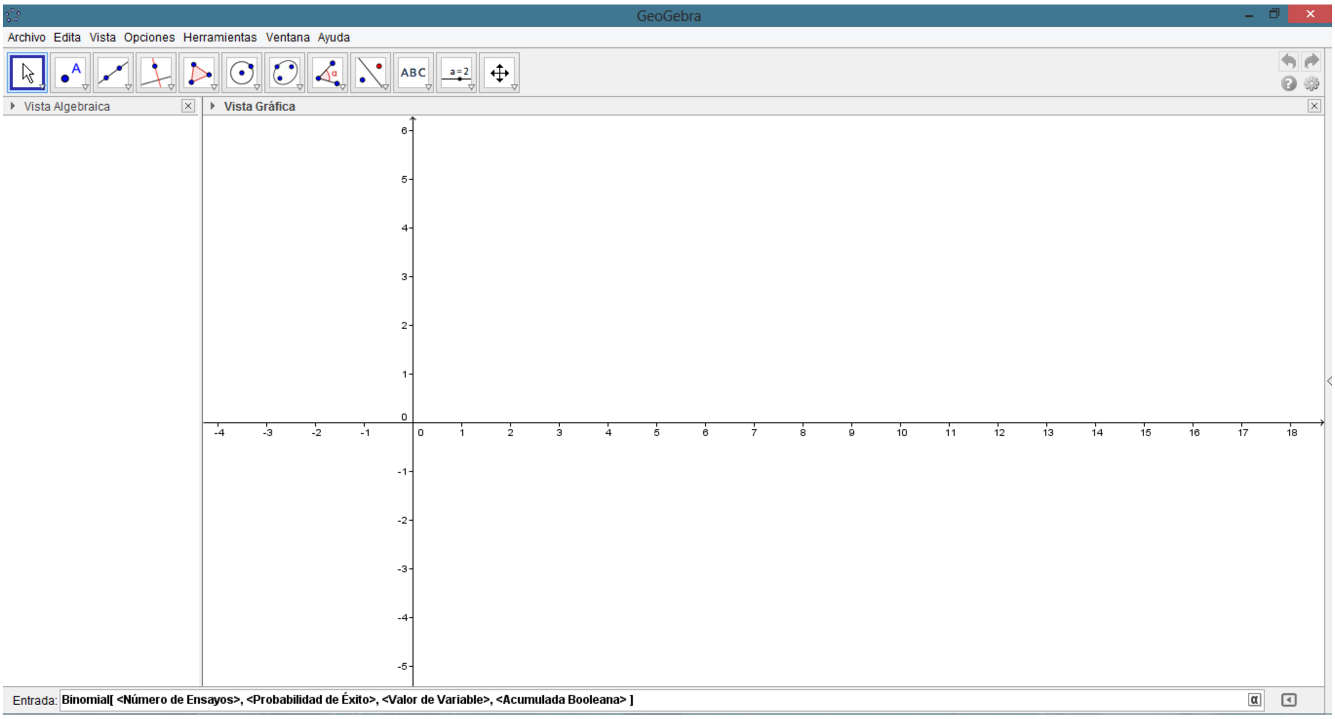
a) Se ingresa al programa



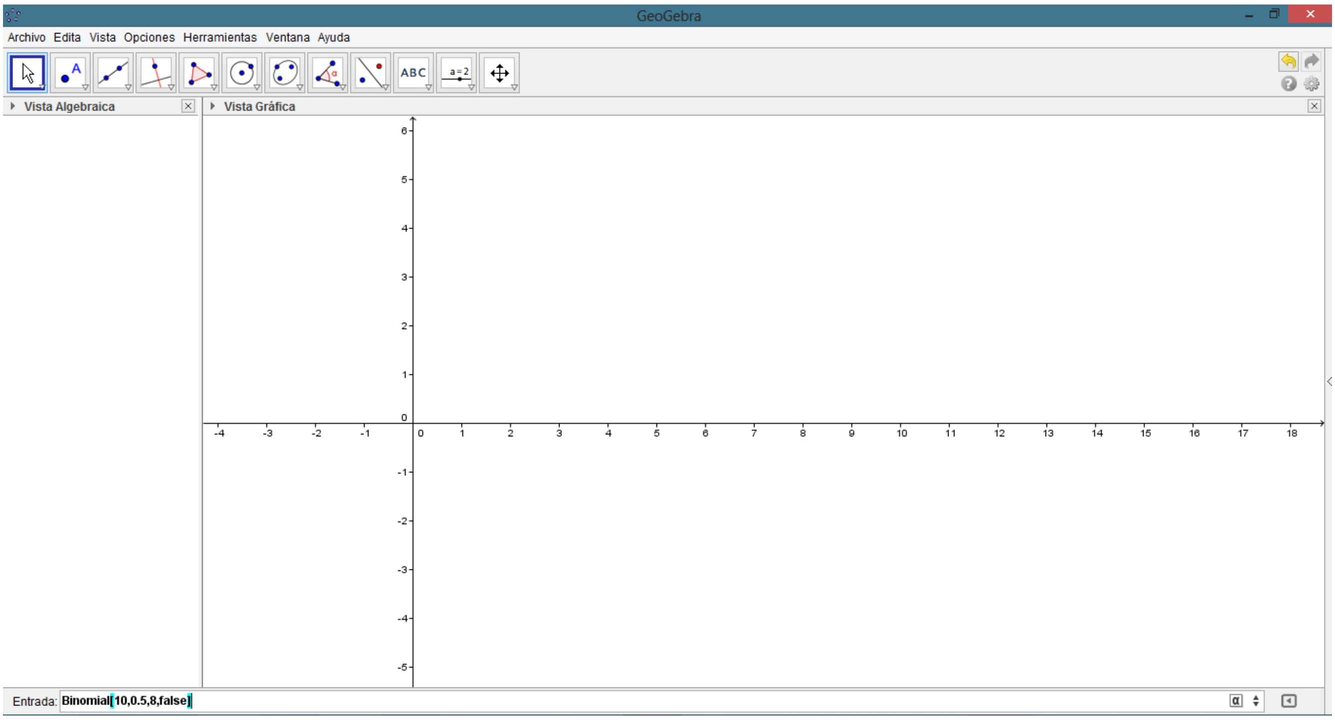
b) En la casilla Entrada escribir Binomial para que se desplieguen algunas opciones.



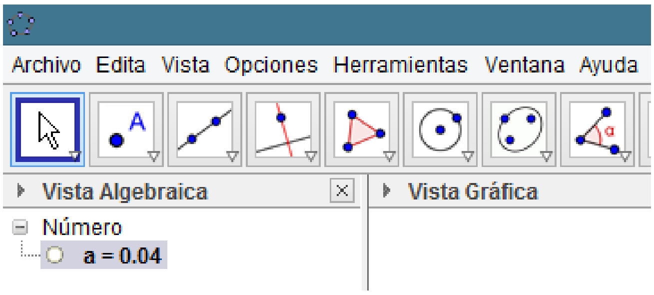
c) Seleccionar la opción Binomial[<Número de Ensayos>, <Probabilidad de Éxito>, <Valor de Variable>, <Acumulada Booleana>]

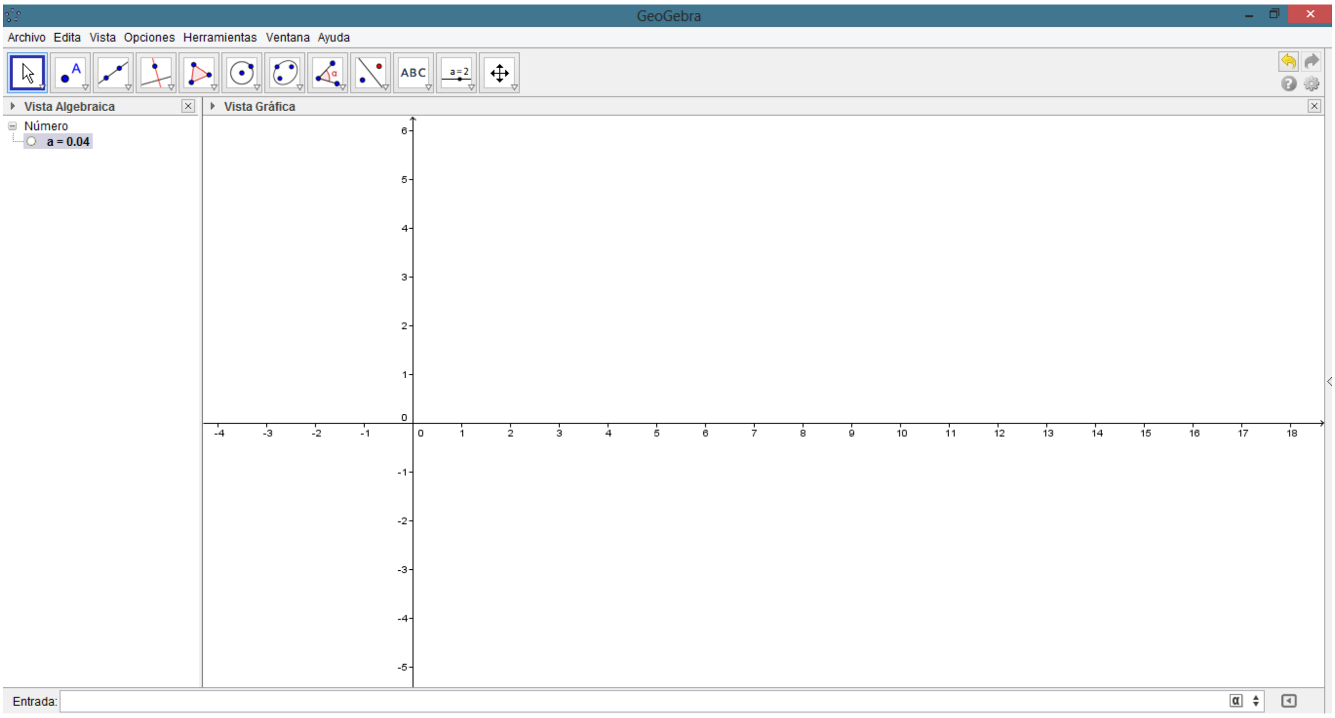


d) Escribir 10 en <Número de Ensayos>, 0.5 en <Probabilidad de Éxito>, 8 en <Valor de Variable> y false en <Acumulada Booleana>

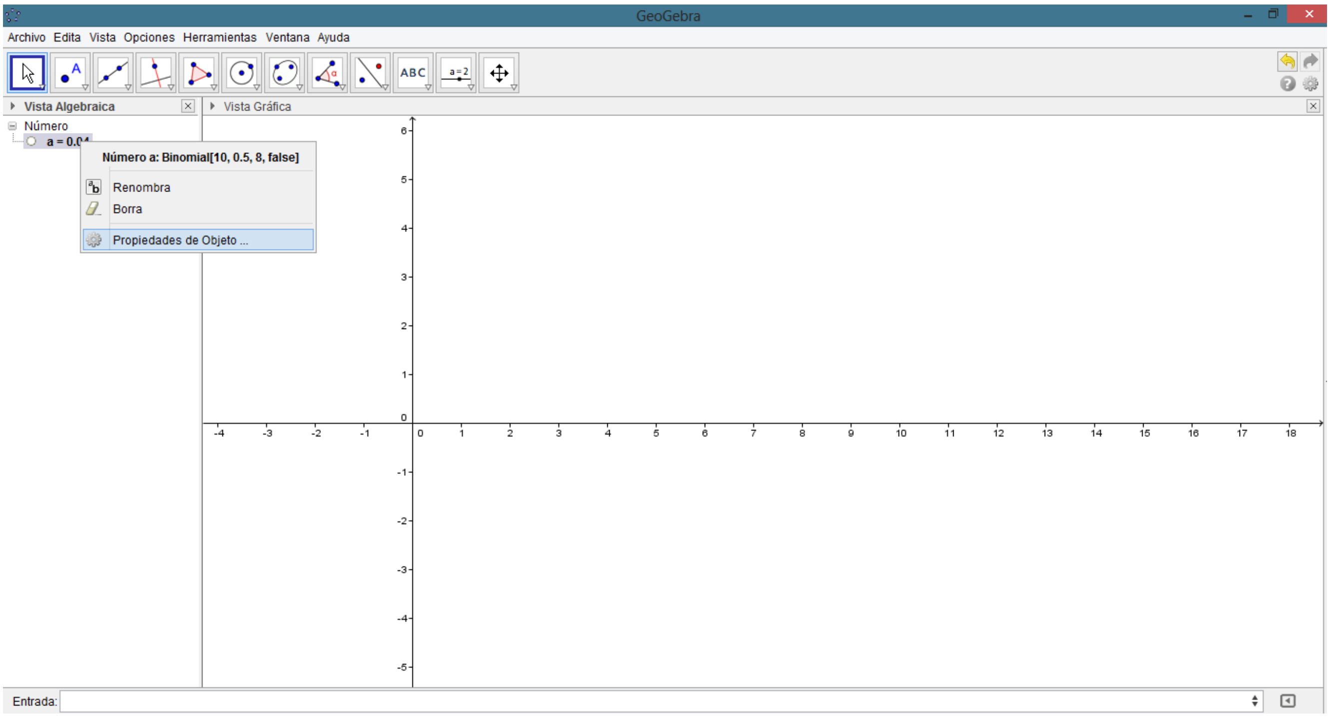


e) Enter

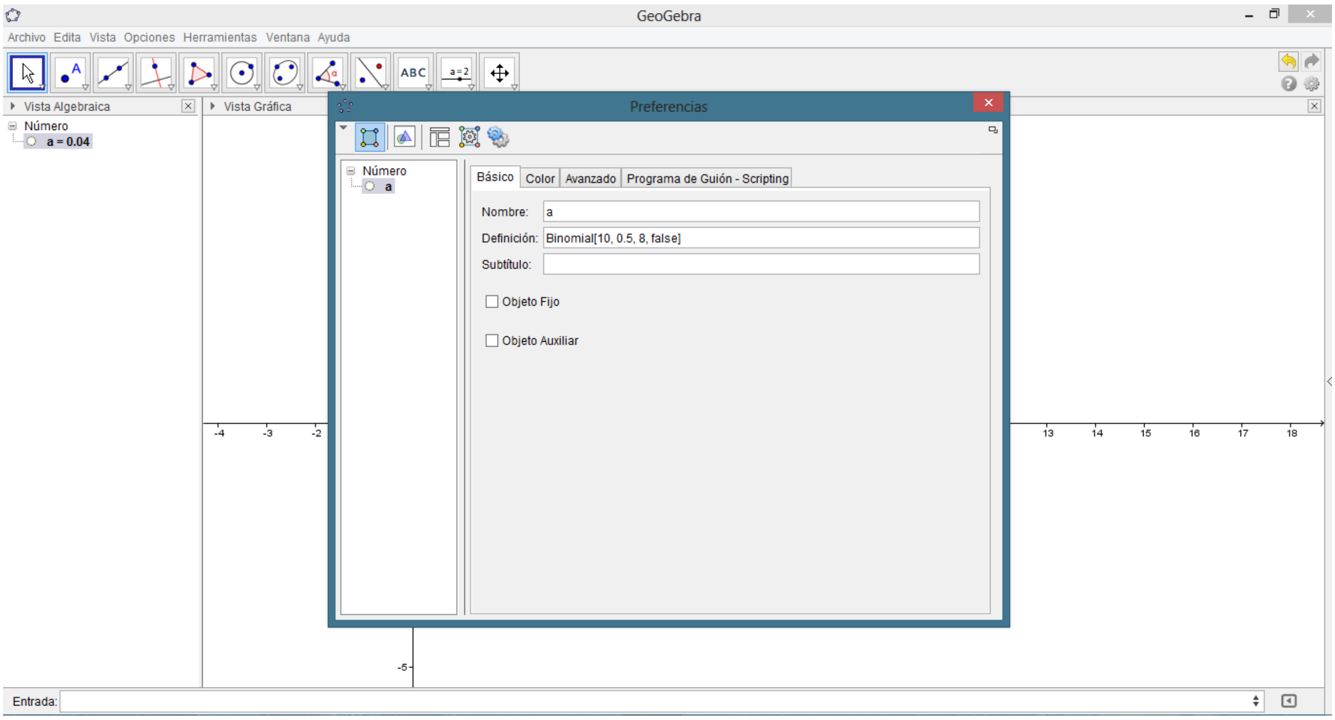




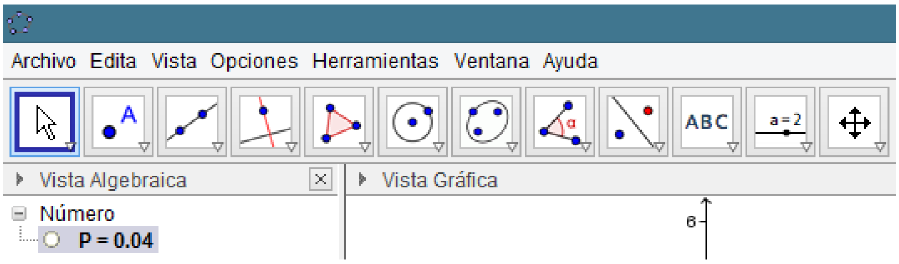
f) Para editar. Clic derecho en a = 0.04

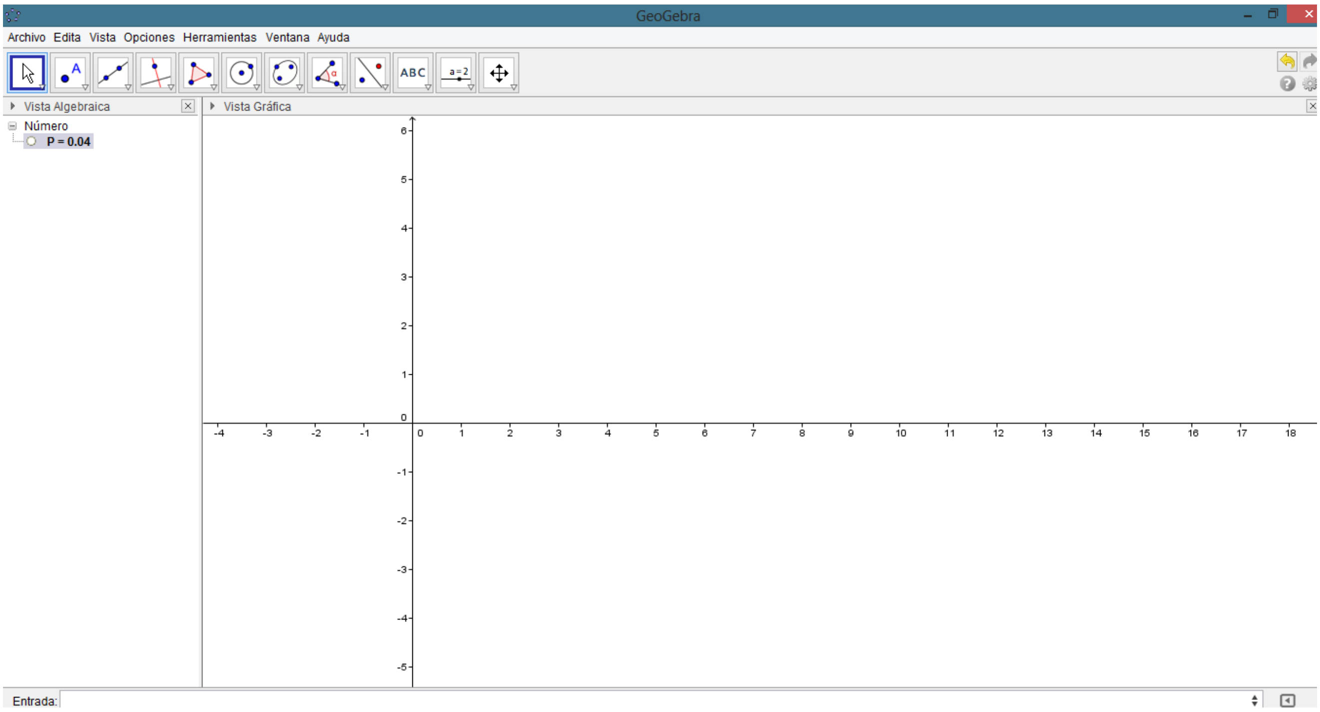


g) Escoger la opción Propiedades de Objeto



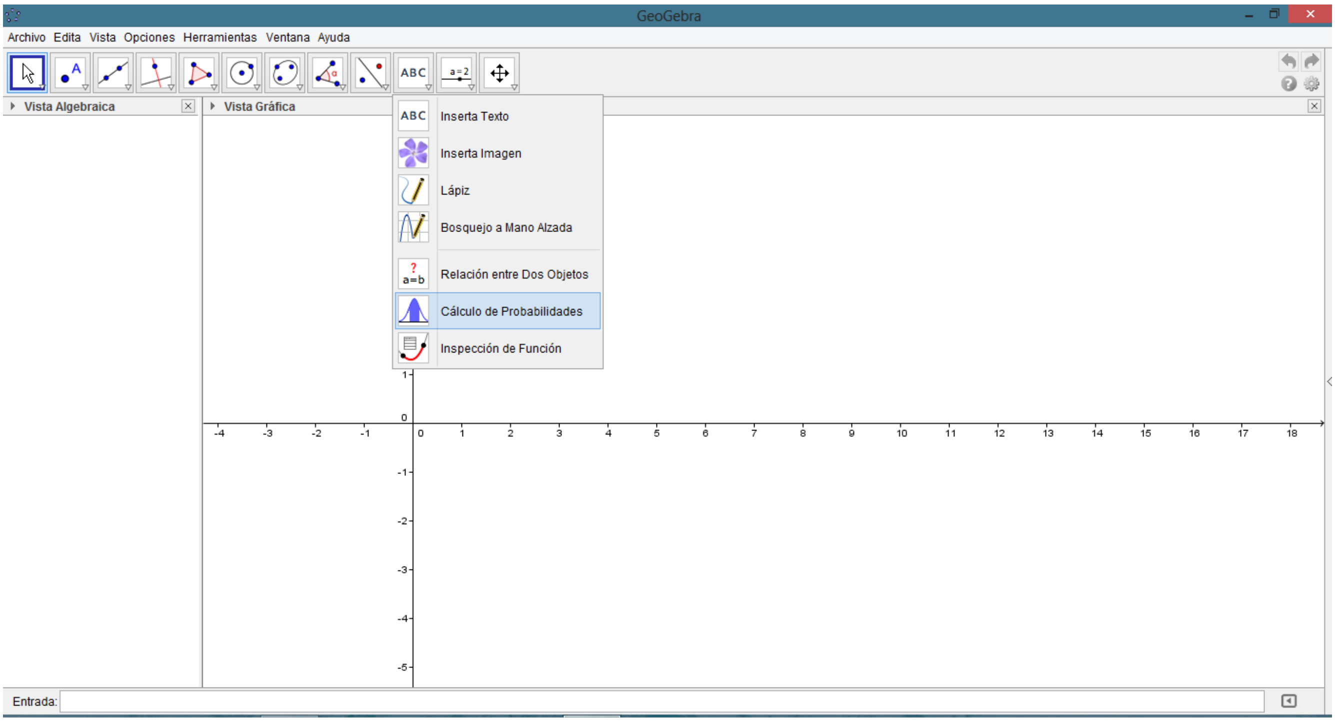
h) En la ventana Referencias, en la casilla Nombre, borrar la letra a y escribir P. Cerrar la ventana Refreencias



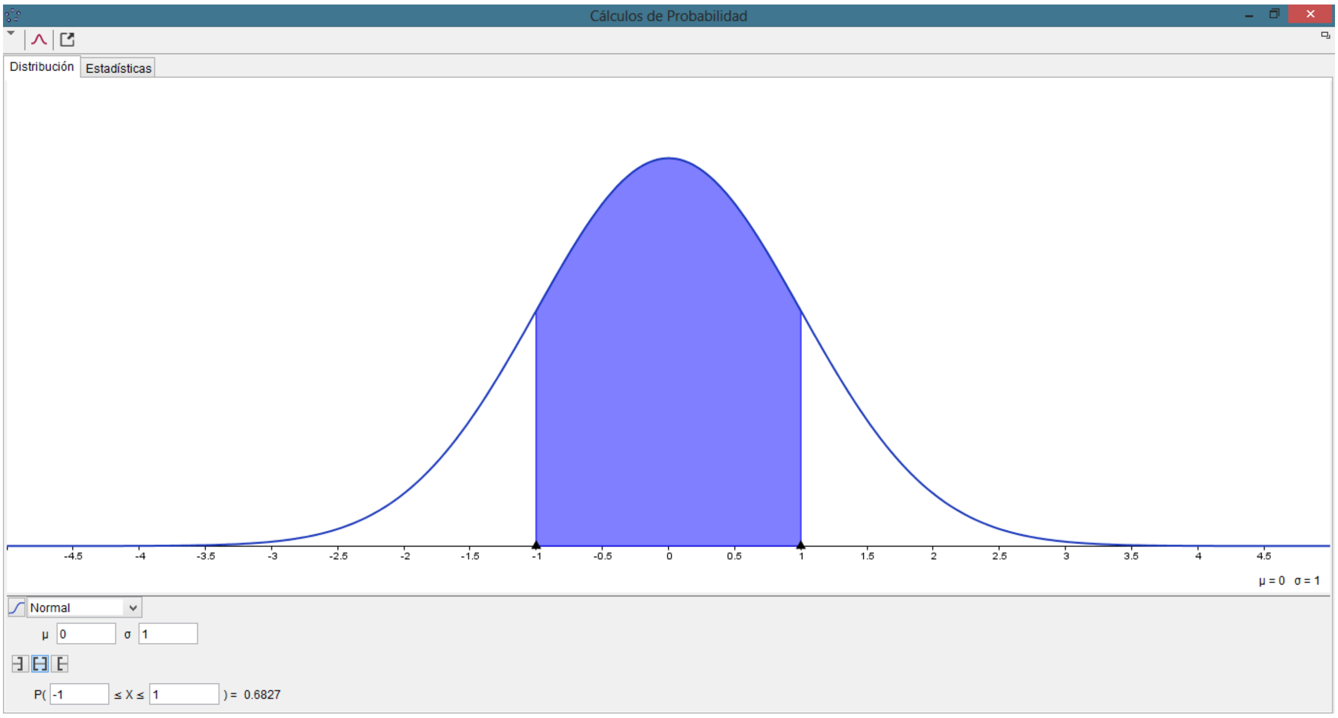


Para calcular con el gráfico en GeoGebra:

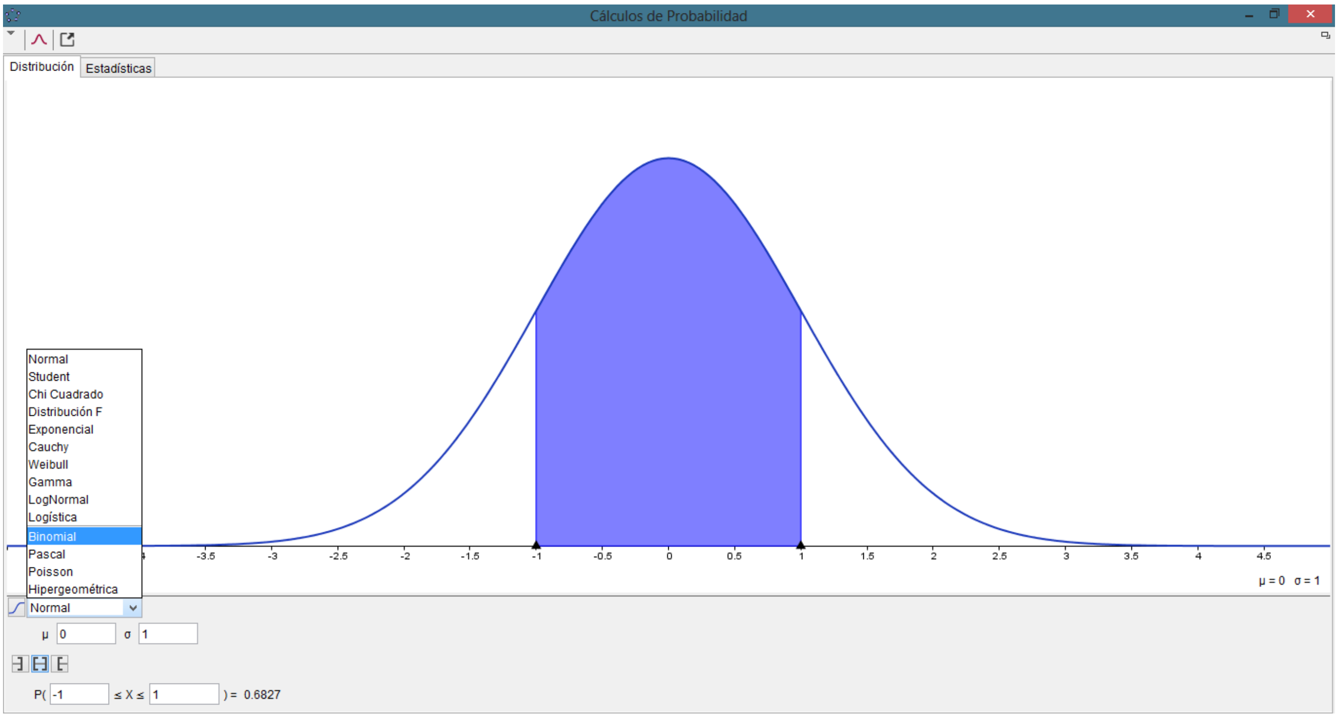
a) Ingresar al programa. En insertar texto, clic en punto de posición del texto



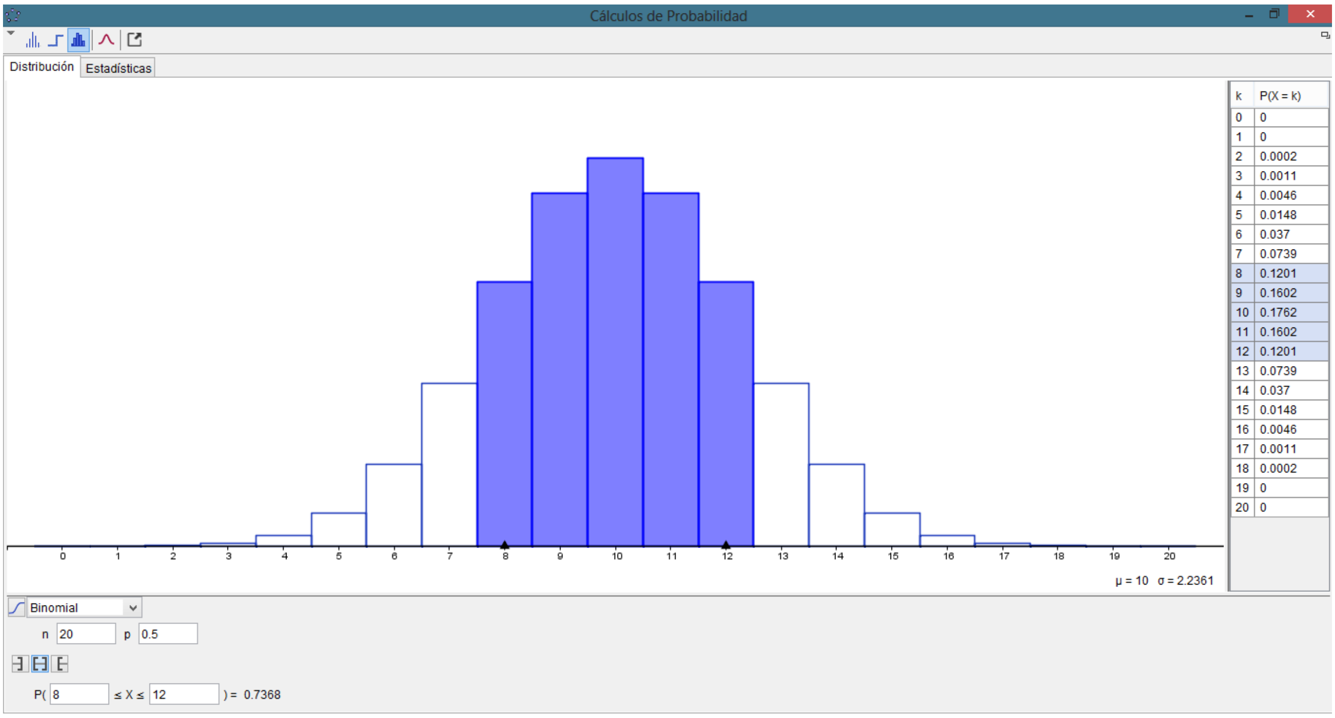
b) Seleccionar Cálculo de Probabilidades



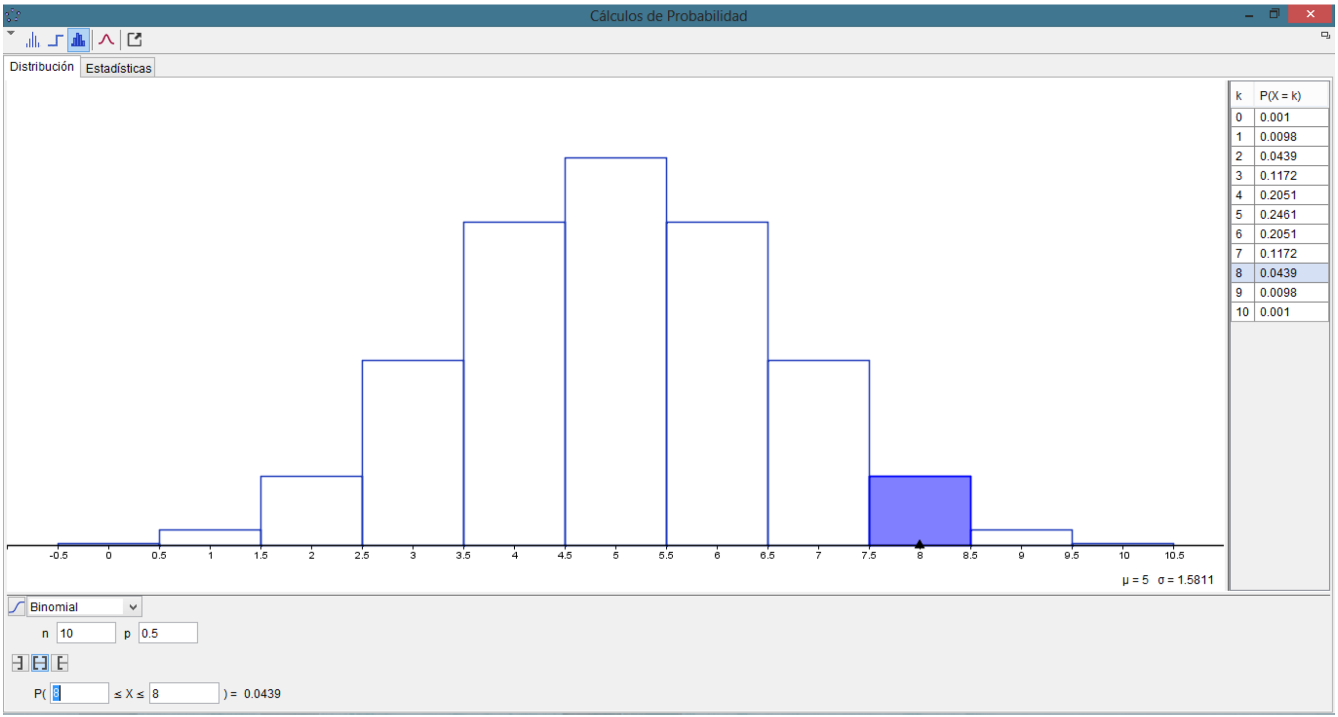
c) Clic en la pestaña de la casilla Normal para que se despliegue otras opciones.

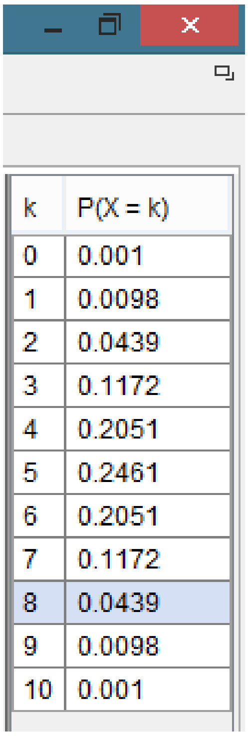


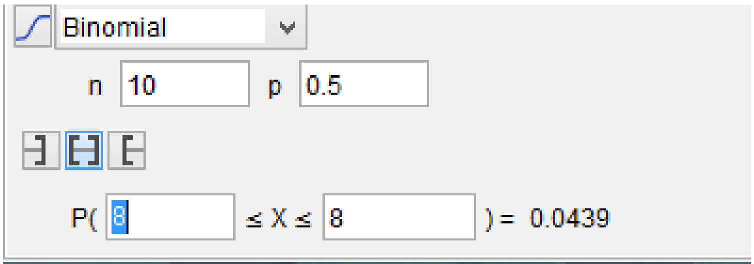
d) Clic en Binomial



e) En la casilla n escribir 10. En la casilla p escribir 0.5. En la casilla P escribir 8. En la casilla $X \leq$ escribir 8. Enter







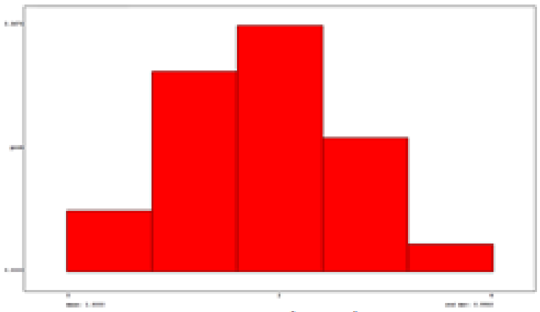
2) Determinar P (X ≤ 3) para n =4 y p = 0,45

Solución:

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

Se puede aplicar la ecuación para cada probabilidad, pero para ahorrar tiempo se recomienda encontrar las probabilidades con lectura en la tabla de probabilidades binomiales.

TABLA Nº 1
PROBABILIDADES BINOMIALES



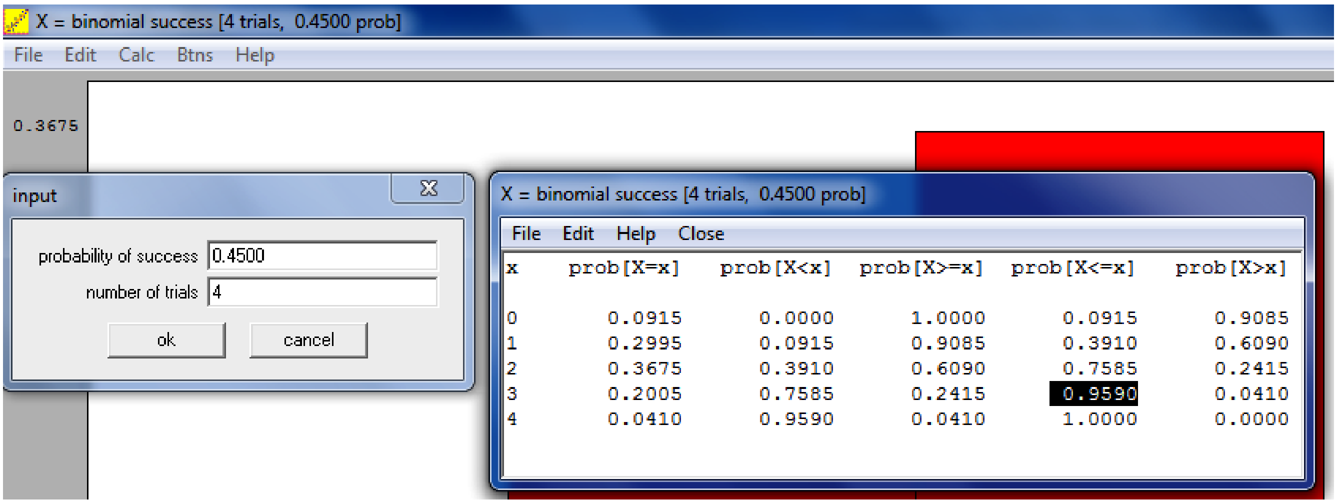
Para $n = 4$ *y* $p = 0{,}45 \Rightarrow P(X = 2) = 0{,}3675$

n	X	p									
		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
1	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
n	X	p									
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
2	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
2	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
n	X	p									
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
3	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
3	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
3	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
n	X	p									
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
4	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500

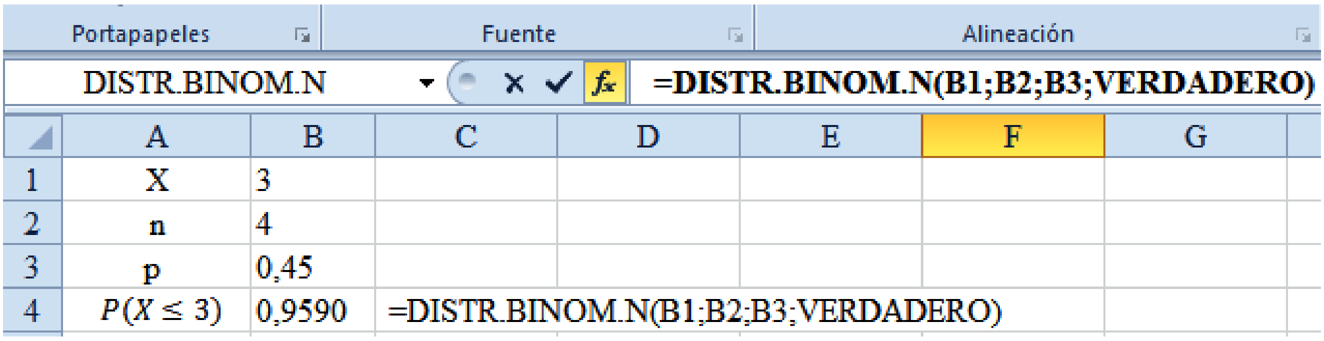
Realizando la lectura en la tabla de P(X=0) con n=4 y p = 0,45 se obtiene 0,0915. Continuando con la respectivas lecturas en la tabla se obtiene: 0,2995 para P(X=1), 0,3675 para P(X=2) y 0,2005 para P(X=3).

Por lo tanto $P(X \leq 3) = 0{,}0915 + 0{,}2995 + 0{,}3675 + 0{,}2005 = 0{,}9590$

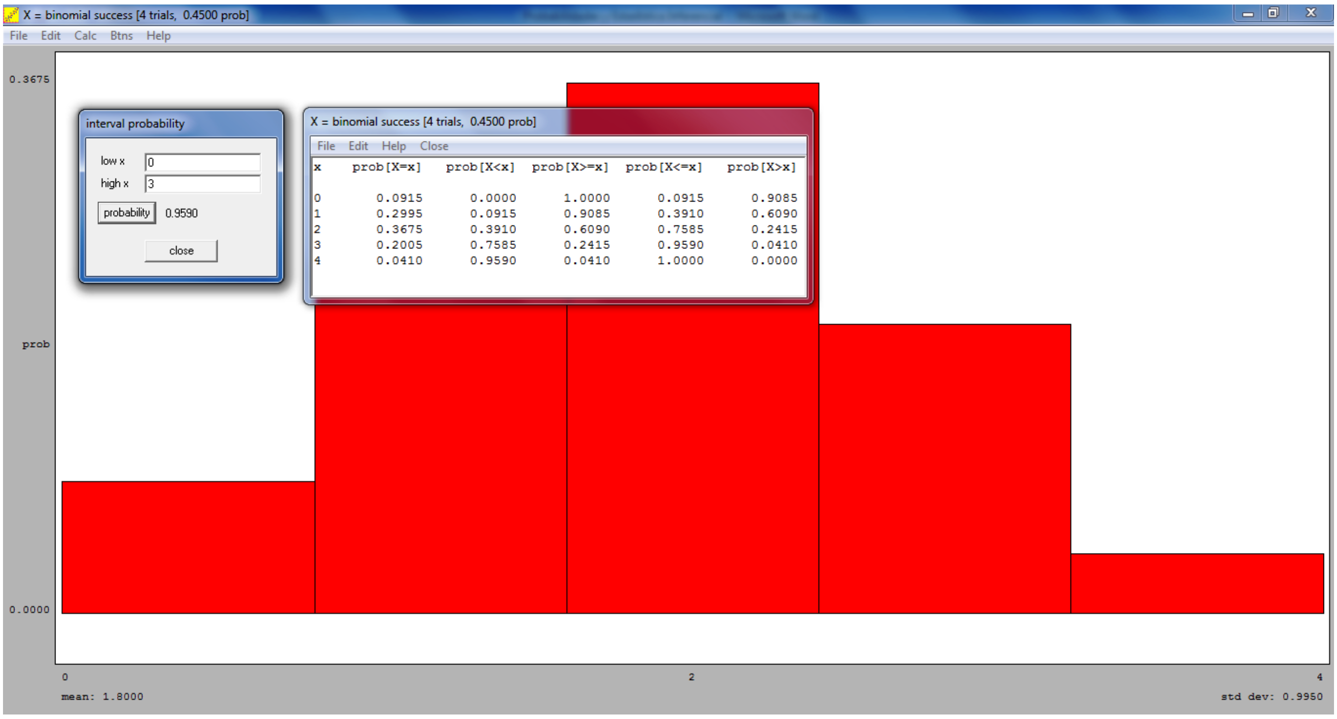
Para que aparezca la tabla en Winstats se hace clic en Edit y luego en parámetros. En la ventana de parámetros, en la casilla trials, escribir 4 y en success prob escribir 0,45. Finalmente clic Calc y luego en table



Los cálculos realizados en Excel se muestran en la siguiente figura:

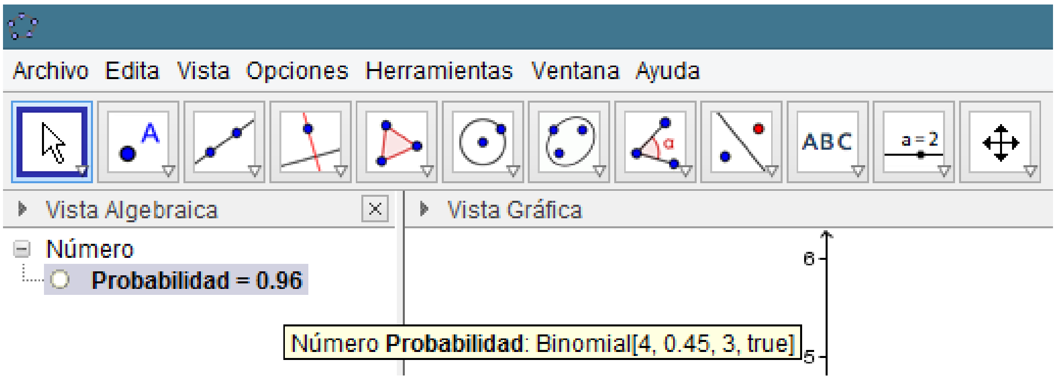


Los cálculos realizados en Winstats se muestran en la siguiente figura:

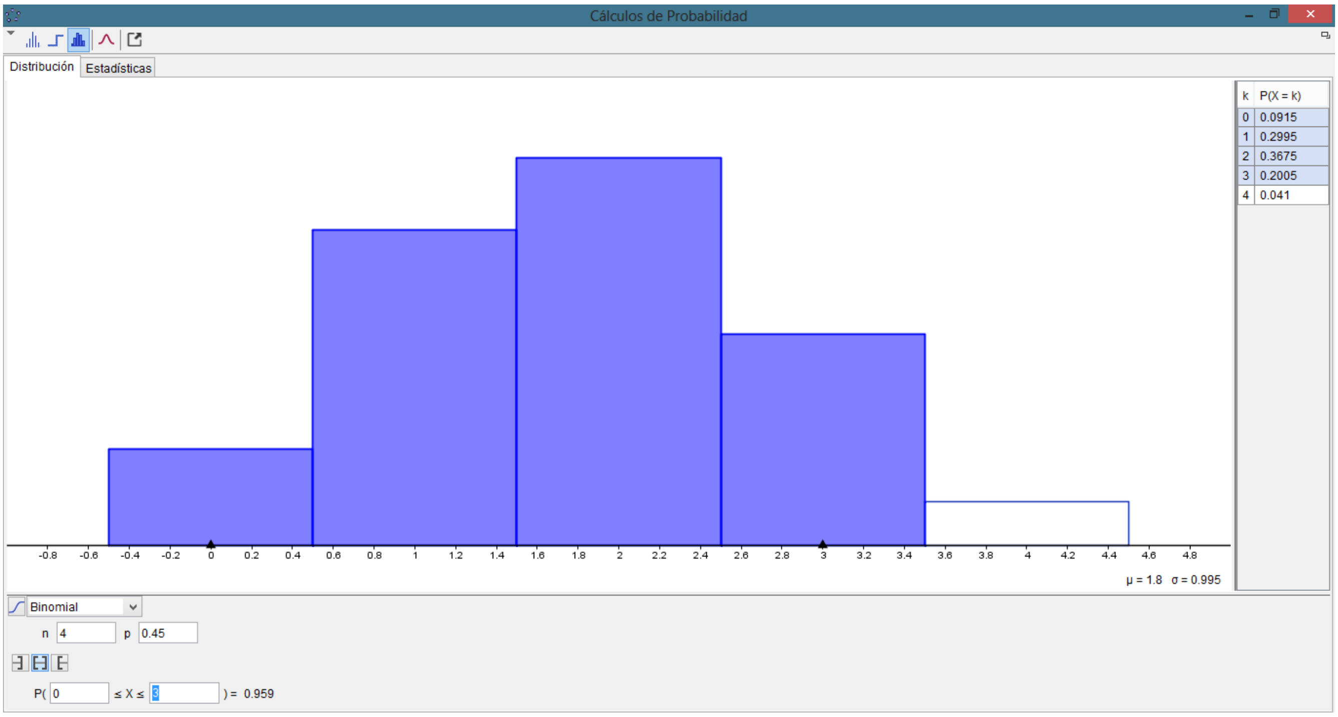


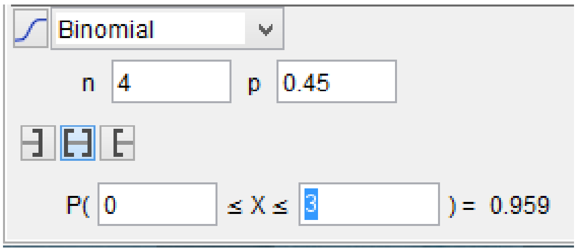
En GeoGebra

Escribir 4 en <Número de Ensayos>, 0.45 en <Probabilidad de Éxito>, 3 en <Valor de Variable> y true en <Acumulada Booleana>



Nota:
Para P(X= 3), siendo 3 el número de éxitos, en <Acumulada Booleana> se escribe false
Para P(X≤ 3), siendo 3 el número de éxitos, en <Acumulada Booleana> se escribe true





3) Se lanza ocho dados.
3.1) Calcular la probabilidad de obtener 2 seis
3.2) Calcular la probabilidad de obtener máximo 2 seis
3.3) Calcular la probabilidad de obtener al menos 2 seis

Solución:

3.1)

$P(X = 2) = ?\ ; n = 8;\ p = \frac{1}{6}$

Aplicando la fórmula se obtiene:

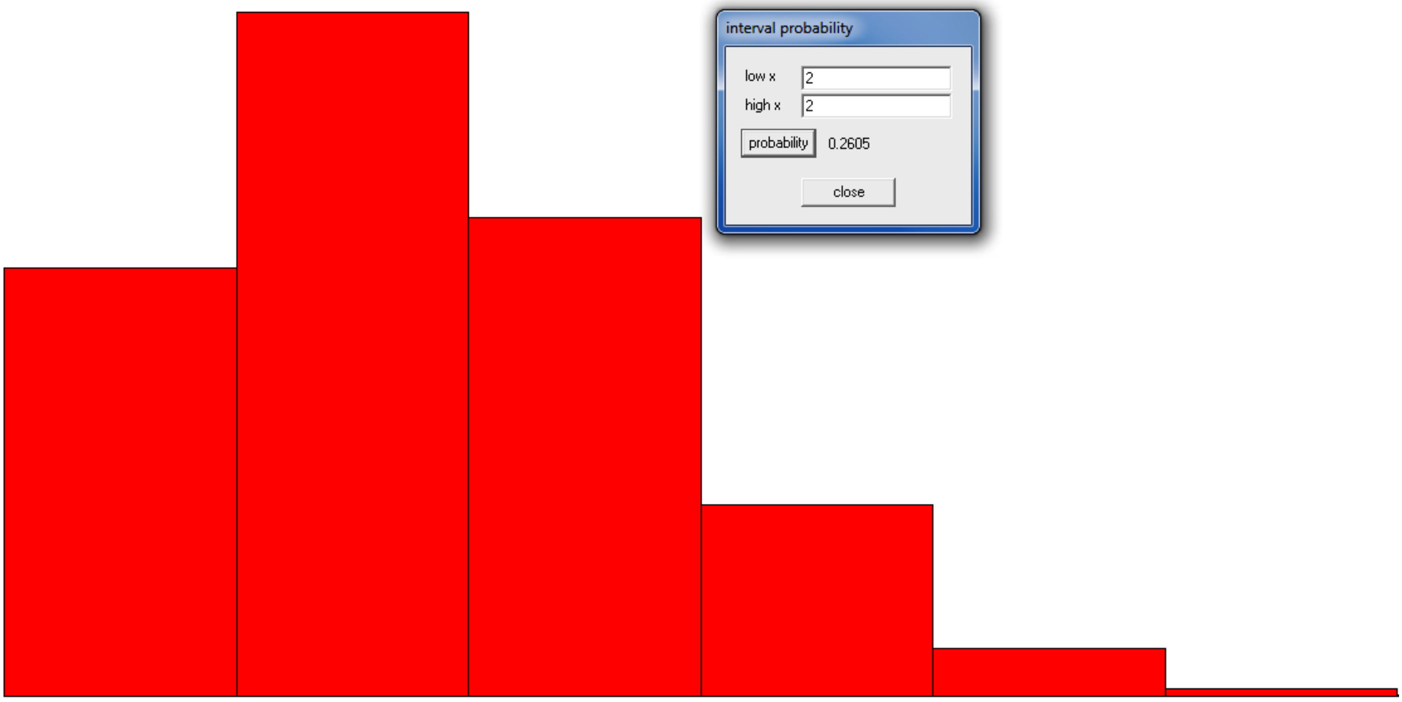
$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n - X)!} \cdot p^X \cdot (1 - p)^{n-X}$$

$$P(X = 2) = \frac{8!}{2!\,(8 - 2)!} \cdot \frac{1}{6}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{8-2} = 0{,}2605$$

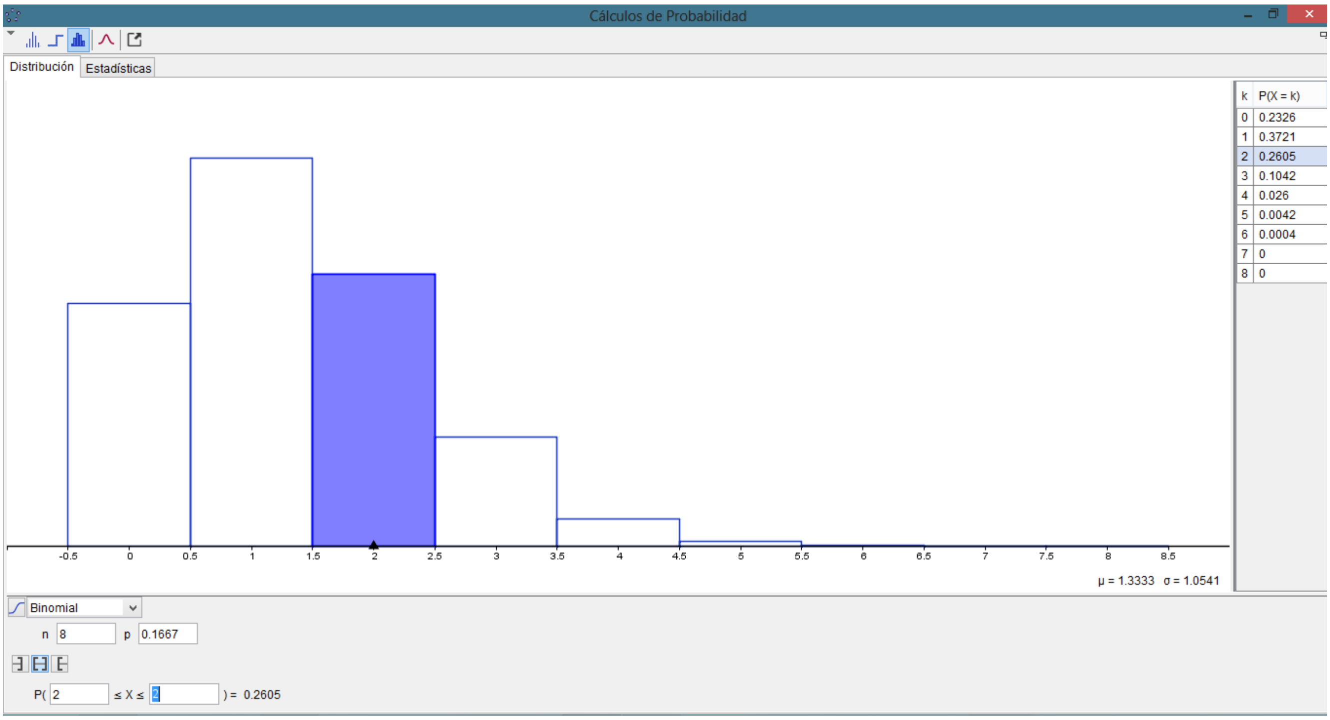
Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	2			
2	n	8			
3	p	1/6			
4	P(X=2)	0,2605	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

Los cálculos en Winstats se muestran en la siguiente figura:



Los cálculos en GeoGebra se muestran en la siguiente figura:



3.2)

$$P(X \leq 2) =? \;; n = 8;\; p = \frac{1}{6}$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F
1	X	2				
2	n	8				
3	p	1/6				
4	$P(X \leq 2)$	0,8652	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;VERDADERO)			

3.3)

$$P(X \geq 2) =? \;; n = 8;\; p = \frac{1}{6}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - P(X \leq 1)$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F
1	X	1				
2	n	8				
3	p	1/6				
4	$P(X \leq 1)$	0,6047	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;VERDADERO)			
5	$P(X \geq 2)$	0,3953	=1-B4			

4) Se lanzan simultáneamente tres monedas, calcular la probabilidad de que se obtengan:
4.1) Tres caras.
4.2) Dos caras y un sello
4.3) Una cara y dos sellos
4.4) Tres sellos
4.5) Al menos una cara

Solución:
Designando por C = cara y por S = sello se tiene:
Espacio muestral = S = {CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS}, entonces, n(S) = 8
Cada una de estos puntos muestrales son igualmente probables, con probabilidad de 1/8

Todas las probabilidades individuales se representan en la siguiente tabla:

Monedas			n(E)	P(E)
1ra	2da	3ra		
C	C	C	1	1/8
C	C	S	3	3/8
C	S	S	3	3/8
S	S	S	1	1/8
Total			8	1

4.1) Tres caras.
Observando la tabla se obtiene que P(CCC) = 1/8

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X=3)=P(CCC); n=3;\ p=\frac{1}{2}$$

$$P(X)=\frac{n!}{X!\,(n-X)!}\cdot p^{X}\cdot(1-p)^{n-X}$$

$$P(CCC)=\frac{3!}{3!\,(3-3)!}\cdot\frac{1^{3}}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3}=1\cdot\frac{1}{8}\cdot 1=\frac{1}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	3			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=3)	1/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.2) Dos caras y un sello
Observando la tabla se obtiene que P(CCS) = 3/8

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X=2)=P(CCS); n=2;\ p=\frac{1}{2}$$

$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(CCS) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} \cdot \frac{1}{2}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	2			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=2)	3/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.3) Una cara y dos sellos
Observando la tabla se obtiene que P(CSS) = 3/8

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X = 1) = P(CSS); n = 1;\ p = \frac{1}{2}$$

$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(CSS) = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} \cdot \frac{1}{2}^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	1			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=1)	3/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.4) Tres sellos
Observando la tabla se obtiene que P(SSS) = 1/8
Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X = 0) = P(SSS); n = 3;\ p = \frac{1}{2}$$

$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(SSS) = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} \cdot \frac{1}{2}^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-0} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	0			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=0)	1/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.5) Al menos una cara
Observando la tabla se obtiene que:
P(Al menos C) = P(CCC) + P(CCS) + P(CSS) = 1/8 +3/8 + 3/8 = 7/8
O también P(Al menos C) = 1 – P(SSS) = 1 – 1/8 = 7/8

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C
1	X	0	
2	n	3	
3	p	1/2	
4	P(X= 0)	1/8	
5	$P(X \geq 1)$	7/8	=1-B4

TAREA DE INTERAPRENDIZAJE

1) Realice un organizador gráfico sobre la distribución binomial

2) Calcule de manera manual, empleando Excel y GeoGebra. Realice los gráficos en Winstats y GeoGebra

2.1) Para n = 4 y p = 0,12, ¿cuánto es P(X = 0)?

R: 0,5997

2.2) Para n = 10 y p = 0,40, ¿cuánto es P(X = 9)?

R: 0,0016

2.3) Para n =10 y p = 0,50, ¿cuánto es P(X = 8)?

R: 0,0439

3) En una muestra de 4 pedidos, se observa el siguiente resultado:

1er pedido	2do pedido	3er pedido	4to pedido
Marcado	Marcado	Sin marcar	Marcado

3.1) Llenar la tabla de manera manual y empleando Excel

n	p	X	$\frac{n!}{X!(n-X)!}$	p^X	$(1-p)^{n-X}$	$P(X)$
4	0,1	0				0,6561
		1				
		2				0,0486
		3				
		4				0,0001

Empleando la anterior tabla, resuelva los siguientes ejercicios de manera manual, empleando Excel, y GeoGebra.

3.2) ¿Qué probabilidad existe de que haya tres formatos marcados?

$$P(X = 3) = 0{,}0036$$

3.3) ¿Qué probabilidad existe de que haya menos de tres formatos marcados?

$$P(X < 3) = 0{,}9963$$

3.4) ¿Qué probabilidad existe de que haya más de tres formatos marcados?

$$P(X > 3) = 0{,}0001$$

3.5) ¿Qué probabilidad existe de que haya tres o más formatos marcados (es decir, al menos tres, por lo menos tres, o mínimo tres)?

$$P(X \geq 3) = 0{,}0037$$

3.6) ¿Qué probabilidad existe de que haya tres o menos formatos marcados? (es decir, a lo más tres)?

$$P(X \leq 3) = 0{,}9999$$

3.7) Calcular la desviación estándar

$$\sigma = 0{,}6$$

4) Crear y resolver de forma manual , empleando Excel y Winstats un problema similar al anterior.

5) El 60% de profesionales leen su contrato de trabajo, incluyendo las letras pequeñas. Suponga que el número de empleados que leen cada una de las palabras de su contrato se puede modelar utilizando la distribución binomial. Considerando un grupo de cinco empleados:

5.1) Llenar la tabla manera manual y empleando Excel

n	p	X	$\frac{n!}{X!\,(n-X)!}$	p^X	$(1-p)^{n-X}$	$P(X)$
		0				0,0102
		1				
		2				
		3				0,3456
		4				
		5				

5.2) Resuelva de manera manual y con GeoGebra la probabilidad de que:

a) Los cinco lean cada una de las palabras de su contrato

0,0778

b) Al menos tres lean cada una de las palabras de su contrato

0,6826

c) Menos de dos lean cada una de las palabras de su contrato

0,0870

6) ¿Cuáles serían los resultados para los incisos de la pegunta anterior, si la probabilidad de que un empleado lea cada una de las palabras de su contrato es de 0,80?. Resolver los siguientes ejercicios de de manera manual, empleando Excel y GeoGebra.

0,3277; 0,9421; 0,0067

7) Un examen de estadística de elección múltiple contenía 20 preguntas y cada una de ellas 5 respuestas. Si un estudiante desconocía todas las respuestas y contestó al azar, calcular de manera manual, empleando GeoGebra la probabilidad de que:

a) Conteste correctamente a 5 preguntas

0,1746

b) Conteste correctamente a lo más 5 preguntas

0,8042

8) Crear y resolver de manera manual, empleando Excel y Winstats un problema similar al anterior.

9) Se lanza simultáneamente 10 dados, calcular la probabilidad de manera manual, empleando Excel y Winstats de que se obtengan:

9.1) Exactamente 7 sietes

0,00025

9.2) Exactamente 0 sietes

0,16151

9.3) Menos de 7 sietes

0,99973

9.4) Más de 7 sietes

0,00002

9.5) Por lo menos 7 sietes

0,00027

10) Se lanzan simultáneamente cinco monedas, calcular la probabilidad de manera manual, empleando Excel y GeoGebra de que se obtengan:

10.1) Cinco caras

1/32

10.2) Tres caras y dos sellos

5/16

10.3) El mismo evento

0

10.5) Al menos una cara

31/32

11) Plantee y resuelva de manera manual, empleando Excel, GeoGebra y Winstats un ejercicio sobre dados y otro sobre monedas empleando la distribución binomial.