DISTRIBUCIÓN NORMAL CON EXCEL, WINSTATS Y GEOGEBRA

i) Reseña histórica

Abrahan De Moivre (1733) fue el primero en obtener la ecuación matemática de la curva normal. Kart Friedrich Gauss y Márquez De Laplece (principios del siglo diecinueve) desarrollaron más ampliamente los conceptos de la curva. La curva normal también es llamada curva de error, curva de campana, curva de Gauss, distribución gaussiana o curva de De Moivre.

Su altura máxima se encuentra en la media aritmética, es decir su ordenada máxima corresponde a una abscisa igual a la media aritmética. La asimetría de la curva normal es nula y por su grado de apuntamiento o curtosis se clasifica en mesocúrtica.

ii) Ecuación

Su ecuación matemática de la función de densidad es:

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Donde:

$\sigma = desviación\ estándar$

$\sigma^2 = varianza$

$\pi = 3{,}141592654 \ldots\ldots constante\ matemática$

$e = 2{,}7182818 \ldots\ldots constante\ matemática$

X = valor en el eje horizontal

Y = altura de la curva para cualquier valor de x

$\mu = media\ aritmética$

Cuando se expresa la variable x en unidades estándar (fórmula de estandarización)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

La ecuación anterior es reemplazada por la llamada forma canónica, la cual es

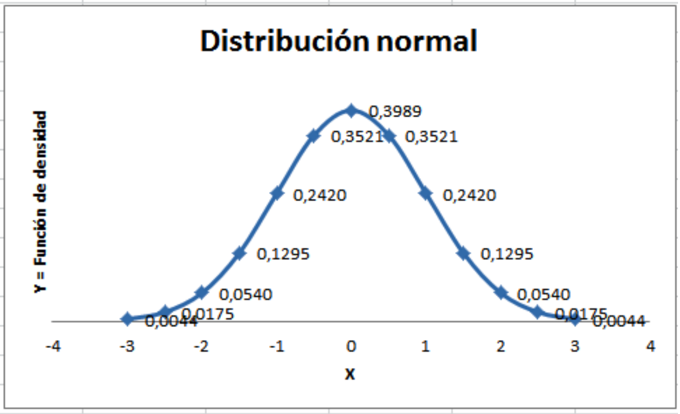
$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

Para calcular Y en Excel se procede de la siguiente manera:

a) Se ubica valores para X del -3 hasta el 3. Se insertar la función DISTR.NORM.ESTAND.N. En la ventana de argumentos de función, en Z se seleccionada A2 que representa al -3, y en Acumulado es escribe FALSO. Clic en Aceptar. Se arrastra con el mouse para obtener los demás valores.

b) Para obtener la gráfica se inserta gráfico de dispersión.

	A	B	C
1	X	Y	$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2	-3	0,0044	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A2;FALSO)
3	-2,5	0,0175	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A3;FALSO)
4	-2	0,0540	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A4;FALSO)
5	-1,5	0,1295	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A5;FALSO)
6	-1	0,2420	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A6;FALSO)
7	-0,5	0,3521	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A7;FALSO)
8	0	0,3989	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A8;FALSO)
9	0,5	0,3521	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A9;FALSO)
10	1	0,2420	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A10;FALSO)
11	1,5	0,1295	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A11;FALSO)
12	2	0,0540	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A12;FALSO)
13	2,5	0,0175	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A13;FALSO)
14	3	0,0044	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A14;FALSO)
15			



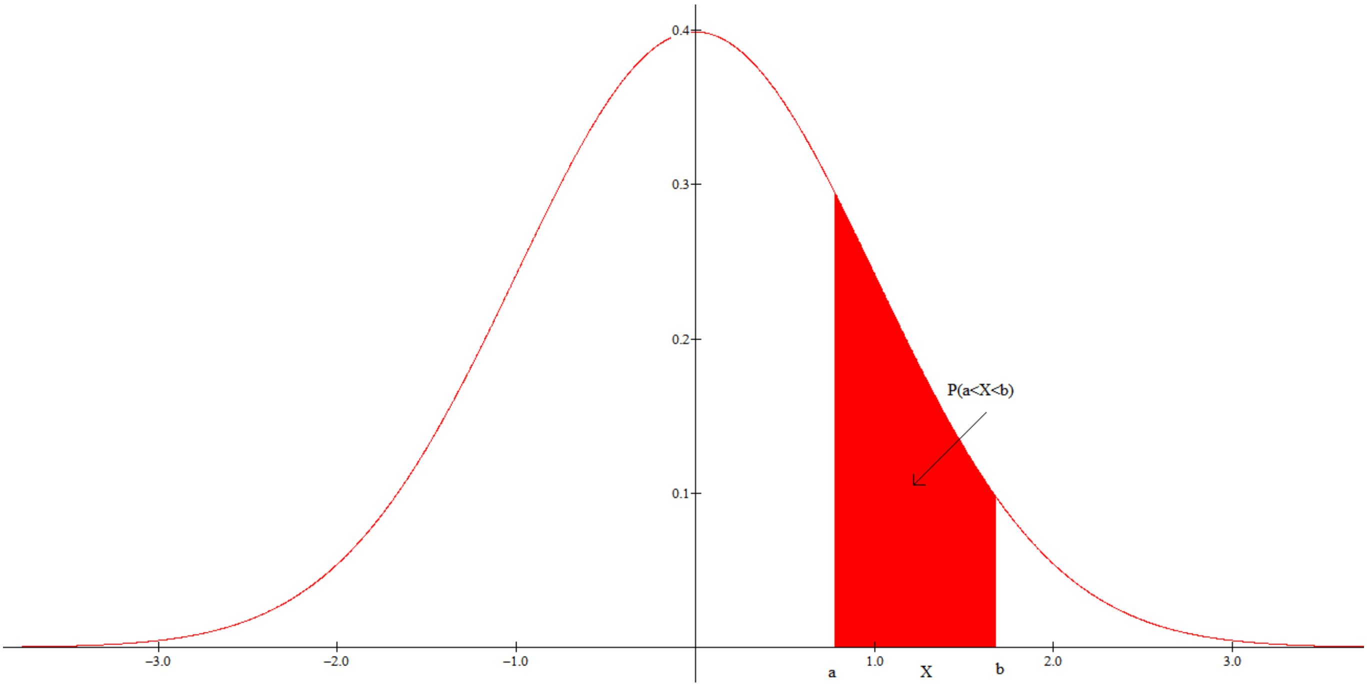
Nota: No existe una única distribución normal, sino una familia de distribuciones con una forma común, diferenciadas por los valores de su media y su varianza. De entre todas ellas, la más utilizada es la **distribución normal estándar**, que corresponde a una distribución con una media aritmética de 0 y una desviación típica de 1.

iii) Área bajo la curva

El área total limitada por la curva y el eje "X" es 1, por lo tanto, el área bajo la curva entre X = a y X = b, con a < b, representa la probabilidad de que X esté entre a y b. Esta probabilidad se denota por:

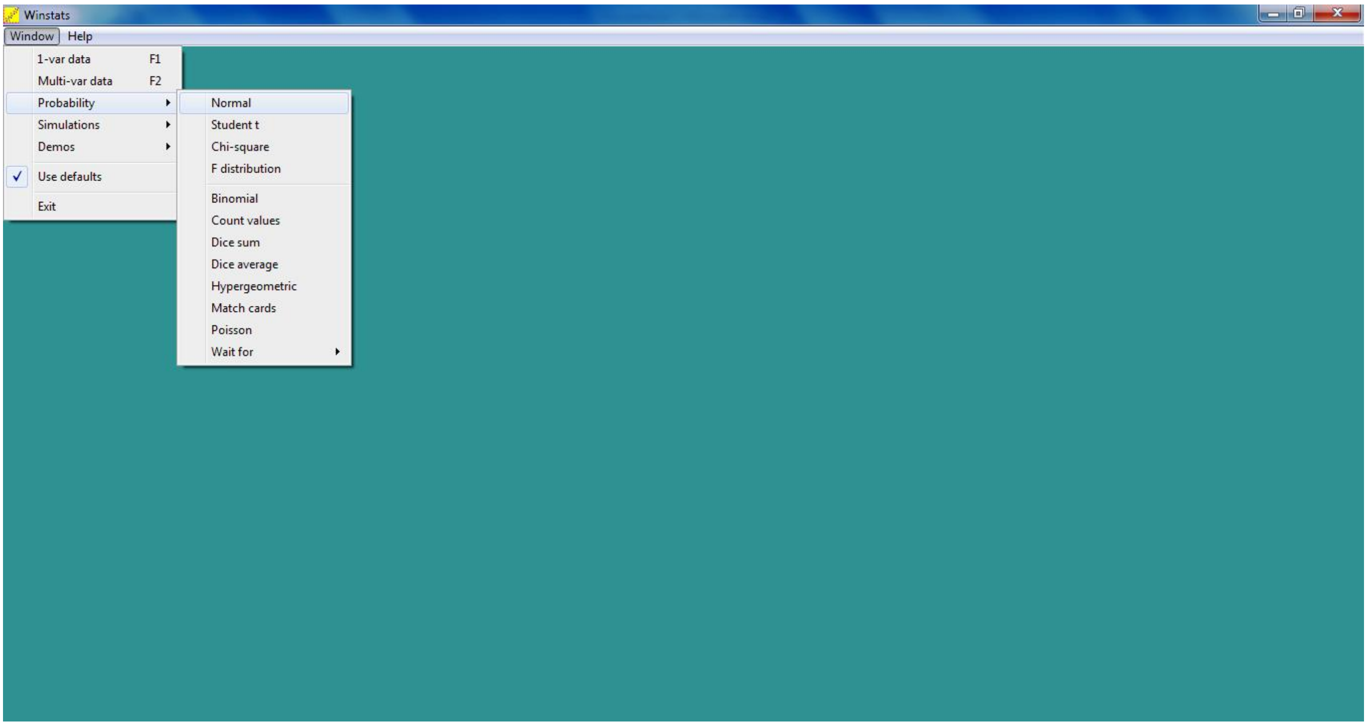
$$P(a < X < b)$$

Esta probabilidad se ilustra en el siguiente gráfico elaborado con el programa Winstats.

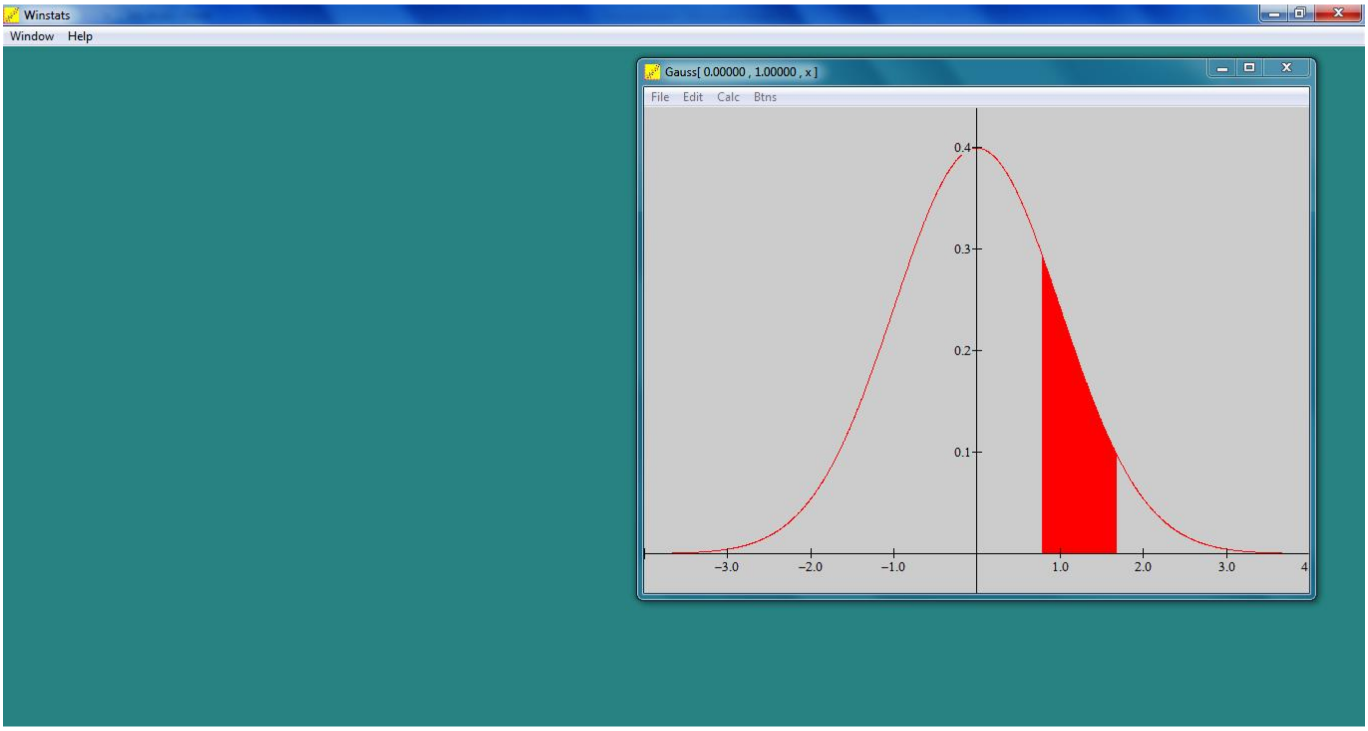


Para elaborar el gráfico se procede de la siguiente manera:

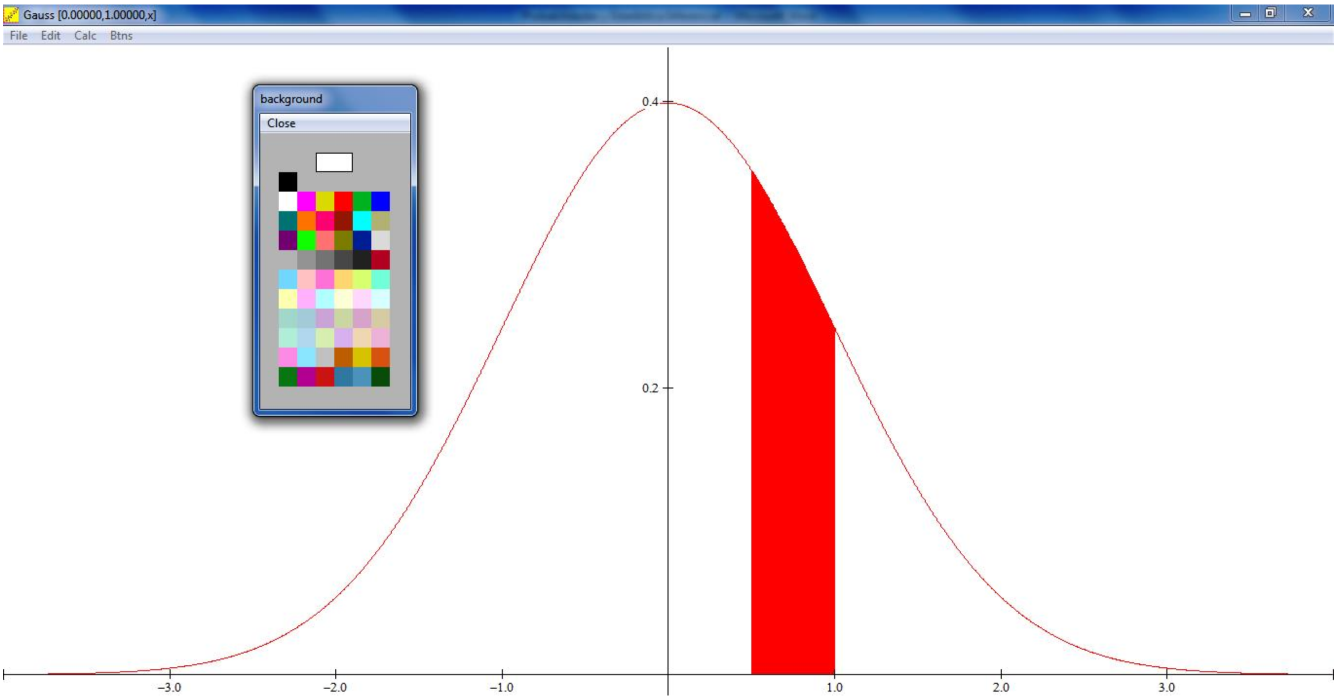
a) Se abre el programa. Clic en Window- Probability



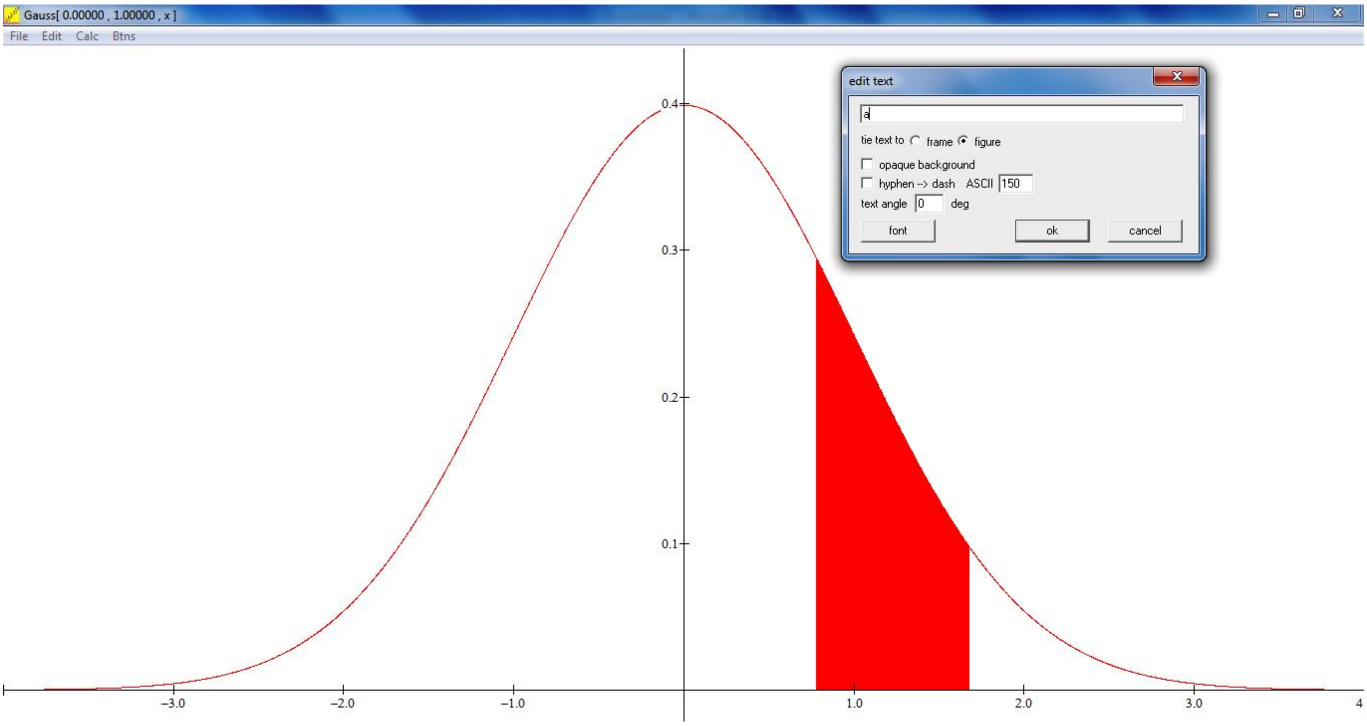
b) Clic en Normal



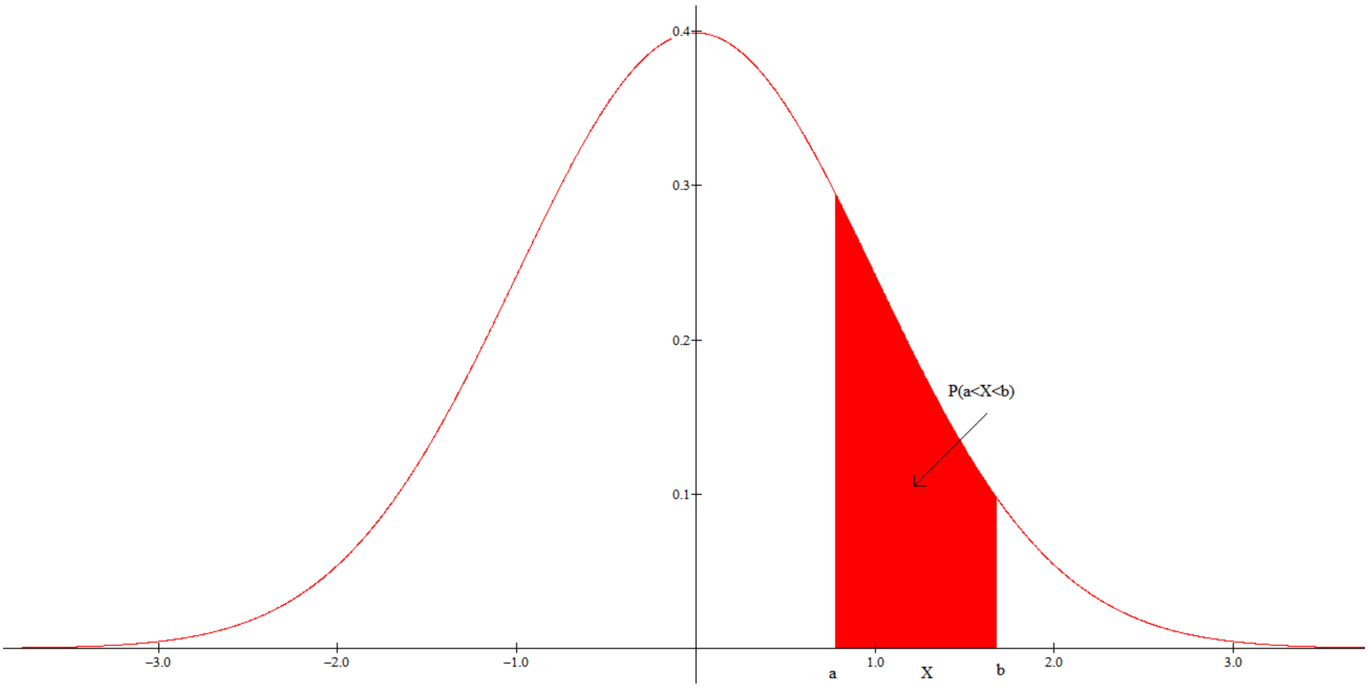
c) Para cambiar el color del fondo, maximizar la ventana de la curva. Clic en Edit-Colors y luego en Window background. Seleccionar el color blanco para el fondo.



d) Para escribir, clic en Btns y luego en Text mode. Clic derecho en cualquier parte de la pantalla. Luego escribir en la venta edit text. Clic en ok



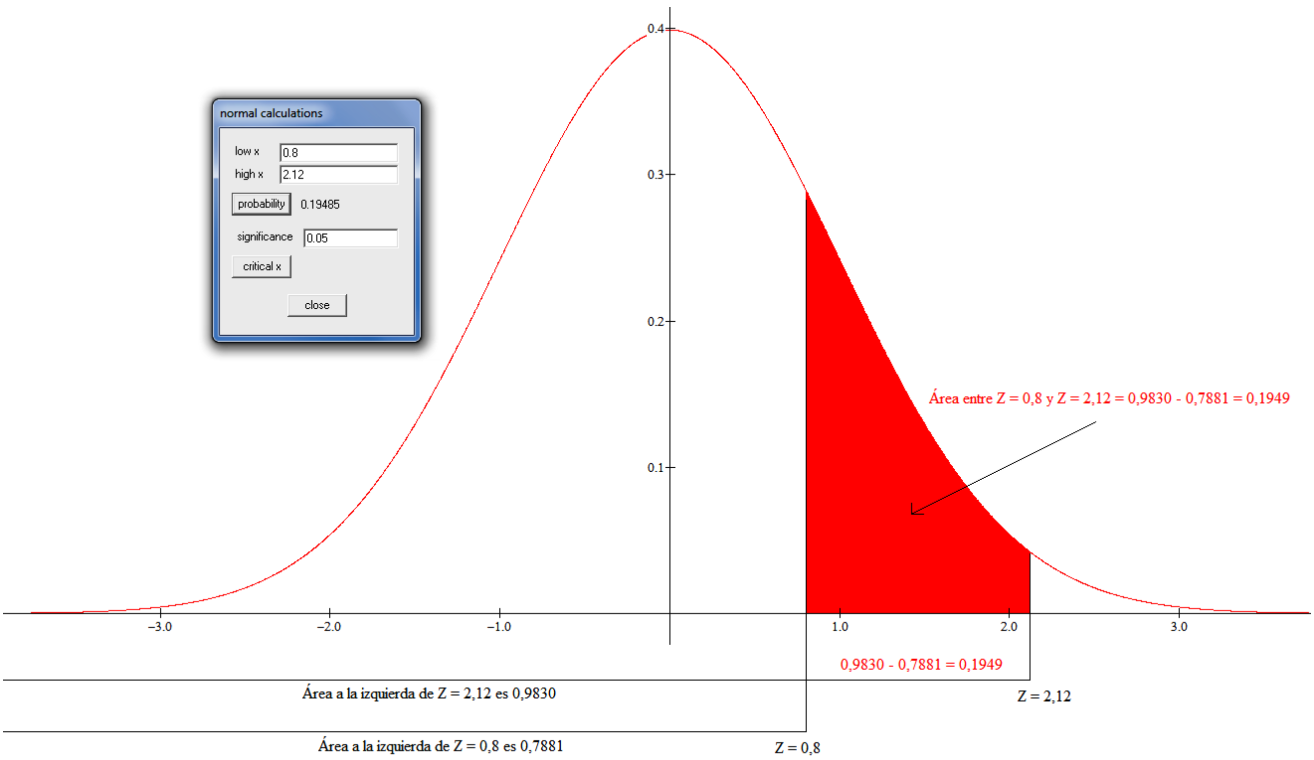
e) Se obtiene el siguiente gráfico



Ejemplos ilustrativos

1) Averigüe el área bajo la curva de distribución normal entre Z = 0,8 y Z = 2,12

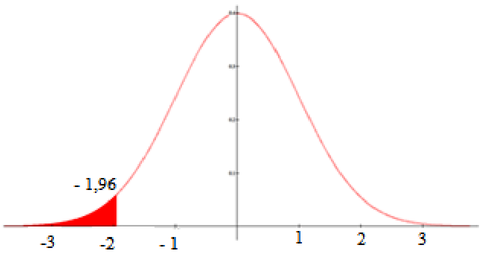
Solución:
Realizando el gráfico en Winstats y Paint se obtiene:



El área a la izquierda de Z = 0,8 con lectura en la tabla de la distribución normal es 0,7881
El área a la izquierda de Z = 2,12 con lectura en la tabla de la distribución normal es 0,9830

TABLA Nº 3
DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

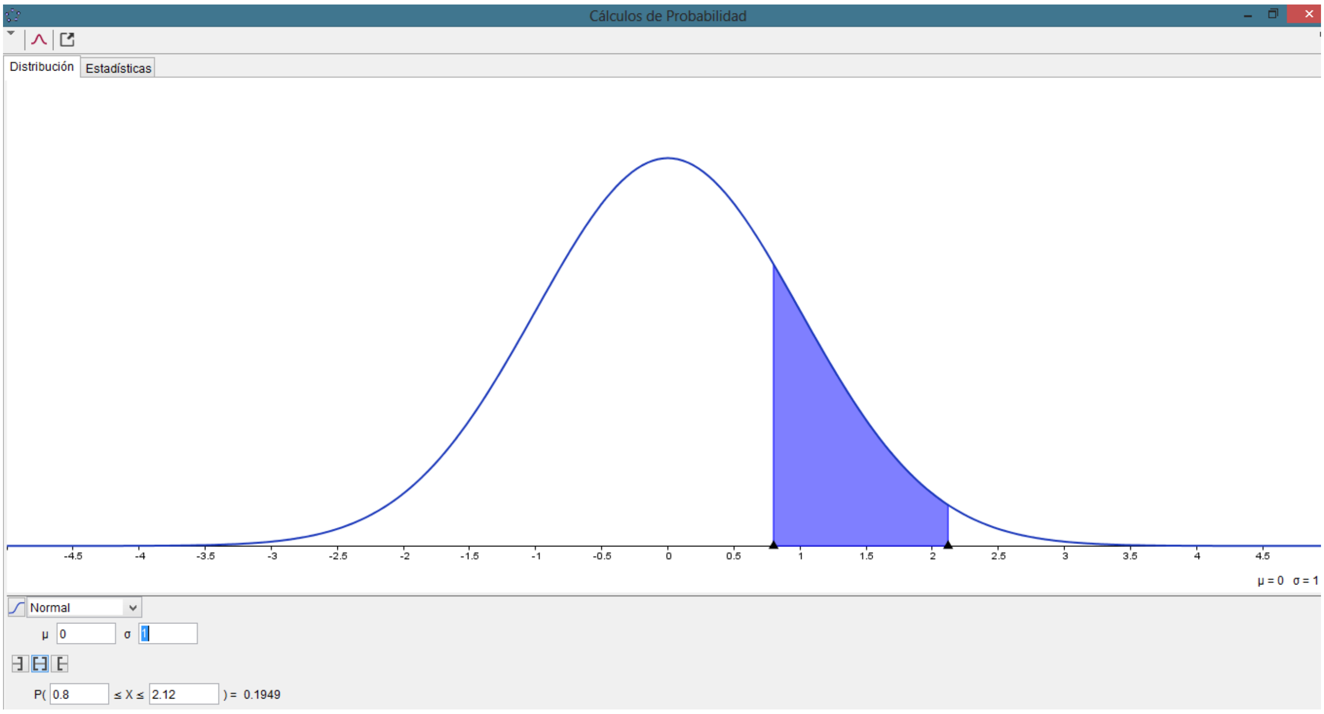


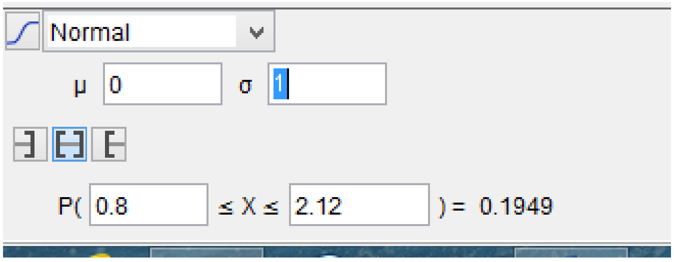
Ejemplo:
$P(Z \leq -1{,}96) = 0{,}0250$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
	⋮		⋮							
0,8	**0,7881**	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	**0,9830**	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857

El área Z = 0,8 y Z = 2,12 es 0,9830 – 0,7881 = 0,1949

Los cálculos en GeoGebra se presentan en la siguiente figura:





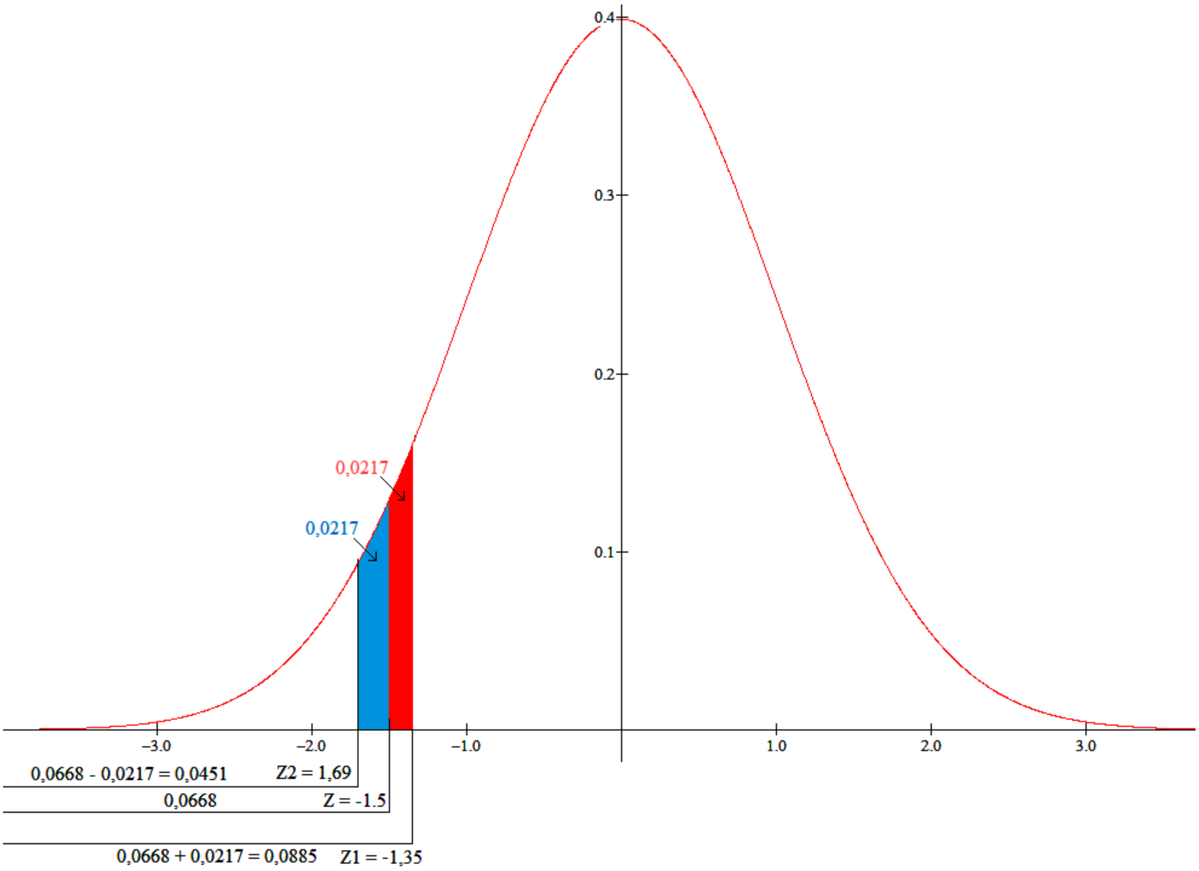
Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F
1	Z_1	0,8				
2	Z_2	2,12				
3	$Área\ a\ la\ izquierda\ de\ Z_1$	0,7881	=DISTR.NORM.ESTAND.N(B1;VERDADERO)			
4	$Área\ a\ la\ izquierda\ de\ Z_2$	0,9830	=DISTR.NORM.ESTAND.N(B2;VERDADERO)			
5	$P(0{,}8 \leqslant X \leqslant 2{,}12)$	0,1949	=B4-B3			

2) Halle Z si el área entre -1,5 y Z es 0,0217

Solución:

Realizando un gráfico ilustrativo en Winstats y Paint se obtiene:



Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	Z	-1,5			
2	$Área\ entre\ Z\ y\ Z_1$	0,0217			
3	$Área\ a\ la\ izquierda\ de\ Z$	0,0668	=DISTR.NORM.ESTAND.N(B1;VERDADERO)		
4	$Área\ a\ la\ izquierda\ de\ Z_1$	0,0885	=B2+B3		
5	Z_1	-1,35	=INV.NORM.ESTAND(B4)		
6	$Área\ a\ la\ izquierda\ de\ Z_2$	0,0451	=B3-B2		
7	Z_2	-1,69	=INV.NORM.ESTAND(B6)		

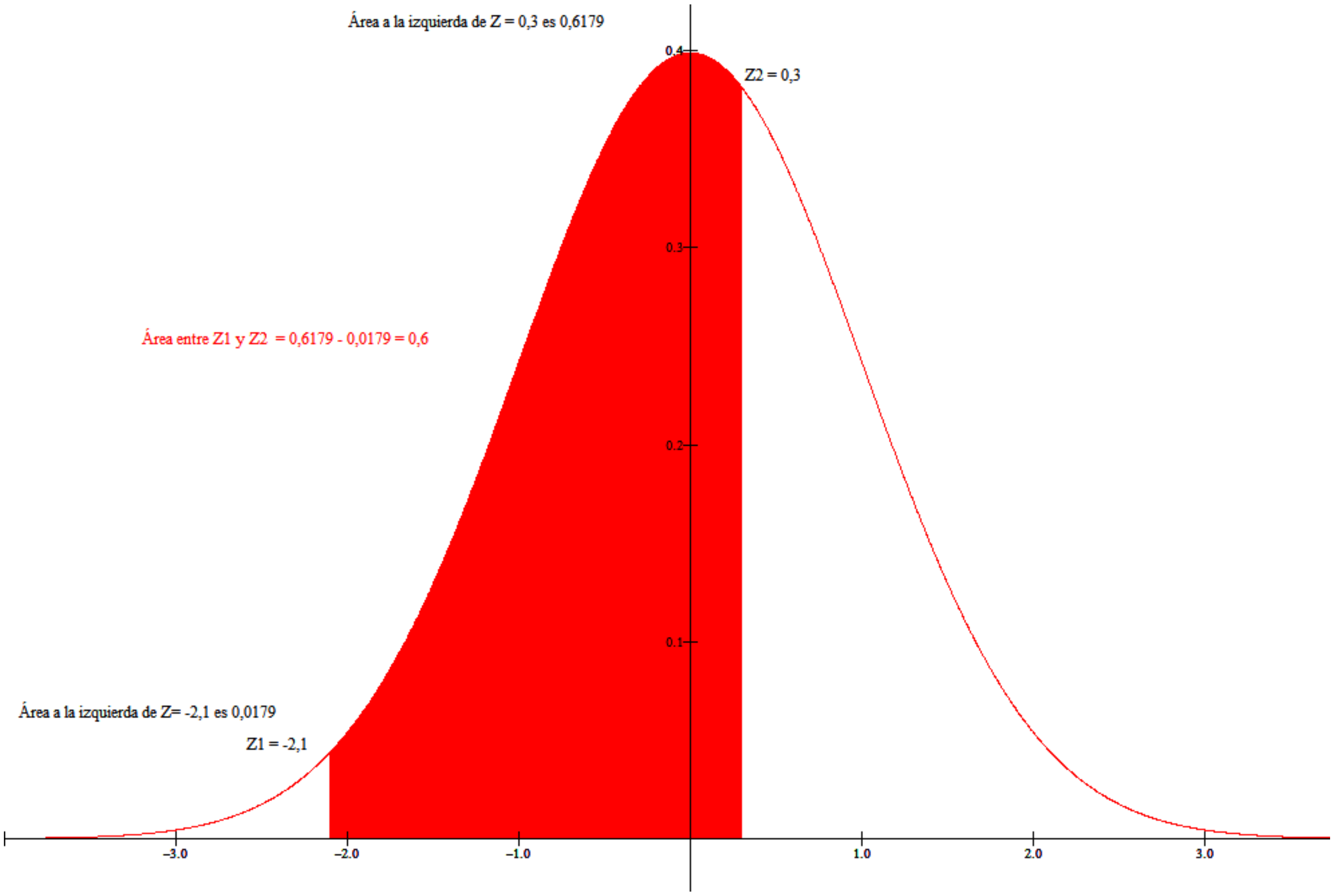
3) El peso promedio de 200 estudiantes varones de cierta universidad es 151 libras con una desviación típica de 15 libras. Si los pesos están distribuidos normalmente, calcular la probabilidad y el número de estudiantes que pesan Entre 120 y 155 libras

Solución: La curva normal corresponde a una función continua (valor decimal). Para resolver estos problemas se emplea los límites inferior y superior según sea el caso, es decir, para este problema es entre 119,5 y 155,5 libras

Normalizando los datos se tiene:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{119{,}5 - 151}{15} = -2{,}1$$
$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{155{,}5 - 151}{15} = 0{,}3$$

Graficando se obtiene:



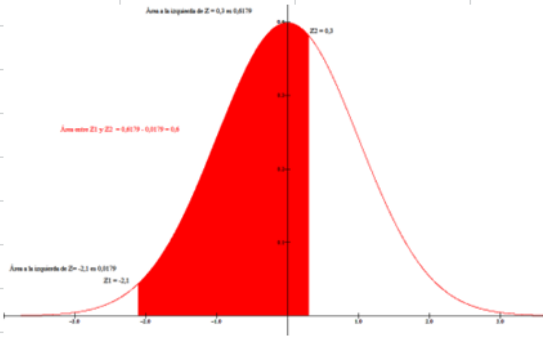
El área a la izquierda de Z = 0,3 con lectura en la tabla de la distribución normal es 0,6179
El área a la izquierda de Z = -2,1 con lectura en la tabla de la distribución normal es 0,0179

El área entre -2,1 y 0,3 es 0,6179 – 0,0179 = 0,6 = 60%

El número de estudiantes es 0,6 x 200 = 120

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	200					
2	μ	151					
3	σ	15					
4							
5	X_1	119,5	$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$				
6	X_2	155,5					
7	Z_1	-2,1	=NORMALIZACION(B5;B2;B3)				
8	Z_2	0,3	=NORMALIZACION(B6;B2;B3)				
9	$\acute{A}rea\ a\ la\ izquierda\ de\ Z_1$			0,0179	=DISTR.NORM.ESTAND.N(B7;VERDADERO)		
10	$\acute{A}rea\ a\ la\ izquierda\ de\ Z_2$			0,6179	=DISTR.NORM.ESTAND.N(B8;VERDADERO)		
11	$\acute{A}rea\ entre\ Z_1 y Z_2$			60%	=D10-D9		
12	Número de estudiantes			120	=D11*B1		

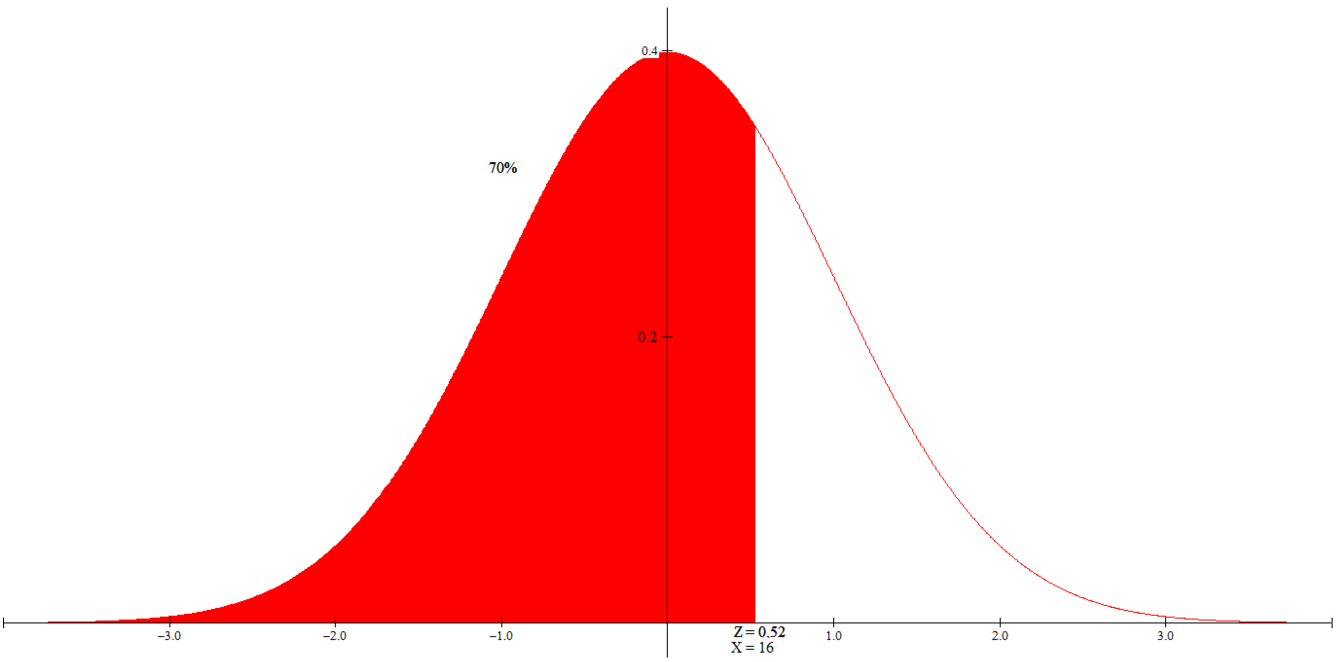


4) Las calificaciones que obtienen los alumnos en un examen siguen una distribución normal, siendo la media igual a 14. El 70% de los alumnos obtienen una calificación inferior a 16.
4.1) Calcule la desviación típica de las calificaciones
4.2) Se escoge un alumno al azar, calcule el porcentaje de obtener una calificación superior a 18

Solución
4.1)
Si el área es inferior al 70%, entonces con lectura en la tabla se obtiene el valor de Z = 0,52
Reemplazando valores en la fórmula y realizando las operaciones se obtiene:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow 0{,}52=\frac{16-14}{\sigma}\Rightarrow \sigma=\frac{16-14}{0{,}52}=3{,}8$$

El gráfico elaborado en Winstats es:



4.2)

Reemplazando valores en la fórmula se obtiene el siguiente número Z:

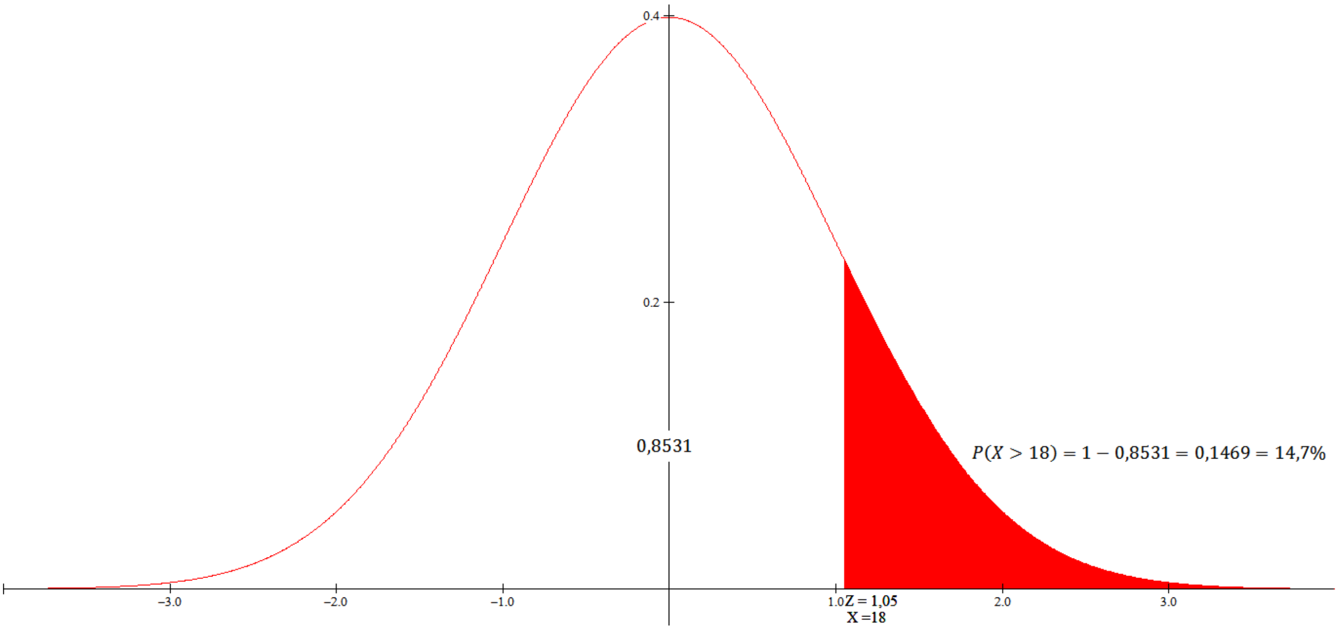
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow Z = \frac{18 - 14}{3{,}8} \Rightarrow Z = 1{,}05$$

Con lectura en la tabla para Z = 1,05 se obtiene un área de 0,8531, la cual representa una probabilidad inferior a la calificación de 18

Para calcular la probabilidad de obtener una calificación superior a 18 se realiza la siguiente operación:

$$P(X > 18) = 1 - 0{,}8531 = 0{,}1469 = 14{,}7\%$$

El gráfico elaborado en Winstats y en Paint es:



Por lo tanto existe una probabilidad de 14,7% de obtener una calificación superior a 18

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F
1	μ	14				
2	X	16				
3	Área a la izquierda de Z	0,7				
4	Z	0,52	=INV.NORM.ESTAND(B3)			
5	$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{X-\mu}{Z}$	3,8	=(B2-B1)/B4			
6						
7						
8	X	18				
9	$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$	1,05	=(B8-B1)/B5			
10						
11	Área a la izquierda de Z	0,853	=DISTR.NORM.ESTAND.N(B9;VERDADERO)			
12	Porcentaje superior a 18	14,7%	=1-B11			