DISTRIBUCIONES CONTINUAS CON EXCEL, WINSTAS Y GEOGEBRA

A) INTRODUCCIÓN

Una distribución de probabilidad es continua cuando los resultados posibles del experimento son obtenidos de variables aleatorias continuas, es decir, de variables cuantitativas que pueden tomar cualquier valor, y que resultan principalmente del proceso de medición.

Ejemplos de variables aleatorias continuas son:
La estatura de un grupo de personas
El tiempo dedicado a estudiar
La temperatura en una ciudad

B) DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

i) Definición

La distribución de Poisson calcula el número de eventos sobre alguna área de oportunidad (intervalo de tiempo o espacio), la distribución exponencial mide el paso del tiempo entre tales eventos. Si el número de eventos tiene una distribución de Poisson, el lapso entre los eventos estará distribuido exponencialmente.

ii) Fórmula

La probabilidad de que el lapso de tiempo sea menor que o igual a cierta cantidad x es:

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

Donde:
$t =$Lapso de tiempo
$e =$ Base del logaritmo natural aproximadamente igual a 2,718281828
$\lambda =$Tasa promedio de ocurrencia

Ejemplo ilustrativo

Los buses interprovinciales llegan al terminal a una tasa promedio de 10 buses por hora.

1) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un bus en no más de 5 minutos?
2) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un bus en no más de 10 minutos?
3) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un bus entre 5 minutos y 10 minutos?
4) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un bus en más de 5 minutos?

Solución:
λ = 10 por una hora

1) Como la tasa promedio está dada por hora, y el problema se plantea en minutos, se calcula el porcentaje que representa 5 minutos de una hora (60 minutos), el cual es:

$$\frac{5}{60} = \frac{1}{12} = 0{,}0833$$

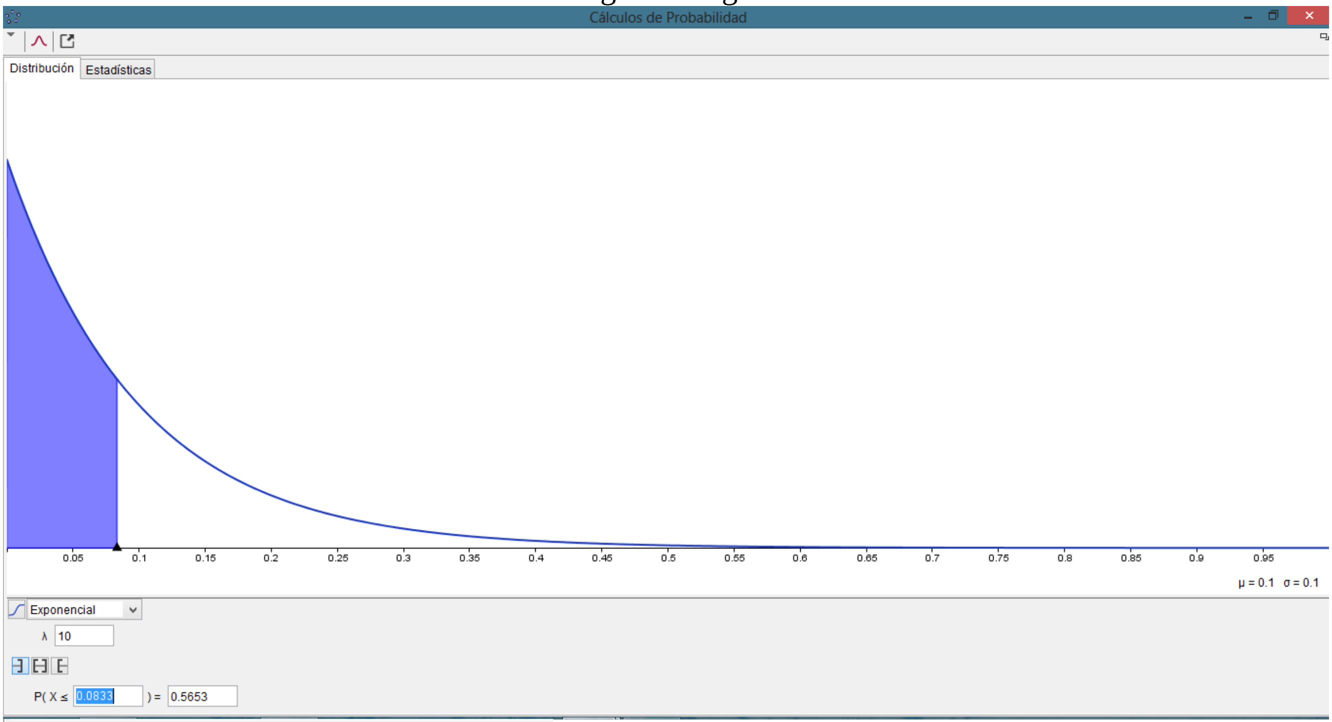
Reemplazado valores de la fórmula se obtiene:

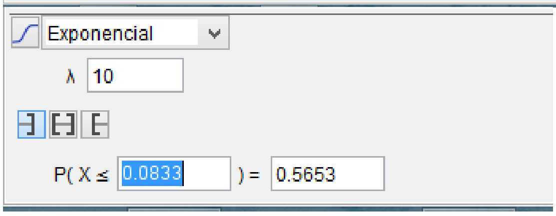
$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

$$P(X \leq 5) = 1 - e^{-10 \cdot \frac{1}{12}} = 0{,}5654$$

Interpretación: Existe un 56,54% de probabilidad de que el segundo bus llegue al terminal en 5 minutos o menos del primero si la tasa promedio de llegada es de 10 buses por hora.

Los cálculos en GeoGebra se muestran en la siguiente figura





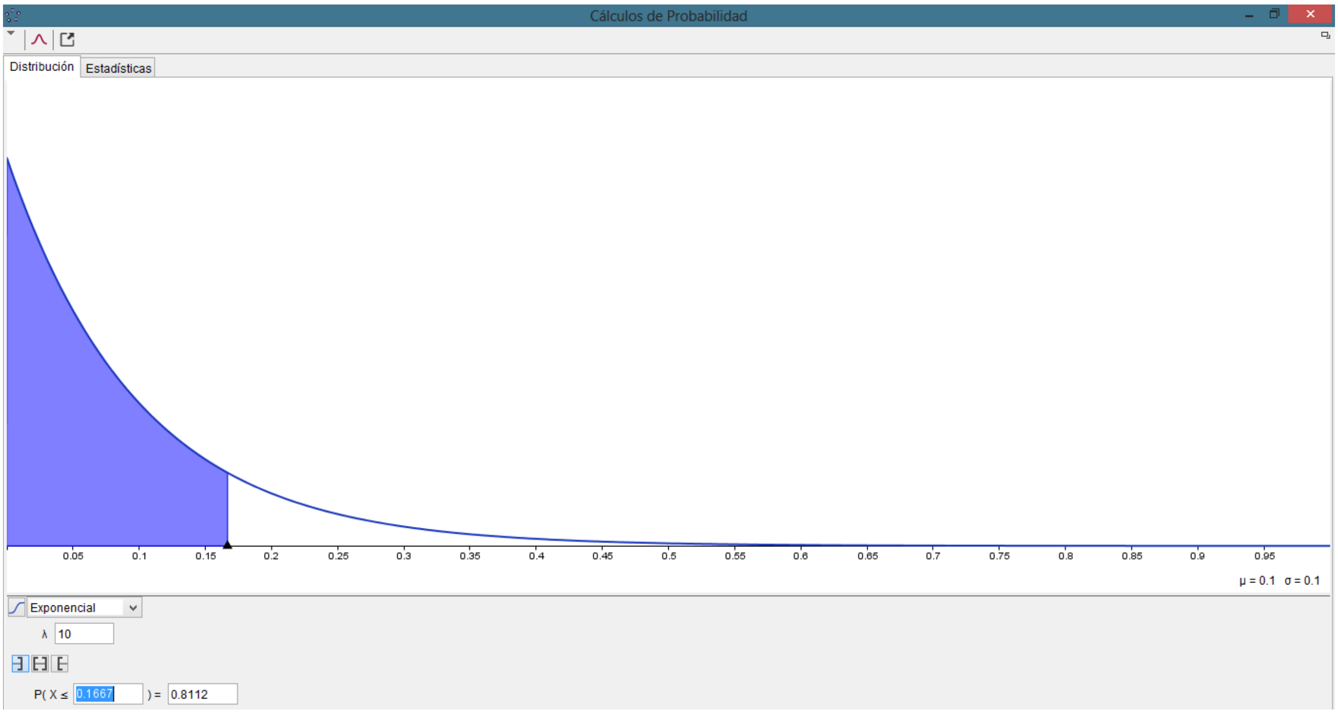
2) El porcentaje que representa 10 minutos de una hora (60 minutos) es:

$$\frac{10\ min}{60\ min} = \frac{1}{6} = 0{,}1667$$

Remplazado valores de la fórmula se obtiene: $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$

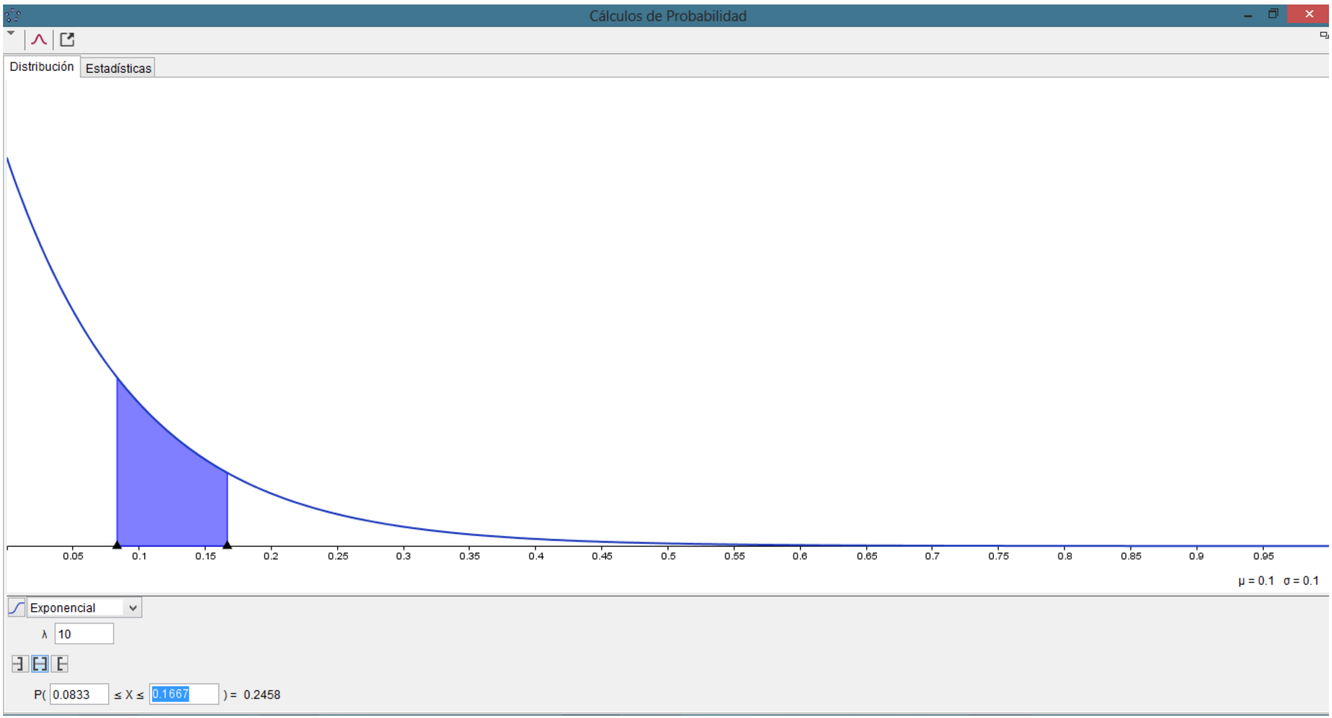
$$P(X \leq 10) = 1 - e^{-10 \cdot \frac{1}{6}} = 0{,}8111$$

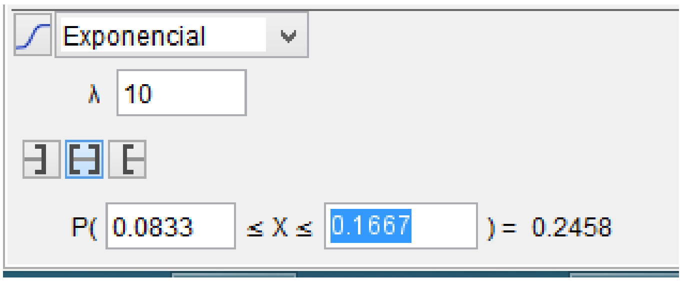
En GeoGebra:



3) P(5≤X≤10) = P(X≤10) – P(X≤5)

P(5≤X≤10) = 0,8111- 0,5654 = 0,2457



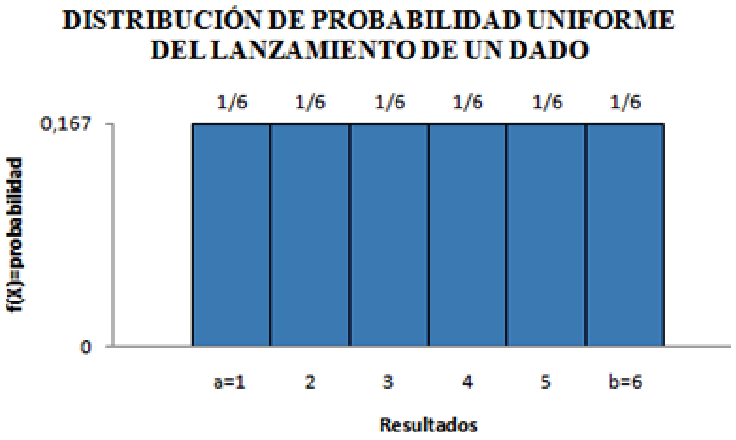


4) P(X>5) = 1 – P(X≤5)
P(X>5) = 1 – 0,5654 = 0,4346
En los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	t	1/12	=5/60		
2	λ	10			
3	P(X≤5)	0,5654	=DISTR.EXP(B1;B2;VERDADERO)		
4					
5	t	1/6	=10/60		
6	λ	10			
7	P(X≤10)	0,8111	=DISTR.EXP(B5;B6;VERDADERO)		
8					
9	P(5≤X≤10)	0,2457	=B7-B3		
10					
11	P(X>5)	0,4346	=1-B3		

C) DISTRIBUCIÓN UNIFORME

i) Definición.- Es una distribución en el intervalo $[a, b]$ en la cual las probabilidades son las mismas para todos los posibles resultados, desde el mínimo de **a** hasta el máximo de **b**. El experimento de lanzar un dado es un ejemplo que cumple la distribución uniforme, ya que todos los 6 resultados posibles tienen 1/6 de probabilidad de ocurrencia.



ii) Función de densidad de una distribución uniforme (altura de cada rectángulo en la gráfica anterior) es:

$$f(X) = \text{Altura} = \frac{1}{b - a}$$

Donde:
a = mínimo valor de la distribución
b = máximo valor de la distribución
b – a = Rango de la distribución

iii) La media, valor medio esperado o esperanza matemática de una distribución uniforme se calcula empleando la siguiente fórmula:

$$E(X) = \mu = \frac{a + b}{2}$$

iv) La varianza de una distribución uniforme se calcula empleando la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$$

De donde la desviación estándar es $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

v) La probabilidad de que una observación caiga entre dos valores se calcula de la siguiente manera:

$$P(X_1 \leq X \leq X_2) = \frac{X_2 - X_1}{b - a}$$

Ejemplo ilustrativo

Sea X el momento elegido al azar en que un estudiante recibe clases en un determinado día entre las siguientes horas: 7:00 - 8:00 - 9:00 - 10:00 - 11:00 - 12:00 - 13:00

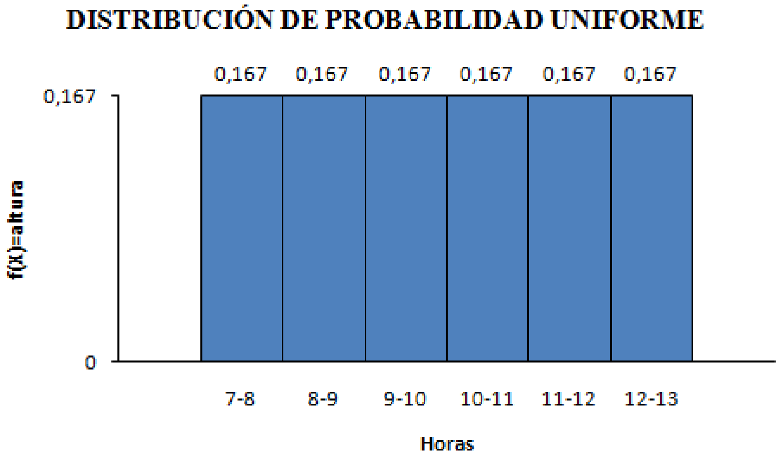
1) ¿Cuál es la función de densidad de la variable X?
2) Elaborar un gráfico de la distribución de probabilidades
3) Calcular el valor medio esperado
4) Calcular la desviación estándar
5) Calcular la probabilidad de que llegue en la primera media hora
6) Si recibe clases de Estadística Aplicada de 10:00 a 12:15, calcular la probabilidad de recibir esta asignatura.

Solución:
1) a = 7 y b = 13
Reemplazando valores en la ecuación de la función de densidad se obtiene:

$$f(X) = \text{Altura} = \frac{1}{b-a}$$

$$f(X) = \text{Altura} = \frac{1}{13-7} = \frac{1}{6} = 0{,}167$$

2) Elaborando el gráfico de la distribución de probabilidad empleando Excel se obtiene:



Interpretación:

Cada rectángulo tiene 1 de base y 1/6 = 0,167 de altura.

El área de cada rectángulo es:

$$A\square = base \cdot altura = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

El área total (rectángulo de base el intervalo 7-13 y altura 1/6=0,167) representa a la suma de todas las probabilidades, y es igual a uno:

$$A\square = base \cdot altura = (13-7) \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

3) Reemplazando valores en la fórmula del valor esperado se obtiene:

$$E(X) = \mu = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X) = \mu = \frac{7+13}{2} = 10$$

4) Reemplazando valores en la fórmula de la varianza se obtiene:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma^2 = \frac{(13-7)^2}{12} = \frac{(6)^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

Por lo tanto la desviación estándar es: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3} = 1{,}732$

5) Llegar en la primera media hora significa que llega a la 7:30. Por lo tanto se debe calcular la probabilidad entre las 7:00 y las 7:30.

Como 7:30 = 7 horas + 30 minutos, y el porcentaje que representa 30 minutos de una hora es:

$$\frac{30}{60} = 0{,}5 \Rightarrow 7{:}30 = 7{,}5\ horas$$

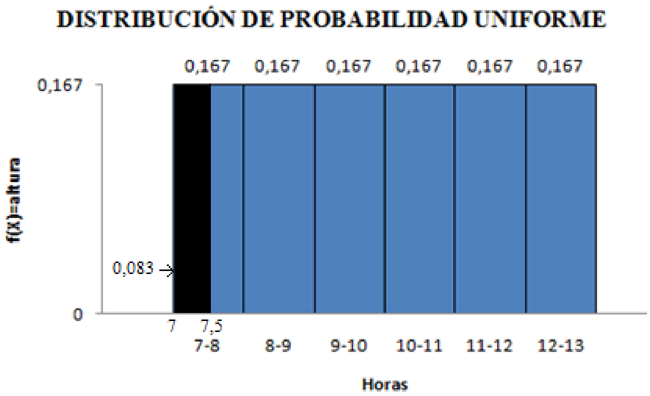
Por lo tanto se debe calcular la probabilidad entre 7 y 7,5

Aplicando la fórmula de la probabilidad entre dos valores se obtiene:

$$P(X_1 \leq X \leq X_2) = \frac{X_2 - X_1}{b-a}$$

$$P(7 \leq X \leq 7{,}5) = \frac{7{,}5-7}{13-7} = \frac{0{,}5}{6} = 0{,}0833$$

En el siguiente gráfico se muestra la probabilidad calculada:



6) Se debe calcular la probabilidad entre las 10:00 y las 12:15

Como 12:15 = 12horas + 15 minutos, y el porcentaje que representa 15 minutos de una hora es:

$$\frac{15}{60} = 0{,}25 \Rightarrow 12{:}15 = 12{,}25\ horas$$

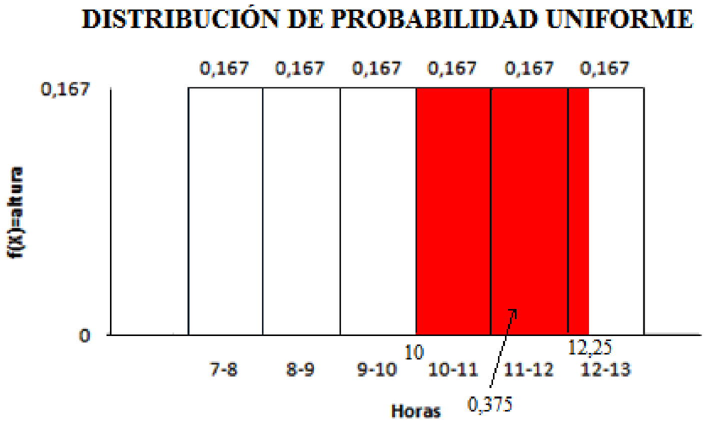
Por lo tanto de debe calcular la probabilidad entre 10 y 12,25

Aplicando la fórmula de la probabilidad entre dos valores se obtiene:

$$P(X_1 \leq X \leq X_2) = \frac{X_2 - X_1}{b-a}$$

$$P(10 \leq X \leq 12{,}25) = \frac{12{,}25-10}{13-7} = \frac{2{,}25}{6} = 0{,}375$$

En el siguiente gráfico se muestra la probabilidad calculada:



Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	7		a	7	=MIN(A1:A7)
2	8		b	13	=MAX(A1:A7)
3	9				
4	10		$f(x) = \frac{1}{b - a}$	0,167	=1/(D2-D1)
5	11				
6	12		$\mu = \frac{a + b}{2}$	10	=PROMEDIO(D1:D2)
7	13				
8			$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$	3	=(D2-D1)^2/12
9					
10			σ	1,732	=RAIZ(D8)
11					
12			X_1	7	
13			X_2	7,5	
14			$P(X_1 \leq X \leq X_2) = \frac{X_2 - X_1}{b - a}$	0,083	=(D13-D12)/(D2-D1)
15					
16					
17			X_1	10	
18			X_2	12,25	
19			$P(X_1 \leq X \leq X_2) = \frac{X_2 - X_1}{b - a}$	0,375	=(D18-D17)/(D2-D1)
20					

D) DISTRIBUCIÓN NORMAL

i) Reseña histórica

Abrahan De Moivre (1733) fue el primero en obtener la ecuación matemática de la curva normal. Kart Friedrich Gauss y Márquez De Laplece (principios del siglo diecinueve) desarrollaron más ampliamente los conceptos de la curva. La curva normal también es llamada curva de error, curva de campana, curva de Gauss, distribución gaussiana o curva de De Moivre.

Su altura máxima se encuentra en la media aritmética, es decir su ordenada máxima corresponde a una abscisa igual a la media aritmética. La asimetría de la curva normal es nula y por su grado de apuntamiento o curtosis se clasifica en mesocúrtica.

ii) Ecuación

Su ecuación matemática de la función de densidad es:

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Donde:

$\sigma = desviación\ estándar$

$\sigma^2 = varianza$

$\pi = 3{,}141592654 \ldots\ldots constante\ matemática$

$e = 2{,}7182818 \ldots\ldots constante\ matemática$

X = valor en el eje horizontal

Y = altura de la curva para cualquier valor de x

$\mu = media\ aritmética$

Cuando se expresa la variable x en unidades estándar (fórmula de estandarización)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

La ecuación anterior es reemplazada por la llamada forma canónica, la cual es

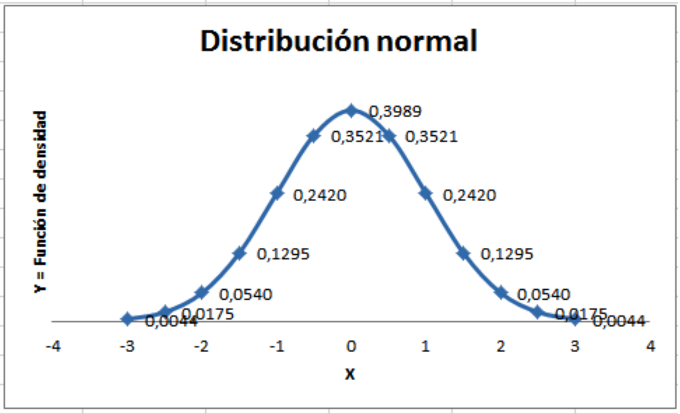
$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

Para calcular Y en Excel se procede de la siguiente manera:

a) Se ubica valores para X del -3 hasta el 3. Se insertar la función DISTR.NORM.ESTAND.N. En la ventana de argumentos de función, en Z se seleccionada A2 que representa al -3, y en Acumulado es escribe FALSO. Clic en Aceptar. Se arrastra con el mouse para obtener los demás valores.

b) Para obtener la gráfica se inserta gráfico de dispersión.

	A	B	C
1	X	Y	$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2	-3	0,0044	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A2;FALSO)
3	-2,5	0,0175	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A3;FALSO)
4	-2	0,0540	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A4;FALSO)
5	-1,5	0,1295	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A5;FALSO)
6	-1	0,2420	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A6;FALSO)
7	-0,5	0,3521	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A7;FALSO)
8	0	0,3989	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A8;FALSO)
9	0,5	0,3521	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A9;FALSO)
10	1	0,2420	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A10;FALSO)
11	1,5	0,1295	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A11;FALSO)
12	2	0,0540	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A12;FALSO)
13	2,5	0,0175	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A13;FALSO)
14	3	0,0044	=DISTR.NORM.ESTAND.N(A14;FALSO)
15			



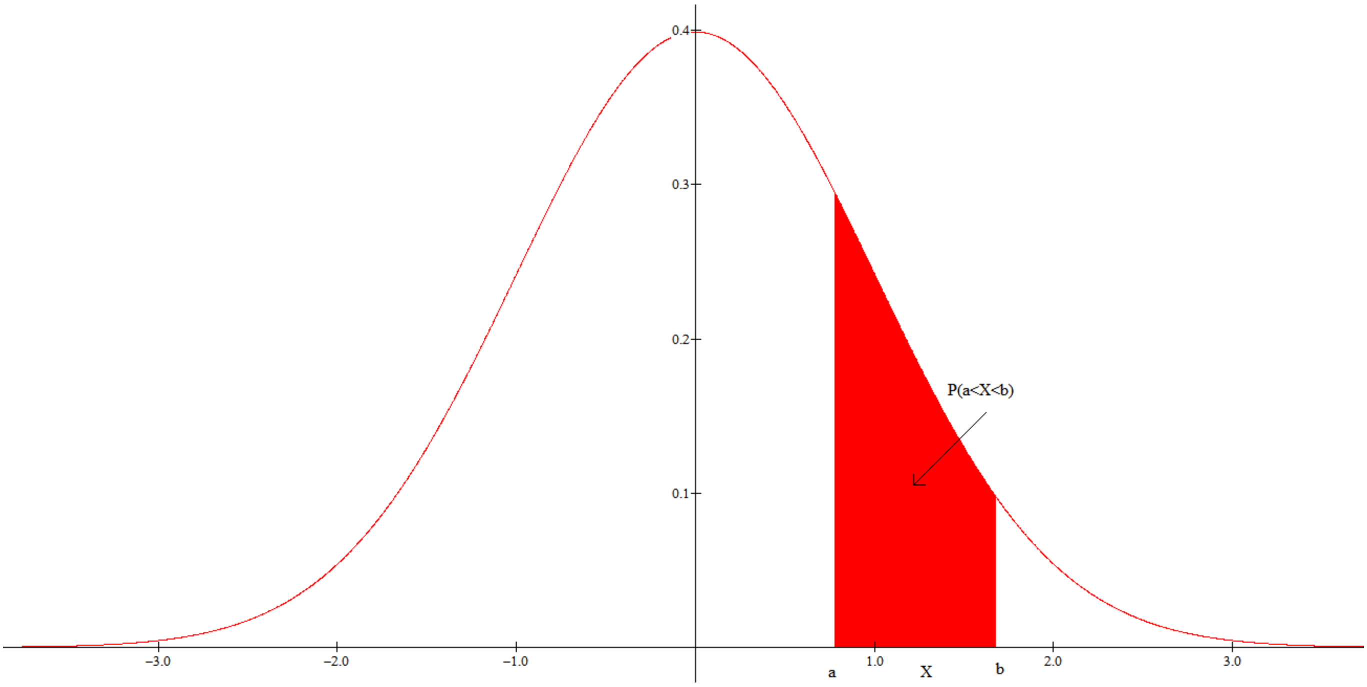
Nota: No existe una única distribución normal, sino una familia de distribuciones con una forma común, diferenciadas por los valores de su media y su varianza. De entre todas ellas, la más utilizada es la **distribución normal estándar**, que corresponde a una distribución con una media aritmética de 0 y una desviación típica de 1.

iii) Área bajo la curva

El área total limitada por la curva y el eje "X" es 1, por lo tanto, el área bajo la curva entre X = a y X = b, con a < b, representa la probabilidad de que X esté entre a y b. Esta probabilidad se denota por:

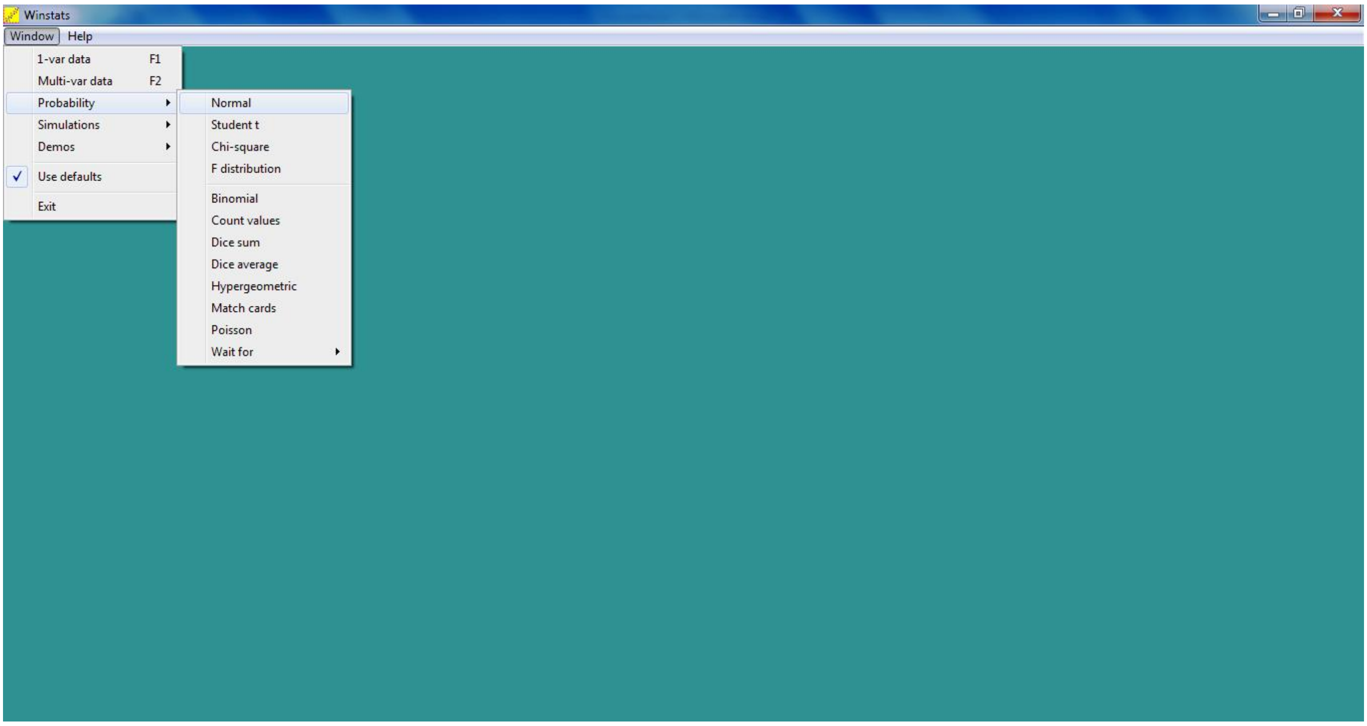
$$P(a < X < b)$$

Esta probabilidad se ilustra en el siguiente gráfico elaborado con el programa Winstats.

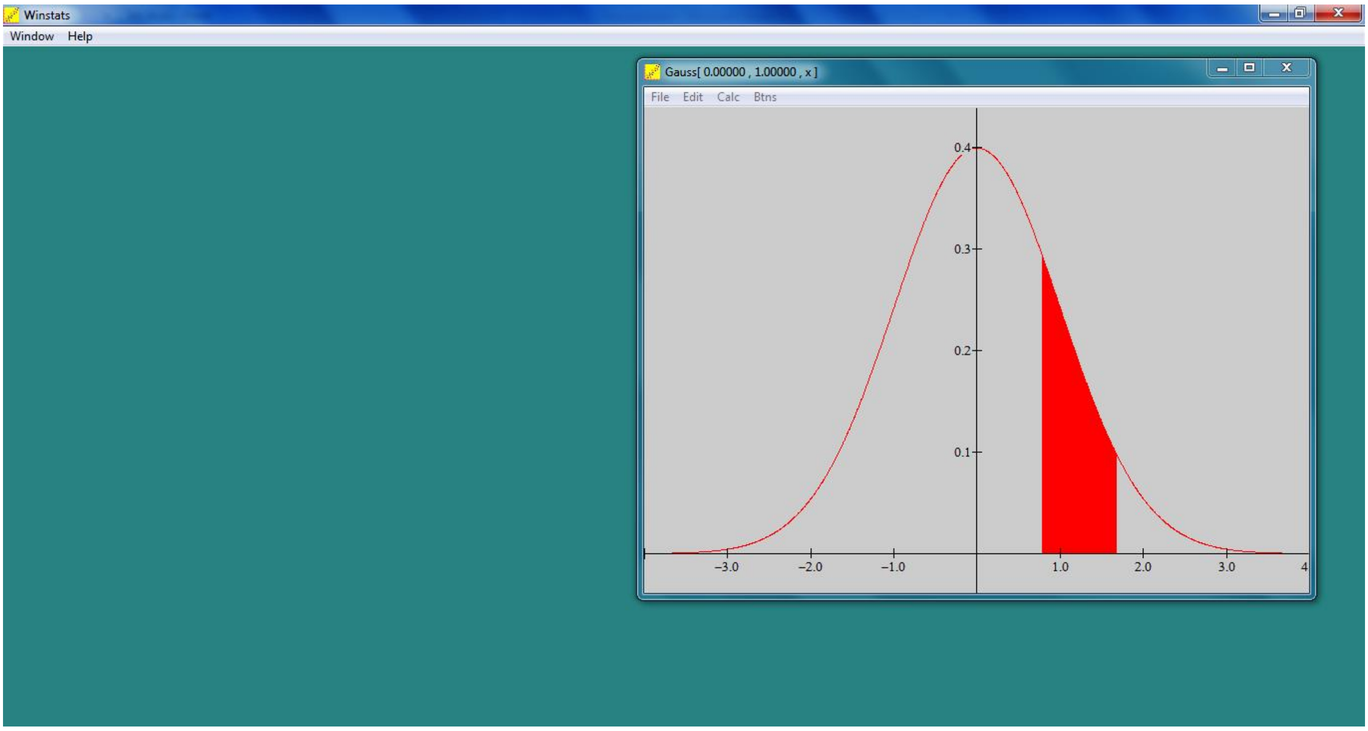


Para elaborar el gráfico se procede de la siguiente manera:

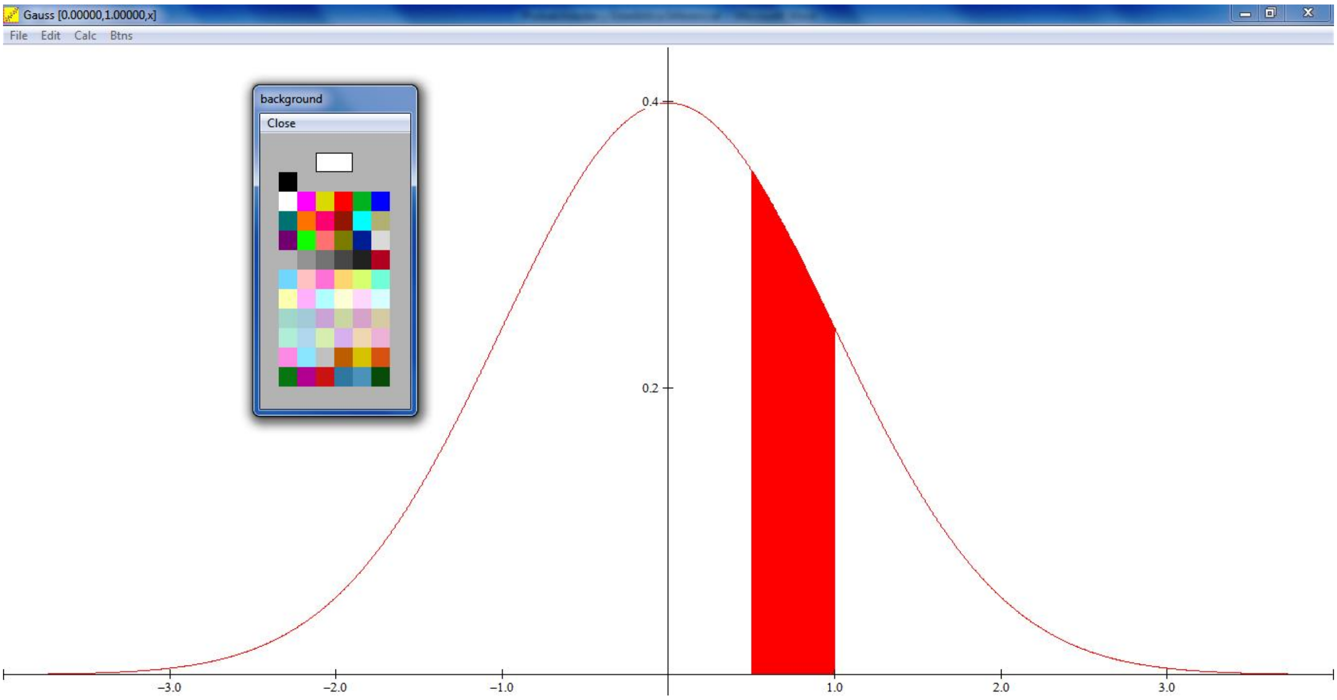
a) Se abre el programa. Clic en Window- Probability



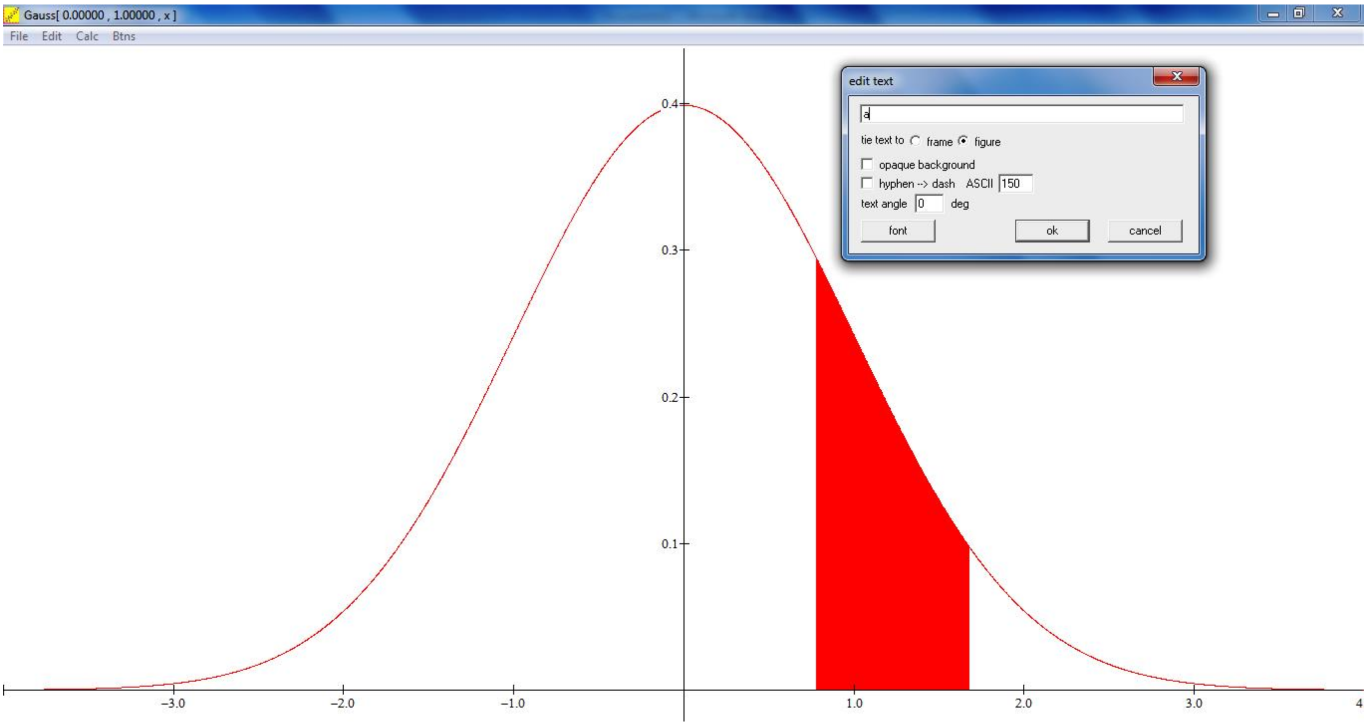
b) Clic en Normal



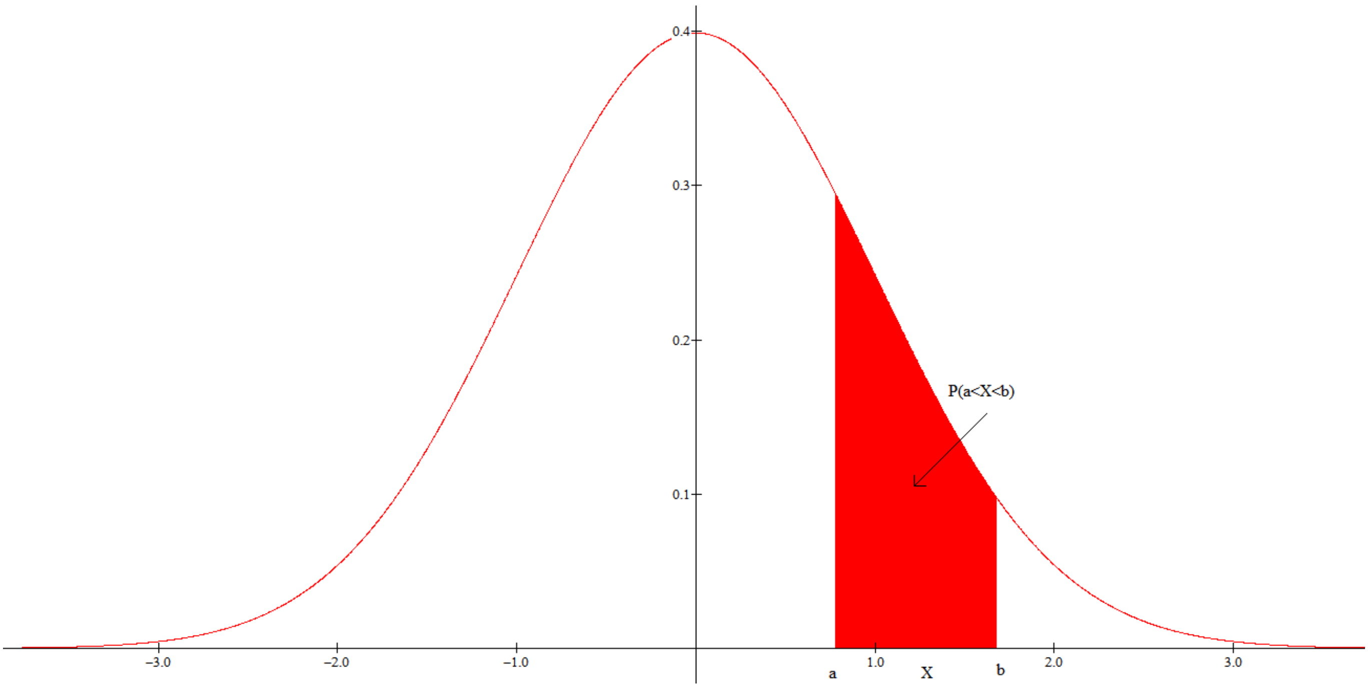
c) Para cambiar el color del fondo, maximizar la ventana de la curva. Clic en Edit-Colors y luego en Window background. Seleccionar el color blanco para el fondo.



d) Para escribir, clic en Btns y luego en Text mode. Clic derecho en cualquier parte de la pantalla. Luego escribir en la venta edit text. Clic en ok



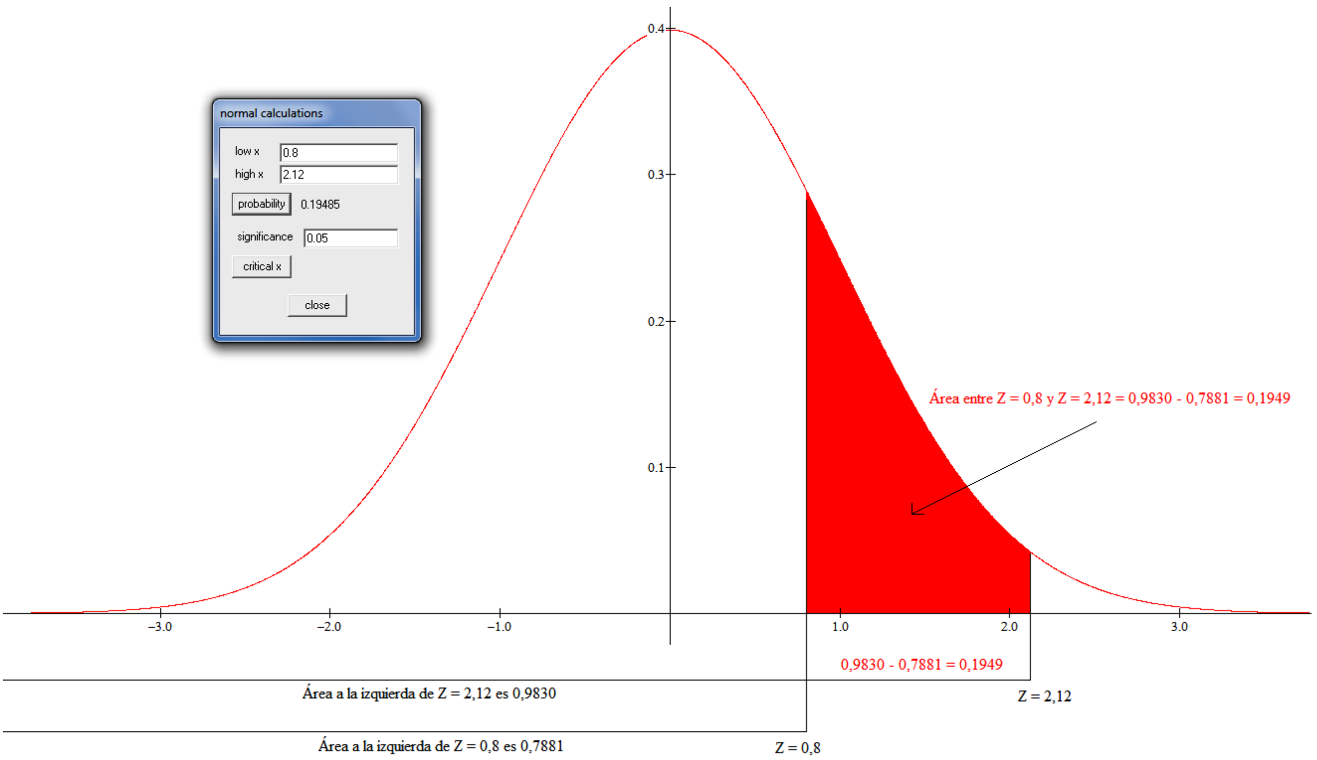
e) Se obtiene el siguiente gráfico



Ejemplo ilustrativo

Averigüe el área bajo la curva de distribución normal entre Z = 0,8 y Z = 2,12

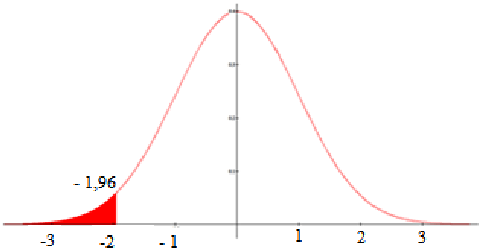
Solución:
Realizando el gráfico en Winstats y Paint se obtiene:



El área a la izquierda de Z = 0,8 con lectura en la tabla de la distribución normal es 0,7881
El área a la izquierda de Z = 2,12 con lectura en la tabla de la distribución normal es 0,9830

TABLA Nº 3
DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

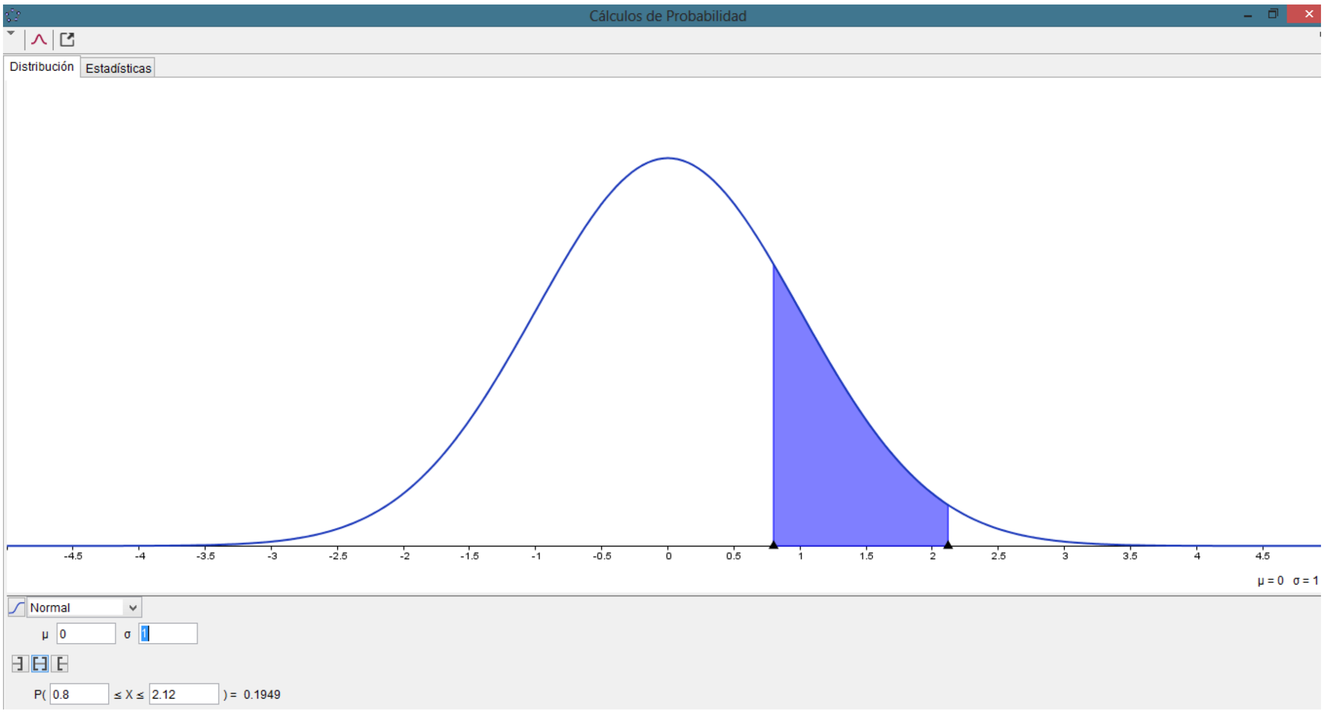


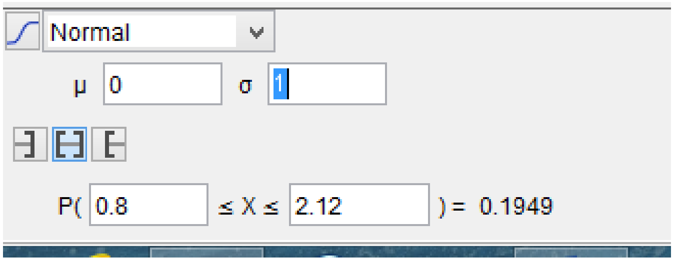
Ejemplo:
$P(Z \leq -1{,}96) = 0{,}0250$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
	⋮		⋮							
0,8	**0,7881**	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	**0,9830**	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857

El área Z = 0,8 y Z = 2,12 es 0,9830 – 0,7881 = 0,1949

Los cálculos en GeoGebra se presentan en la siguiente figura:





Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F
1	Z_1	0,8				
2	Z_2	2,12				
3	$\acute{A}rea\ a\ la\ izquierda\ de\ Z_1$	0,7881	=DISTR.NORM.ESTAND.N(B1;VERDADERO)			
4	$\acute{A}rea\ a\ la\ izquierda\ de\ Z_2$	0,9830	=DISTR.NORM.ESTAND.N(B2;VERDADERO)			
5	$P(0,8 \leqslant X \leqslant 2,12)$	0,1949	=B4-B3			