DISTRIBUCIONES DISCRETAS CON EXCEL, WINSTATS Y GEOGEBRA

A) INTRODUCCIÓN

Una distribución de probabilidad es una representación de todos los resultados posibles de algún experimento y de la probabilidad relacionada con cada uno.
Una distribución de probabilidad es discreta cuando los resultados posibles del experimento son obtenidos de variables aleatorias discretas, es decir, de variables que sólo puede tomar ciertos valores, con frecuencia números enteros, y que resultan principalmente del proceso de conteo.

Ejemplos de variables aleatorias discretas son:
Número de caras al lanzar una moneda
El resultado del lanzamiento de un dado
Número de hijos de una familia
Número de estudiantes de una universidad

Ejemplo ilustrativo
Sea el experimento aleatorio de lanzar 2 monedas al aire. Determinar la distribución de probabilidades del número de caras.

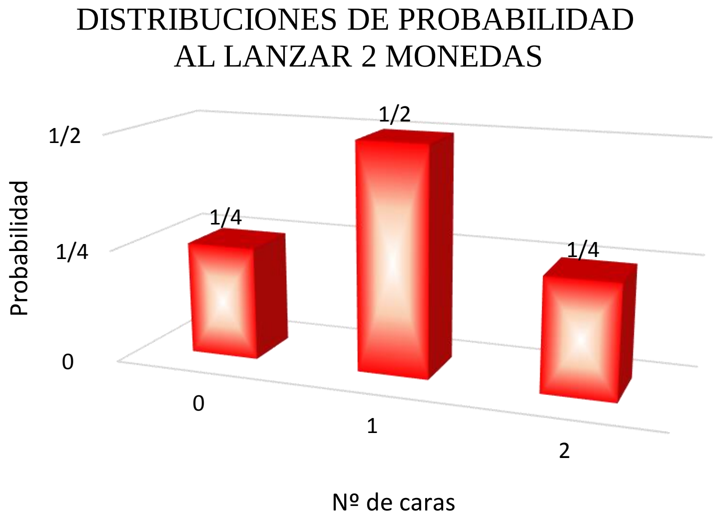
Solución:

El espacio muestral es S = {CC, CS, SC, SS}
La probabilidad de cada punto muestral es de 1/4, es decir, P(CC) = P(CS) = P(SC) = P(SS) = 1/4

La distribución de probabilidades del número de caras se presenta en la siguiente tabla:

Resultados (N° de Caras)	Probabilidad
0	1/4 = 0,25 = 25%
1	2/4 = 0,50 = 50%
2	1/4 = 0,25 = 25%

El gráfico de distribuciones de probabilidad en 3D elaborado en Excel se muestra en la siguiente figura:



Interpretación:
La probabilidad de obtener 0 caras al lanzar 2 monedas al aire es de 1/4 = 0,25 = 25%
La probabilidad de obtener una cara al lanzar 2 monedas al aire es de 2/4 = 0,5 = 50%
La probabilidad de obtener 2 caras al lanzar 2 monedas al aire es de 1/4 = 0,25 = 25%

B) LA MEDIA Y LA VARIANZA DE LAS DISTRIBUCIONES DISCRETAS

i) Media

La media llamada también valor esperado, esperanza matemática o simplemente esperanza de una distribución de probabilidad discreta es la media aritmética ponderada de todos los resultados posibles en los cuales los pesos son las probabilidades respectivas de tales resultados. Se halla multiplicando cada resultado posible por su probabilidad y sumando los resultados. Se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$\mu = \mathrm{E(X)} = \Sigma(x_i \cdot P(x_i))$$

Donde:
$\mu = \mathrm{E(X)}$ = Media, Valor Esperado, Esperanza Matemática o simplemente Esperanza
x_i = Posible resultado
$P(x_i)$ = Probabilidad del posible resultado

ii) Varianza

La varianza es el promedio de las desviaciones al cuadrado con respecto a la media. La varianza mide la dispersión de los resultados alrededor de la media y se halla calculando las diferencias entre cada uno de los resultados y su media, luego tales diferencias se elevan al cuadrado y se multiplican por sus respectivas probabilidades, y finalmente se suman los resultados. Se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = \Sigma[(x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)]$$

Nota: La varianza se expresa en unidades al cuadrado, por lo que es necesario calcular la desviación estándar que se expresa en las mismas unidades que la variable aleatoria y que por lo tanto tiene una interpretación más lógica de la dispersión de los resultados alrededor de la media. La desviación estándar se calcula así: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Ejemplo ilustrativo:
Hallar la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar del número de caras al lanzar tres monedas al aire.

Solución:
El espacio muestral es S = {CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS}
La probabilidad de cada punto muestral es de 1/8

Se elabora las distribuciones de probabilidad y se realiza los cálculos respectivos. Estos resultados se presentan en la siguiente tabla:

x_i	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$	$(x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$
0	1/8	0·1/8 = 0	$(0\text{-}1{,}5)^2 \cdot 1/8 = 0{,}281$
1	3/8	1·3/8 = 3/8	$(1\text{-}1{,}5)^2 \cdot 3/8 = 0{,}094$
2	3/8	2·3/8 = 3/4	$(2\text{-}1{,}5)^2 \cdot 3/8 = 0{,}094$
3	1/8	3·1/8 = 3/8	$(3\text{-}1{,}5)^2 \cdot 1/8 = 0{,}281$
Total	1	1,5	0,750

Observando la tabla se tiene:
$\mu = \mathrm{E(X)} = 1{,}5$; $\sigma^2 = 0{,}75$

Y calculando la desviación estándar se obtiene:
$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$

Los cálculos en Excel de la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	x_i	$P(x_i)$	$(x_i - \mu)^2$		
2	0	1/8	2,25	=(A2-B7)^2	
3	1	3/8	0,25	=(A3-B7)^2	
4	2	3/8	0,25	=(A4-B7)^2	
5	3	1/8	2,25	=(A5-B7)^2	
6					
7	E(X)	1,5	=SUMAPRODUCTO(A2:A5;B2:B5)		
8	σ^2	0,75	=SUMAPRODUCTO(C2:C5;B2:B5)		
9	σ	0,866	=RAIZ(B8)		

Interpretación:
El valor de $\mu = E(X) = 1,5$ significa que si se promedian los resultados del lanzamiento de las tres monedas (teóricamente, un número infinito de lanzamientos), se obtendrá 1,5.
Los valores de $\sigma^2 = 0,75$ y $\sigma = 0,866$ miden la dispersión de los resultados de lanzar las tres monedas alrededor de su media.

C) DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

i) Definición:
Cuando se dispone de una expresión matemática, es factible calcular la probabilidad de ocurrencia exacta correspondiente a cualquier resultado específico para la variable aleatoria.

La *distribución de probabilidad binomial* es uno de los modelos matemáticos (expresión matemática para representar una variable) que se utiliza cuando la variable aleatoria discreta es el número de éxitos en una muestra compuesta por n observaciones.

ii) Propiedades:

- La muestra se compone de un número fijo de observaciones n

- Cada observación se clasifica en una de dos categorías, *mutuamente excluyentes* (los eventos no pueden ocurrir de manera simultánea. Ejemplo: Una persona no puede ser de ambos sexos) y *colectivamente exhaustivos* (uno de los eventos debe ocurrir. Ejemplo: Al lanzar una moneda, si no ocurre cruz, entonces ocurre cara). A estas categorías se las denomina éxito y fracaso.

- La probabilidad de que una observación se clasifique como *éxito*, *p*, es constante de una observación o otra. De la misma forma, la probabilidad de que una observación se clasifique como *fracaso*, *1-p*, es constante en todas las observaciones.

- La variable aleatoria binomial tiene un rango de 0 a n

iii) Ecuación:

$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

Donde:

$P(X)$ =Probabilidad de X éxitos, dadas n y p
n = Número de observaciones
p = Probabilidad de éxitos
$1-p$ = Probabilidad de fracasos
X = Número de éxitos en la muestra (X = 0, 1, 2, 3, 4,……… n)

iv) Media de la distribución binomial
La media μ de la distribución binomial es igual a la multiplicación del tamaño n de la muestra por la probabilidad de éxito p

$$\mu = np$$

v) Desviación estándar de la distribución binomial

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{np(1-p)}$$

Ejemplos ilustrativos

1) Determine P(X = 8) para n = 10 y p = 0,5

Solución:
Aplicando la ecuación se obtiene:

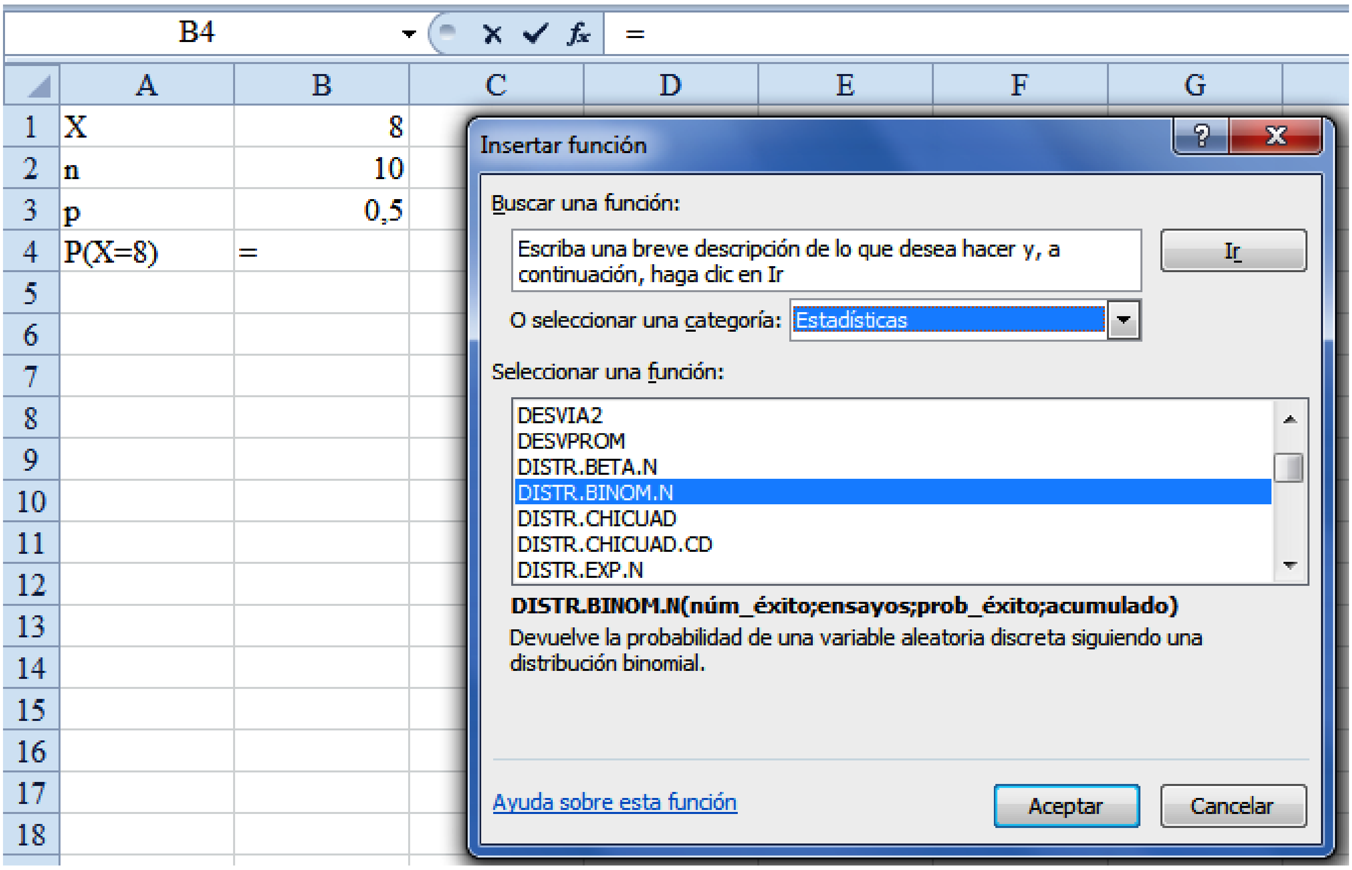
$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(X=8) = \frac{10!}{8!\,(10-8)!} \cdot 0{,}5^8 \cdot (1-0{,}5)^{10-8}$$

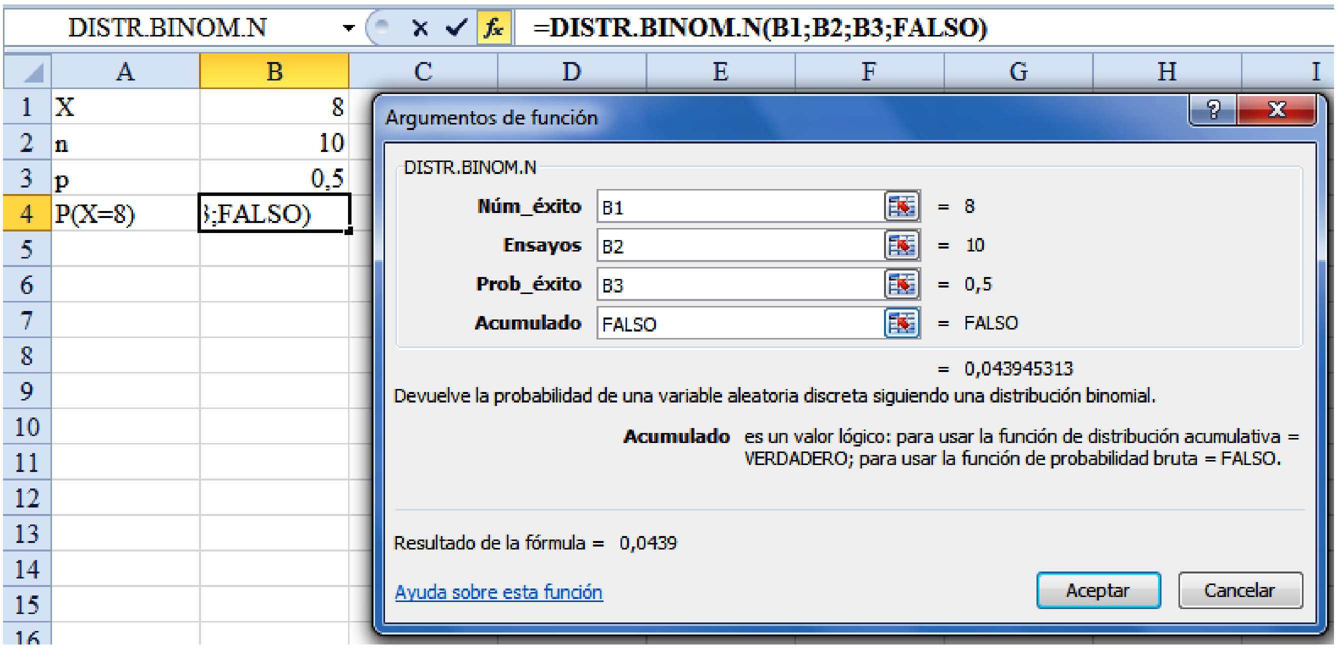
$$P(X=8) = 45 \cdot 0{,}003906 \cdot 0{,}25 = 0{,}0439$$

En Excel se calcula de la siguiente manera:

a) Se escribe los datos y se inserta la función DISTR.BINOM.N como se muestra en la siguiente figura:



b) Clic en Aceptar. Los argumentos de la función escribir como se muestra en la figura:

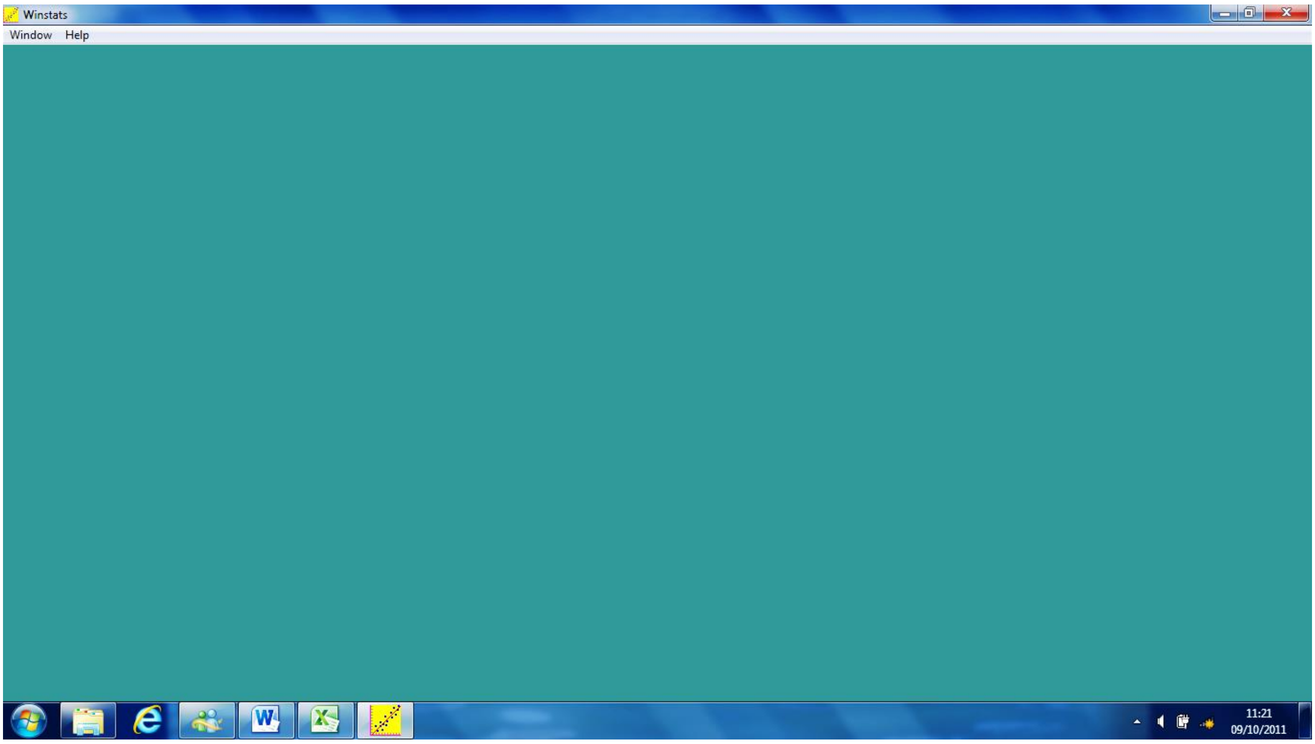


c) Clic en Aceptar

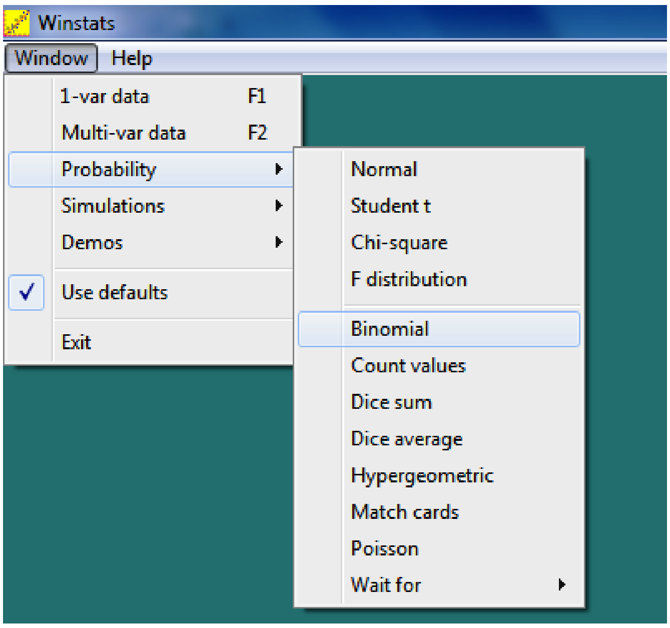
	A	B	C	D	E
1	X	8			
2	n	10			
3	p	0,5			
4	P(X=8)	0,0439	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

En Winstats se procede de la siguiente manera

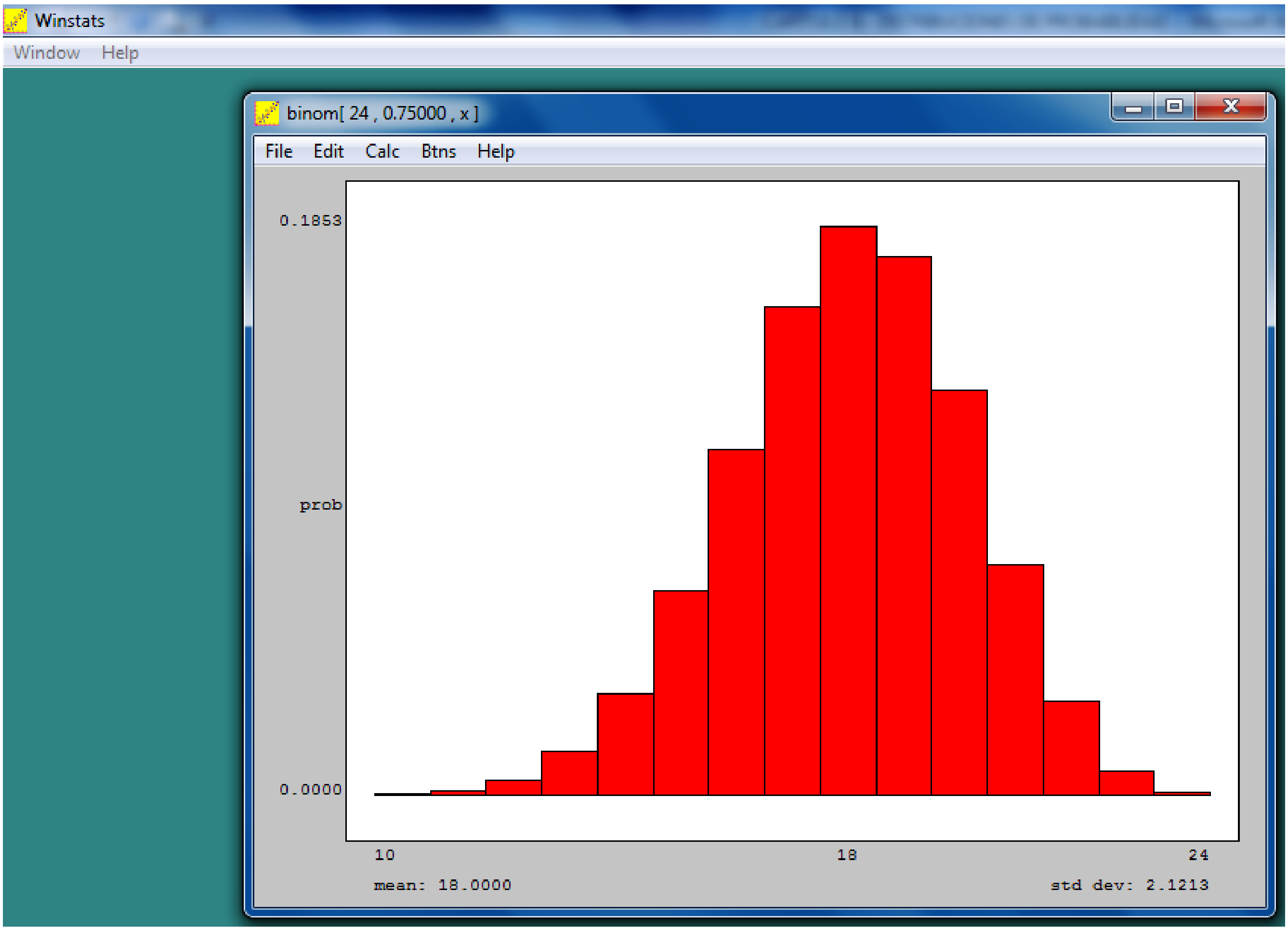
a) Se ingresa al programa Winstats



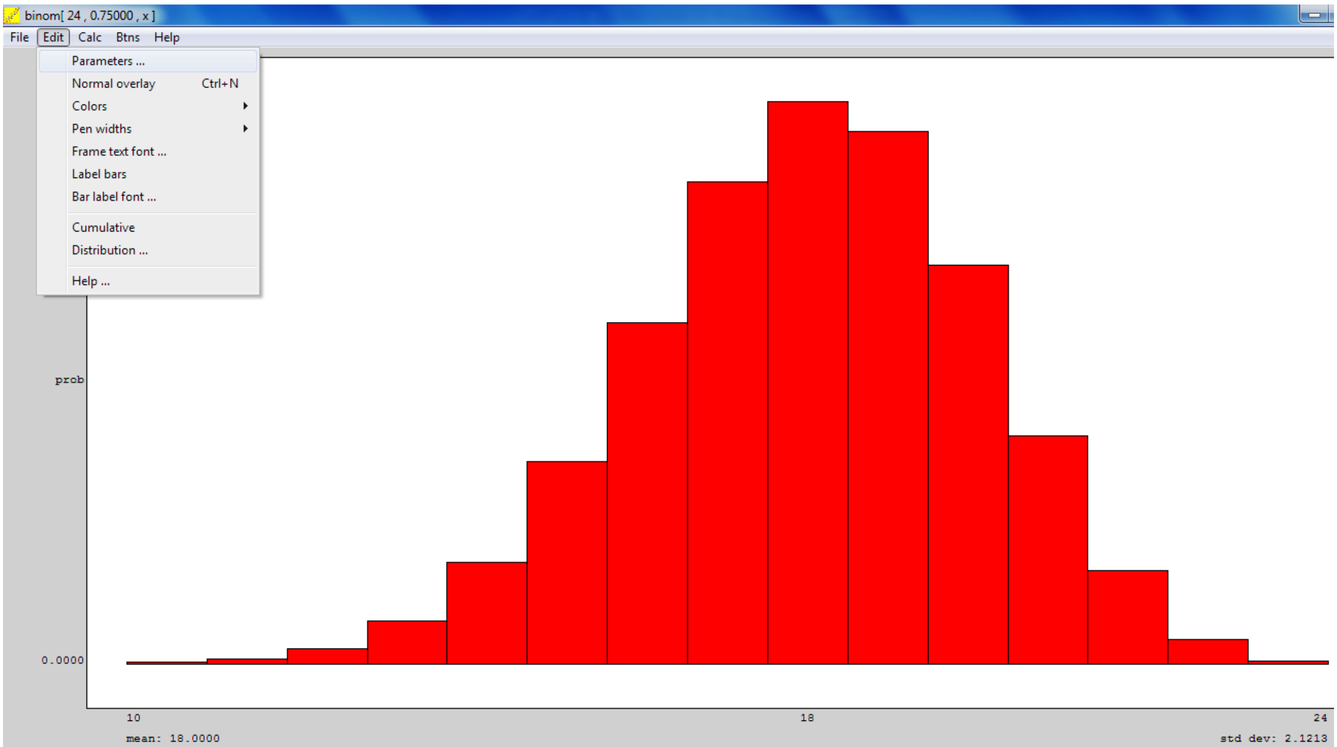
b) Clic en Window y luego en Probability



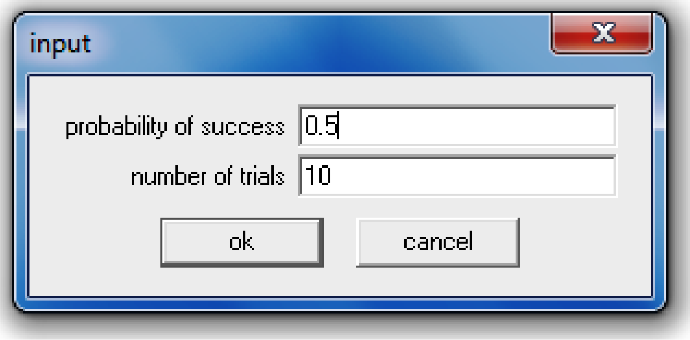
c) En Probability escoger Binomial



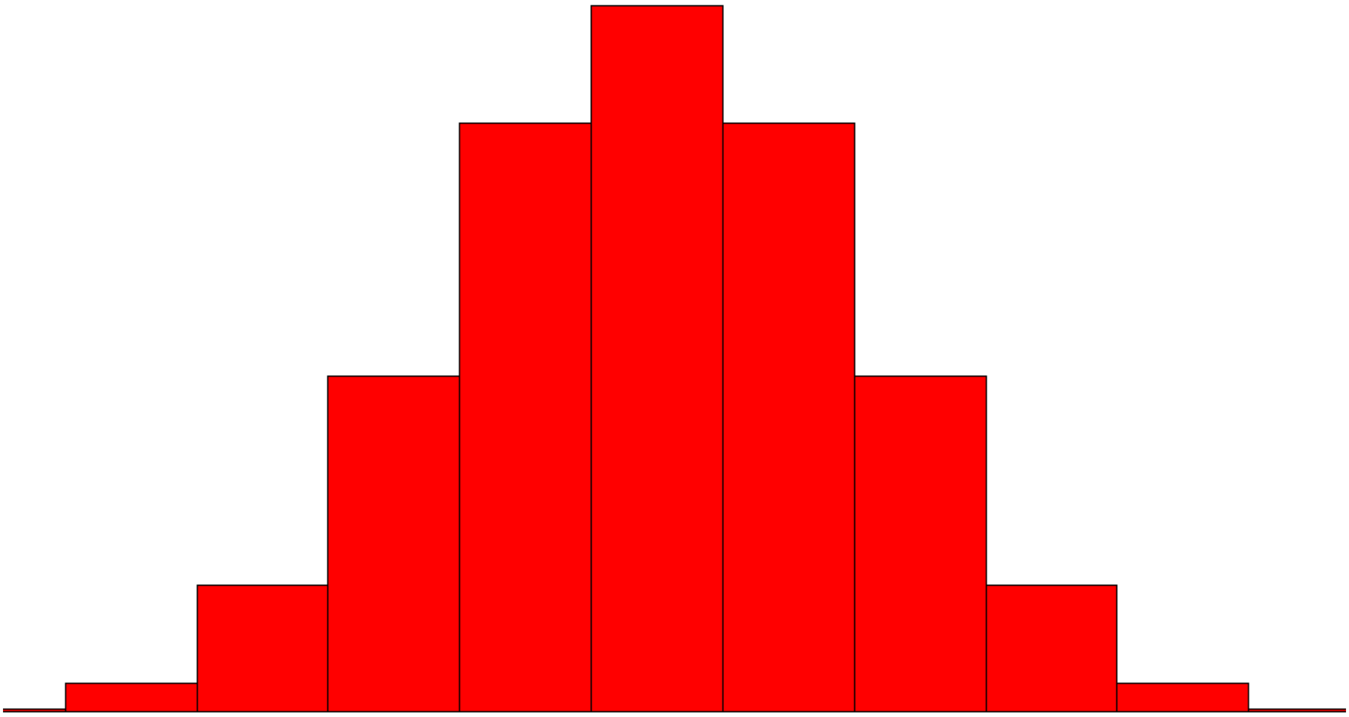
d) Clic en Edit.



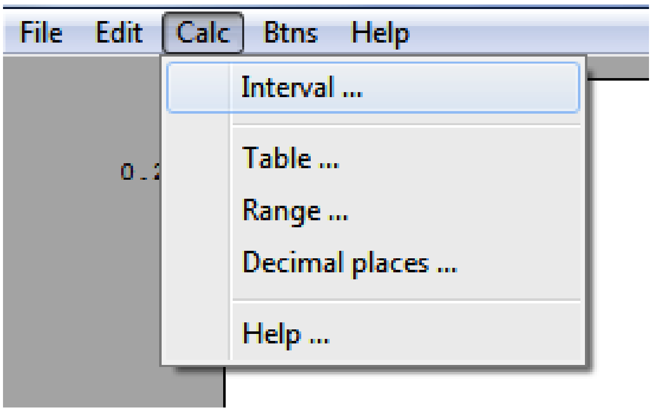
e) Clic en Parameters. En la casilla en probability of success escribir 0,5 y en number of trials escribir 10



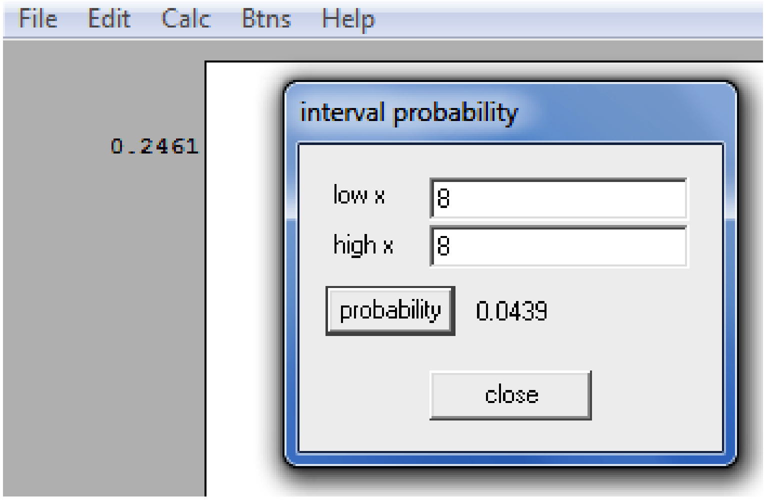
f) Clic en ok

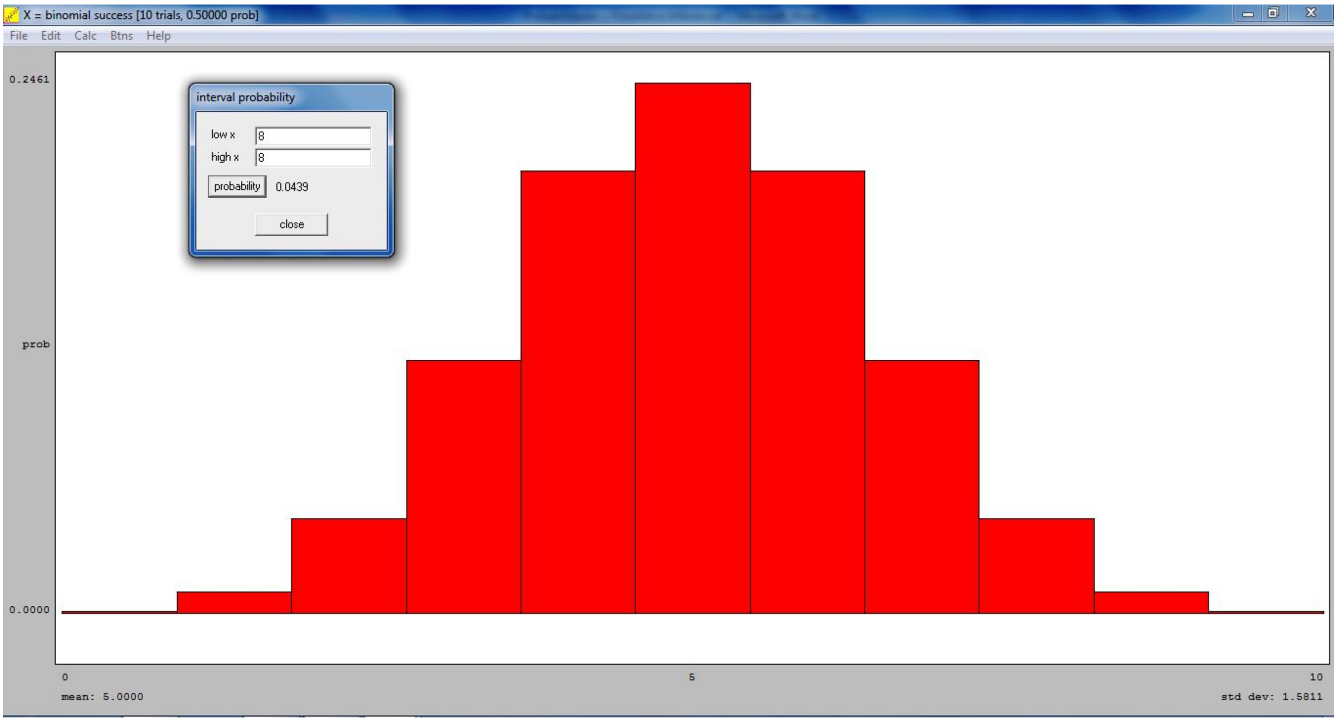


g) Clic en Calc



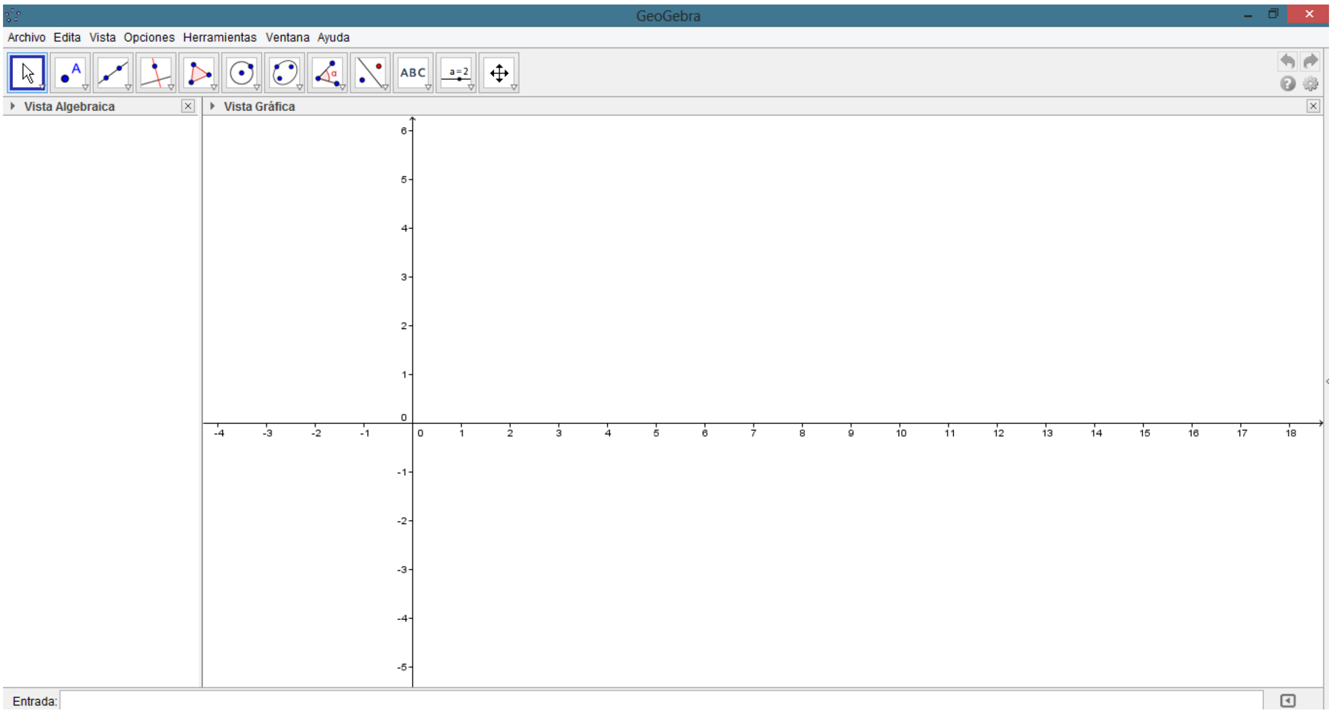
h) Clic en Intervalo. En la casilla low x escribir 8 y en la casilla high x escribir 8. Clic en probability


File Edit Calc Btns Help
0.2461
interval probability
low x
8
high x
8
probability
0.0439
close

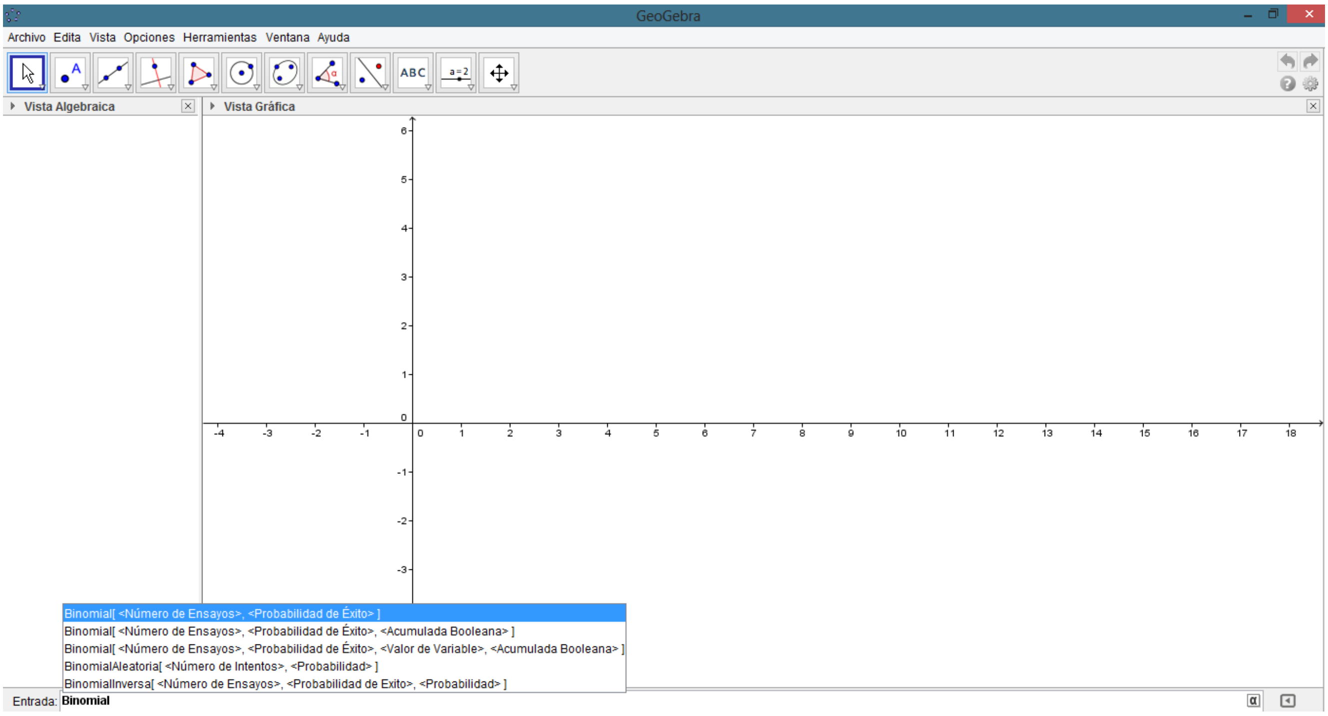

X = binomial success [10 trials, 0.50000 prob]
File Edit Calc Btns Help
0.2461
prob
0.0000
interval probability
low x
8
high x
8
probability
0.0439
close
0
5
10
mean: 5.0000
std dev: 1.5811

En GeoGebra se procede de la siguiente manera:

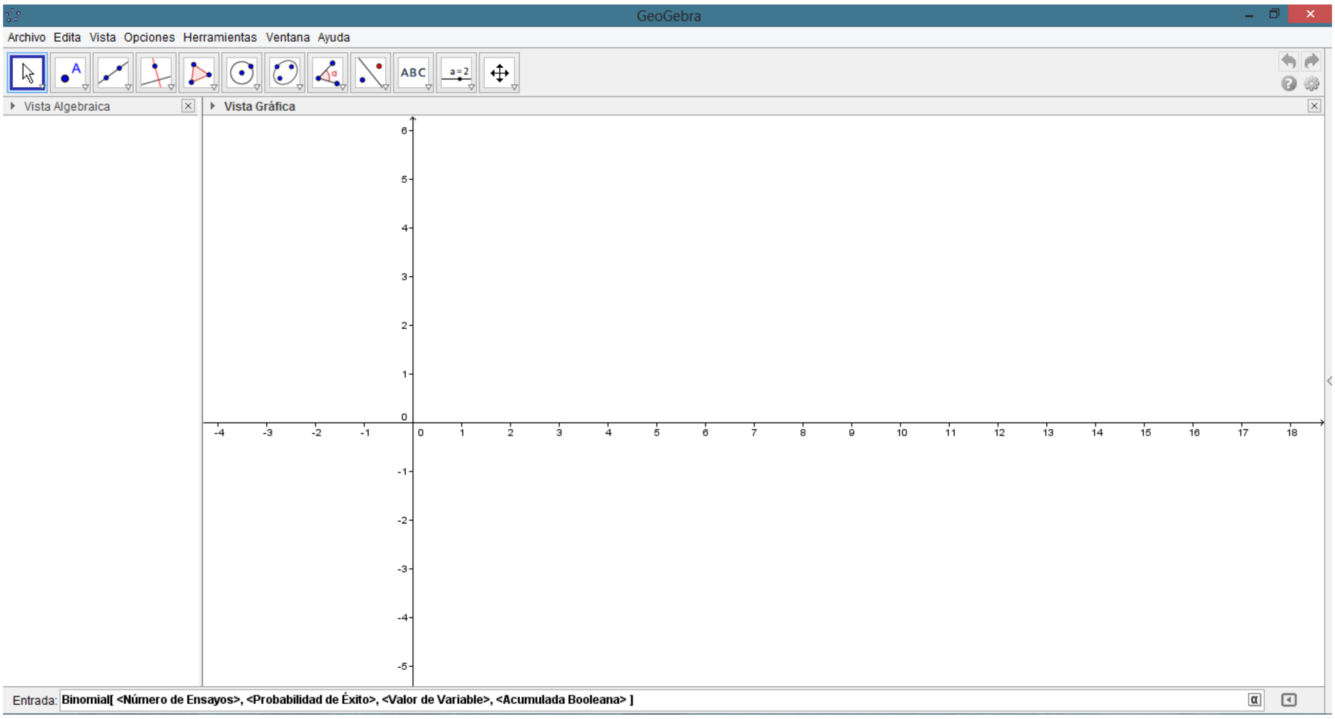
a) Se ingresa al programa



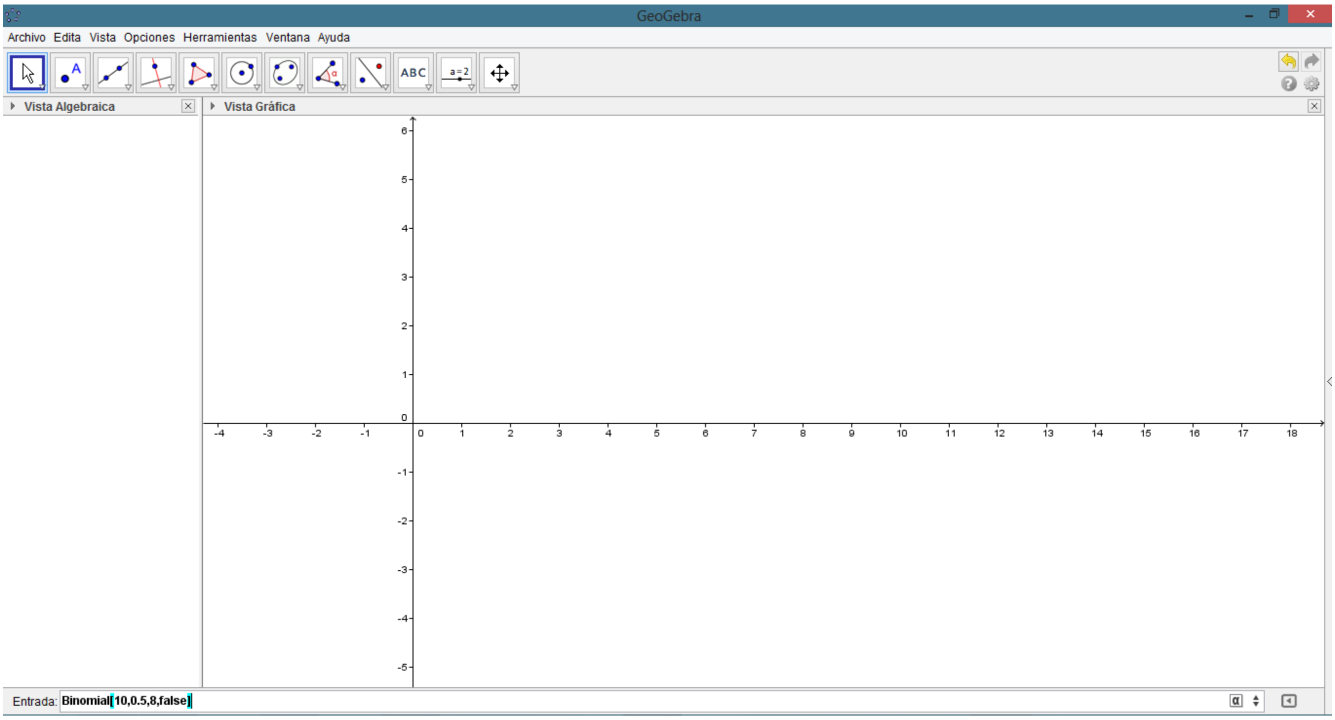
b) En la casilla Entrada escribir Binomial para que se desplieguen algunas opciones.



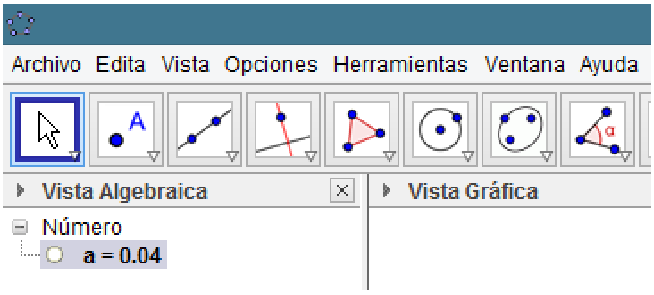
c) Seleccionar la opción Binomial[<Número de Ensayos>, <Probabilidad de Éxito>, <Valor de Variable>, <Acumulada Booleana>]

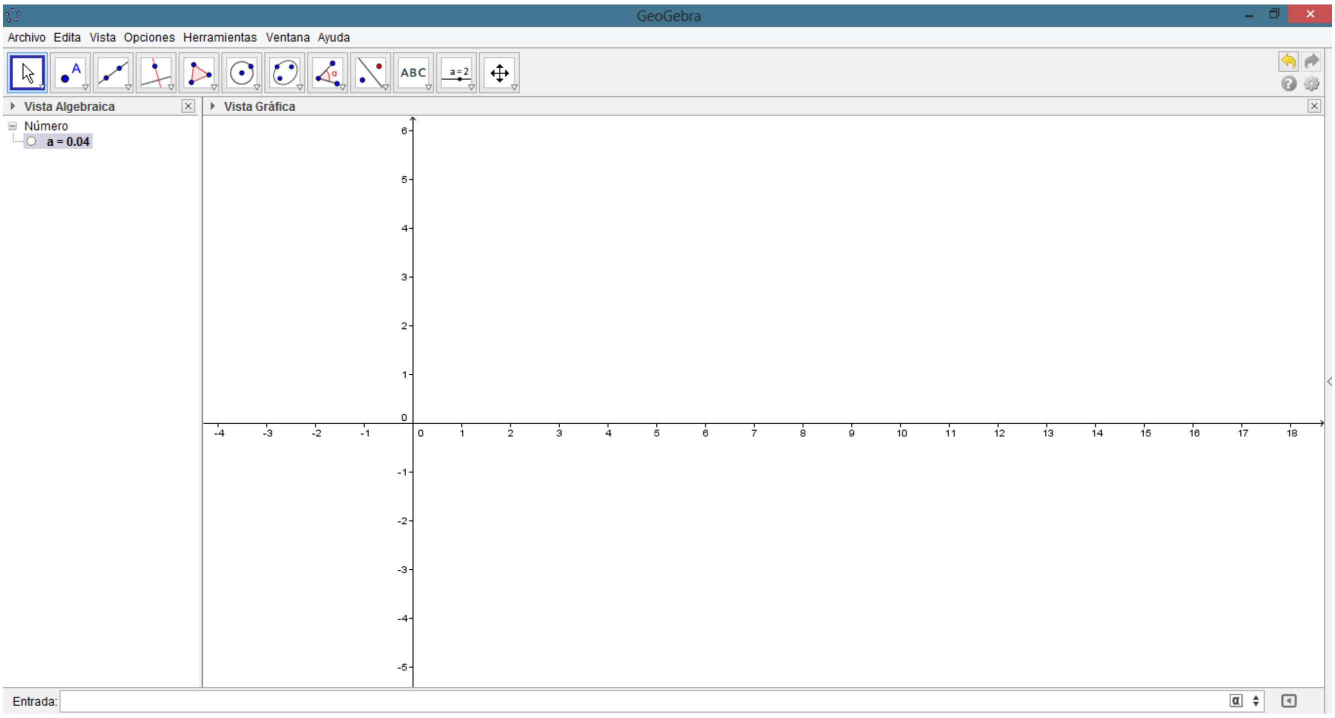


d) Escribir 10 en <Número de Ensayos>, 0.5 en <Probabilidad de Éxito>, 8 en <Valor de Variable> y false en <Acumulada Booleana>

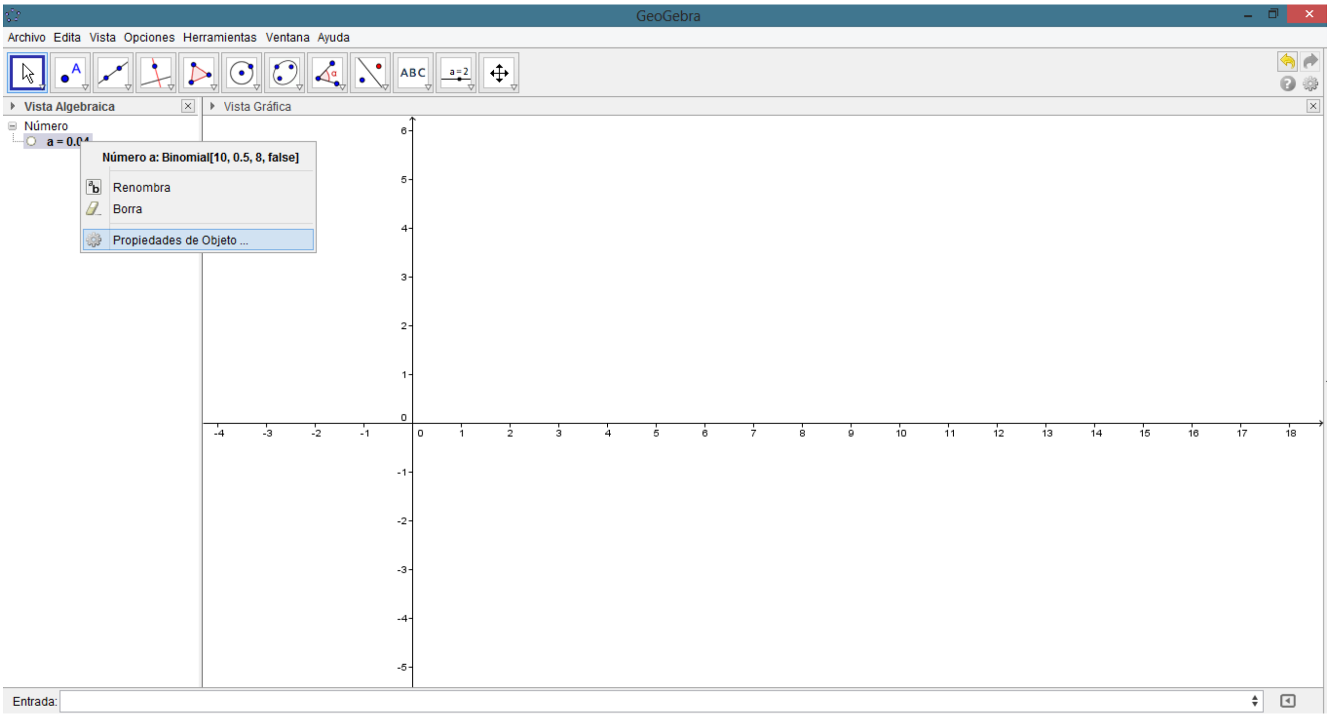


e) Enter

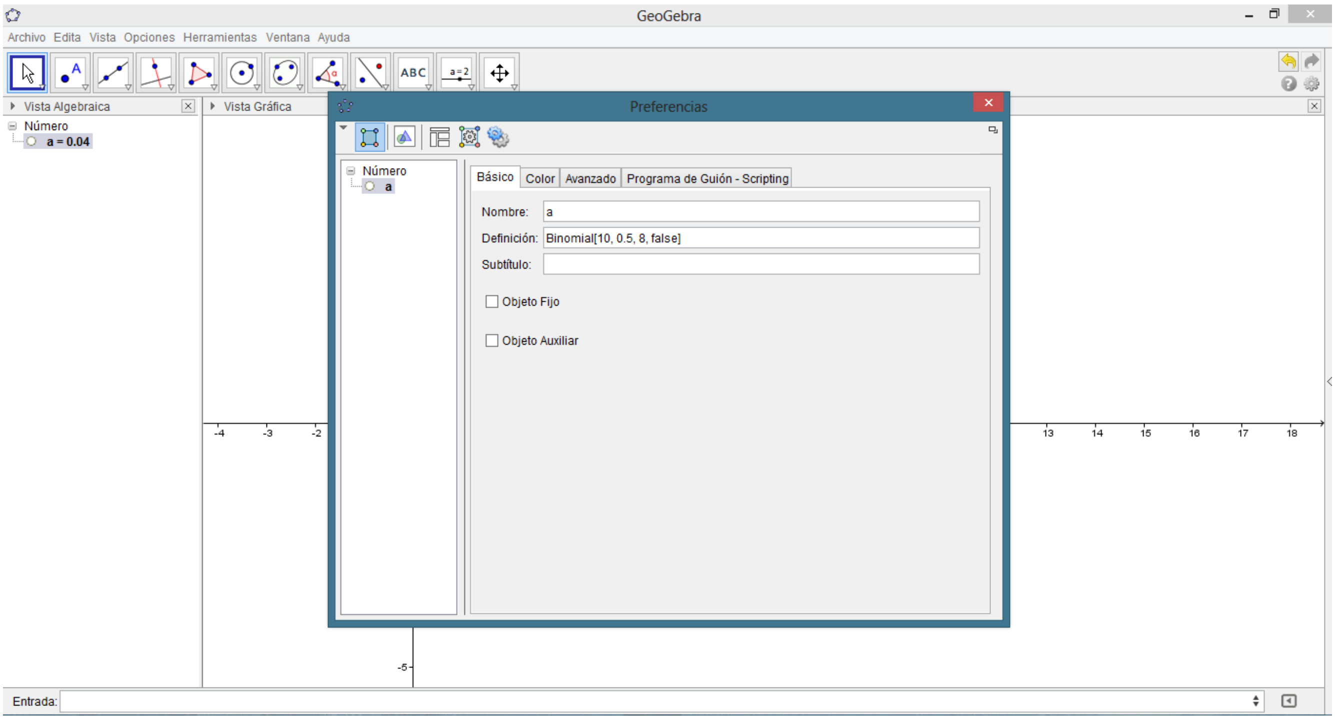




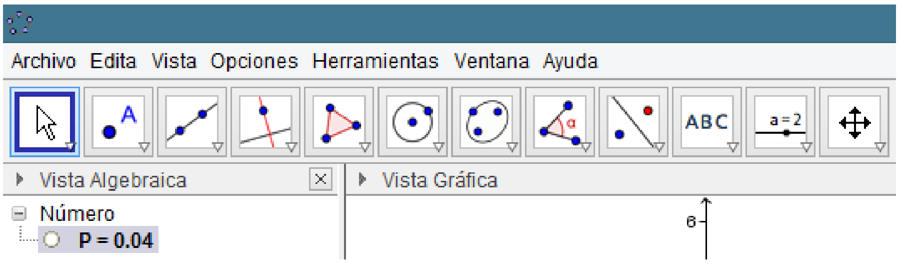
f) Para editar. Clic derecho en a = 0.04

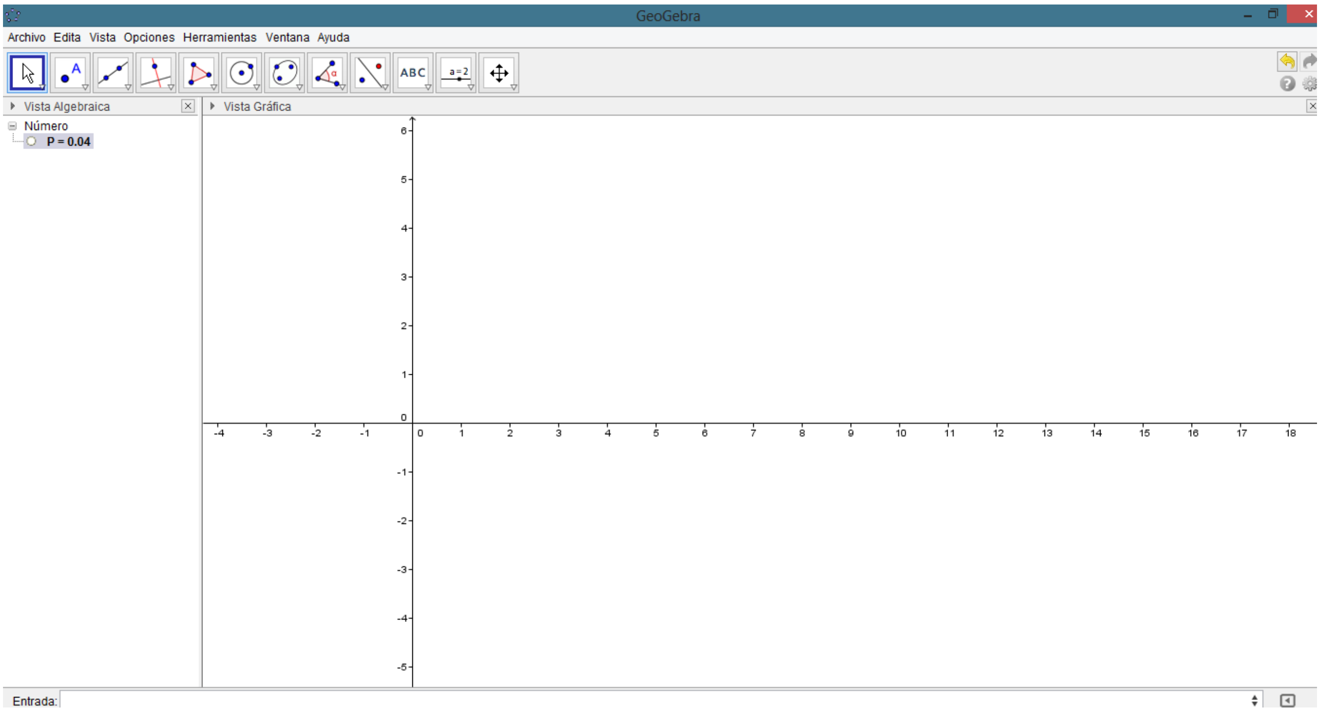


g) Escoger la opción Propiedades de Objeto



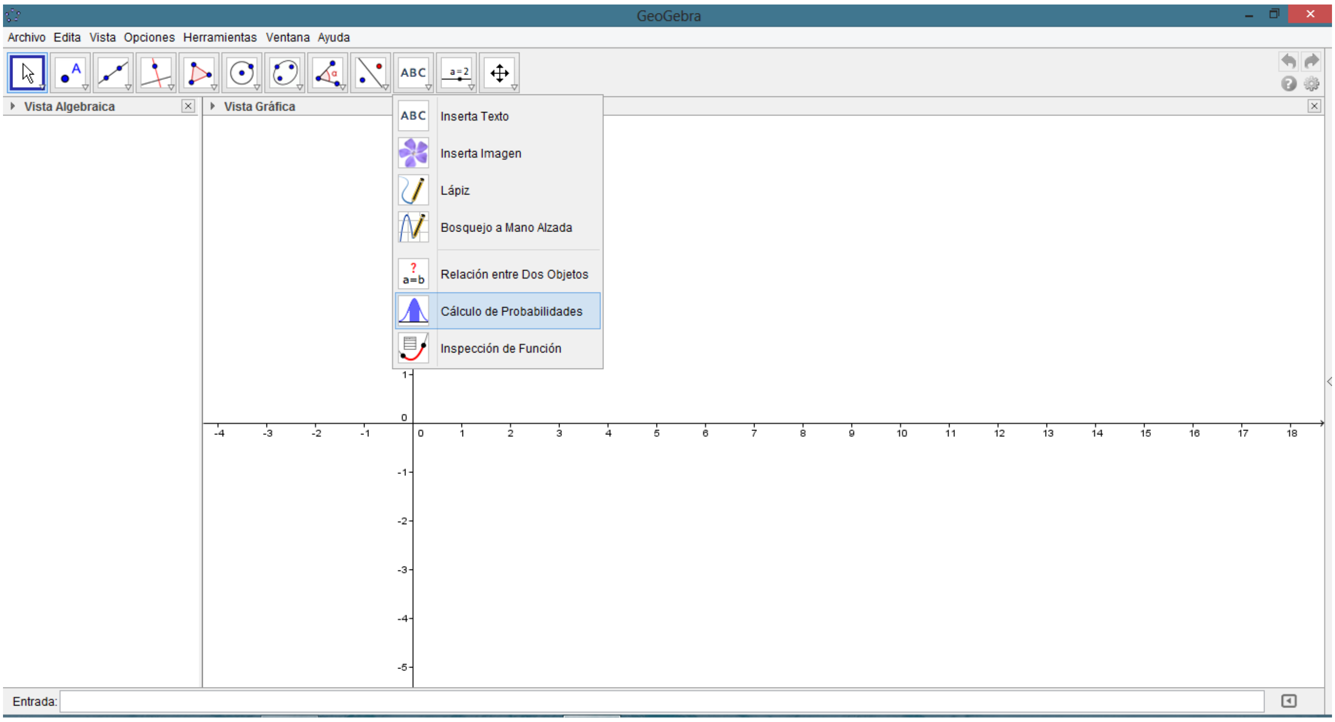
h) En la ventana Referencias, en la casilla Nombre, borrar la letra a y escribir P. Cerrar la ventana Refreencias



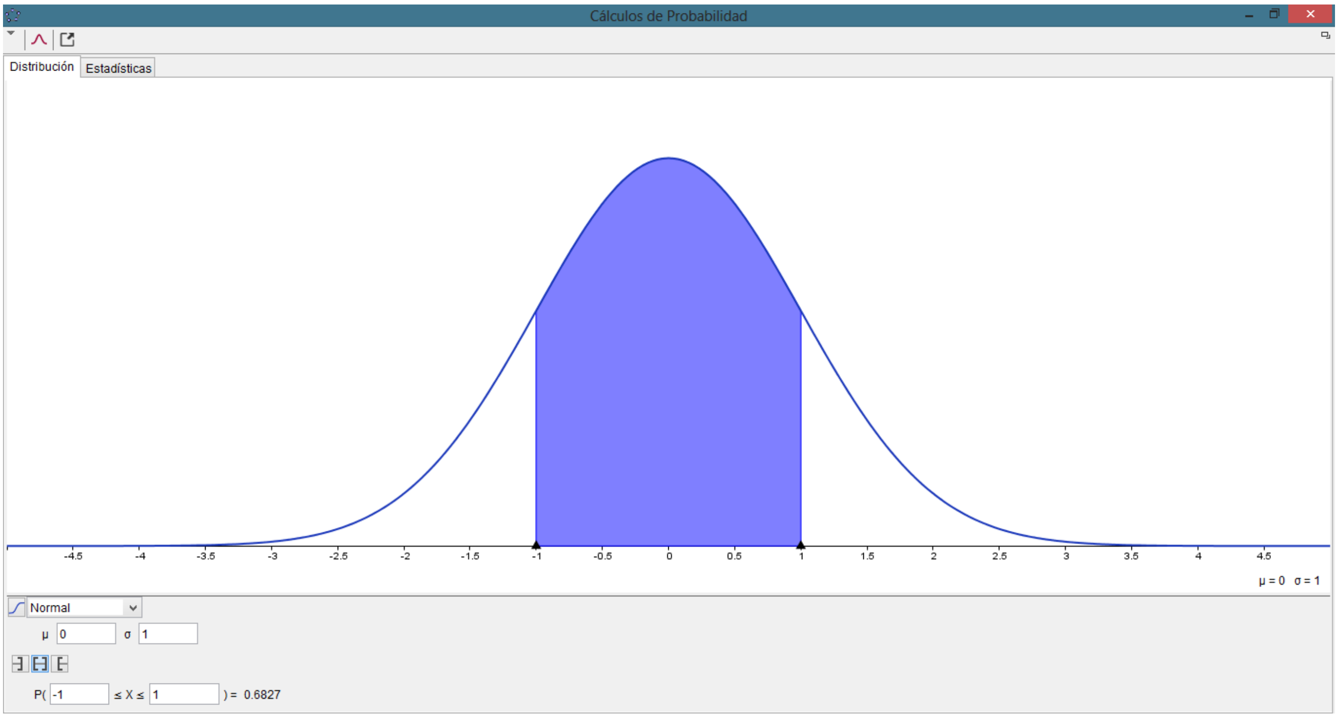


Para calcular con el gráfico en GeoGebra:

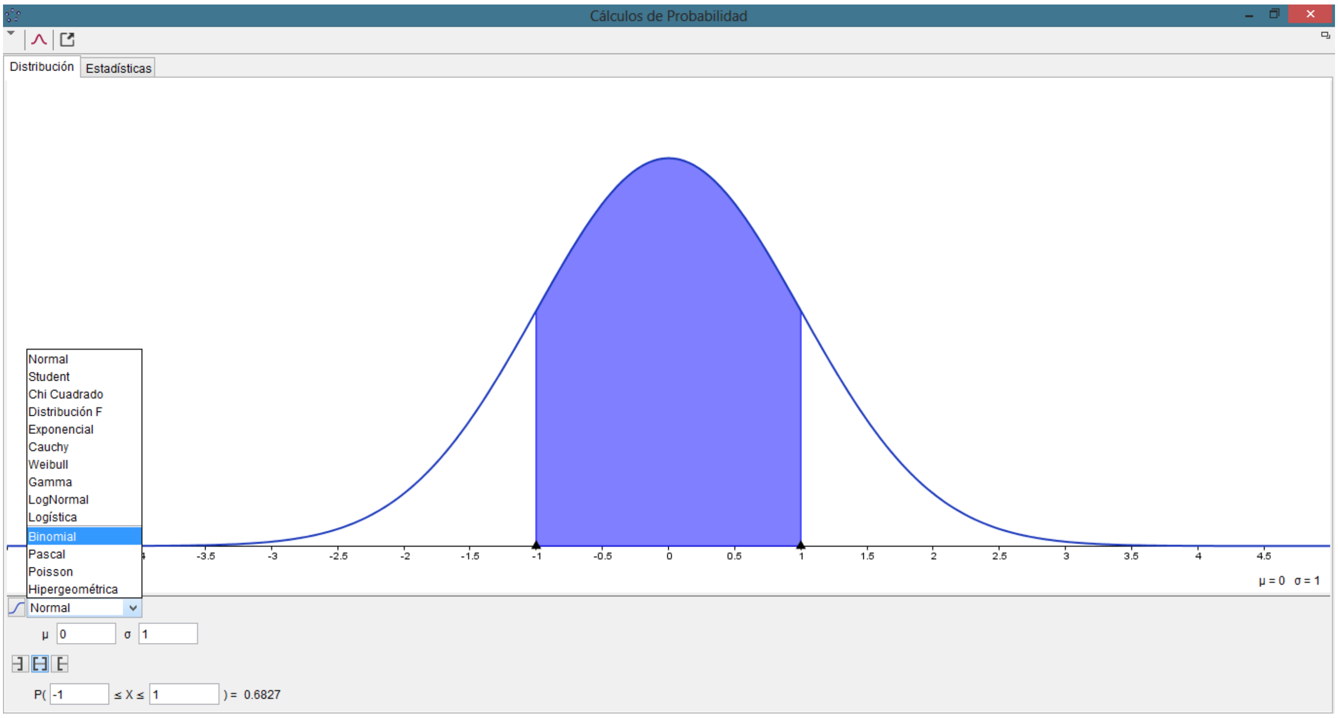
a) Ingresar al programa. En insertar texto, clic en punto de posición del texto



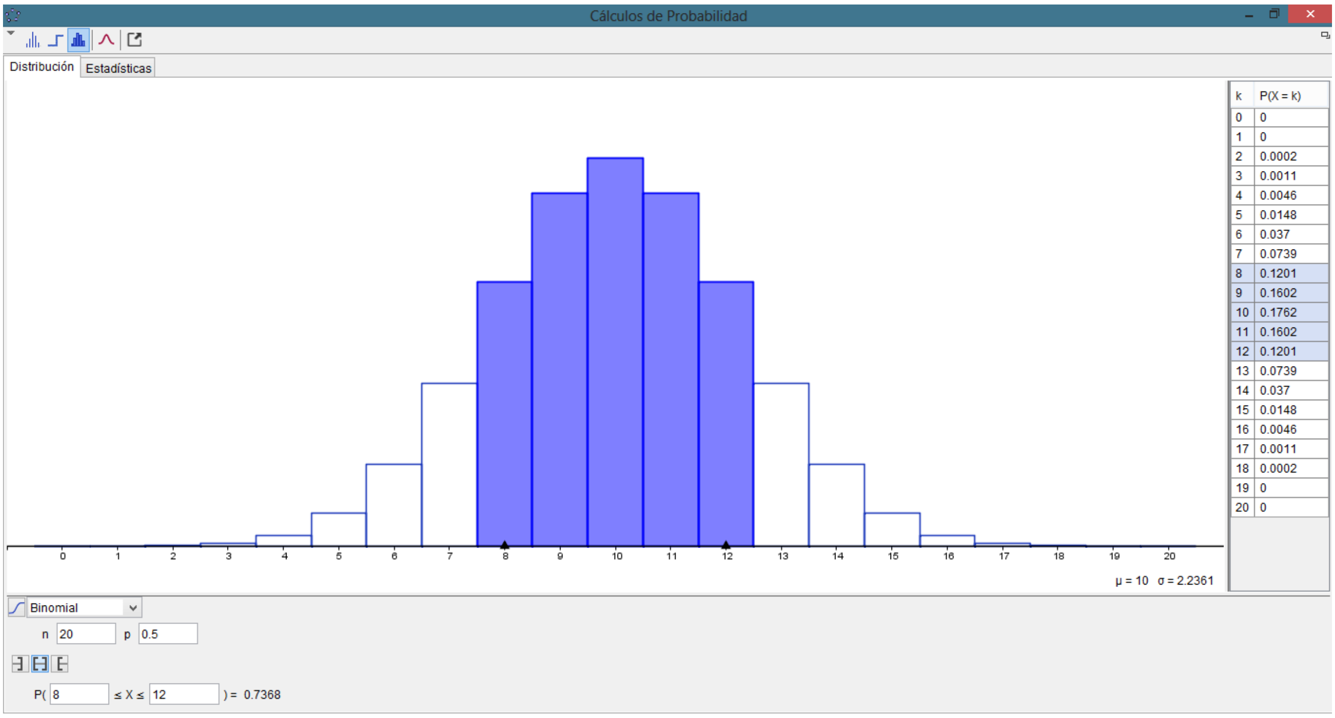
b) Seleccionar Cálculo de Probabilidades



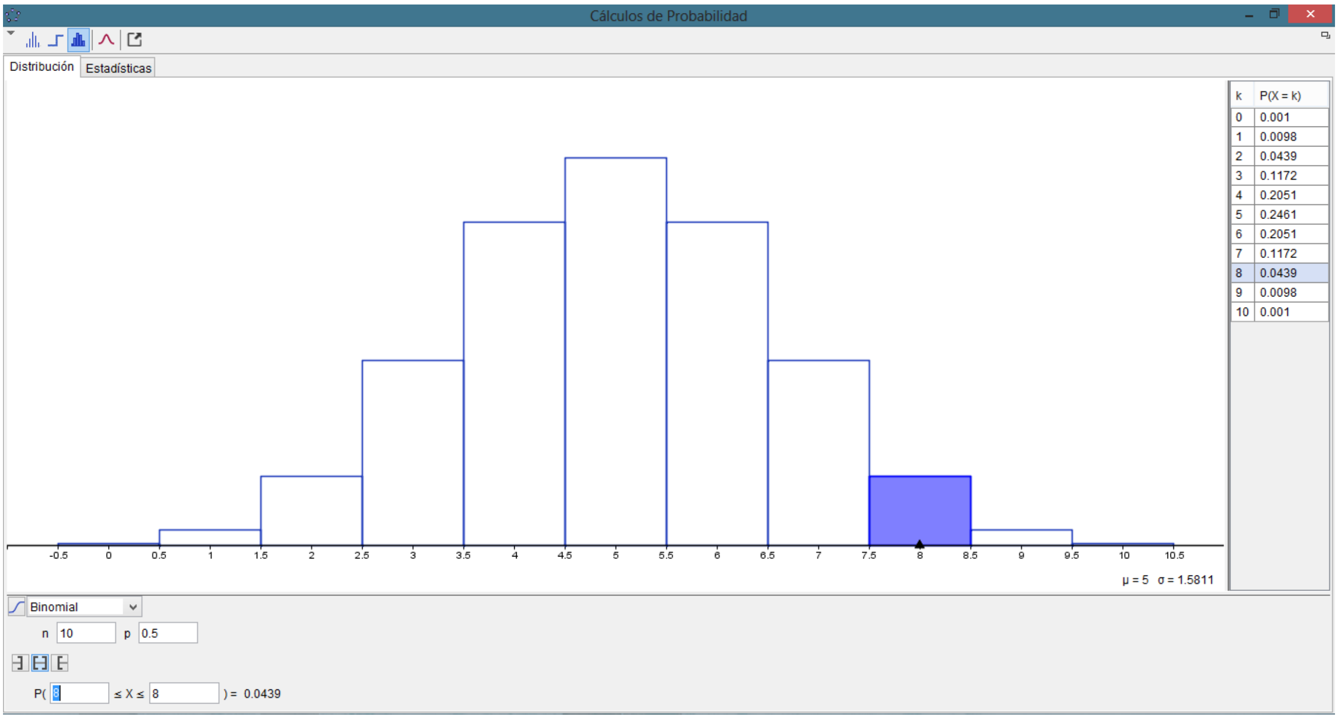
c) Clic en la pestaña de la casilla Normal para que se despliegue otras opciones.

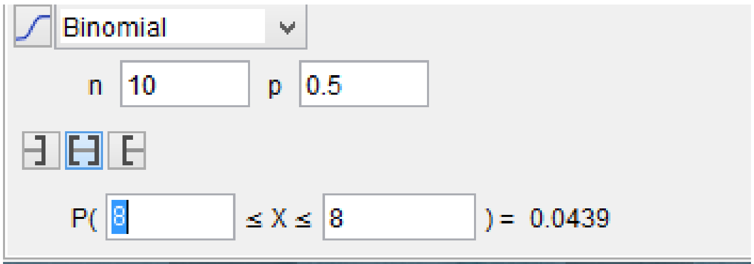


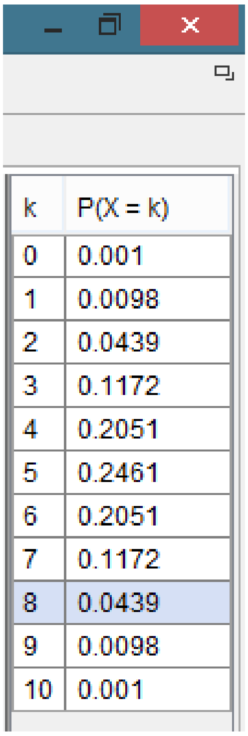
d) Clic en Binomial



e) En la casilla n escribir 10. En la casilla p escribir 0.5. En la casilla P escribir 8. En la casilla X≤ escribir 8. Enter







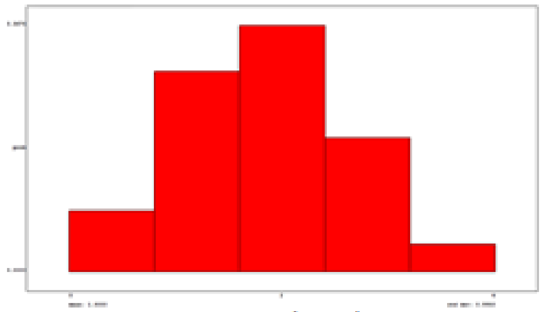
2) Determinar P (X ≤ 3) para n =4 y p = 0,45

Solución:

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

Se puede aplicar la ecuación para cada probabilidad, pero para ahorrar tiempo se recomienda encontrar las probabilidades con lectura en la tabla de probabilidades binomiales.

TABLA Nº 1
PROBABILIDADES BINOMIALES

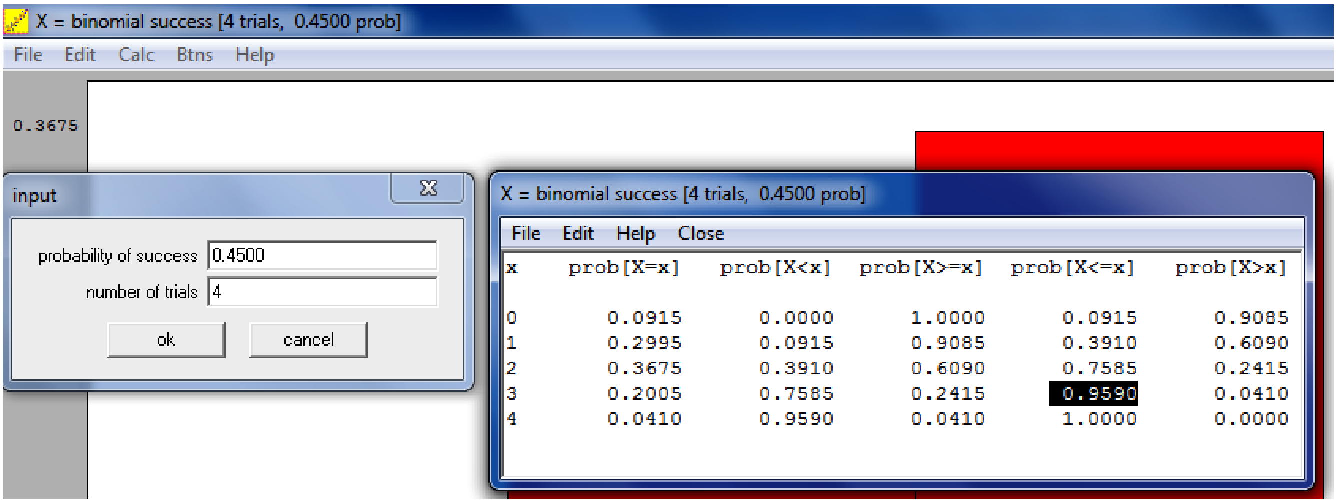


Para $n = 4$ *y* $p = 0{,}45 \Rightarrow P(X = 2) = 0{,}3675$

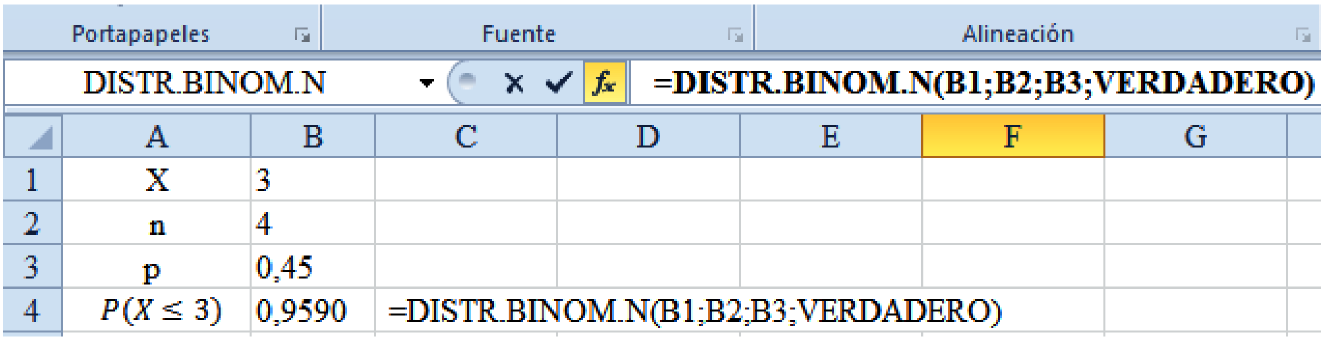
n	X	p									
		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
1	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
n	X	p									
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
2	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
2	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
n	X	p									
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
3	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
3	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
3	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
n	X	p									
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
4	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500

Realizando la lectura en la tabla de P(X=0) con n=4 y p = 0,45 se obtiene 0,0915. Continuando con la respectivas lecturas en la tabla se obtiene: 0,2995 para P(X=1), 0,3675 para P(X=2) y 0,2005 para P(X=3).
Por lo tanto $P(X \leq 3) = 0{,}0915 + 0{,}2995 + 0{,}3675 + 0{,}2005 = 0{,}9590$

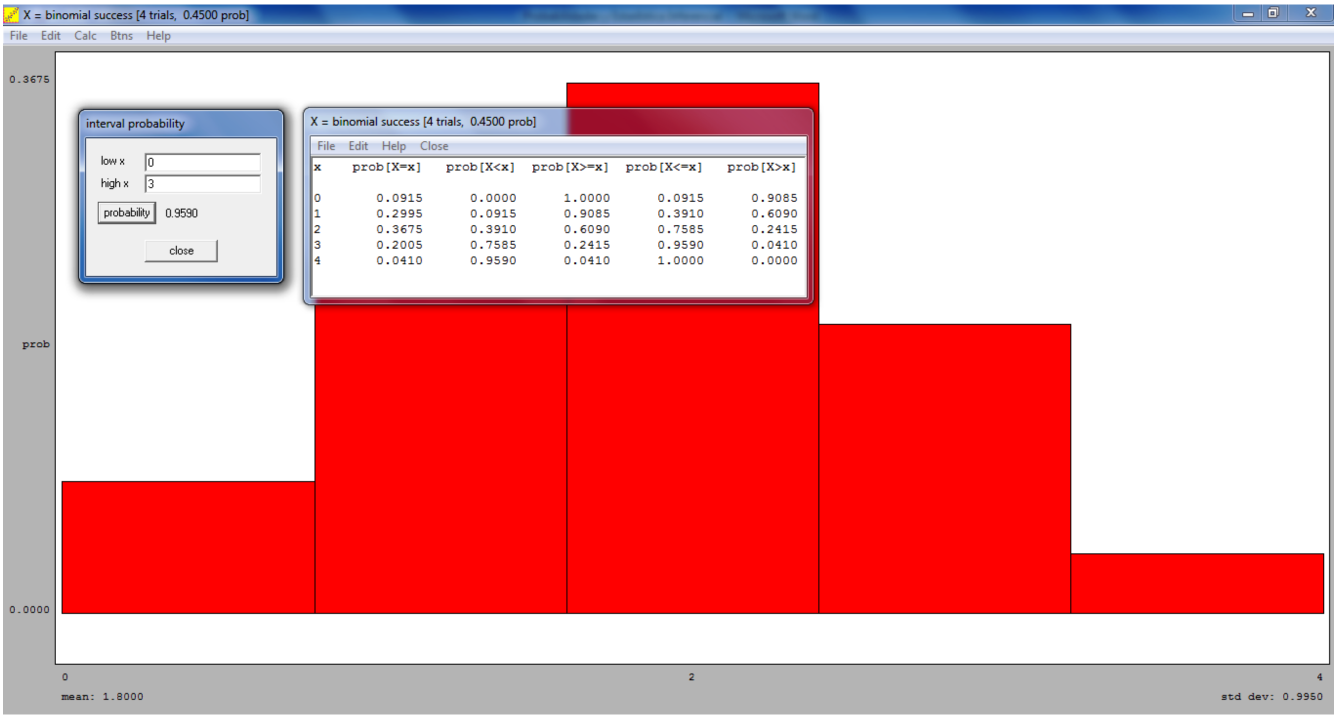
Para que aparezca la tabla en Winstats se hace clic en Edit y luego en parámetros. En la ventana de parámetros, en la casilla trials, escribir 4 y en success prob escribir 0,45. Finalmente clic Calc y luego en table



Los cálculos realizados en Excel se muestran en la siguiente figura:

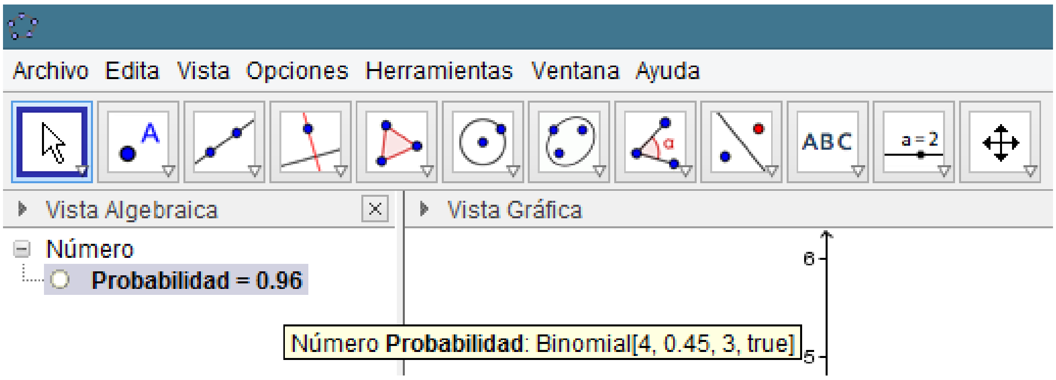


Los cálculos realizados en Winstats se muestran en la siguiente figura:



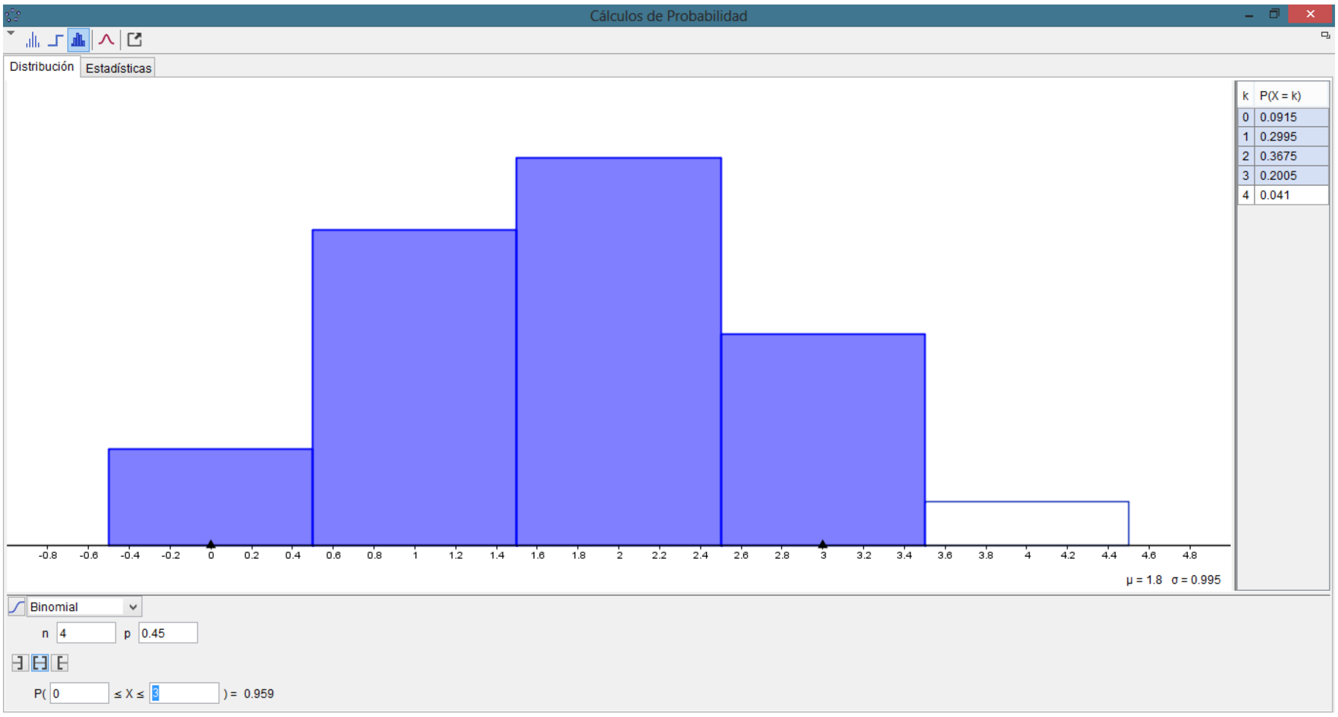
En GeoGebra

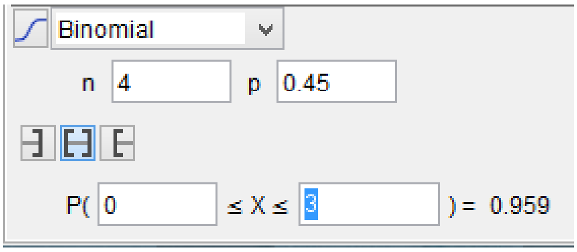
Escribir 4 en <Número de Ensayos>, 0.45 en <Probabilidad de Éxito>, 3 en <Valor de Variable> y true en <Acumulada Booleana>



Nota:
Para P(X= 3), siendo 3 el número de éxitos, en <Acumulada Booleana> se escribe false
Para P(X≤ 3), siendo 3 el número de éxitos, en <Acumulada Booleana> se escribe true

O También





3) Se lanza ocho dados.
3.1) Calcular la probabilidad de obtener 2 seis
3.2) Calcular la probabilidad de obtener máximo 2 seis
3.3) Calcular la probabilidad de obtener al menos 2 seis

Solución:

3.1)

$P(X = 2) = ?\ ; n = 8;\ p = \dfrac{1}{6}$

Aplicando la fórmula se obtiene:

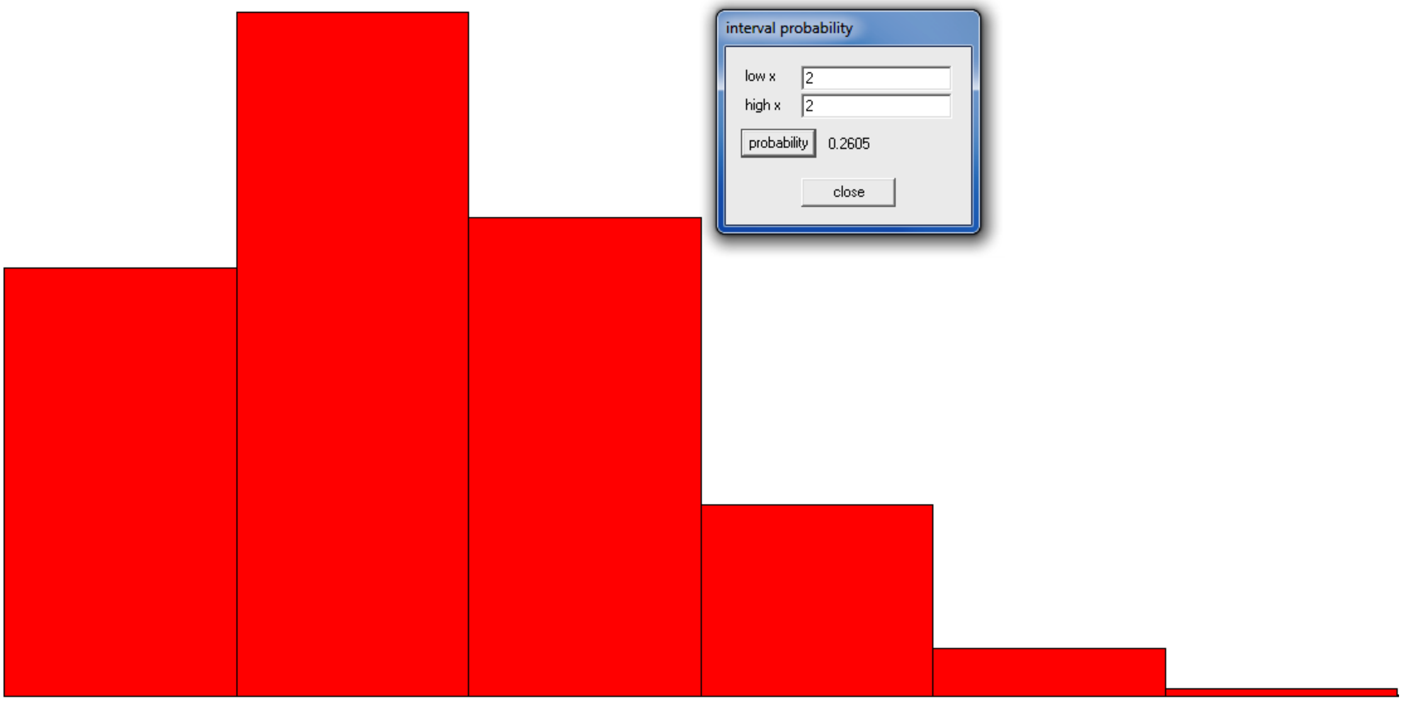
$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(X = 2) = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} \cdot \frac{1}{6}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{8-2} = 0{,}2605$$

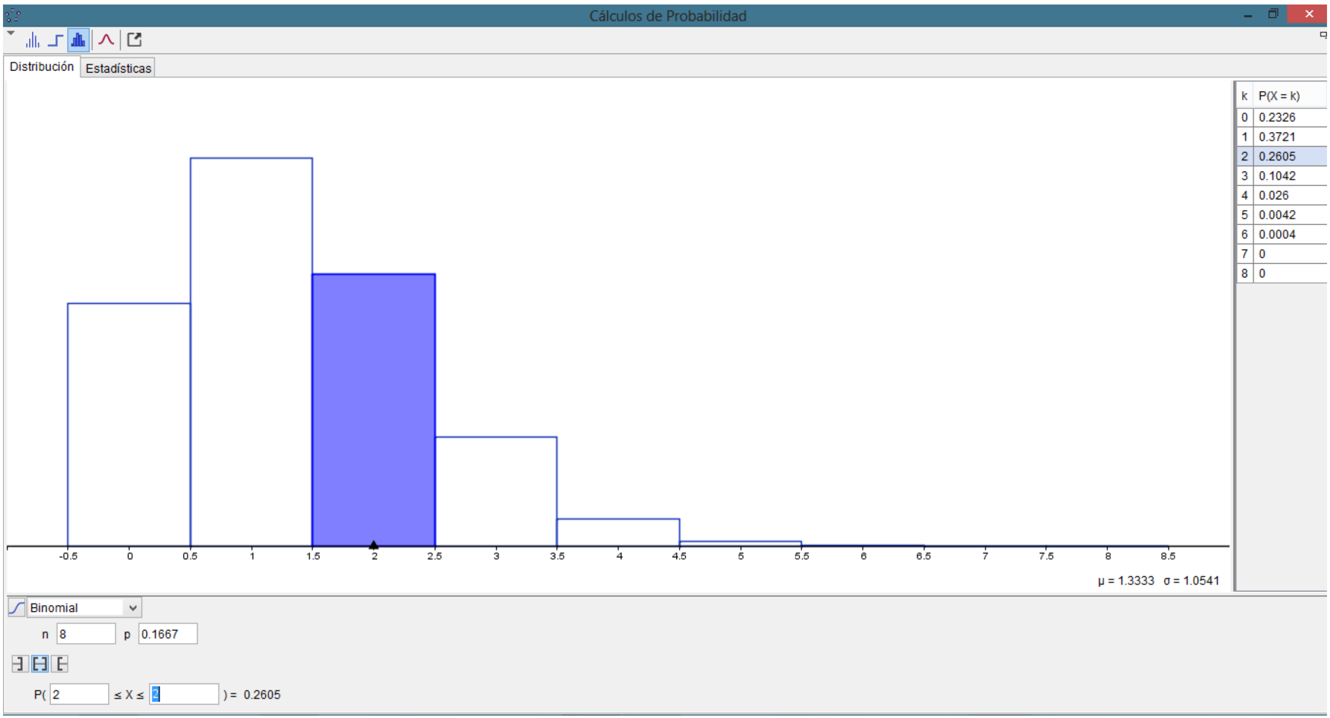
Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	2			
2	n	8			
3	p	1/6			
4	P(X=2)	0,2605	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

Los cálculos en Winstats se muestran en la siguiente figura:



Los cálculos en GeoGebra se muestran en la siguiente figura:



3.2)

$P(X \leq 2) =?\ ; n = 8;\ p = \dfrac{1}{6}$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F
1	X	2				
2	n	8				
3	p	1/6				
4	$P(X \leq 2)$	0,8652	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;VERDADERO)			

3.3)

$P(X \geq 2) =?\ ; n = 8;\ p = \dfrac{1}{6}$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - P(X \leq 1)$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F
1	X	1				
2	n	8				
3	p	1/6				
4	$P(X \leq 1)$	0,6047	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;VERDADERO)			
5	$P(X \geq 2)$	0,3953	=1-B4			

4) Se lanzan simultáneamente tres monedas, calcular la probabilidad de que se obtengan:
4.1) Tres caras.
4.2) Dos caras y un sello
4.3) Una cara y dos sellos
4.4) Tres sellos
4.5) Al menos una cara

Solución:
Designando por C = cara y por S = sello se tiene:
Espacio muestral = S = {CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS}, entonces, n(S) = 8
Cada una de estos puntos muestrales son igualmente probables, con probabilidad de 1/8

Todas las probabilidades individuales se representan en la siguiente tabla:

Monedas			n(E)	P(E)
1ra	2da	3ra		
C	C	C	1	1/8
C	C	S	3	3/8
C	S	S	3	3/8
S	S	S	1	1/8
Total			8	1

4.1) Tres caras.
Observando la tabla se obtiene que P(CCC) = 1/8

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X=3)=P(CCC); n=3;\ p=\frac{1}{2}$$

$$P(X)=\frac{n!}{X!\,(n-X)!}\cdot p^{X}\cdot(1-p)^{n-X}$$

$$P(CCC)=\frac{3!}{3!\,(3-3)!}\cdot\frac{1}{2}^{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3}=1\cdot\frac{1}{8}\cdot 1=\frac{1}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	3			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=3)	1/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.2) Dos caras y un sello
Observando la tabla se obtiene que P(CCS) = 3/8

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X=2)=P(CCS); n=2;\ p=\frac{1}{2}$$

$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(CCS) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} \cdot \frac{1}{2}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	2			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=2)	3/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.3) Una cara y dos sellos
Observando la tabla se obtiene que P(CSS) = 3/8

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X = 1) = P(CSS); n = 1;\; p = \frac{1}{2}$$

$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(CSS) = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} \cdot \frac{1}{2}^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	1			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=1)	3/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.4) Tres sellos
Observando la tabla se obtiene que P(SSS) = 1/8
Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X = 0) = P(SSS); n = 3;\; p = \frac{1}{2}$$

$$P(X) = \frac{n!}{X!\,(n-X)!} \cdot p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

$$P(SSS) = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} \cdot \frac{1}{2}^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-0} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	X	0			
2	n	3			
3	p	1/2			
4	P(X=0)	1/8	=DISTR.BINOM.N(B1;B2;B3;FALSO)		

4.5) Al menos una cara
Observando la tabla se obtiene que:
P(Al menos C) = P(CCC) + P(CCS) + P(CSS) = 1/8 +3/8 + 3/8 = 7/8
O también P(Al menos C) = 1 – P(SSS) = 1 – 1/8 = 7/8

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C
1	X	0	
2	n	3	
3	p	1/2	
4	P(X= 0)	1/8	
5	$P(X \geq 1)$	7/8	=1-B4

D) DISTRIBUCIÓN DE POISSON

i) Introducción.- Muchos estudios se basan en el conteo de las veces que se presenta un evento dentro de *un* área de oportunidad dada. El *área de oportunidad* es una unidad continua o intervalo de tiempo o espacio (volumen o área) en donde se puede presentar más de un evento. Algunos ejemplos serían los defectos en la superficie de un refrigerador, el número fallas de la red en un día, o el número de pulgas que tiene un perro. Cuando se tiene un área de oportunidad como éstas, se utiliza la *distribución de Poisson* para calcular las probabilidades si:

- Le interesa contar las veces que se presenta un evento en particular dentro de un área de oportunidad determinada. El área de oportunidad se define por tiempo, extensión, área, volumen, etc.
- La probabilidad de que un evento se presente en un área de oportunidad dada es igual para todas las áreas de oportunidad.
- El número de eventos que ocurren en un área de oportunidad es independiente del número de eventos que se presentan en cualquier otra área de oportunidad.
- La probabilidad de que dos o más eventos se presenten en un área de oportunidad tiende a cero conforme esa área se vuelve menor.

ii) Fórmula.- La distribución de Poisson tiene un parámetro, llamado λ (letra griega lambda minúscula), que es la media o el número esperado de eventos por unidad. La varianza de la distribución de Poisson también es igual a λ, y su desviación estándar es igual a $\sqrt{\lambda}$. El número de eventos X de la variable aleatoria de Poisson fluctúa desde 0 hasta infinito.

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^X}{X!}$$

Donde:
$P(X) =$ Probabilidad de X eventos en un área de oportunidad
$\lambda =$ Número de eventos esperados
$X =$ Número de eventos
$e =$ Constante matemática base de los logaritmos naturales aproximadamente igual a 2718281828…. Este número es de gran importancia, tan sólo comparable a la del número π (pi), por su gran variedad de aplicaciones. El número e suele definirse como el límite de la expresión:

$$(1 + 1/\mathrm{n})^{\mathrm{n}}$$

Cuando n tiende hacia el infinito. Algunos valores de esta expresión para determinados valores de la n se muestran en la tabla siguiente:

VALOR NUMÉRICO DE $(1+1/\mathrm{n})^{\mathrm{n}}$ PARA VALORES CRECIENTES DE n		
n	$(1+1/n)^n$	Valor numérico
1	$(1+1/1)^1$	2
3	$(1+1/3)^3$	2,369
5	$(1+1/5)^5$	2,489
20	$(1+1/20)^{20}$	2,653
40	$(1+1/40)^{40}$	2,684
50	$(1+1/50)^{50}$	2,691
100	$(1+1/100)^{100}$	2,705
1000	$(1+1/1000)^{1000}$	2,717
10000	$(1+1/10000)^{10000}$	2,718
∞	……………………..	2,71828….

Observando la columna de la derecha de la tabla anterior, se puede ver que a medida que n crece el valor de la expresión se aproxima, cada vez más, a un valor límite. Este límite es 2,7182818285….

Ejemplos ilustrativos

1) Suponga una distribución de Poisson. Si $\lambda = 1$, calcular P(X= 0)

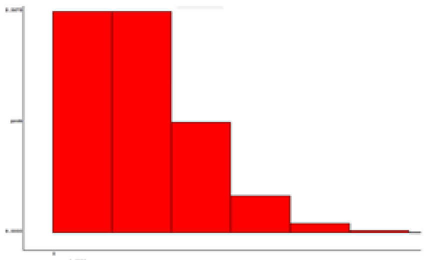
Solución:

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^X}{X!} = \frac{2{,}71828^{-1} \cdot 1^0}{0!} = 0{,}3679$$

También se puede obtener con lectura de la tabla de probabilidades de Poisson

TABLA Nº 2
PROBABILIDADES DE POISSON

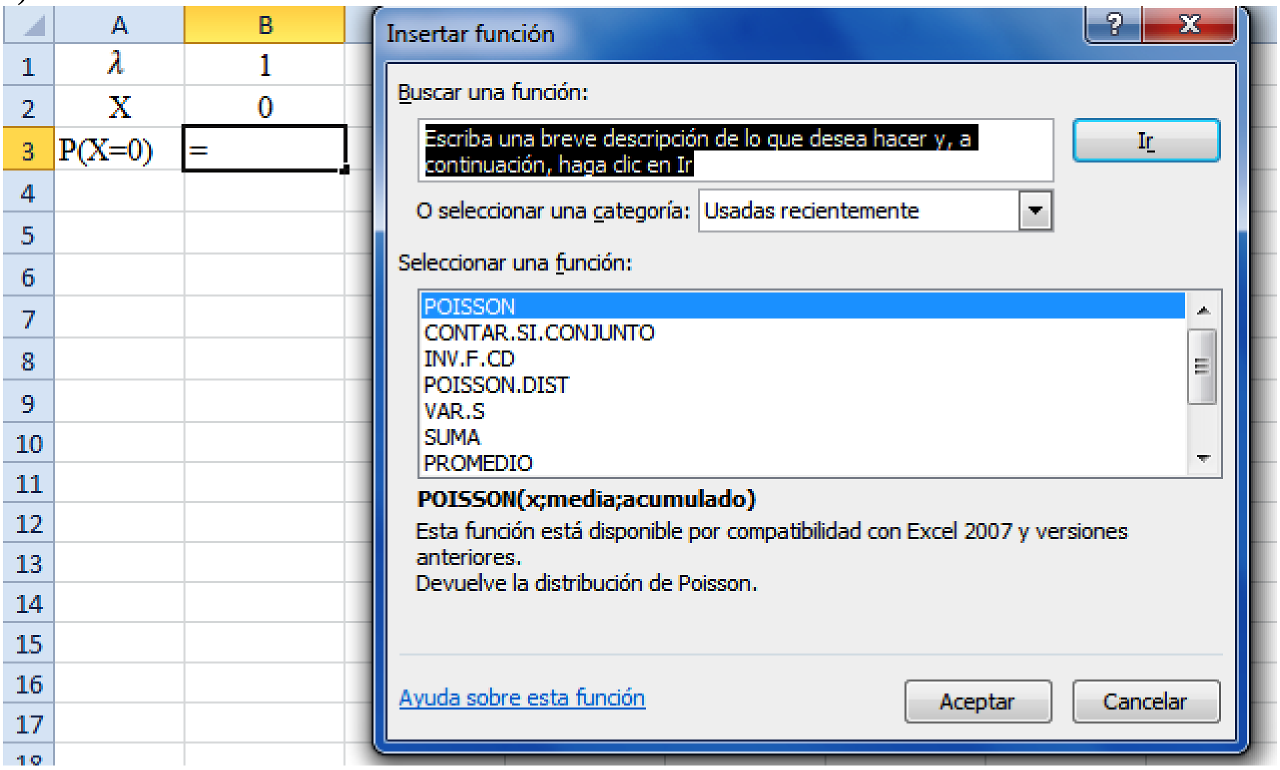


$Para\ \lambda = 1\ y\ X = 0\ \Rightarrow P(X=0) = 0{,}3679$

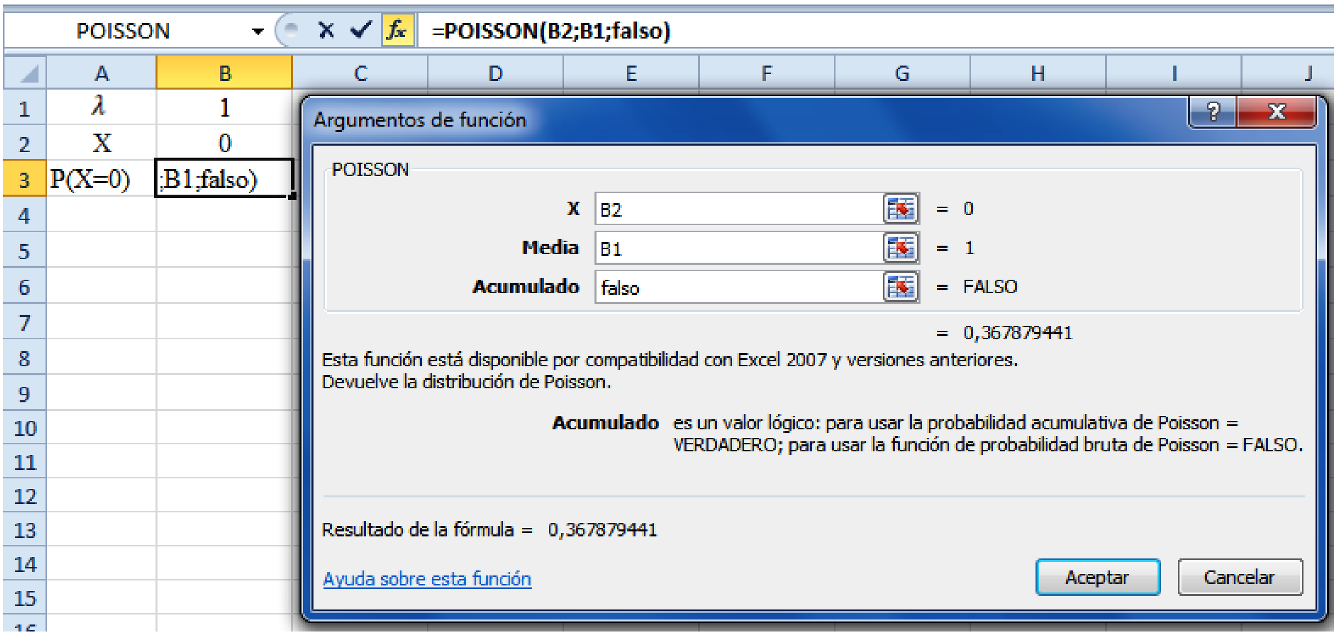
	λ									
X	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,9950	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139
1	0,0050	0,0099	0,0196	0,0291	0,0384	0,0476	0,0565	0,0653	0,0738	0,0823
2	0,0000	0,0000	0,0002	0,0004	0,0008	0,0012	0,0017	0,0023	0,0030	0,0037
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001
	λ									
X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679

El cálculo de $P(X=0)$con $\lambda = 1$ en Excel se realizan de la siguiente manera:

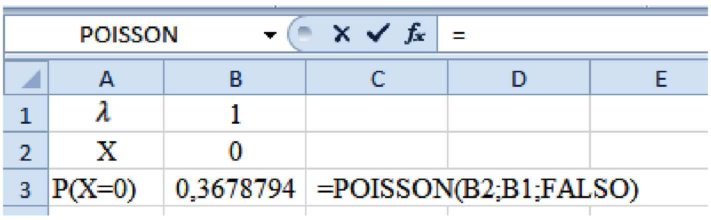
a) Se inserta la función POISSON



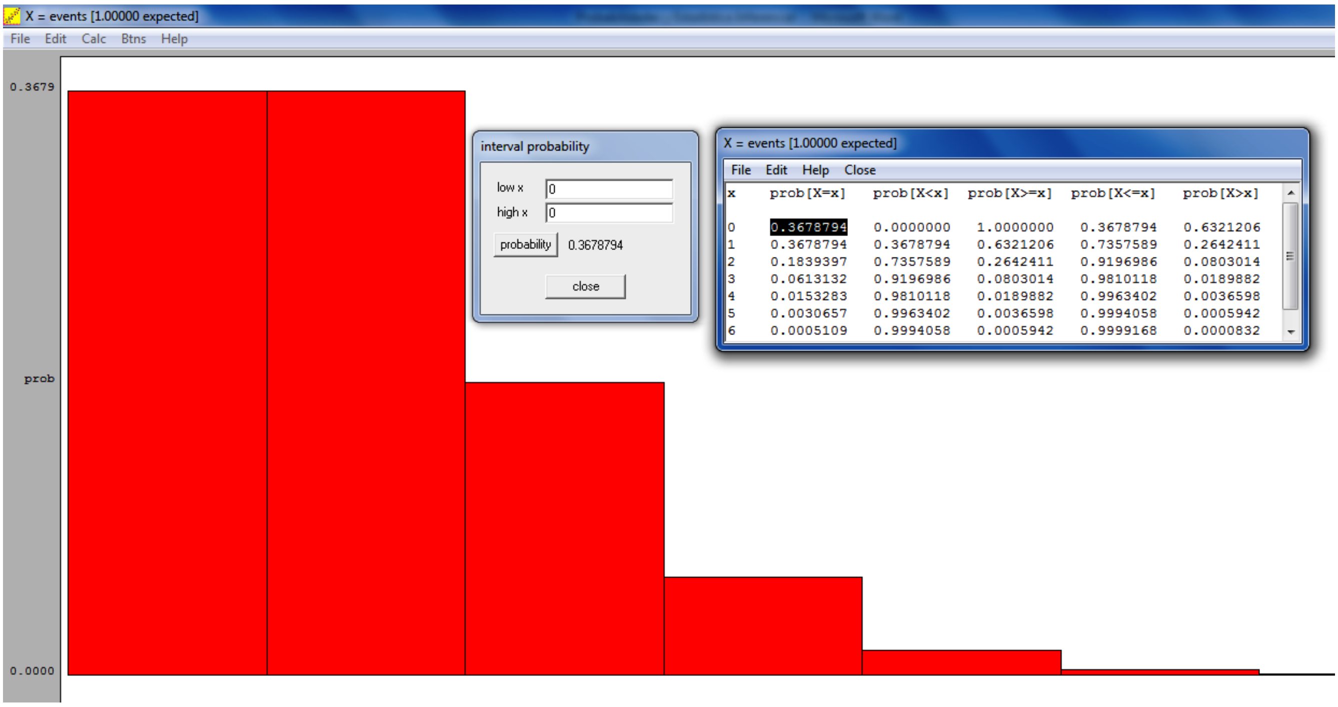
b) Clic en Aceptar. En la ventana de Argumentos de la función, en X seleccionar B2 en Media escribir o seleccionar B1 y en Acumulado escribir Falso.



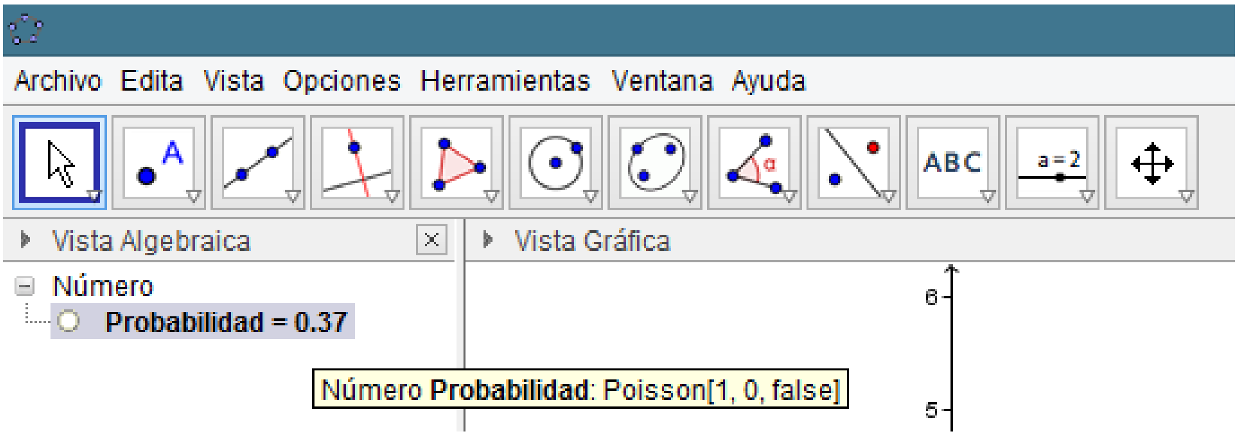
c) Clic en Aceptar



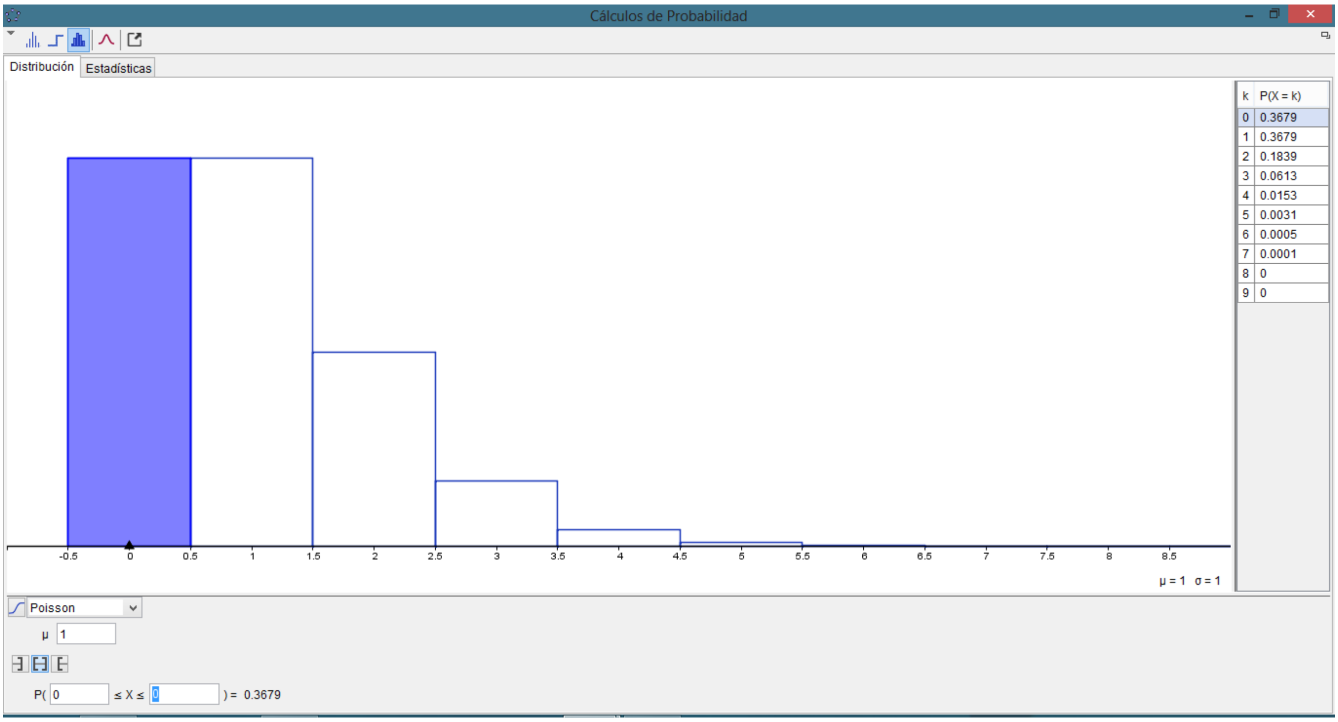
Los cálculos en Winstats se muestran en la siguiente figura:

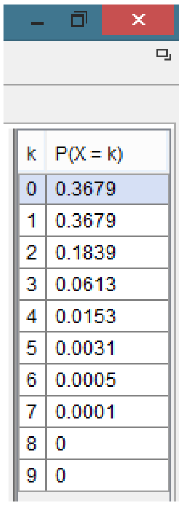


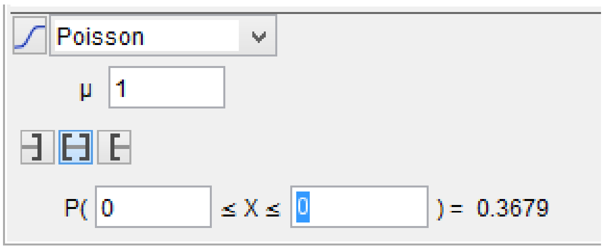
Los cálculos en GeoGebra se muestran en la siguiente figura:



Nota:
Escoger la opción Poisson[<Media>, <Valor de Variable>, <Acumulativa Booleana>]
Escribir 1 en <Media>, 0 en <Valor de Variable>, false en <Acumulativa Booleana>
Para P(X= n), siendo n el número de eventos o ensayos, en <Acumulada Booleana> se escribe false
Para P(X≤ n), siendo n el número de eventos o ensayos, en <Acumulada Booleana> se escribe true







2) Suponga una distribución con $\lambda = 5$. Determine $P(X \geq 10)$

Solución:
$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$
$P(X \leq 9) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \cdots + P(X = 9)$

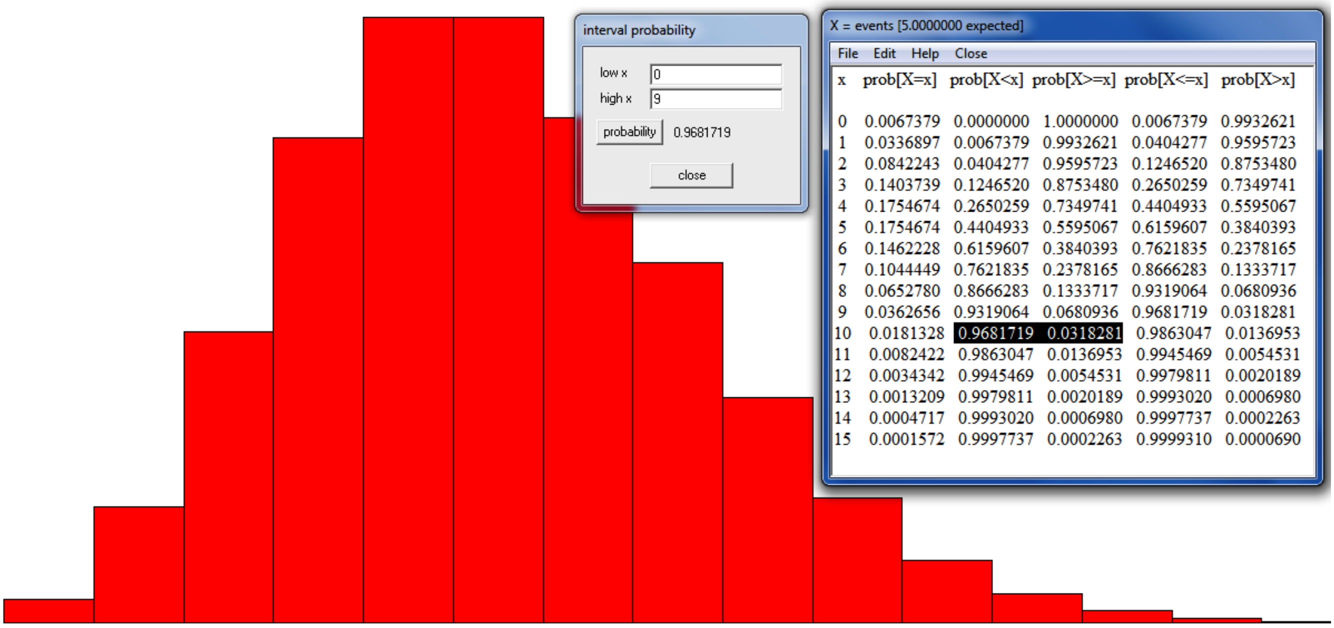
Aplicando la fórmula o con lectura en la tabla de la distribución de Poisson se obtiene:
$P(X \leq 9) =$ 0,0067 + 0,0337 + 0,0842 + 0,1404 + 0,1755 + 0,1755 +0,1462 + 0,1044 +0,0653 + 0,0363
$P(X \leq 9) = 0{,}9682$

Entonces:
$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0{,}9682 = 0{,}0318$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	λ	5			
2	X	9			
3	P(X≤ 9)	0,9681719	=POISSON(B2;B1;VERDADERO)		
4	P(X ≥10)	0,0318281	=1-B3		

Los cálculos en Winstats se muestran en la siguiente figura:



x	prob[X=x]	prob[X<x]	prob[X>=x]	prob[X<=x]	prob[X>x]
0	0.0067379	0.0000000	1.0000000	0.0067379	0.9932621
1	0.0336897	0.0067379	0.9932621	0.0404277	0.9595723
2	0.0842243	0.0404277	0.9595723	0.1246520	0.8753480
3	0.1403739	0.1246520	0.8753480	0.2650259	0.7349741
4	0.1754674	0.2650259	0.7349741	0.4404933	0.5595067
5	0.1754674	0.4404933	0.5595067	0.6159607	0.3840393
6	0.1462228	0.6159607	0.3840393	0.7621835	0.2378165
7	0.1044449	0.7621835	0.2378165	0.8666283	0.1333717
8	0.0652780	0.8666283	0.1333717	0.9319064	0.0680936
9	0.0362656	0.9319064	0.0680936	0.9681719	0.0318281
10	0.0181328	0.9681719	0.0318281	0.9863047	0.0136953
11	0.0082422	0.9863047	0.0136953	0.9945469	0.0054531
12	0.0034342	0.9945469	0.0054531	0.9979811	0.0020189
13	0.0013209	0.9979811	0.0020189	0.9993020	0.0006980
14	0.0004717	0.9993020	0.0006980	0.9997737	0.0002263
15	0.0001572	0.9997737	0.0002263	0.9999310	0.0000690

E) DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

i) Definición

La distribución binomial es apropiada sólo si la probabilidad de un éxito permanece constante. Esto ocurre si el muestreo se realiza con reemplazo en una población grande. Sin embrago, si la población es pequeña y ocurre sin reemplazo, la probabilidad de éxito variará, y la distribución hipergeométrica es que se utiliza.

ii) Fórmula

Se calcula empleando la siguiente fórmula:

$$P(X) = \frac{C_X^r \cdot C_{n-X}^{N-r}}{C_n^N}$$

Donde:
C = combinación
N = tamaño de la población
r = número de éxitos en la población
n = tamaño de la muestra
X = número de éxitos en la muestra

Notas:

- Si se selecciona una muestra sin reemplazo de una población grande conocida y contiene una proporción relativamente grande de la población, de manera que la probabilidad de éxito varía de una selección a la siguiente, debe utilizarse la distribución hipergeométrica.

- Cuando tamaño de la población (N) es muy grande, la distribución hipergeométrica tiende aproximarse a la binomial.

Ejemplo ilustrativo
Si se extraen juntas al azar 3 bolas de una urna que contiene 6 bolas rojas y 4 blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean extraídas 2 bolas rojas?.

Solución:

Los datos son: N =10; r = 6; n = 3 y X= 2

Aplicando la fórmula se obtiene:

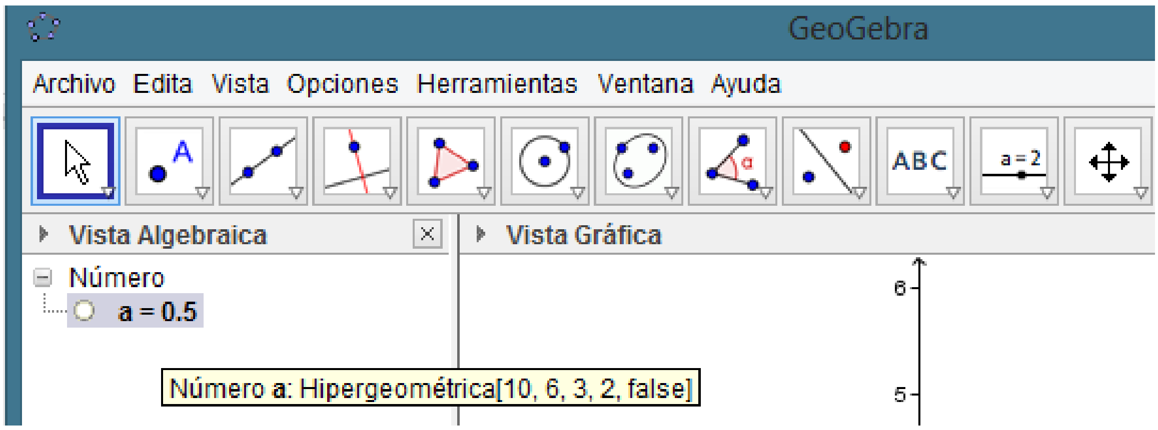
$$P(X) = \frac{C_X^r \cdot C_{n-X}^{N-r}}{C_X^N}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^6 \cdot C_{3-2}^{10-6}}{C_3^{10}} = \frac{C_2^6 \cdot C_1^4}{C_3^{10}} = \frac{\frac{6!}{2!\,(6-2)!} \cdot \frac{4!}{1!\,(4-1)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}} = \frac{\frac{6!}{2!\,4!} \cdot \frac{4!}{1!\,3!}}{\frac{10!}{3!\,7!}} = \frac{15 \cdot 4}{120} = 0{,}5$$

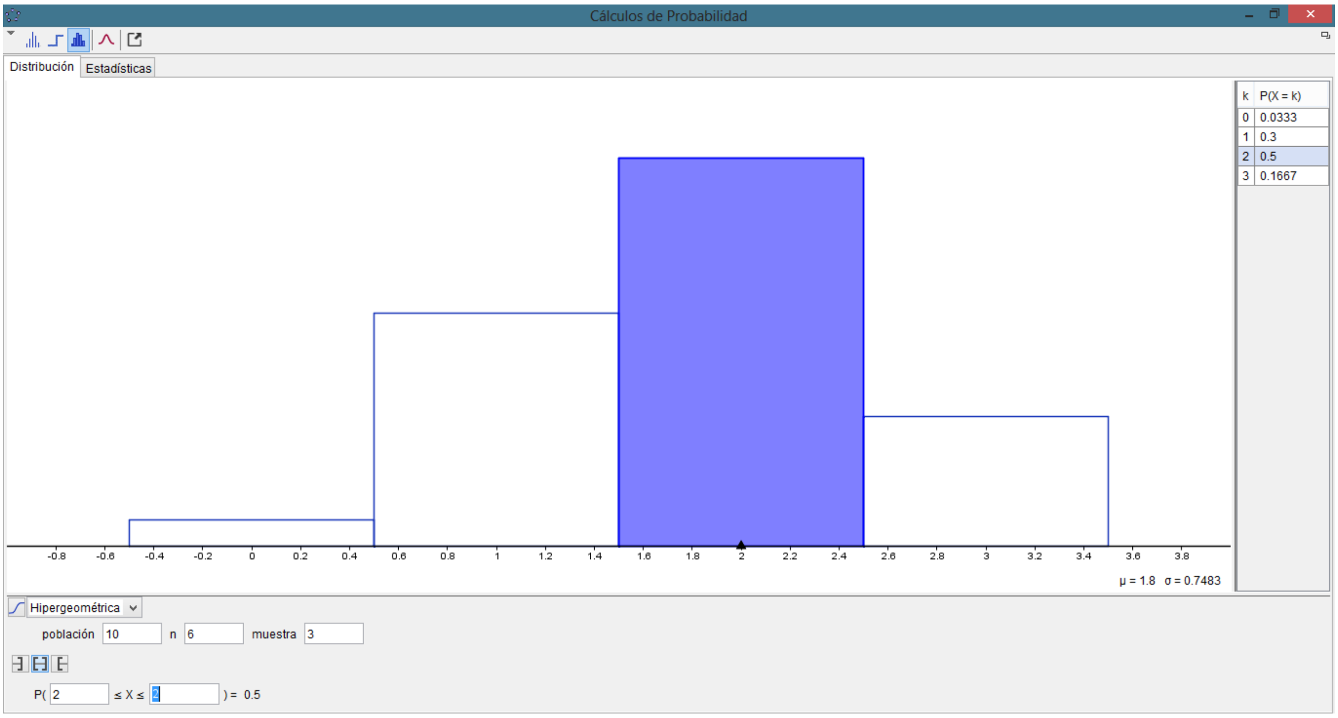
El cálculo de P(X=2) en Excel se muestra en la siguiente figura:

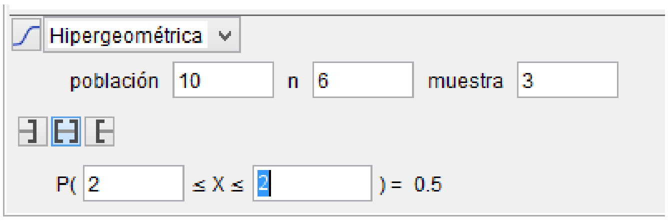
	A	B	C	D	E
1	N	10			
2	r	6			
3	n	3			
4	X	2			
5	P(X=2)	0,5	=DISTR.HIPERGEOM(B4;B3;B2;B1)		

El cálculo de P(X=2) en GeoGebra se muestra en la siguiente figura:



Hipergeométrica[<Tamaño de Población>, <Número de Éxitos>, <Tamaño de Muestra>, <Valor de Variable>, <Acumulativa Booleana>]


Cálculos de Probabilidad
Distribución
Estadísticas
k P(X = k)
0 0.0333
1 0.3
2 0.5
3 0.1667
μ = 1.8 σ = 0.7483
Hipergeométrica
población 10
n 6
muestra 3
P(2 ≤ X ≤ 2) = 0.5


Hipergeométrica
población 10
n 6
muestra 3
P(2 ≤ X ≤ 2) = 0.5