

EMERGENCIA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA
(Emergence of Quantum Mechanics)
Alberto Mejías¹

El "pensamiento clásico" pertenece al siglo diecinueve en el que la gente no conocía nada mejor.

Gerard 't Hooft

Resumen. Se precisa que existe una relación matemática entre los autómatas celulares y las teorías cuánticas de campos. Aunque las pruebas están lejos de ser perfectas, sugieren una nueva mirada en el origen de la mecánica cuántica: la mecánica cuántica podría no ser más que una manera natural de manejar las correlaciones estadísticas de un autómata celular. Se vislumbra un papel esencial de la fuerza gravitacional en estas consideraciones.

Descriptores: autómata celular, gravitación, Teoría Cuántica de Campos.

Abstract. It is pointed out that a mathematical relation exists between cellular automata and quantum field theories. Although the proofs are far from perfect, they do suggest a new look at the origin of quantum mechanics: quantum mechanics may be nothing but a natural way to handle the statistical correlations of a cellular automaton. An essential role for the gravitational force in these considerations is suspected.

Keywords: cellular automata, gravitation, Quantum Field Theory.

1. Introducción.

La Mecánica Cuántica es, usualmente, tratada como teoría para la dinámica de sistemas minúsculos tales como átomos, partículas subatómicas o, alternatively, campos débiles sobre pequeñas regiones espacio-tempóricas (del espacio-

¹ Alberto R. Mejías E. es Licenciado en Matemática, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida- Venezuela. Es profesor jubilado de la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com.

Alberto Mejías

tiempo), donde *substituye* a la dinámica newtoniana clásica. Además, demanda sutiles, pero importantes cambios en la forma de manejar los argumentos lógicos al considerar la "realidad" física.

Después de que se asienta el polvo, se encuentra que la mecánica cuántica sólo produce declaraciones sobre el comportamiento medio de sistemas minúsculos, más bien que sobre cualquier sistema individual dado; como si los sistemas individuales no tuvieran derecho tener una noción de realidad ligada a ellos. Sin embargo, también se enfatiza que la teoría puede ser extremadamente exacta; es mucho más que un conjunto de aserciones difusas con respecto a objetos que son demasiado pequeños ser observados directamente.

En numerosas ocasiones, los físicos han expresado su preocupación por este estado de la teoría y han hecho tentativas para mejorar esta situación. ALBERT EINSTEIN, ERWIN SCHRÖDINGER y posteriormente DAVID BOHM y JOHN BELL, entre muchos otros, se esforzaron para substituir a la Mecánica Cuántica por algo mejor.

En el actual trabajo, no se procura substituir a la mecánica cuántica por algo más. Por el contrario, la actual teoría sin más enmiendas tales como un colapso de la función ondal o una ontología del multi-verso, se acepta como descripción correcta de observaciones en el mundo real. Sin embargo, hay que insistir en que la Mecánica Cuántica no describe la realidad directamente. Meticulosamente, cuantifica lo que se ve y mide en términos de ecuaciones, mientras que cualquier tentativa de dar una descripción física de lo que se ve, en términos de átomos, campos, partículas subatómicas, evolución de universos y de lo que no, solamente es decorado y no se refiere a la realidad. Se sospecha que la teoría se refiere a la realidad, pero esa realidad debería ser descrita en términos físicos muy diferentes.

Sean lo que sean los objetos reales, la Mecánica Cuántica emerge como maquinaria matemática extremadamente eficaz para describir sus características estadísticas en términos de distribuciones de probabilidades.

Emergencia de la mecánica cuántica

Se parte de una cuantización "primordial" o "primitiva", un procedimiento propuesto por 't Hooft [1] – [6]. Imagínese un cierto sistema de ecuaciones dinámicas clásicas, del movimiento. Se podría pensar en el movimiento de las agujas de un reloj, pero también se puede imaginar otros objetos totalmente clásicos variando desde partículas, cuerdas o branas que siguen ecuaciones clásicas del movimiento, a los planetas que obedecen las leyes de NEWTON. Luego comienza una descripción del espacio completo de todos los estados clásicos y posteriormente, promueve cada uno de estos estados a un elemento de la base de un espacio HILBERT. Entonces la evolución temporal de estos estados a partir del tiempo t_1 hasta el t_2 es generada por un operador $U(t_1, t_2)$, llamado 'operador evolución'. Si el mundo original que se desea describir es estrictamente continuo, el número de estados en el espacio HILBERT es no numerable y esto puede causar complicaciones para proseguir este programa. A menudo, se puede utilizar un modelo fundamentalmente discreto que podría hacer nuestro trabajo más fácil. Entonces el operador evolución puede ser construido sistemáticamente.

Si el sistema considerado es *reversible en el tiempo*, lo cual significa que el pasado se puede reconstruir a partir del futuro tan fácilmente como el futuro se puede derivar a partir del pasado, el operador evolución es también *unitario* y éste permite construir otro operador H , llamado 'hamiltoniano', tal que

$$U(t_1, t_2) = e^{-i(t_2 - t_1)H}, \quad (1.1)$$

donde H es hermiteano y se pueden estudiar su positividad y sus estructuras de simetría. Si el hamiltoniano que emerge de tales cálculos se asemeja a el que se usa en teorías cuánticas familiares, se tiene un sistema matemático que, por una parte, se basa en un modelo enteramente clásico, mientras que, por otra parte, permite una descripción completamente en línea con la Mecánica Cuántica.

Alberto Mejías

Por lo tanto, las teorías cuánticas de esta clase se podrían interpretar como "teorías de variables ocultas". Se presenta entonces, la pregunta de cómo considerar a las desigualdades BELL [7], [8]. Éstas son desigualdades que describen límites para las mediciones de características físicas tales como la giratura (espín) de objetos cuánticos enmarañados. Si el sistema es clásico, los límites no pueden ser sobrepasados, mientras que se sobrepasan en una teoría cuántica. Para muchos investigadores, ésta es suficiente razón para rechazar categóricamente todas las teorías de variables ocultas. Sin embargo, el procedimiento recién descrito parece dar un número de modelos interesantes que podrían muy bien servir como buenos ejemplos para las 'variables ocultas'. ¿Qué es lo que está mal con ellos? Ésta es una de las preguntas que tendremos que contestar. La situación es absolutamente delicada e interesante. Aquí la línea de fondo será que puede ser posible construir teorías clásicas subyacentes a la Mecánica Cuántica a lo largo de estas líneas, pero, muy notablemente, la fuerza gravitacional y la Relatividad General pudieran ser esenciales para una comprensión más profunda de las estructuras subyacentes.

Para futuras referencias, se considerarán los grados de libertad que describen a los estados clásicos originales del sistema como *entibles* (*beables*) [9]. Los entibles $B(t)$ son operadores que, en todo tiempo t , conmutan con el resto de los entibles:

$$[B(t_1), B(t_2)] = 0, \quad \forall t_1, t_2. \quad (1.2)$$

Un *cambiable* (*changeable*) $C(t)$ es un operador que aplica a un entible sobre otro solo entible:

$$C(t)B_1(t) = B_2(t)C(t). \quad (1.3)$$

Finalmente, un *articulable* (*superimposable*) S es un operador que puede ser una superposición cuántica de cualquier conjunto de entibles y/o de cambiables.

Emergencia de la mecánica cuántica

Los estados propios del hamiltoniano, definidos en Ec. (1.1) serán siempre, superposiciones cuánticas. Si sólo se considera a los estados de baja energía, esto significa que, desde el inicio, sólo se habla de estados cuánticos enmarañados. Esto es lo que distingue nuestros modelos de otras teorías de 'variables ocultas ': nunca procuramos reformar un conjunto de estados tales como los que se usan en el 'Modelo Estándar', en estados totalmente clásicos. Sólo las presuntas leyes dinámicas subyacentes son clásicas, pero los estados considerados son siempre estados cuánticos y, usualmente, altamente enmarañados.

No se resolverá totalmente el asunto con las desigualdades BELL, sino que puesto que se acepta la aparición de la necesidad de estados completamente mecánico-cuánticos para describir probabilidades, es de sospechar que estas desigualdades BELL serán mucho más difíciles de utilizar como teorema de "imposibilidad física" para las variables ocultas, que lo usualmente asumido.

2. El Hamiltoniano de un Sistema Determinístico

Según la teoría recién descrita, se tienen conjuntos discretos de datos físicos que evolucionan según leyes determinísticas no mecánico-cuánticas. Considérese el caso en que también, la evolución del tiempo es fundamentalmente discreta. Entonces la teoría se puede definir en términos de un operador evolución U_0 que describe una etapa en el tiempo. Por tanto, se determinaría escribir

$$(U_0)^k = e^{-iHk}, \quad (2.1)$$

donde U_0 actúa sobre los estados $|n\rangle$ considerados como vectores de la base de un espacio HILBERT, de manera que H desempeña el papel de hamiltoniano *cuántico*. Se consigue una mecánica cuántica convencional si se puede asegurar que H está acotado por debajo,

$$\langle \psi | H | \psi \rangle \geq \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle, \quad (2.2)$$

Alberto Mejías

para algún estado $|\psi_0\rangle$ y todos los estados $|\psi\rangle$, donde $|\psi\rangle$ y $|\psi_0\rangle$ pueden ser cualquier superposición de estados $|n\rangle$, en particular cualquier estado propio de H . En principio, un operador que satisface este requerimiento, no es difícil de construir. Usando la transformación FOURIER

$$x = \pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \text{sen } kx, \quad 0 < x < 2\pi, \quad (2.3)$$

resulta:

$$H = \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k} (U_0^k - U_0^{-k}) \quad (2.4)$$

Este hamiltoniano sólo tiene valores propios entre 0 y 2π y reproduce a la Ec. (2.1). La importancia de tener una cota inferior para los valores propios del hamiltoniano es que el estado más bajo se puede identificar como el 'estado del vacío' y los primeros estados excitados pueden ser interpretados como estados que contienen partículas. La termodinámica nos da estados mezclados, con probabilidades

$$\rho = C e^{-E/kT}, \quad (2.5)$$

Sin embargo, en sistemas *extensos*, tales como el espacio FOCK para una teoría cuántica de campos, este hamiltoniano no es bastante bueno, por dos razones (relacionadas). Una es que las altísimas contribuciones de k en Ec. (2.4), se refieren a grandes plazos y esto implica que estas contribuciones son no locales. Si las interacciones se propagan con la velocidad de la luz, el hamiltoniano generará interacciones directas a distancias espaciales proporcionales a k . Esto hace necesario un recorte: si cada lapso de tiempo se asume equivalentes a un plazo PLANCK, entonces k lapsos se podrían considerar también, suficientemente cortos para reproducir la física local, a la escala del Modelo Estándar. Usar un recorte en Ec. (2.4) da un

Emergencia de la mecánica cuántica

espectro de energía según lo bosquejado en fig. 1. Se deriva del hecho que, si un sistema tiene periodicidad N , los valores propios de U_0 son $e^{2\pi i n/N}$.

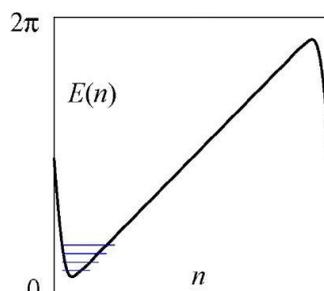


Figura 1: El espectro de energía $E(n)$ después de un recorte en k grande. Los estados de energía más bajos (líneas pequeñas) son afectados seriamente por el recorte.

En esta figura, se ha aplicado un recorte terso (recortando los valores grandes de k con una exponencial gaussiana). Se ve que, por consiguiente, los estados más bajos de la energía están afectados seriamente; sus valores propios de energía ahora son cuadráticos en los momentos k , de modo que, aquí, el hamiltoniano no reproduce al operador evolución correcto (2.1). Esta región, sin embargo, es importante al aplicar las leyes de la termodinámica, puesto que estos estados dominan en la expresión BOLTZMAN (2.5).

El segundo problema es que se espera que un hamiltoniano se altere cuando se consideran estados espacialmente separados: $H = H_1 + H_2$. En ese caso, no se puede mantener que los valores propios del hamiltoniano completo permanezcan dentro de los límites $(0, 2\pi)$. Se volverá a este punto en la sección 5.

3. Un Autómata celular

La construcción de un hamiltoniano extenso fue sugerida en [6]. Considérese a un autómata celular. Aquí espacio y tiempo son discretos [10]: se tiene un espacio D -dimensional, donde las posiciones están indicadas por enteros: $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^D)$, donde $x^i \in \mathbb{Z}$. También el tiempo t será indicado por números enteros y la evolu-

Alberto Mejías

ción del tiempo ocurre por etapas. Se podría asumir que las variables físicas $F(\vec{x}, t)$ en el modelo, tomen una variedad de formas; pero, la opción más conveniente es que sean números enteros módulo un cierto número entero N .

Ahora se escribirá un modelo explícito, donde estos grados de libertad físicos se definen solamente para los sitios pares del retículo:

$$\sum_{i=1}^D x^i + t = \text{par.} \quad (3.1)$$

Además, los datos se pueden elegir libremente en dos tiempos consecutivos; así, por ejemplo, en $t = 0$, se puede elegir que los datos iniciales sean $\{F(\vec{x}, t = 0), F(\vec{x}, t = 1)\}$.

Las ecuaciones dinámicas del modelo se pueden elegir de varias maneras, a condición de que sean reversibles con respecto al tiempo. Para ser explícitos, se eligen como sigue:

$$F(\vec{x}, t + 1) = F(\vec{x}, t - 1) + Q(F(x^1 \pm 1, x^2, \dots, x^D, t), \dots, F(x^1, \dots, x^D \pm 1, t)) \text{ Mod } N, \quad (3.2)$$

cuando $\sum_i x^i + t$ es impar,

donde el número entero Q es una cierta función arbitraria dada, de todas las variables indicadas: todos los más cercanos vecinos del sitio \vec{x} en el tiempo t . Ésta es reversible con respecto al tiempo porque se puede encontrar $F(\vec{x}, t - 1)$ a partir de $F(\vec{x}, t + 1)$ y los vecinos en el tiempo t . Asumiendo que Q sea una función suficientemente irregular, se obtiene generalmente, autómatas celulares absolutamente no triviales, de esta manera. De hecho, se ha demostrado que esta categoría de modelos, contiene ejemplos que son computacionalmente universales [11]. Los modelos de esta clase son considerados, a menudo, en animaciones por computadora.

Ahora se discutirán las matemáticas de este modelo, usando notación de espacio Hilbert. Se hará el cambio desde el enfoque HEISENBERG, donde los estados son fi-

Emergencia de la mecánica cuántica

jos, pero operadores tales como los entibles $F(\vec{x}, t)$, dependen del tiempo, al enfoque SCHRÖDINGER. Aquí, se denotará a los operadores F sobre los sitios pares por $X(\vec{x})$ y los de los sitios impares por $Y(\vec{x})$. En función del tiempo t , alternativamente se actualizan a $X(\vec{x})$ y $Y(\vec{x})$. Construyendo así, al operador evolución, sobre dos etapas temporales. Manteniendo al parámetro tiempo t , par:

$$U(t, t-2) = A \cdot B, \quad (3.3)$$

donde A actualiza a los datos $X(\vec{x})$ y B actualiza a los datos $Y(\vec{x})$.

Actualizar a los sitios pares solamente, es una operación por partes, mutuamente conmutativas, cada una definida sobre una coordenada espacial par, \vec{x} :

$$A = \prod_{\vec{x} \text{ par}} A(\vec{x}), \quad [A(\vec{x}), A(\vec{x}')] = 0, \quad (3.4)$$

mientras que el operador B se refiere solamente a los sitios impares,

$$B = \prod_{\vec{x} \text{ impar}} B(\vec{x}), \quad [B(\vec{x}), B(\vec{x}')] = 0, \quad (3.5)$$

Observar sin embargo, que los operadores $A(\vec{x})$ y $B(\vec{x}')$ no todos conmutan. Si \vec{x} y \vec{x}' son vecinos, entonces

$$\vec{x} - \vec{x}' = \vec{e}, \quad |\vec{e}| = 1 \rightarrow [A(\vec{x}), B(\vec{x}')] \neq 0. \quad (3.6)$$

Es importante observar aquí, que ambos operadores $A(\vec{x})$ y $B(\vec{x})$ actúan solamente en subespacios finitos de espacios HILBERT y son unitarios, así que se pueden escribir fácilmente como sigue:

$$A(\vec{x}) = e^{-i\alpha(\vec{x})} \quad \text{y} \quad B(\vec{x}) = e^{-i\beta(\vec{x})}. \quad (3.7)$$

Observar que $A(\vec{x})$ y $B(\vec{x})$ son cambiables, mientras que $\alpha(\vec{x})$ y $\beta(\vec{x})$ serán articulables, en general y son hermiteanos. Se puede escribir

$$\alpha(\vec{x}) = \mathcal{P}_x(\vec{x})Q(\{Y\}), \quad \beta(\vec{x}) = \mathcal{P}_y(\vec{x})Q(\{X\}), \quad (3.8)$$

donde $\mathcal{P}_x(\vec{x})$ es el generador para un desplazamiento de un solo paso, de $X(\vec{x})$:

Alberto Mejías

$$e^{-i\mathcal{P}_x(\vec{x})} |X(\vec{x})\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |X(\vec{x}) - 1 \text{ Mod } N\rangle, \quad (3.9)$$

y, análogamente, $\mathcal{P}_y(\vec{x})$ genera un desplazamiento de una sola etapa, de la función $Y(\vec{x})$.

Como ejemplo, se da la matriz P para el caso $N = 5$. Definiendo los coeficientes numéricos $\alpha = 2\text{sen}(\pi/5) + \text{sen}(2\pi/5)$ y $\beta = 2\text{sen}(2\pi/5) - \text{sen}(\pi/5)$, se tiene

$$P = \frac{4\pi i}{25} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \beta & -\beta & \alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha & \beta & -\beta \\ -\beta & \alpha & 0 & -\alpha & \beta \\ \beta & -\beta & \alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & \beta & -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{iP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Se puede ver que

$$[\mathbf{a}(\vec{x}), \mathbf{a}(\vec{x}')] = 0, \quad [\mathbf{b}(\vec{x}), \mathbf{b}(\vec{x}')] = 0, \quad \forall(\vec{x}, \vec{x}'); \quad (3.11)$$

$$[\mathbf{a}(\vec{x}), \mathbf{b}(\vec{x}')] = 0 \quad \text{sólo si } |\vec{x} - \vec{x}'| > 1. \quad (3.12)$$

Una consecuencia de Ecs. (3.11) es que también los productos A en Ec. (3.4) y B en Ec. (3.5) se pueden escribir como

$$A = e^{-i\sum_{\vec{x} \text{ par}} \mathbf{a}(\vec{x})}, \quad B = e^{-i\sum_{\vec{x} \text{ impar}} \mathbf{b}(\vec{x})}. \quad (3.13)$$

Sin embargo, ahora A y B no conmutan. No obstante, se quiere determinar al operador evolución total U para dos etapas consecutivas de tiempo, escribiéndolo como

$$U = A \cdot B = e^{-i\mathbf{a}} e^{-i\mathbf{b}} = e^{-2iH}. \quad (3.14)$$

Para este cálculo, se podría utilizar la expansión por potencias dada por la fórmula BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF [12],

Emergencia de la mecánica cuántica

$$e^P e^Q = e^R,$$

$$R = P + Q + \frac{1}{2}[P, Q] + \frac{1}{12}[P, [P, Q]] + \frac{1}{12}[[P, Q], Q] + \frac{1}{24}[[P, [P, Q]], Q] + \dots \quad (3.15)$$

una serie que continúa exclusivamente con conmutadores [12]. Substituyendo P por $-i\mathfrak{a}$, Q por $-i\mathfrak{b}$ y R por $-2iH$, se tiene una serie para el 'hamiltoniano' H en la forma de una secuencia infinita de conmutadores. Nótese que los conmutadores entre los operadores locales $\mathfrak{a}(\vec{x})$ y $\mathfrak{b}(\vec{x}')$ son no-desvanecientes sólo si \vec{x} y \vec{x}' son vecinos, $|\vec{x} - \vec{x}'| = 1$. Por tanto, si se insertan las sumas (3.13) en Ec. (3.15), se obtiene otra vez una suma:

$$H = \sum_{\vec{x}} \mathcal{H}(\vec{x})$$

$$\mathcal{H}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\mathfrak{a}(\vec{x}) + \frac{1}{2}\mathfrak{b}(\vec{x}') + \mathcal{H}_2(\vec{x}) + \mathcal{H}_3(\vec{x}) + \dots, \quad (3.16)$$

donde

$$\mathcal{H}_2(\vec{x}) = -\frac{1}{4}i \sum_{\vec{x}} [\mathfrak{a}(\vec{x}), \mathfrak{b}(\vec{y})],$$

$$\mathcal{H}_3(\vec{x}) = -\frac{1}{24} \sum_{\vec{y}_1, \vec{y}_2} [\mathfrak{a}(\vec{x}) - \mathfrak{b}(\vec{x}), [\mathfrak{a}(\vec{y}_1), \mathfrak{b}(\vec{y}_2)]], \text{ etc.} \quad (3.17)$$

Todos estos conmutadores sólo son no desvanecientes si las coordenadas \vec{y} , \vec{y}_1 , \vec{y}_2 , etc., son todas, vecinas de la coordenada \vec{x} . Es verdad que, en los términos de orden superior, pueden entrar los siguientes a los vecinos más cercanos, pero aún, se puede observar que estos operadores son todos funciones locales de los 'operadores de campo' $\Phi(\vec{x}, t)$ y así se llega a un hamiltoniano H que puede considerarse como la suma sobre el espacio D -dimensional de una densidad HAMILTON $\mathcal{H}(\vec{x})$, que tiene la característica de que

Alberto Mejías

$$[\mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{x}')] = 0, \text{ si } |\vec{x} - \vec{x}'| \gg 1. \quad (3.18)$$

aquí el símbolo \gg significa que en el n -ésimo orden en la serie BCH, \vec{x} y \vec{x}' deben estar separadas más allá de n etapas, una de la otra.

En cada orden finito de la serie, la densidad HAMILTON $\mathcal{H}(\vec{x})$ es una matriz hermiteana finito-dimensional y, por tanto, tendrá un valor propio mínimo h . En un volumen grande pero finito V , el hamiltoniano total H tendrá también, por tanto un valor propio mínimo, obedeciendo

$$E_0 > hV. \quad (3.19)$$

El estado propio asociado $|0\rangle$ se podría identificar con el 'vacío'. Este vacío es estacionario, aún si el autómata mismo pudiera tener solución no estacionaria. El siguiente al más bajo estado propio podría ser un estado de una sola partícula. En una descripción HEISENBERG, los campos $F(x, t)$ pueden crear un estado de una sola partícula a partir del vacío. Así se llega a algo que parece una genuina teoría cuántica de campos. Los estados son estados cuánticos en completo acuerdo con una interpretación Copenhague. Los campos $a(\vec{x}, t)$ y $b(\vec{x}, t)$ deberían cumplir los axiomas WIGHTMAN.

Hay tres maneras, sin embargo, en las cuales esta teoría se diferencia de teorías cuánticas de campos convencionales. Una es, por supuesto, que el espacio y el tiempo son discretos. Bien, quizá haya un interesante 'límite al continuo', en el cual la(s) masa(s) de la(s) partícula(s) sea(n) considerablemente más pequeña(s) que el inverso del tiempo cuántico.

En segundo lugar, no se ha hecho ninguna tentativa de llegar a la invariancia LORENTZ o, incluso, la invariancia GALILEI. Así, las relaciones de dispersión para estas partículas, si obedecen a alguna, pueden ser algo que no se asemeje a la física

Emergencia de la mecánica cuántica

de las partículas, convencional. Observar, sin embargo, que ninguna información física puede viajar más rápidamente que la velocidad uno, en unidades del retículo. Ésta es una importante restricción que el modelo tiene todavía en común con la relatividad especial.

Pero la tercera diferencia es más profunda. Fue asumido tácitamente, que la fórmula BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF converge. Éste no es a menudo, el caso. En la sección 4, se plantea que la serie converge bien, sólo si está intercalada entre dos estados propios $|E_1\rangle$ y $|E_2\rangle$ de H , donde E_1 y E_2 son valores propios que cumplen

$$2|E_1 - E_2| < 2\pi/\hbar\Delta t, \quad (3.20)$$

donde Δt es la unidad de tiempo de nuestro reloj y el primer factor 2 es el que aparece en Ec. (3.14). (la "constante PLANCK" \hbar , se ha insertado, simplemente, para dar al tiempo y a la energía las dimensiones físicas usuales).

Ésta puede parecer una severa restricción; pero, primero, se puede argumentar que $2\pi/\hbar\Delta t$, aquí, es la energía PLANCK y, en la práctica, cuando se hace mecánica cuántica, sólo se aprecian energías o, más bien, diferencias de energía, que son de hecho, mucho más pequeñas que la energía PLANCK ¿Significa esto que no ocurren transiciones con diferencias más grandes de energía? Hay que comprender que, quizás, en este modelo, la energía no se conserva exactamente. Puesto que el tiempo es discreto, a primera vista parece que la energía sólo se conserva módulo π , y esto podría indicar que nuestro 'estado vacío' no es estable después de todo. La energía podría saltar hacia otros estados por múltiplos enteros de π . En Sección 4, sin embargo, se discute que tales violaciones de la conservación de energía no ocurrirán y que la existencia de una densidad hamiltoniana es una propiedad más profunda de todos los autómatas celulares que permitan reversión del tiempo (de modo que la evolución sea obviamente unitaria).

Alberto Mejías

La conclusión que se puede proyectar ahora, es que se pueden considerar procedimientos prestados de la genuina mecánica cuántica y que ellos pueden conducir a un reacomodo de los estados de una manera tal que los entibles, los cambiables y los articulables se mezclen naturalmente, permitiendo una descripción eficaz de un sistema a grandes escalas del tiempo y de la distancia para las cuales sólo se aplica el lenguaje de la Mecánica Cuántica. Esto es todo lo que realmente se necesita entender de por qué es que la Mecánica Cuántica parece dominar el mundo de átomos y otras partículas minúsculas, que, aunque pequeño comparado a los seres humanos, sigue siendo muy grande comparado a la escala PLANCK.

A este punto parece bien comentar que hay un precedente. De hecho, la Teoría Cuántica de Campos puede utilizarse convenientemente para resolver un problema totalmente clásico: el Modelo ISING 2-dimensional [13].

4. Convergencia de la expansión BCH

Cuando los operadores A y B están acotados por abajo y por arriba, se espera que la expansión de la serie BCH tenga un radio finito de convergencia; pero, no converge ciertamente, en general. Para comprender la situación, veamos una derivación rápida de la expansión. Dado los operadores A y B , considerar la definición de un operador $C(\sigma)$ como función continua de σ , que satisface

$$e^{C(\sigma)} = e^{i\sigma A} e^{iB}; \quad C(0) = B. \quad (4.1)$$

Diferenciando con respecto a σ se obtiene

$$\int_0^1 dx e^{ixC(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} C(\sigma) e^{-ixC(\sigma)} = A; \quad (4.2)$$

Diagonalizando $C(\sigma)$ en un punto dado $\sigma = \sigma_0$, se define

$$C(\sigma_0)|E\rangle \stackrel{\text{def}}{=} E|E\rangle, \quad \langle E_1 | \frac{d}{d\sigma} F(\sigma) | E_2 \rangle \Big|_{t=t_0} \stackrel{\text{def}}{=} F'_{12}. \quad (4.3)$$

De Ec. (4.2), se tiene

Emergencia de la mecánica cuántica

$$\begin{aligned}
 C'_{12} &= \frac{i(E_1 - E_2)}{e^{i(E_1 - E_2)} - 1} A_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n B_n}{n!} (E_1 - E_2) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n B_n}{n!} [C, [C, \dots, [C, A]] \dots]_{12}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde B_n son los números BERNOULLI. Recurrentemente, esto define a $C(\sigma)$. Es claro que esta serie (4.4) converge cuando

$$|E_1 - E_2| < 2\pi. \tag{4.5}$$

Observar que esto no implica que la serie BCH misma, converja cuando esté intercalada entre dos estados $|E_1\rangle$ y $|E_2\rangle$ que estén separados por menos que 2π , porque la condición (4.5) debe cumplirse para todo σ , mientras que los estados $|E_i\rangle$ son σ -dependientes. La derivación sugiere simplemente que, si durante todo el cálculo, sólo se consideran estados cuyas energías estén separadas por mucho menos que 2π en unidades naturales, *en todas las etapas*, se puede esperar que la serie converja. Sin embargo, se puede considerar que esta condición es débil, probablemente para ser satisfecha en varios casos, porque la unidad natural aquí, es la unidad PLANCK, $E_{Planck}/c^2 \approx 21\mu g$, lo que es, siempre, mucho más grande que cualquier experimento realizado en Mecánica Cuántica.

Una interesante observación adicional es que la que la expansión BACKER-CAMPBELL-HAUSDORFF (3.15) se puede reescribir en términos de una serie que contenga mucho menos términos. Sean

$$-i\mathfrak{a} = P + Q, \quad -i\mathfrak{b} = P - Q. \tag{4.6}$$

y considérese que, realmente, sólo estamos interesados en las clases de conjugación de H , no en H mismo:

$$e^{P+Q} e^{P-Q} = e^F e^R e^{-F}, \tag{4.7}$$

Alberto Mejías

donde F se puede elegir con ciertas cantidades de libertad. Observando que al intercambiar a y b obtiene un hamiltoniano tan bueno como H y, ciertamente, de la misma clase de conjugación, se busca un F tal que

$$R(P, Q) = R(P, -Q), \quad R(-P, Q) = -R(P, Q). \quad (4.8)$$

Usando la notación abreviada $QP^3Q = [Q, [P, [P, [P, Q]]]]$, etc. se encuentra

$$R = 2P - \frac{1}{12}QPQ + \frac{1}{960}Q(8P^2 - Q^2)PQ + \frac{1}{60480}Q(-51P^4 - 76QPQP + 33Q^2P^2 + 44PQ^2P - \frac{3}{8}Q^4)PQ + \mathcal{O}(P, Q)^9. \quad (4.9)$$

Ya el tercer término en esta expresión va más allá de la expansión (3.15); pero, (4.9) no converge mucho más rápidamente.

5. Gravedad cuántica

Para conseguir partículas cuánticas que tengan una ley de dispersión:

$$E(p) \rightarrow \frac{p^2}{2m} \quad (5.1)$$

se necesita, por lo menos, una cierta forma de invariancia galileana —de modo que las partículas puedan tener una velocidad. Puesto que los autómatas celulares tienen una velocidad límite de transferencia de información, aquella tendría que ser substituida por invariancia LORENTZ desde el comienzo, así pues, es difícil evitar relatividad especial, incluso en las primeras etapas de construcción de modelos. Sin embargo, tanto el grupo GALILEI como el grupo LORENTZ son *no compactos* y esto hace muy difícil cambiar a estas simetrías en simetrías aproximadamente razonables para los autómatas celulares².

² Se habría podido esperar que una simetría aproximada cambiara a una simetría exacta en el límite continuo.

Emergencia de la mecánica cuántica

No sólo no se puede dejar por fuera a la relatividad especial; sino que, tal vez, tampoco a la *Relatividad General*, antes de lograr una clara comprensión de la Mecánica Cuántica como descripción de las características estadísticas de un sistema clásico. Se ha visto, en nuestros cálculos que, primero, la construcción (3.16) para nuestro hamiltoniano no podría producir una expresión extensa para la energía. La energía total del universo sería siempre menor que $2\pi/T_{\text{Planck}}$ (para simplificar, tomamos como unidad fundamental del tiempo al tiempo PLANCK). Todavía, deseamos describir regiones extensamente separadas (1, 2, 3,...) del Universo en términos de un hamiltoniano total H_{Tot} que se escriba aproximadamente como

$$H_{\text{Tot}} = H_1 + H_2 + H_3 + \dots, \quad (5.2)$$

de modo que, inevitablemente, la energía total pueda llegar a ser mucho más grande que el límite $2\pi/T_{\text{Planck}}$.

Nuestro tratamiento del autómeta celular produjo, convenientemente, una densidad HAMILTON, de modo que la energía global sea extensa, pero la divergencia de la serie CBH nos forzó a limitarnos a estados cuánticos cuyas energías permanecen más cercanas entre sí, que la energía PLANCK.

Sería mucho mejor si se pudiera encontrar un procedimiento donde no hubiera que imponer tales limitaciones. Éste sería el caso si teníamos otra manera de definir la densidad de Hamilton. Aquí es donde entra la relatividad general. Cuando se toma en cuenta a la fuerza gravitacional, se puede tener un potencial gravitacional espacio-dependiente, que conduce a los operadores dinámicos espacio-dependientes $\tau(\vec{x})$ que determinan la velocidad de reloj local. Así, el operador evolución resulta

$$U(\tau(\vec{x})) = e^{-i \int \tau(\vec{x}) \mathcal{H}(\vec{x}) d^3 \vec{x}}. \quad (5.3)$$

Alberto Mejías

Así, una tal teoría permite una definición directa de las densidades HAMILTON. Comparando a los operadores evolución a diferentes potenciales gravitacionales de f , se deriva $\mathcal{H}(\vec{x})$. En Relatividad General,

$$\tau(\vec{x}) = t\sqrt{-g^{00}(\vec{x})} . \quad (5.4)$$

6. Conclusiones

La importancia de estos cálculos es que cada uno de los conmutadores en la serie BCH es no desvaneciente sólo si consiste de operadores vecinos; por tanto, el hamiltoniano resultante se puede escribir como suma de densidades Hamilton. así parece como si el hamiltoniano se construyera justo como en una teoría cuantizada de campos. Las partes distantes de este 'universo' se desarrollan independientemente. El hamiltoniano total tiene valores propios mucho mayores que 2π y todos son acotados por abajo. Si ahora nos concentramos en los estados que quedan más bajos, se puede ver que éstos consisten en partículas localizadas que se asemejan a lo que se percibe en el mundo real. Tienen energías positivas, de modo que se les puede aplicar la termodinámica.

Pero, como se ha visto, hay una advertencia: la serie BCH (3.15) no converge. Para ser más precisos, el operador H es ambiguo cuando dos de sus valores propios estén separados más allá de $2\pi/T_{\text{Planck}}$, como se puede ver directamente de su definición (2.1). Hasta allí es donde llega el radio de convergencia de la serie.

Debe deducirse que la serie (3.15) no se puede truncar fácilmente; tendrá que resumirse cuidadosamente, y aun permanece dudosa la cuestión de si existe o no una forma de resumirla. Se podía argüir que estas dificultades se refieren solamente a elementos matriciales entre estados cuyos valores propios de energía están separados por más que la energía Planck, que es un dominio de la Física Cuántica que nunca se ha tratado de modos experimental, de manera que podrían ignorarse segu-

Emergencia de la mecánica cuántica

ramente. Con todo, esta situación es insatisfactoria, así que se necesita más trabajo al respecto.

Concluimos con una conjetura importante: quizás nuestro mundo no es mecánico-cuántico, sino que sólo lo es nuestra percepción de él.

Referencias

- [1] 't Hooft, G. "Quantum Gravity as a Dissipative Deterministic System", *Class. Quant. Grav.* **16** (1999) 3263, arXiv:gr-qc/9903084.
- [2] 't Hooft, G. "Determinism in Free Bosons", *Int. J. Theor. Phys.* **42** (2003) 355, arXiv:hep-th/0104080.
- [3] Elze, H. Th. "Deterministic models of quantum fields", *J. Phys.: Conf. Ser.* **33** (2006) 399, arXiv:gr-qc/0512016v1.
- [4] Blasone, Jizba, M. P. and Kleinert, H. *Annals of Physics* **320** (2005) 468, arXiv: quant-ph/0504200; id., *Braz. J. Phys.* **35** (2005) 497, arXiv: quant-ph/0504047.
- [5] 't Hooft, G. "Emergent quantum mechanics and emergent symmetries", presented at PASCOS 13, Imperial College, London, July 6, 2007; ITP-UU-07/39, SPIN-07/27; arXiv:hep-th/0707.4568.
- [6] 't Hooft, G. "Entangled quantum states in a local deterministic theory", 2nd Vienna Symposium on the Foundations of Modern Physics (June 2009), ITP-UU-09/77, SPIN-09/30; arXiv:0908.3408v1 [quant-ph].
- [7] Einstein, A. Podolsky, B. and Rosen, N. "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.

Alberto Mejías

- [8] Bell, J. S. "Speakable and unspeakable in quantum mechanics" (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987).
- [9] 't Hooft, G. "The mathematical basis for deterministic quantum mechanics", in *Beyond the Quantum*, World Scientific, Th. M. Nieuwenhuizen et al, ed., pp.3-19, arXiv: quant-ph/0604008;
- [10] Balachandran, A. P. and Chandar, L. *Nucl. Phys.B* **428** (1994) 435;
- [11] Miller, D. B. and Fredkin, E. "Two-state, Reversible, Universal cellular Automata in Three Dimensions", Proc. 2nd Conf. on Computing Frontiers, Ischia, Italy: ACM **45**, doi: 10.1145/1062271, arXiv:nlin/0501022.
- [12] SAGLE, A. A. and WALDE, R. E. "Introduction to Lie groups and Lie Algebras", Academic Press, New York, 1973. ISBN 0-12-614550-4.
- [13] KAUFMAN, B. *Phys. Rev.* **76** (1949) 1232; Kaufman, B. and Onsager, L. *Phys. Rev.* **76** (1949) 1244.
- [14] 'T HOOFT, G. "The Emergence of Quantum Mechanics". *AIP Conf. Proc.* **1446**, (2012) 341; doi: 10.1063/1.4728004.