Gravedad en un Mundobrana

Gravity in the Braneworld

Alexander Moreno Sánchez

Centro Colombiano de Cosmología y Astrofísica

Bogotá. D. C, Colombia.

amorenosa@unal.edu.co

Recibido 01-03- 2013; Aceptado 30 - 03- 2013; Publicado en línea 10 - 10 - 2013

Resumen

De forma hipotética, se ha supuesto que el universo es una tri-brane inmersa en un espaciotiempo anti-deSitter cinco dimensional, con la materia bariónica y oscura confinada sobre ella, en tanto que la gravedad puede actuar en todo el espaciotiempo completo, es decir en el espaciotiempo anti-de Sitter 5D, entonces puede considerarse que la propagación causal de señales luminosas y gravitacionales, en general pueden difererir. Se puede dar el caso de que una señal gravitacional viajando entre dos puntos sobre la brane pueda pasar al llamado bulk, y que bajo algunas circunstancias especiales, dicha señal pueda manifestarse de forma más rápida que una señal luminosa que viaje entre estos dos puntos. Es propósito de este trabajo ilustrar algunos elementos esenciales del modelo de braneworld, mostrar el hecho anterior, y determinar algunas consecuencias de este efecto sobre la cosmología.

***PACS*:** 04.50.-h, 04.50.Kd, 14.70.Kv
***Palabras Claves*:** Mundobrane, dimensiones adicionales, reducción KK, gravitones.

Abstract

Hypothetically, it is assumed that the universe is a three-brane embedded in a spacetime five dimensional anti-Desitter with baryonic and dark matter confined on it, while gravity can act across the full spacetime, ie in anti-de Sitter spacetime 5D, then it may be that the causal propagation and gravitational light signals in general can defer. It may be the case that a gravitational signal traveling between two points on the brane can pass the call bulk, and that under some circumstances, such a signal can manifest faster than light signal to travel between these two points. Purpose of this paper is to illustrate some essential elements braneworld model, show the above fact, and determine some consequences of this effect on cosmology.

***PACS*:** 04.50.-h, 04.50.Kd, 14.70.Kv
***Keywords*:** Braneworld, extra dimensions, reduction KK, gravitons.

---

1 Introducción

Los modelos de altas dimensiones han cobrado una singular importancia, debido a que suministran soluciones, enfoques y aproximaciones diferentes a los convencionales, fundamentalmente en la consideración de problemas de vieja data en la física; como por ejemplo, el problema de jerarquías de la física de partículas, el cual consiste en la débil intensidad del campo gravitacional en comparación con la intensidad de los otros campos, en otros términos se trata del problema existente entre la escala de energía de Planck y la escala electrodébil, igualmente y sin razón fundamental se observa, por lo menos a la fecha, una carencia marcada en la detección de radiación gravitacional, es decir en este momento no se ha logrado la detección de las llamadas ondas gravitacionales, por una u otra razón, además, entre otras muchas cosas, se carece de un marco conceptual fundamental para la unificación de las interacciones fundamentales, esto es de una teoría de la gravedad cuántica; a nivel observacional también encontramos hechos como el de la expansión acelerada del universo, la observación de la llamada materia oscura y energía oscura, y recientemente, las anomalías de la radiación cósmica de fondo. Esto, constituye toda una suerte de elementos y circunstancias que propician el surgimiento de marcos teóricos o de teorías alternativas que den cuenta de los hechos anotados anteriormente como de otros que no se mencionan en este momento, es allí, donde radica la importancia de estudiar y analizar las consecuencias de dichos modelos como el que propone la teoría de los mundobranas o de braneworld. Se pretende en este corto trabajo ilustrar algunos aspectos de los llamados modelos brane, entre ellos la gravedad y la estructura global de una brane, y la propagación de señales gravitacionales y electromágneticas en un modelo braneworld[7][8][9][10] [15] [16].

2 Modelo de Randall-Sundrum

Considerando una métrica general, que de cuenta de soluciones de tipo cosmológico, tal como

$$ds_5^2 = -N^2(t,y)dt^2 + A^2(t,y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + B^2(t,y)dy^2 \ , \tag{1}$$

en la cual podemos hacer $B^2(y) \to 1$, con lo cual se libera la coordenada adicional u extra de la función $B^2(y)$, así obtenemos[1][2]

$$ds_{4+1}^2 = -N^2(y)dT^2 + A^2(y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + dy^2 \ , \tag{2}$$

entonces podemos simplificar

$$ds_{4+1}^2 = \left(N^2(y)\delta_{ij} + A^2(y)\gamma_{ij}\right) dx^\mu dx^\nu + dy^2 \ , \tag{3}$$

de tal forma que se puede hacer la siguiente identificación[1] $\left(N^2(y)\delta_{ij} + A^2(y)\gamma_{ij}\right) = e^{\frac{-2|y|}{l}}\eta_{\mu\nu}$. Esta identificación general permitirá desarrollar el modelo de braneworld y solucionar en principio el problema de jerarquías, el cual es un problema fundamental en la física de altas energías.

En el marco de los modelos de braneworld, como por ejemplo en los modelos de Randall y Sundrum, se considera que las branes estan sumergidas en un espaciotiempo AdS_5, en donde se puede introducir un sistema de coordenado Gausiano normal, así que las cooordenadas en tal espaciotiempo se pueden denotar como $x^\mu = (x^a, y)$ con lo cual puede considerarse que la métrica adopta la siguiente expresión[3][4]

$$ds^2 = e^{-2K|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \ , \tag{4}$$

el factor de curvatura exponencial, introducido anteriormente, significa que el volumen en el espacio 5D se puede hacer pequeño cuando y se hace grande. En su primer artículo Randall y Sundrum mostraron que la jerarquía entre la escala electrodébil de TeV y la aparente escala de Plank de $10^{19}GeV$, se puede explicar por el factor de curvatura, aún si el tamaño de la dimensión extra es relativamente pequeña (distancia entre branes). Ya en su segundo artículo mostraron que si no existía una segunda brane, y la dimensión extra se extendía al infinito, la gravedad puede permanece efectivamente localizada sobre la única brane existente, ya que el volumen integrado

[1] En realidad la métrica Randall-Sundrum tiene su origén en la teoría de cuerdas, propiamente dicha, y es allí donde se encuentra plenamente justificado el factor de curvatura exponencial.

permanece finito cuando $y \to \infty$, esta es la razón por la cual se propuso este modelo como una alternativa a la compactificación, es decir como un manera diferente de estudiar y de introducir dimensiones adicionales de tipo espacial infinitas.

El éxito experimental de la ley Inversa del Cuadrado y de la Teoría General de la Relatividad, es que parecen en todas las situaciones implicar cuatro dimensiones espaciotemporales no compactas (universo 3+1). La concepción clásica o tradicional es que las dimensiones adicionales pueden ser aceptadas tan sólo si ellas son compactas y suficientemente pequeñas para ser consistentes con las pruebas gravitacionales corrientes, como también es que si existen n-dimensiones extras compactas, la escala de Planck, debe relacionarse con la escala gravitacional en altas dimensiones, mediante $M_{Pl}^2 = M^{2+n} V_n$, donde V_n, es el volumen del espacio n-dimensional.

El modelo Randall-Sundrum, muestra que nada de lo establecido anteriormente, es necesariamente cierto, ya que lo establecido esta basado en las propiedades de una geometría factorizable, la historia puede cambiar significativamente cuando tal consideración sea omitida, talvéz la consecuencia más dramática es que quizá vivimos en un espaciotiempo de $4 + n$ dimensiones con n dimensiones de tipo no compactas, en perfecta compatibilidad con la gravedad experimental.

Se muestra que la masa de Planck esta determinada por la curvatura de las altas dimensiones más que por el tamaño de las dimensiones extras. Esta curvatura no entra en conflicto con la invarianza cuadridimensional de Poincaré. La razón de lo establecido anteriormente, es que la curvatura del espacio cinco-dimensional soporta un "estado acotado" de un gravitón en altas dimensiones sin masa permaneciendo confinado a una pequeña región del espacio[2] [1] [2] [3].

En el escenario braneworld no se realiza una compactificación para localizar la gravedad en la brane, sino que por el contrario se considera que la curvatura del volumen (bulk) permite tratar la gravedad, para evitar que 'escape' en las dimensiones extras, en tanto que a bajas energías interviene una constante cosmológica de tipo volumétrica (bulk), la cual "presiona" la gravedad

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{\kappa^2 l^2} = -6\mu^2 \ , \tag{5}$$

donde l es el radio de curvatura del espacio AdS_5 y donde μ es la correspondiente escala de energía. Esto es como si la constante cosmológica volumétrica actuara para presionar el campo gravitacional cercano a la brane. La métrica de los modelos RS, se puede escribir de forma general como

$$ds^2 = e^{-2K(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \ , \tag{6}$$

en la que se ha introducido la función $K(y)$, la cual contiene información de la dimensión extra.

Ahora bien, llevando la métrica a la ecuación de campo gravitacional[17] [18] [20], obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$6K'^2 = -\kappa^2 \Lambda_2 \ , \quad 3K'' = \kappa^2 \lambda \delta(y) \ , \tag{7}$$

solucionando la primera ecuación se obtiene la siguiente solución

$$K(y) = \sqrt[2]{-\frac{\kappa^2 \Lambda_5}{6}} y \equiv k \mid y \mid \ , \tag{8}$$

corresponde a la función introducida anteriormente, lo cual nos dice que Λ_5 debe ser negativo, ahora, si se integra la segunda ecuación desde $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$ y tomando el límite $\varepsilon \to 0$, y en consideración de la simetría Z_2 (simetría de orbifold o periódica sobre una circunferencia), encontramos $6K' = \kappa^2 \lambda$, lo cual junto a $K(y) = k \mid y \mid$ conduce a que $\Lambda_5 = -\frac{\kappa^2 \lambda^2}{6}$, que es la expresión análoga a lo que se conoce como ajuste-fino entre la tensión de la brane y la constante cosmológica volumétrica, así que mediante un ajuste adecuado permite obtener la solución RS estática.

En el modelo RSI (modelos de dos branes), localizadas en $y = 0$, $y = L$, con simetría Z_2, y donde se considera que en cada brane existe una tensión, las cuales son iguales y opuestas, es decir $\pm\lambda$, donde

[2]Es decir, que las fluctuaciones o interacciones gravitacionales descritas mediante los gravitones permanezcan acotadas o constreñidas a las vecindades de la brane, para evitar que la energía de dichas interacciones termine escapando.

$$\lambda = \frac{3M_p^2}{4\pi l^2} \ , \tag{9}$$

de este modo en la brane de tensión positiva existe la escala fundamental de energía M_5 (llamada brane oculta), y en la brane de tensión negativa encontramos localizados los campos del Modelo Estándar que están confinados sobre esta brane (llamada brane visible). Debido al factor de curvatura exponencial, la escala efectiva sobre la brane visible en $y = L$ es la escala de Planck M_p, donde[3]

$$M_p^2 = M_5^3 l \left[1 - e^{-2L/l}\right] \ , \tag{10}$$

expresión que muestra una aproximación a la solución del problema de jerarquías, cuando $L \to \infty$, $M_p^2 = M_5^3 l$, luego existe un valor bien definido para la masa de Planck, incluso si la dimensión adicional es infinita[4].

En resumén, el modelo RSI, propone un mecanismo para solucionar el problema de jerarquías introduciendo una dimensión extra pequeña, con un espacio intermembrana tipo AdS_5, en tanto que en el segundo modelo RSII introduce una brane con tensión positiva y donde la segunda membrana se remueve al infinito, de tal forma que aun si no existe la otra brane y la dimensión extra se extiende hasta el infinito, la gravedad permanece efectivamente localizada sobre la brane existente, ya que el volumen completo permanece finito cuando la dimensión extra tiende a infinito, esto es lo que se ha propuesto como una alternativa a la compactificación.

3 Gravedad en el Braneworld RS

Según lo anterior no existe problema en tomar $L \to \infty$, esto permite remover la brane 'reguladora' o invisible del sistema de dos brane. Sin embargo es necesario determinar cuando el espectro de las fluctuaciones tensoriales linealizadas es consistente con la gravedad cuadri-dimensional convencional. Esto, se requiere encontrar todos los modos de oscilación que pueden aparecer en el marco de la teoría gravitacional, cuadri-dimensional, efectiva, desarrollando una reducción Kaluza-Klein en cuatro dimensiones (expansión en términos de una serie de Fourier). Para hacer esto, se considera una perturbación a la métrica; la cual se puede expresar como $h_{\mu\nu} = h(x^\mu, y) = \psi(y)e^{-ipx^\mu}$, lo cual representa las fluctuaciones gravitacionales linealizadas, alrededor de la métrica $e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}$. De forma simple se puede interpretar $h(x^\mu, y)$ como el campo de gravitones (modos de "radiación gravitacional " o de ondas gravitacionales), los cuales se pueden expresar como una superposición de ondas planas, para cumplir con la condición de fluctuaciones pequeñas o linealizadas[5][6] [17] [18] [19].

De tal manera que los gravitones deben de satisfacer una ecuación de onda, la cual en cinco dimensiones es

$$\left[\partial\mu\partial^\nu - \partial_j\partial^j + V(y)\right] h(x^\mu, y) = 0 \ , \tag{11}$$

donde los índices griegos barren las cuatro dimensiones convencionales, y los índices latinos barren las dimensiones extras, el término $V(y)$ que representa un 'potencial' (potencial geométrico) no trivial surgido de la curvatura de la dimension adicional.

De esta forma tenemos que la función $\psi(y)$ es un modo propio de la ecuación de onda en la dimensión extra

$$\left[-\partial_j\partial^j + V(y)\right] \psi(y) = -m^2\psi(y) \ , \tag{12}$$

donde $m^2 = p^2$, representa el momentum asociado a las ondas planas o simplemente la masa 4-dimensional de las exitaciones KK. Definiendo las componentes de la fluctuación que permitan obtener una solución simple o que lleve a que las componentes de la métrica queden desacopladas, mediante una calibración o gauge, se define el gauge R-S

$$h_{55} = h_{\mu 5} = 0, \ h^\nu_{\mu,\nu} = 0, \ h^\mu_\mu = 0 \ . \tag{13}$$

Es posible mostrar que esta condición se puede imponer en el bulk, conduciendo, a la ecuación de movimiento

$$\left[a^{-2}\Box_4 + \partial_y^2 - 4l^{-2}\right] h_{\mu\nu} = 0 \ , \tag{14}$$

sin embargo, en general, el escoger el anterior gauge, no garantiza que la brane quede localizada en $y = 0$, de tal manera que la localización de la membrana en general estará dada por una función en la dimensión adicional, definida sobre las coordenas de la brane $y = -\xi_5(x^\mu)$, donde la función de localización satisface una ecuación de onda sobre la brane

$$\Box_4 \xi_5 = \frac{1}{6} \kappa T \ , \tag{15}$$

realizando un cambio de coordenas de normales $(x^\mu, \, y)$ a coordenadas Gaussianas normales $\left(\bar{x^\mu}, \, \bar{y}\right)$, en el cual definimos la brane localizada en $\bar{y} = 0$, además de que $\bar{h}_{55} = \bar{h}_{\mu 5} = 0$, $\bar{h}^\nu_{\mu,\nu} = 0$, $\bar{h}^\mu_\mu = 0$, adicionalmente se asume que existe simetría en las condiciones cuando $\bar{y} \to -\bar{y}$, para poder trabajar sobre el lado positivo de la membrana $\bar{y} = +0$, de tal manera que se puede mostrar que las condiciones de frontera sobre la brane requiere que

$$\partial_y (e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} + \bar{h}) = -(\kappa/3) \left[\lambda (e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} + \bar{h}) - T e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} + 3T_{\mu\nu} \right] \ , \tag{16}$$

condición de frontera que implica que

$$\left[\partial_y + 2l^{-1} \right] \bar{h}_{\mu\nu} = -\kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} T) \ , \tag{17}$$

como en ambos gauges $h_{55} = h_{\mu 5} = \bar{h}_{55} = \bar{h}_{\mu 5} = 0$, la transformación más general entre ellos toma la forma

$$\bar{\xi}_5 = \xi_5(x^\rho) \ , \tag{18}$$

$$\xi^\mu = \frac{-l}{2} e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} \xi_5(x^\rho)_{,\nu} + \xi^\mu(x^\rho) \ , \tag{19}$$

y la ecuación de transformación del gauge toma la forma

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - l\xi_{5,\mu\nu} - 2l^{-1} e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} \xi_5 + e^{-2k|y|} \eta_{\rho(\mu} \xi^\rho_{,\nu)} \ , \tag{20}$$

de tal manera que la condición de frontera, anotada anteriormente, se reduce a

$$\left[\partial_y + 2l^{-1} \right] h_{\mu\nu} = -\kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} T) + 2\kappa^{-1} \xi_{5,\mu\nu} \ , \tag{21}$$

así que la ecuación de onda que satisface el gravitón, en consideración de las condiciones de frontera es

$$\left[\frac{\Box_4}{a^2} + \partial_y^2 - \frac{4}{l^2} + \frac{4}{l} \delta(y) \right] h_{\mu\nu} = -\kappa \left[(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} T) + 2\kappa^{-1} \xi_{5,\mu\nu} \right] \delta(y) \ , \tag{22}$$

el siguiente paso es obtener la solución de onda anterior, para lo cual definimos la función de Green retardada 5D, que satisface

$$\left[\frac{\Box_4}{a^2} + \partial_y^2 - \frac{4}{l^2} + \frac{4}{l} \delta(y) \right] G_R \left(x^a, x^a \right) = \delta_5 \left(x^a - x^a \right) \ , \tag{23}$$

entonces la solución para los gravitones se puede expresar como

$$h_{\mu\nu} = -2\kappa \int d^4 x^\mu G_R \left(x^\mu, x^\mu \right) \left[(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} T) + 2\kappa^{-1} \xi_{5,\mu\nu} \right] \ , \tag{24}$$

donde la integración se realiza sobre la membrana, es decir cuando $y = 0$, como $h^\mu_\mu = 0$, tenemos que $(T_{\mu\mu} - \frac{1}{3} e^{-2k|y|} \eta_{\mu\mu} T) + 2\kappa^{-1} \xi_{5,\mu\mu} = 0$, lo cual nos conduce a la ecuación $\Box_4 \xi_5 = \frac{1}{6} \kappa T$.

El comportamiento de $h_{\mu\nu}$ en el infinito está determinado por la forma de $G_R\left(x^a, x^{a}\right)$. La función de Green puede ser construida de un conjunto completo de estados propios en la forma usual, tenemos

$$G_R\left(x^a, x^a\right) = -\int \frac{d^4k_\mu}{(2\pi)^4} e^{-ik_\mu(x^\mu - x^{\mu})} \left[\frac{\phi(y)^2\phi(y)^2}{k^2-(\varpi+i\epsilon)^2} + \int_0^\infty dm \frac{u_m(y)u_m(y)}{m^2+k^2-(\varpi+i\epsilon)^2}\right] \ , \tag{25}$$

donde el primer término corresponde al modo cero de la oscilación y el resto corresponde a los modos continuos KK, que se pueden expresar por[5]

$$u_m(y) = \sqrt[2]{\frac{ml}{2}} \frac{\left[J_1(ml)Y_2(\frac{ml}{a}) - Y_1(ml)J_2(\frac{ml}{a})\right]}{\sqrt[2]{J_1(ml)^2+Y_1(ml)^2}} \ . \tag{26}$$

En lo siguiente se tratará de inferir el comportamiento de dicha función de onda.

4 Aproximación de Campo débil

Para obtener la aproximación de campo débil, en principio se considera una masa sobre una membrana y se hacen las consideraciones adecuadas para encontrar la forma final del campo gravitacional débil y estático para hacer una aproximación a la ley universal de la gravedad de Newton.

Para el caso estacionario, se considera la función de Green para el operador Laplaciano en términos de la función de Green 5D hallada anteriormente, obteniendo[20]

$$G(\mathbf{x}, y, \mathbf{x}, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dt G_R\left(x^a, x^a\right) \ , \tag{27}$$

donde $\mathbf{x}$ son las coordenadas cartesianas espaciales sobre la brane. Cuando ambos puntos de la coordenada adicional se toman sobre la brane, es decir $y = y = 0$, se obtiene

$$G(\mathbf{x}, 0, \mathbf{x}, 0) \approx \frac{-1}{4\pi l\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}\right|}\left[1+\frac{l^2}{2\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}\right|^2}+\cdots\right] \ , \tag{28}$$

ahora, si solamente uno de los puntos está sobre la brane, podemos encontrar, la siguiente expresión

$$G(\mathbf{x}, y, \mathbf{x}, 0) \approx \frac{-a^3}{8\pi l}\left[\frac{2a^2\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}\right|^2+3l^2}{\left(a^2\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}\right|^2+l^2\right)^{3/2}}\right] \ , \tag{29}$$

lo anterior muestra que la perturbación métrica (gravitón) decae rapidamente al horizonte AdS_5 cuando $y \to \infty$.

Como se quiere obtener una solución sobre la brane, es decir obtener los efectos de la fluctuación gravitacional sobre la brane, hacemos uso nuevamente de las coordenadas normales Gaussianas, de la sección anterior y obtenemos lo siguiente

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h^m_{\mu\nu} + h^\xi_{,\mu\nu} + l\xi_{5,\mu\nu} + 2l^{-1}e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}\xi_5 - \xi_{(\mu,\nu)} \ , \tag{30}$$

en donde se ha hecho la separación entre los términos correspondientes a campos de materia, y los correspondientes al desplazamiento sobre la brane. De tal forma que se puede expresar la fluctuación gravitacional de la siguiente manera

$$h^m_{\mu\nu} = -2\kappa \int d^4x G_R\left(x^a, x^a\right)(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}T)\xi_5 \ , \tag{31}$$

$$h^\xi = -4\int d^4x G_R\left(x^a, x^a\right)\xi_5 \ , \tag{32}$$

entonces, colocando $y = 0$, y escogiendo ξ_μ adecuadamente, se obtiene la forma que tiene la fluctuación gravitacional en coordenadas Gaussianas

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h^m_{\mu\nu} + 2l^{-1}e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}\xi_5 \ , \tag{33}$$

considerando, que la masa sobre la brane tiene simetría esférica y estática, con un tensor momentum-energía dado por $T_{\mu\nu} = \rho(r)u_\mu u_\nu$, se puede obtener

$$h^\xi = \frac{4}{3}\int_0^r \frac{dr'}{r^2}\int_0^{r'} dr' r'^2 V(r') \ , \tag{34}$$

donde $V(r') = \frac{\kappa}{2}\int G_R\left(x^a, x^a\right)\rho(x')d^3x'$, con lo cual obtenemos

$$h_{00} = -\frac{8}{3}V(r) \quad , \quad h_{rr} = -\frac{8}{3r^3}\int_0^r dr' r'^2 V(r) \ , \tag{35}$$

nuevamente, haciendo uso de las coordenadas Gaussianas normales, se puede expresar la fluctuación gravitacional de la siguiente manera

$$\bar{h}_{00} = \frac{2GM}{r}(1 + \frac{2l^2}{3r^2}) \quad , \quad \bar{h}_{rr} = \frac{2GM}{r}(1 + \frac{l^2}{3r^2})\delta_{ij} \ , \tag{36}$$

expresiones que muestran la forma que tendría el potencial Newtoniano, el cual determina la atracción de cuerpos vecinos sobre la brane. Los coeficientes de corrección l^2/r^2, debidos a los modos KK, son diferentes en ambos casos, porque ξ_5 contribuye sólo a los modos cero de la fluctuación[5].

Como ya se mencionó anteriormente las partículas del modelo estándar, en este escenario, viven sobre la brane de tensión constante negativa, mientras el volumen es una porción de un espaciotiempo AdS_5, es decir que el bulk es un espaciotiempo con una constante cosmológica negativa. En el modelo RSII, la solución de la ecuación de Einstein sobre la brane de tensión positiva, permite a un observador confinado a la brane, recobrar la ley de Newton si la escala de curvatura del espacio AdS_5 es menor que un milímetro. Además, se encuentra que el espacio de altas dimensiones es no compacto, en contraste con el modelo de Kaluza-Klein, lo cual permite obtener un espectro de modos continuos de Kaluza-Klein para el campo gravitacional, en contraste con el espectro discreto si la dimensión extra es períodica y compacta. Según lo mostrado anteriormente, se puede escribir la fuerza entre dos masas estáticas sobre la brane, específicamente se tiene que la energía potencial entre dos masas puntuales confinadas a la brane está dada por

$$V(r) = \frac{G_N m_1 m_2}{r}\left[1 + \frac{l^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] \ , \tag{37}$$

donde $l^2 = -\frac{6}{\kappa^2\Lambda_5}$, lo cual muestra una relación entre la constante cosmológica volumétrica con la escala de curvatura del espacio AdS_5.

Hasta la presente, los experimentos gravitacionales no muestran desviación de la ley gravitacional de Newton a escalas mayores de un milímetro[3], lo que obliga a pensar que l debe ser menor que esta escala de longitud.

5 Ecuaciones de Einstein sobre una Brane.

En esta sección se mostrará el fundamento teórico que sudyace a la teoría del braneworld (es decir se hace una análisis desde el punto de vista geométrico), en partícular se derivará la ecuación de campo sobre una 3-brane. Por simplicidad el volumen espaciotemporal se asume que tiene cinco dimensiones, sin asumir nínguna condición especial sobre el bulk. Posteriormente, se asumirá la simetría Z_2 (simetría espejo o de orbifold) y se confinará el tensor momentum-energía de materia sobre la brane.

En el escenario braneworld, nuestro mundo 4-dimensional es descrito por una pared de dominio $3-brane$ $(M, h_{\mu\nu})$, en un espaciotiempo 5-dimensional *bulk* $(V, g_{\mu\nu})$, y donde se denota el vector normal unitario a la brane M por n^α así que la métrica inducida sobre M se puede expresar como $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$. El punto de partída formal es la ecuación de Gauss, de la teoría de variedades[3]

[3]Siguiendo el libro, An advanced course in general relativity de Eric Poisson, los índices látinos a, b, c, ..., recoren 0,1,2,3; en tanto que los ídices griegos $\mu, \nu, ...$, recorren 0,1,2,3,4.

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}e^{\gamma}_{c}e^{\delta}_{d} = R_{abcd} + K_{ad}K_{bc} - K_{ac}K_{bd} \ , \tag{38}$$

y para obtener las consideraciones dinámicas del modelo se hace uso de la ecuación de Codazzi

$$R_{abcd}n^{\mu}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}e^{\gamma}_{c} = K_{ab|c} - K_{ac|b} \ , \tag{39}$$

realizando un proceso algebraico de contracción de índices se obtiene

$$R_{bd} = R_{\beta\delta}e^{\beta}_{b}e^{\delta}_{d} - K^{a}_{d}K_{ba} + KK_{bd} \ , \tag{40}$$

tenemos de consideraciones, en variedades e hipersuperficies como de espacio, la siguiente expresión

$$R_{\beta\delta}e^{\beta}_{b}e^{\delta}_{d} = R_{\beta\delta}e^{\beta}_{b}e^{\delta}_{d} - R^{\alpha}_{\beta\nu\delta}n_{\alpha}n^{\nu}e^{\beta}_{b}e^{\delta}_{d} \ , \tag{41}$$

expresión , que se reemplaza en la ecuación de Gauss contraída, para obtener, la siguiente expresión

$$R_{bd} = R_{\beta\delta}e^{\beta}_{b}e^{\delta}_{d} - R^{\alpha}_{\beta\nu\delta}n_{\alpha}n^{\nu}e^{\beta}_{b}e^{\delta}_{d} + KK_{bd} - K^{a}_{d}K_{ba} \ , \tag{42}$$

tomando el tensor de Einstein en cuatro dimensiones, tenemos

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}R \ , \tag{43}$$

de tal manera que a partir de la ecuación de Gauss contraída, se puede obtener el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, obteniéndose la siguiente expresión para el tensor de Einstein[21] [23] [24]

$$G_{ab} = G_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b} + \frac{1}{2}R^{\mu}_{\nu}n_{\mu}n^{\nu}h_{ab} + KK_{ab} - K^{d}_{b}K_{ad} - \frac{h_{ab}}{2}\left(K^{2} - K^{bd}K_{bd}\right) - E_{\mu\nu} \ , \tag{44}$$

donde $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$, $E_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\alpha\nu\beta}n_{\mu}n^{\nu}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}$.

Haciendo uso de la ecuación de campo de Einstein en cinco dimensiones

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \kappa^{2}T_{\alpha\beta} \ , \tag{45}$$

y descomponiendo el tensor de Riemann en el tensor de curvatura de Weyl, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, podemos obtener la siguiente expresión

$$G_{ab} = \frac{2\kappa^{2}}{3}\left[T_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b} + \left(T_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} - \frac{T}{4}\right)h_{ab}\right] + KK_{ab} - K^{d}_{b}K_{ad} - \frac{h_{ab}}{2}\left(K^{2} - K^{bd}K_{bd}\right) - E_{ab} \ , \tag{46}$$

donde $E_{ab} = C^{\mu}_{\alpha\nu\beta}n_{\mu}n^{\nu}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}$, término conocido como radiación oscura.

De la ecuación de Codazzi y con la ecuación de Einstein 5-dimensional, se encuentra

$$K^{\nu}_{\mu|\nu} - K_{|\mu} = \kappa^{2}T_{\alpha\beta}n^{\beta}h^{\alpha}_{\mu} \ . \tag{47}$$

Hasta el momento no se ha asumido ninguna simetría ni forma partícular del tensor momentum-energía. Entonces en consideración del escenario braneworld, se toma y como la coordenada adicional, y de este modo la brane o hipersuperficie queda localizada en $y = 0$, en donde además, se encuentra la siguiente condición $n_{\mu}dx^{\mu} = dy$, lo cual implica que $a^{\mu} = n^{\nu}n^{\mu}_{|\nu} = 0$, que es una condición sobre la coordenada en la dirección de la dimensión extra.

En forma genérica asumiendo, una métrica 5-dimensional, tenemos

$$ds^{2} = h_{ab}dx^{a}dx^{b} + dy^{2} \ , \tag{48}$$

manteniendo el espíritu del braneworld en mente, tenemos que el tensor momentum-energía 5-dimensional, se puede escribir de la siguiente forma

$$T_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + (\tau_{\mu\nu} - \lambda h_{\mu\nu})\,\delta(y) \ , \tag{49}$$

donde, Λ es la constante cosmológica del espaciotiempo cinco-dimensional o volumétrico, λ es la energía del vacío de la brane, $\tau_{\mu\nu}$ es el tensor momentum-energía del universo sobre la brane. El parámetro λ se puede asociar con la tensión de la brane en 5-dimensiones.

En el marco del braneworld, el tensor momentum-energía, solamente está presente sobre la brane, por ello su carácter singular, el cual se representa mediante la función delta que aparece en la expresión anterior, en consideración de lo anterior , se encuentra la condición de frontera sobre la brane, que debe cumplir la métrica inducida y la curvatura extrínseca, $[h_{\mu\nu}] = Lim_{y\to+0}\ h_{\mu\nu} - Lim_{y\to-0}\ h_{\mu\nu} = 0$, $[K_{\mu\nu}] = -\kappa^2\left((\tau_{\mu\nu} - \lambda h_{\mu\nu}) - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}(\tau - \lambda)\right)$.

Imponiendo la simetría Z_2 , con la brane como punto fijo, la simetría unicamente determina la curvatura extrínseca de la brane en términos del tensor momentum-energía

$$K^{+}_{\mu\nu} = -K^{-}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\kappa^2\left[(\tau_{\mu\nu} - \lambda h_{\mu\nu}) - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}(\tau - \lambda)\right] \ , \tag{50}$$

sustituyendo esta ecuación en la expresión del tensor de Einstein, se obtiene la ecuación gravitacional sobre la brane, y considerando la simetría Z_2 , la forma partícular del tensor momentum-energía y las condiciones de frontera

$$G_{ab} = -\Lambda_4 h_{ab} + 8\pi G_N \tau_{ab} + \kappa^4 \Pi_{ab} - E_{ab} \ , \tag{51}$$

donde $\Lambda_4 = \frac{1}{2}\kappa^2\left(\Lambda + \frac{1}{6}\kappa^2\lambda^2\right)$, $G_N = \frac{\kappa^4\lambda}{48\pi}$, $\Pi_{ab} = -\frac{1}{4}\tau_{ac}\tau^{c}_{b} + \frac{1}{12}\tau\tau_{ab} + \frac{1}{8}h_{ab}\tau_{cd}\tau^{cd} - \frac{1}{24}h_{ab}\tau^2$.

La ecuación gravitacional de la brane describe la curvatura de la brane en téminos de su contenido de materia-energía, su energía de vacío, la constante cosmológica 5-dimensional, y de la curvatura extrínseca de la brane en el espacio 5-dimensional. Ella se puede reducir a la descripción estándar tomando el límite $\kappa \to 0$. Es importante notar que por el hecho de haber introducido una dimensión adicional, conduce a una ecuación de campo modificada, en la cual aparecen dos términos adicionales importantes, conocidos en la literatura como, el término de energía del vacío y de radiación oscura[7][8] [9] [10].

6 Ecuaciones de conservación

Se puede llegar, según lo anterior, a la siguiente expresión

$$T_{\mu\nu;\nu} = -2T_{ab}n^a g^b_\mu \ , \tag{52}$$

entonces en general existe intercambio de energía-momentum entre el volumen y la brane. Pero esta condición general se puede obviar, haciendo que el volumen (bulk), no tenga contenidos de materia-energía, $T_{\alpha\beta} = 0$, lo cual nos lleva a que, la ecuación de Einstein 5D se pueda reducir a

$$G_{\alpha\beta} = -\Lambda g_{\alpha\beta} \ , \tag{53}$$

de este modo la ecuación de intercambio de energía-momentum, entre el bulk y la brane, se reduce a

$$T_{\mu\nu;\nu} = 0 \ , \tag{54}$$

esto significa que no existe intercambio de energía-momentum entre el bulk y la brane; su interacción es puramente gravitacional. Entonces la identidad de Bianchi 4D contraída, $G_{\mu\nu;\nu} = 0$, aplicada en la ecuación de campo efectiva sobre la brane, conduce a

$$E_{\mu\nu;\mu} = \frac{6\kappa^2}{\lambda}\tau_{\mu\nu;\mu} \ , \tag{55}$$

lo cual muestra que el término de radiación oscura es el responsable de establecer la interacción gravitacional entre el bulk y la brane[3].

Como una consecuencia de la ecuación de Codazzi, el tensor momentum-energía volumétrico, junto con la simetría Z_2, implican que se conserva el tensor momentum-energía, es decir

$$T_{\mu\nu;\nu} = 0 \ , \tag{56}$$

cuando tengamos campos escalares u otra clase de campos en el volumen, la afirmación anterior en general no es cierta, es decir que $T_{\mu\nu}$ no se conserva, produciéndose un intercambio de energía-momentum entre la brane y el volumen. En el caso de que exista sólo una constante cosmológica en el volumen, no se daría tal intercambio de energía. Considerando la anterior expresión, encontramos que la identidad de Bianchi contraída $G_{\mu\nu;\nu} = 0$, conduce nuevamente a que la proyección del tensor de Weyl, obedece la restricción $E_{\mu\nu;\mu} = \frac{6\kappa^2}{\lambda}\Pi_{\mu\nu;\mu}$, esto muestra que $E_{\mu\nu}$, se comporta como una fuente del tensor momentum-energía volumétrico, lo cual en general incluye gradientes espaciales y derivadas temporales. Entonces la evolución e inhomogéneidades en los campos de materia puede generar efectos gravitacionales no locales en el volumen, produciendo una reacción de la brane.

Finalmente se recalca, aunque ya se esbozo anteriormente, que las ecuaciones dinámicas sobre la brane son

$$G_{ab} = -\Lambda_4 h_{ab} + 8\pi G_N \tau_{ab} + \kappa^4 \Pi_{ab} - E_{ab} \ , \tag{57}$$

$$T_{\mu\nu;\nu} = 0 \ , \tag{58}$$

$$E_{\mu\nu;\mu} = \frac{6\kappa^2}{\lambda}\Pi_{\mu\nu;\mu} \ . \tag{59}$$

Es importante notar que en general este sistema de ecuaciones no costituyen un sistema cerrado sobre la brane, ya que la ecuación $E_{\mu\nu;\mu} = \frac{6\kappa^2}{\lambda}\Pi_{\mu\nu;\mu}$ no determina $E_{\mu\nu}$ de forma general, reflejando el hecho de que los grados de libertad volumétricos no pueden ser predichos de los datos disponibles sobre la brane, por ejemplo si se incorpora radiación gravitacional afecta la brane, de tal manera que se requiere solucionar la ecuación de campo en el volumen para después determinar completamente $E_{\mu\nu}$ sobre la brane[9].

7 Reducción a la ecuación de campo estándar

El modelo físico modificado, objeto de este trabajo, si pretende ser un modelo factible, debe cumplir el requisito de reducción al modelo estándar, bajo algunas simplificaciones coherentes; además debe hacer algunas predicciones físicas observables o medibles experimentalmente, mismas que no se puedan predecir o determinar del modelo estándar.

La ecuación de campo ilustrada anteriormente se puede reducir a la ecuación de campo convencional si se considera $\kappa \to 0$, mientras que G_N permanezca finito, sin embargo existen algunas diferencias importantes, ya que la constante gravitacional de Newton $G_N = \frac{\kappa^4\lambda}{48\pi}$ está fuertemente ligada a la energía del vacío λ, sobre la membrana, en otros términos se hace imposible definir la constante gravitacional de Newton en una era donde la distinción entre energía del vacío y la energía de la materia normal sea ambigua.

Además, el nuevo término $E_{\mu\nu}$ es una parte del tensor de Weyl cinco-dimensional el cual lleva la información del campo gravitacional fuera de la membrana, este se puede despreciar si el espaciotiempo volumétrico es un espacio puramente anti-d´Sitter además que su magnitud está restrigida al movimiento de la materia sobre la brane.

Considerando $\kappa^{-2} = M_G^3$, $\lambda = M_\lambda^4$ y $\Lambda \approx \kappa^2\lambda^2$, estas no son cantidades a la escala de Planck, asumiendo que M_G, M_λ son suficientemente grandes comparadas con la escala de energía fundamental denotada por M. De tal manera que tenemos que el primer término, considerado en la ecuación de campo sobre la brane, es la constante cosmológica neta en 4-dimensiones, donde $\Lambda < 0$, para que Λ_4 pueda tomar valores arbitrarios, específicando los valores de Λ y λ. El segundo término, corresponde a la contribución de la materia normal la cual debe satisfacer la condición de energía local. El tercer término que es cuadrático en τ_{ab} se espera sea despreciable en el límite de baja energía, lo cual se puede mostrar obteniendo la razón de éste término al segundo término, lo cual es aproximadamente

$$\frac{\kappa^4\,|\Pi_{ab}|}{G_N\,|\tau_{ab}|}\sim\frac{\kappa^4\,|\tau_{ac}\tau^c_b+\cdots|}{G_N\,|\tau_{ab}|}\sim\frac{M^4}{M_\lambda^4}\ . \tag{60}$$

Por último, considerando el término correspondiente al tensor de Weyl, y considerando su parte longitudinal E^L_{ab}, tenemos

$$\frac{\left|E^L_{ab}\right|}{G_N\,|\tau_{ab}|}\sim\frac{\kappa^4\,|\tau_{ac}\tau^c_b+\cdots|}{G_N\,|\tau_{ab}|}\sim\frac{M^4}{M_\lambda^4}\ , \tag{61}$$

luego tiene el mismo ordén de magnitud del tercer término de la ecuación de campo. Posteriormente se considera, la parte transversal del tensor de Weyl, el cual está directamente relacionado con la exitación de materia sobre la brane.

De los estímados arriba se puede concluir que la ecuación gravitacional efectiva sobre la brane se reduce a la ecuación gravitacional 4-dimensional efectiva

$$G_{ab}=-\Lambda_4 h_{ab}+8\pi G_N\tau_{ab}\ , \tag{62}$$

todo ello en el límite de baja energía[11][12] [13].

8 Soluciones generales y estructura global

Existen dos aproximaciones distintas para determinar la cosmología sobre el braneworld. En la primera aproximación, las coordenadas son escogidas de tal forma que la brane queda en una posición fija en la dimensión extra. De otro lado la métrica volumétrica 5D, es dependiente del tiempo y esta dependencia temporal induce una dependencia temporal sobre la brane vía las condiciones de frontera. La ecuación de Frieddman resultante sobre la brane involucra un término cuadrático en la densidad de energía confinada en la brane, como también un término de radiación 'oscura ' originado por el tensor de Weyl en el volumen.

En la aproximación alternativa, pero equivalente, el volumen es estático y la brane dinámica, la brane se mueve a través de un volumen métrico independiente del tiempo. Si la ecuación de Einstein en el vacío se mantiene en el volumen y si se impone que nuestro universo brane, tenga la simetría de una 3-esfera, entonces es posible probar que el volumen debe ser un espacio Swarzchild-Anti d ´Sitter, $Sch-AdS_5$, y su dinámica puede ser determinada de las condiciones de frontera. De tal forma que el movimiento de la brane en el volumen induce la cosmología (dinámica) sobre la brane, aun si no se confina materia sobre la brane, este hecho se conoce en la literatura como 'efecto espejismo' ya que la evolución cosmológica no es necesariamente producida por la densidad de energía local de la brane .

Cuando la materia es también incluida sobre la brane, la ecuación de Friedmann resultante, obtenida con esta aproximación, es idéntica a la que se obtiene cuando la brane es estática y el volumen dependiente del tiempo. Es de notar que la transformación de coordenadas explícita que víncula las dos aproximaciones, se puede encontrar.

En ambas aproximaciones, se asume que la brane divide el volumen en dos partes iguales, esto es, la simetría Z_2 que cruza la brane. En el contexto de brane en movimiento, además se puede tener constantes cosmológicas diferentes y masas distintas parametrizando el espaciotiempo $Sch-AdS_5$, sobre cada lado de la brane, produciendo cambios en la dinámica de la brane.

Para determinar la estructura global del universo en el marco de los modelos brane y en la segunda aproximación discutida anteriormente, se toma en consideración una métrica general que conduzca a soluciones cosmológicas admisibles, de tal forma que la métrica más general que podemos considerar tiene la siguiente forma[22] [23] [24] [25]

$$ds^2_{4+1}=-N^2(y,T)dT^2+B^2(y,T)dy^2+A^2(y,T)\gamma_{ij}dx^idx^j\ . \tag{63}$$

La métrica está en la formulación $4+1$, en donde se asume que las funciones presentes sólo dependen del tiempo cósmico T y de la dimensión espacial adicional y. Inicialmente, podemos considera que el espaciotiempo volumétrico, es decir el espacio 5D, es estático, lo cula nos conduce a restrigir la dependencia de las funciones sólo a la dimensión adicional, así que $N^2(y)$, $B^2(y)$, $A^2(y)$. Como el objetivo es obtener una membrana compatible con la cosmología estándar, realizamos una transformación de coordenadas normales a esféricas $\left(T, y, x^1, x^2, x^3\right) \to (T, R, \chi, \theta, \phi)$, lo cual nos permite expresar la métrica en la siguiente forma

$$ds^2_{4+1} = -N^2(R)dT^2 + B^2(R)dR^2 + A^2(R)\left[d\chi^2 + \Sigma^2_k\left(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right)\right] \ , \tag{64}$$

donde $d\chi = \frac{dr}{(1-kr^2)^{1/2}}$, y Σ^2_k toma diferentes formas dependiendo del índice de curvatura. Realizando las siguientes identificaciones $N^2(R) \equiv F(R)$, $B^2(R) \equiv \frac{1}{F(R)}$, $A^2(R) \equiv R^2$, $F(R) = k - \frac{R^2}{l^2} - \frac{\mu}{R^2}$, donde μ es el parámentro de masa u escala de energía, llegamos a

$$ds^2_{4+1} = -F(R)dT^2 + \frac{1}{F(R)}dR^2 + R^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + \Sigma^2_k\left(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right)\right] \ , \tag{65}$$

en esta métrica si $\Sigma^2_k = senh^{-1}\chi$, se obtiene una representación del llamado espacio Schwarschild-Anti d ´Sitter $(Sch - AdS_5)$.

Considerando que la brane evoluciona en el espacio de cinco dimensiones, podemos identificar, la coordenada radial R con el factor de escala, y asumir que el tiempo cósmico es una función del tiempo propio t , medido sobre la brane, de tal forma que tenemos $R = a(T)$, $T = T(t)$, que constituyen las ecuaciones que nos definen la membrana, o matemáticamente la restricción sobre las coordenadas, lo cual permite definir la hipersuperficie, según lo anterior, la métrica para la hipersuperficie o brane se puede escribir de la siguiente manera

$$ds^2_{3+1} = -\left[F(a) - \frac{1}{F(a)}\left(\frac{da}{dT}\right)^2\right]dT^2 + a^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + \Sigma^2_k\left(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right)\right] \ , \tag{66}$$

en la cual se puede hacer la identificación con coordenadas sobre la brane, identificado $-\left[F(a) - \frac{1}{F(a)}\left(\frac{da}{dT}\right)^2\right]dT^2 = -dt^2$, lo que nos permite encontrar la métrica FRW

$$ds^2_{3+1} = -dt^2 + a^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + \Sigma^2_k\left(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2\right)\right] \ , \tag{67}$$

así con la métrica $Sch - AdS_5$, se puede obtener algunas cantidades físicas especiales, las cuales permitiran evaluar explicitamente las componentes de algunas cantidades tensoriales. Por ejemplo, la cinco-posición tiene la siguiente forma

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) = (T(t), R(t), \chi, \theta, \phi) \ , \tag{68}$$

de igual forma se puede obtener la cinco-velocidad

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \left(\frac{dT(t)}{dt}, \frac{dR(t)}{dt}, 0, 0, 0\right) \ , \tag{69}$$

ahora bien, introduciendo los elementos de la métrica, se obtiene la cinco-velocidad covariante y contravariante

$$V^\mu = \left(\frac{\sqrt[2]{F(a) + \dot{a}}}{F(a)}, \dot{a}, 0, 0, 0\right) \ , \tag{70}$$

$$V_\mu = \left(-\sqrt[2]{F(a) + \dot{a}}, \frac{\dot{a}}{F(a)}, 0, 0, 0\right) \ , \tag{71}$$

de igual manera se puede definir la cinco-aceleración, $A^\mu = \frac{d^2x^\mu}{dt^2}$, y adicionalmente se pueden encontrar vectores normales, unitarios a la hipersuperficie o brane

$$n^\mu = \left(-\frac{\dot{a}}{F(a)}, -\sqrt[2]{F(a) + \dot{a}}, 0, 0, 0\right) \ , \tag{72}$$

$$n_\mu = \left(\dot{a}, -\frac{\sqrt[2]{F(a) + \dot{a}}}{F(a)}, 0, 0, 0 \right) \ . \tag{73}$$

Con las anteriores expresiones podemos evaluar la curvatura extrínseca, mediante

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \eta} = \frac{1}{2} n^\sigma \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \ , \tag{74}$$

de igual manera es posible estudiar las geodésicas nulas, en el espacio-tiempo volumétrico, las cuales se pueden considerar que parten de un punto sobre la brane. Si se nombra ese punto inicial como A, y considerando un sistema coordenado esférico (r, θ, ϕ) en la brane, centrado en el punto A, de tal forma que cualquier señal puede ser descrita por una geodésica radial, teniéndose la libertad de ignorar θ, ϕ , lo cual nos conduce a un problema tridimensional, con una métrica de la forma

$$ds^2 = -F(R)dT^2 + \frac{1}{F(R)}dR^2 + R^2 dr^2 \ , \tag{75}$$

entonces para obtener las trayectorias geodésicas es conveniente recurrir a los vectores de Killing de la métrica, los cuales son $\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^\alpha$, $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\alpha$. Si se denota $k^\alpha = \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right)$, que representa un vector tangente a la geodésica, lo cual implica que

$$k_T = -F(R)\frac{dT}{d\lambda} = -E \ , \tag{76}$$

$$k_r = R^2 \frac{dr}{d\lambda} = P \ , \tag{77}$$

las cuales son constantes de movimiento a lo largo de la geodésica. Si además se imponme que k^α, sea un vector nulo se encuentra lo siguiente

$$(\frac{dR}{d\lambda})^2 = E^2 - P^2 \frac{F(R)}{R^2} \ , \tag{78}$$

la cual conduce a la siguiente expresión

$$\left(\frac{E^2}{P^2} - \frac{F}{R^2} \right)^{-1/2} \frac{dR}{R^2} = dr \ , \tag{79}$$

que representa la ecuación que relaciona las distancias sobre la 3-brane con la coordenada radial en el espacio cinco-dimensional o equivalentemente el factor de escala que marca la expansión sobre la brane, con la coordenada radial volumétrica. En el caso partícular $k = \mu = 0$, se obtiene las expresiones para las geodésicas radiales y temporales

$$\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R} = \sqrt[2]{1 - \frac{P^2}{E^2 l^2}} \frac{E}{P} r \ , \tag{80}$$

$$\frac{dR}{F\sqrt[2]{1 - \frac{P^2 F}{E^2 R^2}}} = dT \ , \tag{81}$$

de lo anterior se obtiene

$$\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R} = \frac{1}{l^2}\sqrt[2]{1 - \frac{P^2}{E^2 l^2}}(T - T_A) \ , \tag{82}$$

$$r = \frac{P}{El^2}(T - T_A) \ . \tag{83}$$

en donde se puede eliminar los parámetros E y P , para encontrar la ecuación de la geodésica

$$\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R}\right)^2+\frac{r^2}{l^2}=\frac{1}{l^4}(T-T_A)^2 \ , \tag{84}$$

denotando el punto final de la geodésica por B, se tiene que la diferencia temporal $T_B - T_A$ se puede determinar usando dT , en términos del tiempo propio de la brane, es decir del tiempo cósmico de la braneworld[21] [22] [23]

$$T_B - T_A = l\int_{t_A}^{t_B} \sqrt[2]{1-l^2H}\frac{dt}{a} \ , \tag{85}$$

por lo tanto, encontramos que entre t_A y t_B , una partícula sobre la geodésica nula ha viajado una distancia coomóvil r_g

$$r_g = \left[\left(\int_{t_A}^{t_B} \sqrt[2]{1-l^2H}\frac{dt}{a}\right)^2 - \left(\int_{t_A}^{t_B} lH\frac{dt}{a}\right)^2\right]^{1/2} \ , \tag{86}$$

de este modo esta ecuación suministra el radio del horizonte para la propagación causal de señales gravitacionales entre dos puntos sobre la brane, que atraviesa el volumen (es decir una señal que vija en la dimensión adicional), se le conoce como radio del horizonte gravitacional.

El radio del horizonte para la propagación causal de señales luminosas sobre la brane (señal electromágnetica normal sobre la brane), como en la cosmología FRW estándar, está dado por

$$r_\gamma = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{a} \ , \tag{87}$$

indicando esta ecuación que este es el camino por el que viajan fotones y otros campos confinados a la brane. Será interesante los casos en los cuales r_g, r_γ son diferentes. Si nuestro universo fuera estático, $H = 0$, o de Sitter $H > 0$, entonces el horizonte de fotones y el horizonte gravitacional serian exactamente iguales.

9 Régimen de baja energía

Este régimen corresponde a un universo gobernado por la cosmología estándar FRW, en este caso tenemos que las dos integrales anteriores junto con $\frac{dt}{a} = \frac{da}{a^2H}$, permiten obtener la razón de la distancia viajada por los fotones y gravitones para una señal que se propaga entre los tiempos t_A y t_B.

Expandiendo en términos del parámetro lH , se obtiene[23]

$$\frac{r_g}{r_\gamma} \sim 1+\frac{1}{2}\left(lH\right)^2\frac{1+3w}{5+3w}\left(\frac{a_B}{a_A}\right)^{(5+3w)/2} \ , \tag{88}$$

donde $w = \frac{P}{\rho}$ es la ecuación de estado de la materia sobre la brane ($w = 1/3$, en la era de radiación y $w = 0$, en las eras de materia), siendo la aproximación válida para $w > -1/3$ y $a_B >> a_A$.

Si se considera una señal que llegue hasta nosotros, es decir $t_B = t_o$, obtenemos que la razón se reduce a

$$\frac{r_g}{r_\gamma} \sim 1+\frac{1}{10}\left(lH_0\right)^2(1+z)^{5/2} \ , \tag{89}$$

donde H_0 es el parámetro de Hubble actual, y z es el corrimiento de la fuente que emitió la señal, asumiendo que está en la era de dominio de materia. Se observa que la magnitud del retraso temporal depende del radio de curvatura , l, del espaciotiempo AdS_5.

10 Régimen de alta enegía

Este régimen corresponde al universo temprano, para densidades de energía $\rho \geqslant \lambda \approx \frac{M_{Pl}^2}{l^2} \approx \frac{M_{(5)}^6}{M_{Pl}^2}$. Encontrando que la contribución a la distancia gravitacional es independiente de l , de tal manera que la razón llega a ser

$$\frac{r_g}{r_\gamma} = \frac{\left[\int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{a^2H^2} \int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{a^2}\right]^{1/2}}{\int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{a^2 H}} \ , \tag{90}$$

en este régimen la evolución cósmica no-estándar de la ecuación de Friedmann modificada, está gobernada por el término cuadrático de la densidad de enrgía, $H \propto \rho^2$ (además implica que $w = 1/3$ y $H \propto a^2$), encontrando

$$\frac{r_g}{r_\gamma} \sim \frac{2+3w}{\sqrt[2]{5+6w}} \sqrt[2]{\frac{a_B}{a_A}} \ , \tag{91}$$

donde la aproximación es válida para $w > -2/3$ y $a_B >> a_A$. De tal manera que la razón $\frac{r_g}{r_\gamma}$ va al infinito cuando a_A va a cero. Sin embargo, existe un límite de aplicabilidad del resultado obtenido anteriormente, que tiene que ver con la cota inferior que asume el tiempo en este escenario. En la cosmología estándar, esa cota es el tiempo de Planck. En un modelo con dimensiones extras, el límite temporal está relacionado con la escala fundamental de masas de la teoría, la cual aquí es $M_{(5)} = \left(M_{Pl}^2/l\right)^{1/3}$. Por lo tanto la teoría será válida para densidades de energía mayores que $M_{(5)}^4$, que correspode a un parámetro de Hubble del orden de la masa de la masa fundamental $H \sim M_{(5)}$, obteniéndose como resultado que la mayor razón entre los radios del horizonte gravitacional al radio luminoso es obtenida cuando $t_B \sim l$, y $t_A \sim M_{(5)}$, lo cual conduce a[23]

$$\frac{r_g}{r_\gamma} \sim \sqrt[2]{\frac{a_B}{a_A}} \sim \left(\frac{H_A}{H_B}\right)^{1/8} \sim (M_{(5)}l)^{1/8} \sim (\frac{M_{Pl}}{M_{(5)}})^{1/4} \ , \tag{92}$$

donde se ha asumido una era de dominio de radiación no estándar. Dentro de los posibles valores inferiores tenemos $M_{(5)} \sim 10^8\ GeV$, lo cual corresponde a una razón máxima $\frac{r_g}{r_\gamma} \sim 10^3$.

El resultado anterior muestra la razón entre una señal gravitacional y una electromagnética, donde se aprecia que la señal gravitacional supera a la señal electromagnética.

11 Conclusiones

En las secciones anteriores se ha hecho una descripción "gruesa" de los modelos de braneworld o mundobranas, se han destacado algunos elementos relevantes, se ha mencionado que existe un estado acotado de gravitón localizado cerca de la brane, como también, se ha mostrado la compatibilidad de la física del modelo estándar con la existencia de una dimensión extra infinita, y finalmente, se ha mostrado que los "atajos" o "cortos circuitos" a travéz de la quinta dimensión permiten obtener una ventaja de las señales gravitacionales sobre las electromagnéticas. Como elemento general podemos destacar que este tipo de modelos, aunque hipotéticos, permiten reproducir sin mayores modificaciones lo conocido de la física estándar, esto sólo es coherencia en el sistema , pero no quiere decir que la naturaleza sea asi, en el futuro con resultados concretos, experimentos especiales y observaciones detalladas y metículosas, se descartarán estos modelos o deberán tomarse verdaderamente en serio.

References

[1] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, Astro-ph/0212100v2.

[2] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, Astro-ph/0212100v3.

[3] L Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett., **83** (1999), 3370.

[4] L Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett., **83** (1999), 4690.

[5] J. Garriga, T. Tanaka, hep-th/9911055v4

[6] D. Langlois, qr-qc/0207047v1

[7] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, Phys. Rev. D **62**, 024012 (2000).

[8] Poisson. E, *An advanced course in general relativity*, Unv. Guelph, 2002.

[9] Maartens. R, *Geometry and dynamics of the Brane World*, gr-qc/0101059v2.

[10] S. Mukohyama, T. Shiromizu, K. Maeda, Phys. Rev. D **62**, 024028 (2000).

[11] C. Barceló, M. Visser, hep-th/0004056v2.

[12] Collins. P. D. B, Martin.A. D, Squires. E. J, *Particles Physics and Cosmology,* John Wiley and Sons, 1989.

[13] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, Phys. Rev. D **62**, 024012 (2000).

[14] Poisson. E, *An advanced course in general relativity*, Unv. Guelph, 2002.

[15] Maartens. R, *Geometry and dynamics of the Brane World*, gr-qc/0101059v2.

[16] Maartens. R, *Brane-World Gravity*, Inst. Cosmoloy and Gravitation, Unv. Portmouth. U.K, 2004.

[17] E. Flanagan, S. H. Henry, I. Wasserman, Phys. Rev. D **62**, 044039 (2000).

[18] P. Binetruy, C. Defayet, U. Ellwanger, D. Langlois, hep-th/9910219

[19] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, Astro-ph/0212100v2.

[20] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, Astro-ph/0212100v3.

[21] P. Horava, E. Witten, Nucl. Phys. B**460** (1996), 506, *ibid* B**475**, 94.

[22] J. Garriga, T. Tanaka, hep-th/9911055v4

[23] R. Caldwell, D. Langlois, qr-qc/0103070v1

[24] S. Mukohyama, T. Shiromizu, K. Maeda, Phys. Rev. D **62**, 024028 (2000).

[25] C. Barceló, M. Visser, hep-th/0004056v2.