

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Si $f(x)$ es una función racional, entonces $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$; donde p y q son polinomios, vamos a evaluar $\int f(x)dx$. Se buscará que $\frac{p(x)}{q(x)}$ sea expresada como una descomposición en fracciones parciales.

Considere los siguientes casos:

2.1) Cuando en la integral $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, la función polinómica $q(x)$ se descompone en factores todos lineales y distintos es decir: $q(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$ a la función $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ se expresa como una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \right) dx$$

Donde: A_1, A_2, \dots, A_n son constantes que se van a determinar

2.2) Cuando en la integral $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, la función polinómica $q(x)$ se descompone en factores todos lineales y algunos repetidos, suponiendo que $x-a$, es factor lineal que se repite p veces, es decir: $q(x) = a_n(x-a)(x-a)\dots(x-a)(x-\alpha_{p+1})\dots(x-\alpha_n)$ a la función $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ se expresa como una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_p}{(x-a)^p} + \frac{A_{p+1}}{x-\alpha_{p+1}} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \right) dx$$

Donde: A_1, A_2, \dots, A_n son constantes que se van a determinar

2.3) Cuando en la integral $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, la función polinómica $q(x)$ se descompone en factores todos lineales y cuadráticos irreducibles y ninguno se repite, es decir:

$q(x) = a_n(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)(x^2+b_3x+c_3)(x-\alpha_4)\dots(x-\alpha_n)$ a la función $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ se expresa como una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1x+B_1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{A_n}{x-\alpha_n} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \right) dx$$

Donde: $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2$ son constantes que se van a determinar

2.4) Cuando en la integral $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, la función polinómica $q(x)$ se descompone en factores todos lineales y cuadráticos repetidos en donde los factores cuadráticos irreducibles se repiten es decir:

$q(x) = a_n(x^2+bx+c)^2(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n)$ a la función $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ se expresa como una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \frac{A_3}{x-\alpha_3} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \right) dx$$

Donde: $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2$ son constantes que se van a determinar

Ejemplo ilustrativos

$$1) \int \frac{4x^2 + 9x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx$$

Factorando el denominador

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x^3 + 2x^2) - (x + 2) = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1)$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$$

Calculando las fracciones parciales

$$\frac{4x^2 + 9x - 1}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

$$\frac{4x^2 + 9x - 1}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{A(x + 1)(x - 1) + B(x + 2)(x - 1) + C(x + 2)(x + 1)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}$$

$$\frac{4x^2 + 9x - 1}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{A(x^2 - 1) + B(x^2 - x + 2x - 2) + C(x^2 + x + 2x + 2)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}$$

$$\frac{4x^2 + 9x - 1}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{A(x^2 - 1) + B(x^2 + x - 2) + C(x^2 + 3x + 2)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}$$

$$\frac{4x^2 + 9x - 1}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 + Bx - 2B + Cx^2 + 3Cx + 2C}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}$$
$$4x^2 + 9x - 1 = Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + Bx + 3Cx - A - 2B + 2C$$

$$4x^2 + 9x - 1 = (A + B + C)x^2 + (B + 3C)x - A - 2B + 2C$$

Se forma el sistema

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ B + 3C = 9 \\ -A - 2B + 2C = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ 0A + B + 3C = 9 \\ A + 2B - 2C = 1 \end{cases}$$

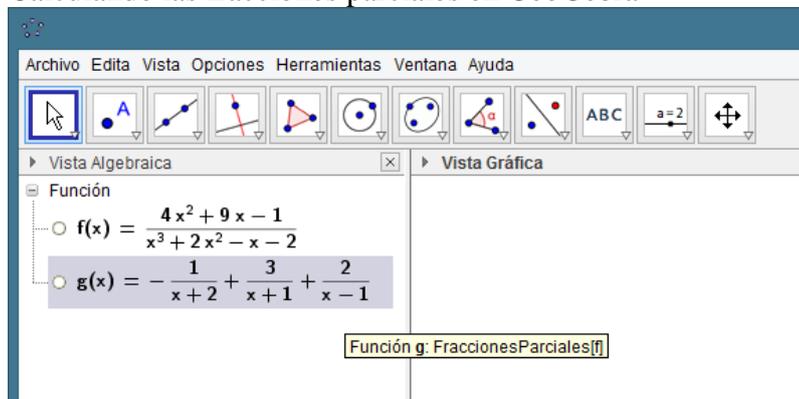
Resolviendo el sistema en GeoGebra

The screenshot shows the GeoGebra CAS interface. The menu bar includes 'Archivo', 'Edita', 'Vista', 'Opciones', 'Herramientas', 'Ventana', and 'Ayuda'. The toolbar contains various mathematical symbols and functions. The CAS window is active, displaying the system of equations: $\{x+y+z=4, 0x+y+3z=9, x+2y-2z=1\}$ for variables $\{x, y, z\}$. The solution is shown as a vector: $\rightarrow (-1 \ 3 \ 2)$. The interface also shows a 'Vista Gráfica' tab.

Remplazando valores

$$\frac{4x^2 + 9x - 1}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{-1}{x + 2} + \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x - 1}$$

Calculando las fracciones parciales en GeoGebra



Aplicando $\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$ en

$$\frac{4x^2 + 9x - 1}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{-1}{x + 2} + \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x - 1}$$

$$\int \frac{4x^2 + 9x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = -\int \frac{dx}{x + 2} + 3 \int \frac{dx}{x + 1} + 2 \int \frac{dx}{x - 1}$$

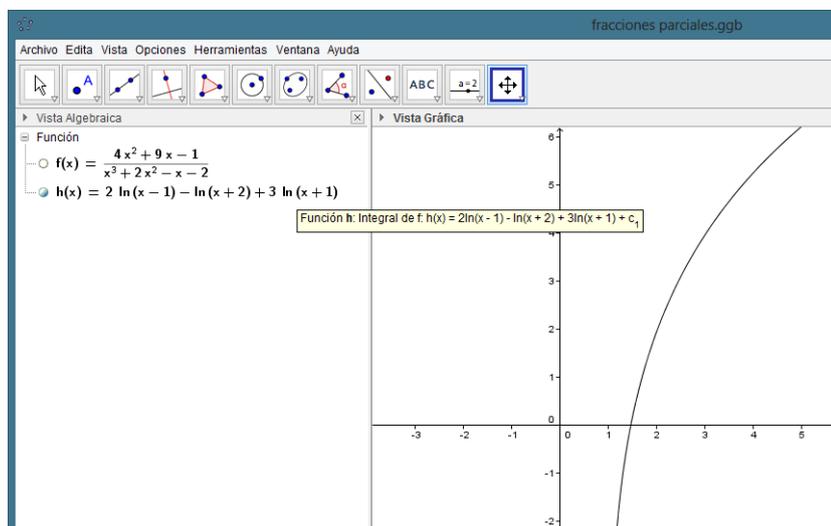
$$\int \frac{4x^2 + 9x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = -\ln|x + 2| + 3\ln|x + 1| + 2\ln|x - 1| + C$$

$$\int \frac{4x^2 + 9x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = -\ln|x + 2| + \ln|(x + 1)^3| + \ln|(x - 1)^2| + C$$

$$\int \frac{4x^2 + 9x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = \ln|(x + 1)^3(x - 1)^2| - \ln|x + 2| + C$$

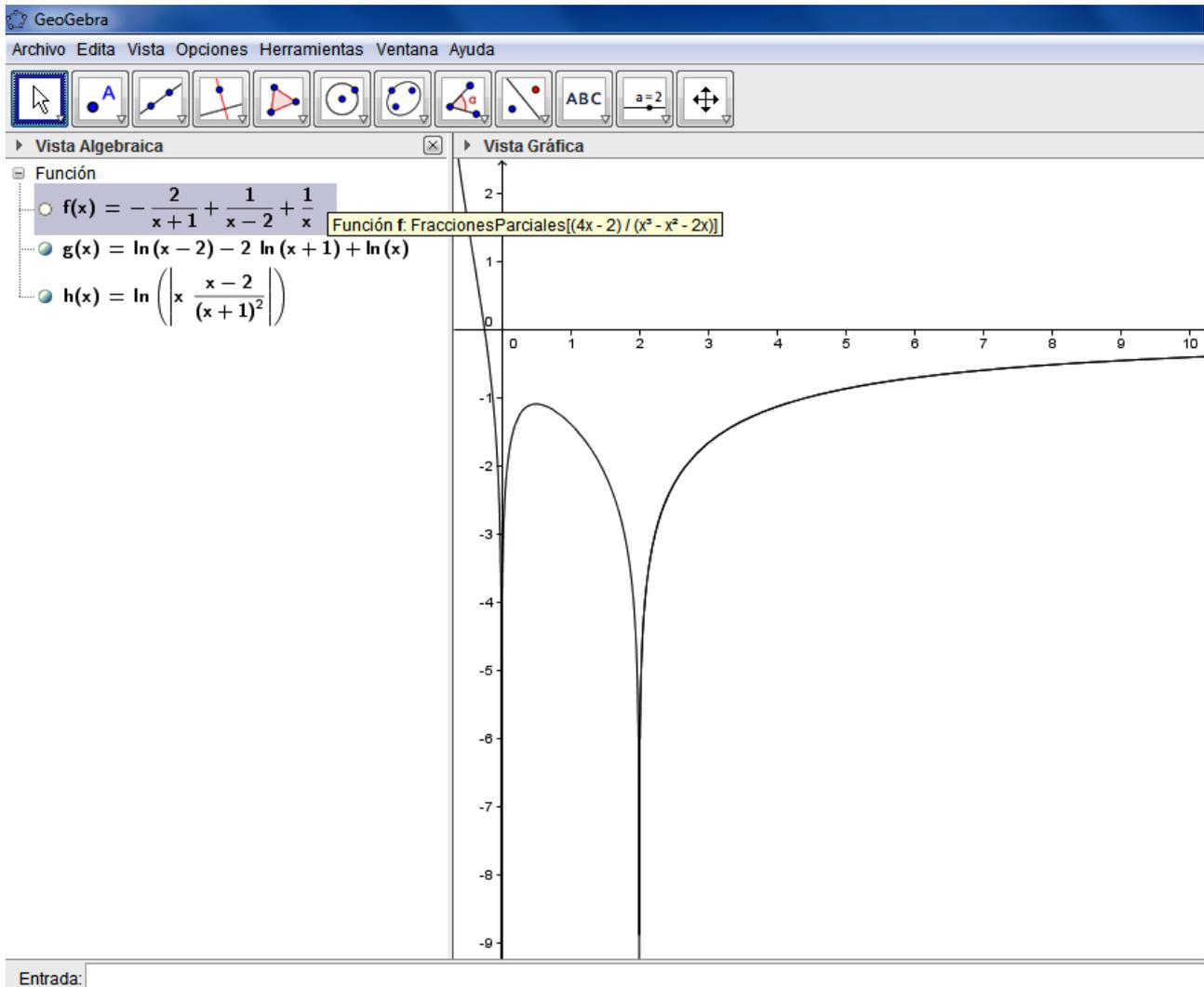
$$\int \frac{4x^2 + 9x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = \ln \left| \frac{(x + 1)^3(x - 1)^2}{x + 2} \right| + C$$

Resolviendo el ejercicio en GeoGebra



$$2) \int \frac{4x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

Resolviendo en GeoGebra



Ejercicios de Aplicación

Integrar las siguientes expresiones y graficar empleando algún medio tecnológico las funciones para $C=0$

$$1) \int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$$

$$\ln \left| \frac{x^3(x-1)^2}{x+3} \right| + C$$

$$2) \int \frac{5x - 7}{x^3 - 4x^2 + x + 6} dx$$

$$\ln \left| \frac{(x-3)^2}{(x-2)(x+1)} \right| + C$$

$$3) \int \frac{x^3 - 3x + 4}{(x-1)^3(x+1)} dx$$

$$\frac{7}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{3}{4} \ln|x+1| + C$$

$$4) \int \frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2(x-2)^2} dx$$

$$-\frac{5}{27} \ln|x+1| + \frac{1}{9(x+1)} + \frac{32}{27} \ln|x-2| + \frac{5}{9(x-2)} + C$$

$$5) \int \frac{4x^2 + 6}{x^3 + 3x} dx$$

$$\ln|x^2(x^2 + 3)| + C$$

$$6) \int \frac{2x^2 - 8x - 8}{(x-2)(x^2 + 4)} dx$$

$$\ln\left(\frac{x^2 + 4}{x-2}\right)^2 + C$$

$$7) \int \frac{x^3 + 3x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| - \frac{1}{x^2 + 1} + C$$

$$8) \int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln\left|\frac{x^2}{x^2 + 1}\right| + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C$$