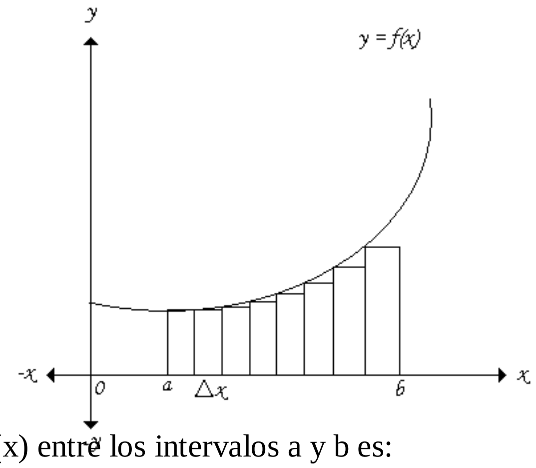
LA INTEGRAL DEFINIDA

Geométricamente la integración, surgió de la necesidad de calcular áreas de superficies limitadas por curvas.



El área bajo la curva y = f(x) entre los intervalos a y b es:

$$\acute{A}rea = \sum_a^b y \cdot \triangle\, x \Rightarrow \acute{A}rea = \sum_a^b f(x) \cdot \triangle\, x$$

$$\acute{A}rea = \lim_{\triangle x \to 0} \sum_a^b f(x) \triangle\, x \text{ ó también } \acute{A}rea = \int_a^b f(x)dx$$

Por lo que *si f es una función definida en un intervalo cerrado* $[a, b]$, *la integral definida es:*

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\triangle x \to 0} \sum_a^b f(x) \triangle\, x = F(b) - F(a)}$$

A la expresión anterior se la conoce como Teorema Fundamental del Cálculo

LEYES BÁSICAS

1) Para c contante

$$\int_a^b cdx = c(b-a)$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

4) $\int_a^b x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$

5) $\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$

Ejemplos ilustrativos

Calcular y realizar una gráfica empleando algún medio tecnológico.

1) $\int_0^1 (x^2 - 2x + 3)dx$

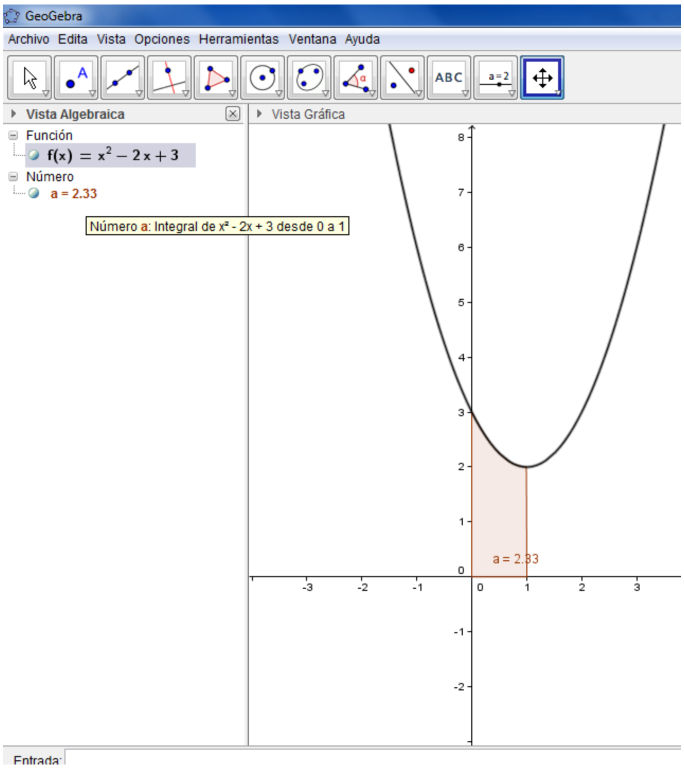
$= \left(\frac{x^3}{3} - 2.\frac{x^2}{2} + 3x\right) = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)_0^1 = \frac{x^3}{3}.(1)^2 + 3.1$

$= \left(\frac{x^3}{3}.0^2 + 3.0\right)$

$= \frac{1}{3} - 1 + 3$

$= \frac{1}{3} + 2$

$= \frac{7}{3}$



2) $\int_{-3}^{-2} x(x+2)^2 dx$

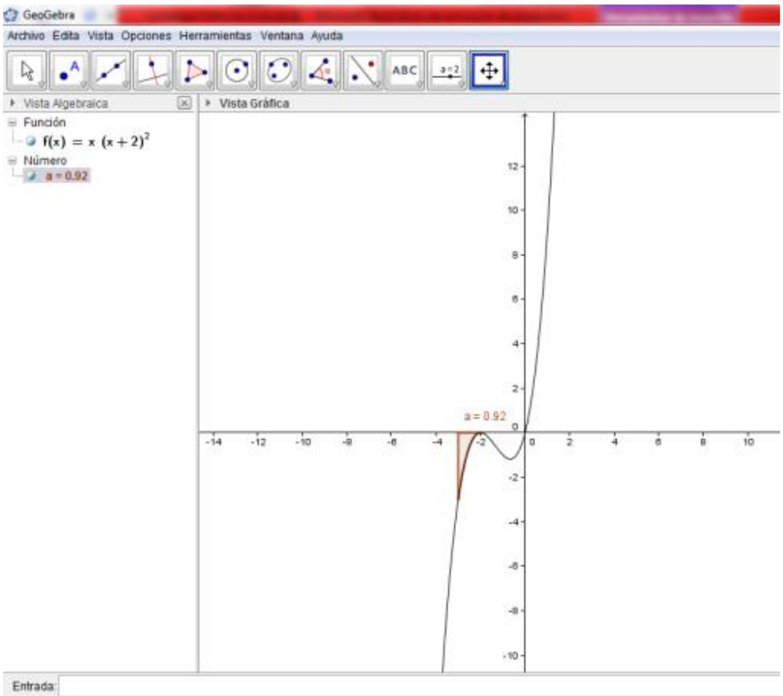
$= \int_{-2}^{-3} x(x^2 + 4x + 4)dx = \int_{-3}^{-2} (x^3 + 4x^2 + 4x)dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_{-3}^{-3}$

$= \left[\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_{-3}^{-3}$

$= (-2)^2 + \frac{4(-2)^3}{3} + 2(-2)^2 - \left[\frac{(-3)^4}{4} + 4\frac{(-3)^3}{3} + 2(-3)^2\right]$

- 4 - $\frac{32}{3} + 8 + \frac{81}{4} + 36 - 18 = \frac{11}{12}$



5) $\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right) dx = \int x^{1/3}\,dx = \int x^{-1/3}\,dx$

$= \left(\dfrac{x^{1/3+1}}{4/3} - \dfrac{x^{-1/3+1}}{2/3}\right)$

$= \left(\dfrac{x^{4/3}}{4/3} - \dfrac{x^{-2/3}}{2/3}\right)$

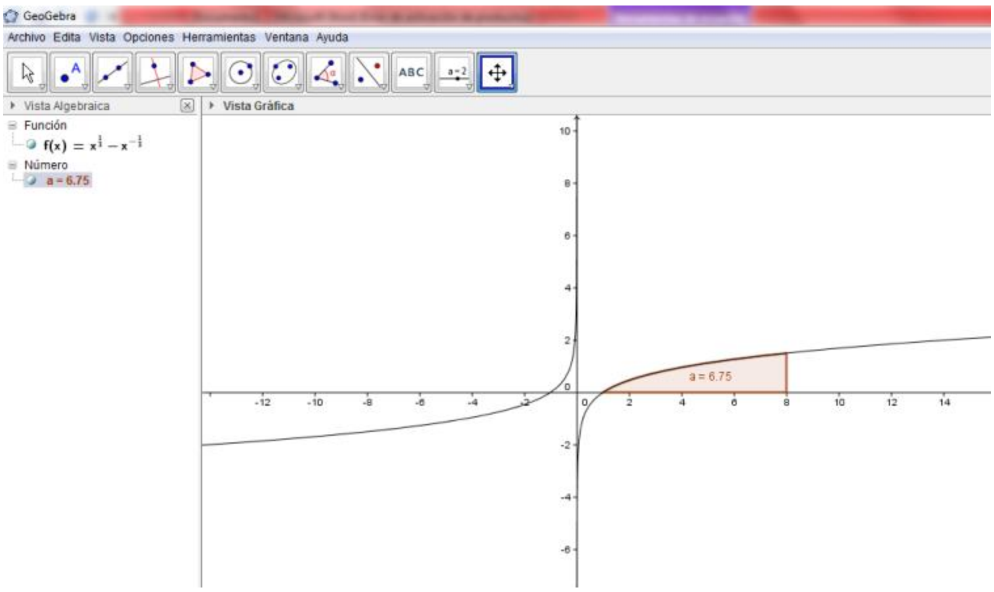
$= \left(\dfrac{4}{3} x^{4/3} - \dfrac{2}{3} x^{-2/3}\right)$

$= \left(\dfrac{4}{3}\,(8)^{4/3} - \dfrac{2}{3}\,(8)^{2/3}\right) - \left(\dfrac{3}{4}\,(1)^{4/3} - \dfrac{2}{3}\,(1)^{3/2}\right)$

$= \dfrac{3}{4}.16 - \dfrac{3}{2}.4 - \left(\dfrac{3}{4}.1 - \dfrac{3}{2}.1\right)$

$= 12 - 6 - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}$

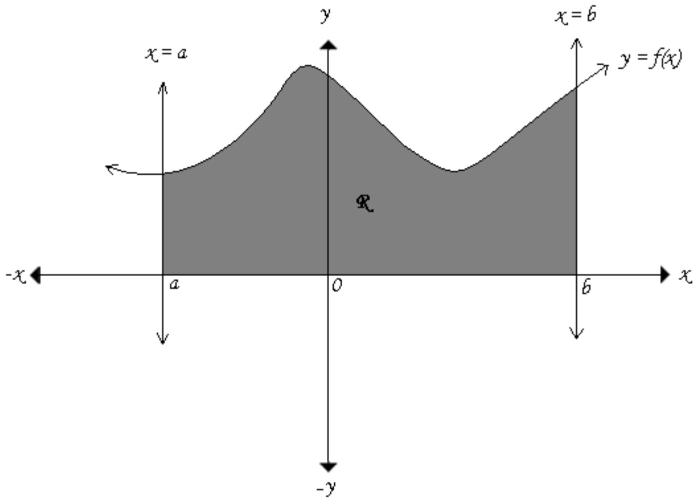
$= \frac{27}{4}$



ÁREA COMO INTEGRAL DEFINIDA

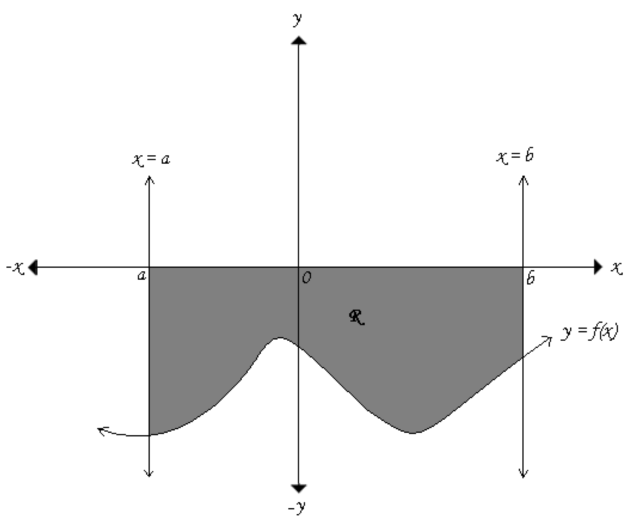
Caso Nº 1

Si f es función continua en el intervalo cerrado [a,b] tal que f(x) ≥ 0, $\forall x \in [a,b]$; el área de la región R limitada por la curva y = f(x), el eje X y las rectas x=a y x=b, está dado por la expresión
$A(R) = \int_a^b f(x)dx$



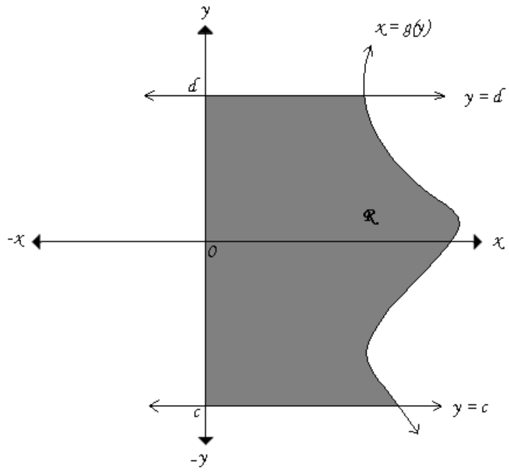
Nota:
Si f es función continua en el intervalo cerrado [a,b] tal que f(x) ≤ 0, $\forall x \in [a,b]$; el área de la región R limitada por la curva y = f(x), el eje X y las rectas x=a y x=b, está dado por la expresión

$$A(R) = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$



Si la región R es limitada por la curva x = g(y) y las retas y = c, y =d, entonces el área de la región R es expresado por:

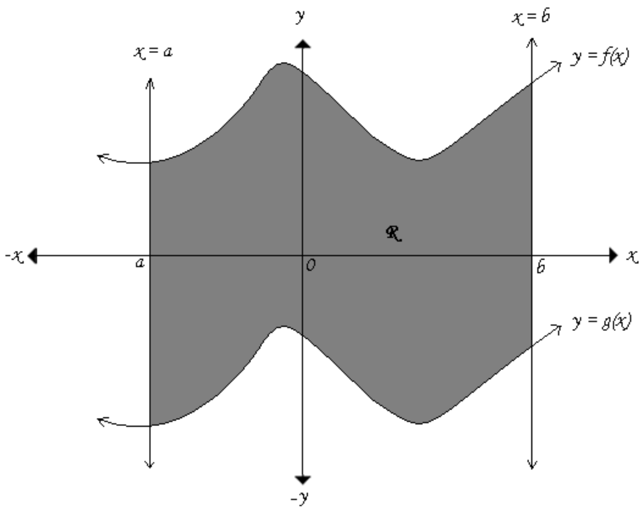
$$A(R) = \int_c^d g(y)dy$$



Caso Nº 2

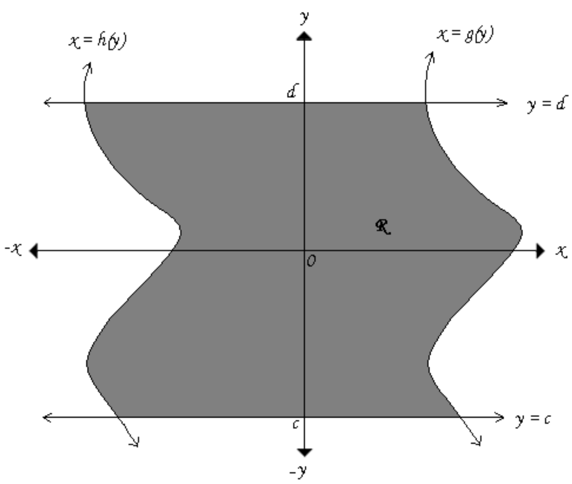
Si f y g son funciones continuas en el intervalo cerrado [a,b] tal que f(x) ≥ g(x), ∀x ∈[a,b]; el área de la región R limitada por las curvas y = f(x), y =g(x) y las rectas x=a y x=b, está dado por la expresión

$$A(R) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Nota: Si g y h son funciones continuas en el intervalo cerrado [a,b] tal que g(y) ≥ h(y),∀y ∈[a,b]; el área de la región R limitada por las curvas x = g(y) y x =h(y) y las rectas y=c , y=d, está dado por la expresión

$$A(R) = \int_c^d (g(y) - h(y))dy$$



Ejemplos ilustrativos

Calcular el área limitada por las siguientes funciones

1) $y = 3 - x^2$; $y = 1 - x$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

Se obtiene $x_1 = 2; x_2 = -1$

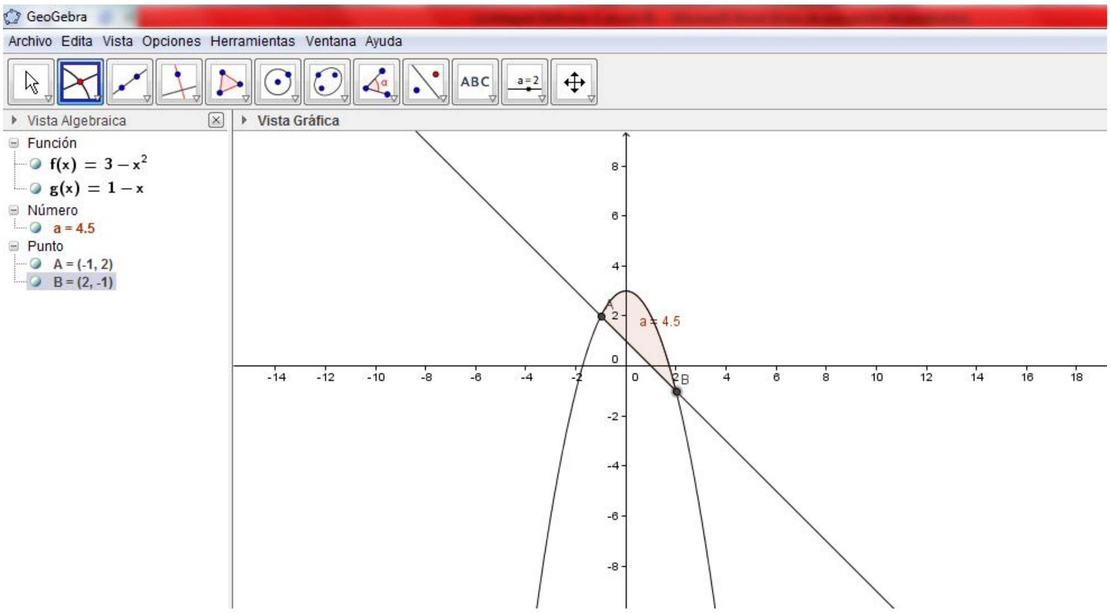
Aplicando

$$A(R) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

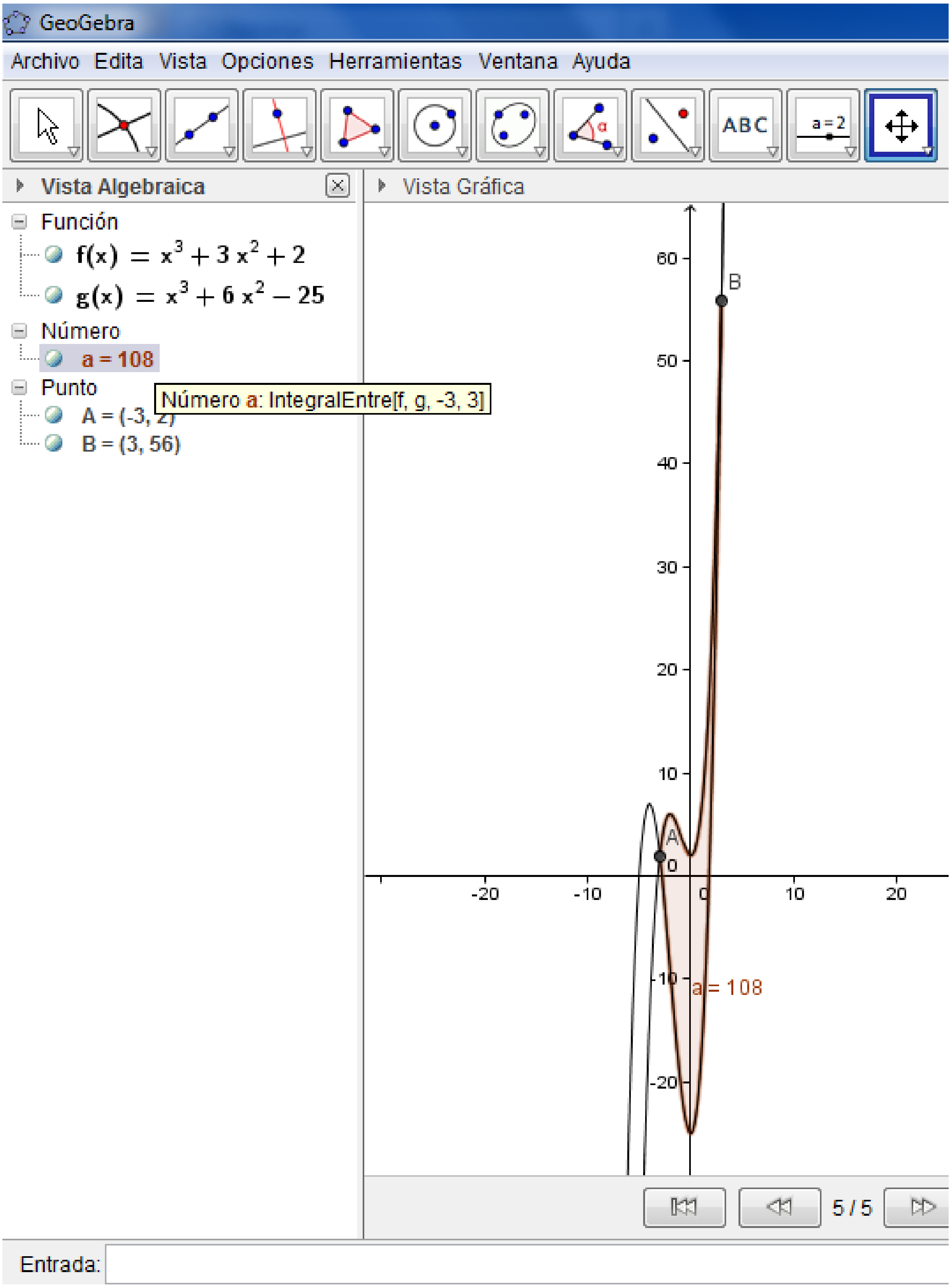
$$\int (3 - \ x^2) - (1 - x)dx = \int (3 - \ x^2 - 1 + x)dx = \int (x^2 - x - 2)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 2\right)_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{-1^3}{3} - \frac{-1^2}{2} - 2\right) = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2\right) = \left(\frac{8}{3} - 2 - 2\right) - \left(-2 - \frac{3}{6} - 12\right)$$

$$= \left(\frac{8-12}{3}\right) - \left(-\frac{17}{6}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{17}{6} = \frac{9}{2}u^2$$



2) $y = x^3 + 3x^2 + 2; y = x^3 + 6x^2 - 25$

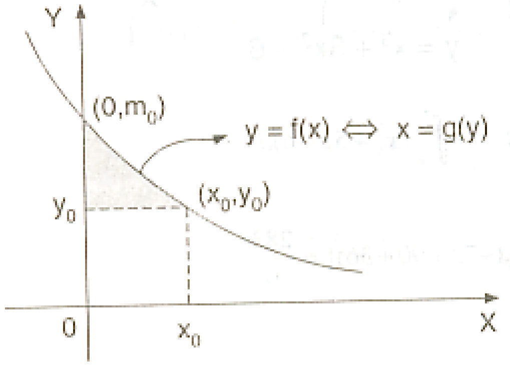


Aplicaciones en Administración y Economía

Excedente del consumidor

Es igual a $\int_0^{x_0} f(x)dx - x_0y_0$ donde $y = f(x)$ es la función demanda

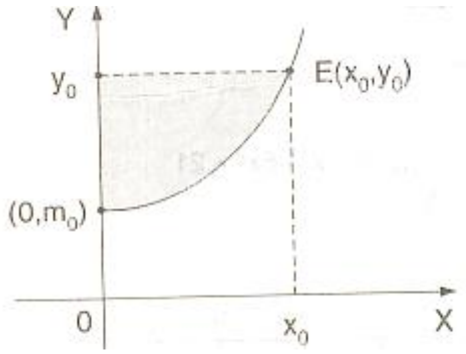
O también es igual a $\int_{y_0}^{m_0} g(y)dy$, donde $x = g(y)$ es la función de demanda



Excedente del Productor

Es igual a $x_0y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx$, donde $y = f(x)$ es la función de oferta

O también es igual a $x_0y_0 - \int_{y_0}^{m_0} g(y)dy$, donde donde $x = g(y)$ es la función de oferta



Ingreso frente a Costo

La utilidad máxima se determina igualando el ingreso marginal y el costo marginal y la ganancia total es la integral de la diferencia entre el ingreso marginal y el costo marginal desde cero hasta la cantidad para el cual la utilidad es máxima

Ejemplos ilustrativos

1) Si la función de demanda es $y = 39 - x^2$, hallar el excedente del consumidor si $x_0 = \frac{5}{2}$. Realizar la gráfica respectiva manualmente y empleando el programa Graph o cualquier otro programa.

$$y_0 = 39 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{131}{4}$$

Excedente del consumidor

$$\int_o^{\frac{5}{2}} (39 - x^2)dx - x_0y_0 = \left[39x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}\cdot\frac{131}{4} = \frac{2215}{24} - \frac{655}{8} = 10{,}41$$

2) Las funciones de demanda y oferta en un mercado de competencia pura o libre son respectivamente $y = 14 - x^2$ y $y = 2x^2 + 2$; determinar el excedente del consumidor y del producto

Calculando el punto de intersección entre las funciones se considera el punto (2,10)

Excedente del consumidor

$$\int_o^2 (14 - x^2)dx - x_0 y_0 = \left[14x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 2 \cdot 10 = 28 - \frac{8}{3} - 20 = \frac{16}{3}$$

Excedente del producto

$$x_0 y_0 - \int_o^2 (2x^2 + 2)dx = 2 \cdot 10 - \left[\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_0^2 = 20 - \left(\frac{16}{3} + 4\right) = \frac{32}{3}$$